

Du désordre à l'ordre :

Boucles de couplage et cycles de synchronisation dans le modèle de Kuramoto.

Fasciné par l'émergence spontanée de l'ordre dans les systèmes complexes, je souhaite comprendre comment des oscillateurs séparés se synchronisent. Ce sujet me permet de croiser l'analyse mathématique de la stabilité, la simulation numérique et l'observation expérimentale d'un phénomène universel.

L'étude analyse la synchronisation de **cycles** individuels initialement désordonnés. Ce phénomène d'auto-organisation repose sur l'existence d'une **boucle** de rétroaction (le couplage) qui contraint les phases à se verrouiller mutuellement vers un rythme commun.

Positionnement thématique :

- *Physique (Physique Ondulatoire)*
- *Mathématiques (Analyse)*
- *Informatique (Informatique Pratique)*

Mots-clés :

Mots-clés (en français)	Mots-clés (en anglais)
Synchronisation	Synchronization
Modèle de Kuramoto	Kuramoto model
Cycle limite	Limit cycle
Boucle de rétroaction	Feedback loop
Oscillateurs couplés	Coupled oscillators

Bibliographie commentée

La synchronisation spontanée joue un rôle fondamental dans la physique des systèmes complexes. L'émergence de l'ordre collectif en dépend directement puisque ce phénomène constitue une des manifestations les plus spectaculaires de l'auto-organisation dans la nature,

telle que formalisée par **Kuramoto** [1]. Des approches diverses et variées ont été adoptées par les physiciens au cours du temps pour modéliser comment une population désordonnée adopte un rythme unique. Si les premières études se limitaient à quelques oscillateurs, très rapidement est apparu le besoin de construire des modèles statistiques capables de décrire des populations infinies [2].

Avant de réaliser une synchronisation, on a besoin d'unités élémentaires dont il sera question d'analyser le couplage. C'est une étape qui précède l'étude collective et qui constitue la modélisation de l'oscillateur individuel, c'est-à-dire la définition de sa dynamique de phase, donnée entre autres dans notre étude par l'équation du cycle limite. Les informations déduites de ce modèle nous permettent par la suite d'aborder, selon la méthode utilisée, l'interaction globale au sens de **Kuramoto** et donc la transition vers la cohérence [4].

Étant donné que la résolution analytique est destinée à être confrontée à la simulation sur machine, il est nécessaire pour étudier la dynamique, de la discrétiser. Pour cela, il est possible d'approximer les équations différentielles continues du modèle par un schéma d'intégration numérique, plus ou moins complexe, selon la précision temporelle souhaitée [3].

Le modèle numérique étant alors à disposition, nous passons à l'étape de la confrontation avec la réalité physique. En effet, l'expérience étudiée consiste à traduire concrètement les équations mathématiques en un circuit électronique, et d'observer les signaux sur oscilloscope. Lorsqu'on s'intéresse à la théorie derrière ce circuit, on voit qu'il s'agit de connecter des oscillateurs à pont de Wien, et par conséquent intervient l'analyse des circuits non-linéaires. Plus précisément, il est question d'appliquer les bonnes contraintes au montage pour se ramener aux hypothèses du modèle théorique de **Kuramoto** [2].

Connaissant le comportement théorique et simulé, nous pouvons analyser les résultats expérimentaux en explicitant la liaison entre le couplage critique et la dispersion des composants. Pour cela, il est nécessaire de pousser le modèle de base en définissant les imperfections du circuit qui sont une structure qui modifie la relation de phase. On découvre ainsi un problème ; on obtient effectivement une synchronisation, cela dit, en se limitant au modèle idéal, on remarque que certains déphasages observés ne sont pas expliqués : c'est ce que traite l'analyse des effets de retards et du bruit dans les systèmes réels [4].

Problématique retenue

Quelles sont les limites du modèle de Kuramoto pour décrire l'auto-organisation d'un système physique réel composé d'un nombre restreint d'oscillateurs non-linéaires ?

Objectifs du TIPE du candidat

-Étudier le modèle théorique de Kuramoto et ses limites face à la réalité physique.

- Simuler numériquement l'évolution du paramètre d'ordre en fonction de l'intensité du couplage.
- Réaliser un réseau d'oscillateurs électroniques non-linéaires interagissant via un couplage résistif.
- Déterminer expérimentalement le diagramme de bifurcation et le seuil critique de synchronisation.

Références bibliographiques:

[1] **Y. Kuramoto**, *Self-entrainment of a population of coupled non-linear oscillators*, International Symposium on Mathematical Problems in Theoretical Physics, Lecture Notes in Physics, Vol. 39, pp. 420-422, Springer, 1975.

[2] **S. H. Strogatz**, *From Kuramoto to Crawford: exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators*, Physica D: Nonlinear Phenomena, Vol. 143, pp. 1-20, 2000.

[3] **L. Q. English, S.-G. Kim, and D. Mertens**, *Emergence and analysis of Kuramoto-Sakaguchi-like models as an effective description for the dynamics of coupled Wien-bridge oscillators*, Physical Review E, Vol. 94, 062212, 2016. URL : <https://journals.aps.org/pre/abstract/10.1103/PhysRevE.94.062212>

[4] **B. C. Daniels**, *Synchronization of Globally Coupled Nonlinear Oscillators: the Rich Behavior of the Kuramoto Model*, Thesis, Ohio Wesleyan University, Physics Department, 2005. URL :

https://www.researchgate.net/profile/Bryan-Daniels-3/publication/251888882_Synchronization_of_Globally_Coupled_Nonlinear_Oscillators_the_Rich_Behavior_of_the_Kuramoto_Model/links/55e2722b08aecb1a7cc83a5b/Synchronization-of-Globally-Coupled-Nonlinear-Oscillators-the-Rich-Behavio