

# Du désordre à l'ordre : Boucles de couplage et cycles de synchronisation dans le modèle de Kuramoto

Le besoin de comprendre l'émergence spontanée de l'ordre dans les systèmes complexes est l'un des enjeux majeurs de la physique contemporaine. Comment des oscillateurs initialement désordonnés parviennent-ils à se synchroniser sans chef d'orchestre ? Ce phénomène universel illustre un mécanisme d'auto-organisation que l'on retrouve dans la nature, du battement collectif des cœurs de cellules cardiaques à la coordination de systèmes électroniques.

Dans l'objectif de saisir cette transition du désordre vers l'ordre collectif tout en bénéficiant des outils de la physique théorique, de la simulation numérique et de l'expérimentation, cette étude s'inscrit dans la thématique de cette année en analysant la synchronisation d'oscillateurs couplés à travers le modèle de Kuramoto, véritable paradigme de la théorie des systèmes dynamiques complexes.

## Positionnement thématique (ÉTAPE 1) :

- PHYSIQUE (Physique Ondulatoire)
- MATHEMATIQUES (Analyse)
- INFORMATIQUE (Informatique pratique)

## Mots-clés (ÉTAPE 1) :

| Mots-clés (en français) | Mots-clés (en anglais) |
|-------------------------|------------------------|
| Synchronisation         | Synchronization        |
| Modèle de Kuramoto      | Kuramoto model         |
| Cycle limite            | Limit cycle            |
| Boucle de rétroaction   | Feedback loop          |
| Oscillateurs couplés    | Coupled oscillators    |

## Bibliographie commentée

L'impérieuse nécessité de décrire l'émergence de comportements collectifs dans les systèmes complexes a conduit les physiciens à développer des modèles mathématiques robustes. Parmi ceux-ci, le modèle de Kuramoto occupe une place centrale dans l'étude de la synchronisation spontanée, phénomène par lequel une population d'oscillateurs initialement désordonnés adopte un rythme commun[1].

Dans ce contexte, la présente étude porte sur la synchronisation de cycles limite individuels. Ce choix spécifique s'explique par l'importance du couplage comme mécanisme de rétroaction : en effet, la transition vers la cohérence collective repose sur l'interaction mutuelle entre

oscillateurs. C'est pourquoi il est primordial de modéliser précisément la dynamique de phase individuelle avant d'aborder le comportement global, ce qui implique l'utilisation d'outils d'analyse mathématique, de simulation numérique et de validation expérimentale afin de résoudre cette problématique.

La synchronisation spontanée est un phénomène universel étudié en physique des systèmes complexes. Yoshiki Kuramoto a formalisé ce comportement par un modèle minimal qui capture la transition entre désordre et ordre collectif[1]. Des approches statistiques ont ensuite été développées pour traiter des populations infinies d'oscillateurs, permettant de prédire le seuil critique de synchronisation en fonction de l'intensité du couplage et de la dispersion des fréquences naturelles[2].

Avant d'étudier la synchronisation collective, il est nécessaire de caractériser l'oscillateur individuel. Cette étape préalable constitue la modélisation du cycle limite, c'est-à-dire la définition de sa dynamique de phase. Les informations déduites de ce modèle permettent par la suite d'aborder l'interaction globale au sens de Kuramoto et donc la transition vers la cohérence[4].

Étant donné que la résolution analytique du modèle de Kuramoto est destinée à être confrontée à la simulation numérique, il est nécessaire de discrétiser les équations différentielles continues. Pour cela, on utilise des schémas d'intégration numérique (Euler, Runge-Kutta) dont la précision temporelle doit être adaptée à la dynamique étudiée[3].

Le modèle numérique étant alors à disposition, nous passons à l'étape de la confrontation avec la réalité physique. En effet, l'expérience consiste à traduire concrètement les équations mathématiques en un circuit électronique composé d'oscillateurs à pont de Wien couplés de manière résistive, et à observer les signaux sur oscilloscope. L'analyse des circuits non linéaires intervient ici pour s'assurer que le montage expérimental respecte bien les hypothèses du modèle théorique de Kuramoto[2].

Connaissant le comportement théorique et simulé, nous pouvons analyser les résultats expérimentaux en explicitant la liaison entre le couplage critique et la dispersion des composants. Pour cela, il est nécessaire d'enrichir le modèle de base en définissant les imperfections du circuit réel qui modifient la relation de phase. On découvre ainsi un problème : on obtient effectivement une synchronisation, cependant certains déphasages observés ne sont pas expliqués par le modèle idéal. C'est ce que traite l'analyse des effets de retards et du bruit dans les systèmes réels[4].

Notre présentation se décompose en trois parties. La première partie est consacrée à l'étude théorique du modèle de Kuramoto : équation de phase, paramètre d'ordre, transition de phase. La seconde partie traite de la simulation numérique de l'évolution du paramètre d'ordre en fonction de l'intensité du couplage, ainsi que du diagramme de bifurcation. Dans la dernière partie, nous présentons la réalisation expérimentale d'un réseau d'oscillateurs électroniques à pont de Wien et la mesure du seuil critique de synchronisation, avec discussion des écarts entre théorie, simulation et expérience.

## **Problématique retenue**

Comment le modèle de Kuramoto décrit-il la transition du désordre vers la synchronisation collective dans un système physique réel composé d'un nombre restreint d'oscillateurs non linéaires, et quelles sont ses limites face aux imperfections expérimentales ?

## **Objectifs du TIPE du candidat**

1. Étudier la structure mathématique du modèle de Kuramoto et comprendre la notion de paramètre d'ordre.

2. Simuler numériquement l'évolution du paramètre d'ordre en fonction de l'intensité du couplage et déterminer le seuil critique théorique.
3. Modéliser l'oscillateur à pont de Wien comme cycle limite et analyser sa dynamique de phase.
4. Réaliser un réseau d'oscillateurs électroniques non linéaires couplés de manière résistive.
5. Déterminer expérimentalement le diagramme de bifurcation et comparer le seuil critique mesuré avec les prédictions théoriques et simulées.

## Références bibliographiques (ÉTAPE 1)

[1] Y. Kuramoto, *Self-entrainment of a population of coupled non-linear oscillators*, International Symposium on Mathematical Problems in Theoretical Physics, Lecture Notes in Physics, Vol. 39, pp. 420-422, Springer, 1975.

[2] S. H. Strogatz, *From Kuramoto to Crawford: exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators*, Physica D: Nonlinear Phenomena, Vol. 143, pp. 1-20, 2000.

[3] L. Q. English, S.-G. Kim, and D. Mertens, *Emergence and analysis of Kuramoto-Sakaguchi-like models as an effective description for the dynamics of coupled Wien-bridge oscillators*, Physical Review E, Vol. 94, 062212, 2016.

<https://journals.aps.org/pre/abstract/10.1103/PhysRevE.94.062212>

[4] B. C. Daniels, *Synchronization of Globally Coupled Nonlinear Oscillators: the Rich Behavior of the Kuramoto Model*, Thesis, Ohio Wesleyan University, Physics Department, 2005. <https://www.researchgate.net/profile/Bryan-Daniels-3/publication/251888882>