Mécanique

MECA2 - Dynamique

Résumé

Programme PSI/MP 2022 (LIEN)		
Id	Compétence développée	Connaissances associées
B2-10	Déterminer les caractéristiques d'un solide ou d'un ensemble de solides indéformables.	Solide indéformable : – définition ; – repère ; – équivalence solide/repère ; – volume et masse ; – centre d'inertie ; – matrice d'inertie.
C1-05	Proposer une démarche permettant la détermination d’une action mécanique inconnue ou d'une loi de mouvement.	Graphe de structure. Choix des isolements. Choix des équations à écrire pour appliquer le principe fondamental de la statique ou le principe fondamental de la dynamique dans un référentiel galiléen. Théorème de l'énergie cinétique.
C2-08	Déterminer les actions mécaniques en dynamique dans le cas où le mouvement est imposé.	Torseurs cinétique et dynamique d’un solide ou d’un ensemble de solides, par rapport à un référentiel galiléen. Principe fondamental de la dynamique en référentiel galiléen. Énergie cinétique. Inertie et masse équivalentes. Puissance d'une action mécanique extérieure à un solide ou à un ensemble de solides, dans son mouvement par rapport au repère galiléen. Puissance intérieure à un ensemble de solides. Théorème de l'énergie cinétique. Rendement en régime permanent.
C2-09	Déterminer la loi de mouvement dans le cas où les efforts extérieurs sont connus.	

Caractéristiques des solides

Masse

$$M(E) = \int_E dm = \int_E \rho(M) dV$$

Centre de gravité ou d'inertie d'un solide

Méthode Intégrale

$$\int_E \overrightarrow{GM} dm = \vec{0}$$

$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m}\int_E \overrightarrow{OM}\, dm$		
$X_G = \frac{1}{m}\int_E x dm$	$Y_G = \frac{1}{m}\int_E y dm$	$Z_G = \frac{1}{m}\int_E z dm$

Si $\rho = cst$:
Remplacer m par V et dm par dV
G est sur les éléments de symétrie volumique

Méthode sous-volumes

$$E = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n$$

$$E_i \cap E_j = \emptyset \; \forall i \neq j$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{m_1\overrightarrow{OG_1} + m_2\overrightarrow{OG_2} + \cdots + m_n\overrightarrow{OG_n}}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}$$

Masses négatives pour formes creuses

Moments d'inertie d'un solide

Moment d'inertie par rapport au point O

$$I_O = \int_S \overrightarrow{OM}^2 dm = \int_S (x^2 + y^2 + z^2) dm$$

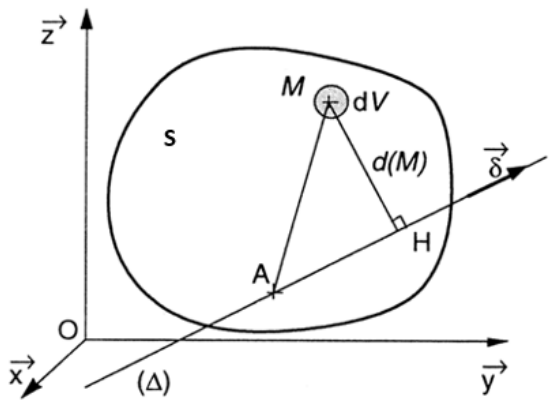
Moment d'inertie par rapport à l'axe Δ

$$I_\Delta = \int_S d(M)^2 dm$$

Théorème de Huygens :

$$I_\Delta(S) = I_{\Delta_G}(S) + m(S) d^2$$

$$\Rightarrow I_\Delta(S) \geq I_{\Delta_G}(S)$$



Moments d'inertie par rapport aux axes du repère

$I_{O_x} = \int_S (y^2 + z^2) dm$	$I_{O_y} = \int_S (x^2 + z^2) dm$	$I_{O_z} = \int_S (x^2 + y^2) dm$

Opérateur d'inertie d'un solide

$$I(A,S)\vec{u}=\int_S \overrightarrow{AM}\wedge(\vec{u}\wedge\overrightarrow{AM})dm$$

Soit $\mathfrak{B}_S$ une base $(\overrightarrow{x_S},\overrightarrow{y_S},\overrightarrow{z_S})$ liée au solide S étudié et A l'origine du repère

$$I(A,S)=\begin{bmatrix}\int_S (y^2+z^2)dm & -\int_S xydm & -\int_S xzdm \\ -\int_S xydm & \int_S (x^2+z^2)dm & -\int_S yzdm \\ -\int_S xzdm & -\int_S yzdm & \int_S (x^2+y^2)dm\end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}=\begin{bmatrix}A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C\end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}$$

Parfois notée $\begin{bmatrix}I_A^{xx} & I_A^{xy} & I_A^{xz} \\ I_A^{xy} & I_A^{yy} & I_A^{yz} \\ I_A^{xz} & I_A^{yz} & I_A^{zz}\end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}$

Théorème de Huygens généralisé

$$\overrightarrow{AG}=a\overrightarrow{x_S}+b\overrightarrow{y_S}+c\overrightarrow{z_S}=\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_S}$$

$$I(A,S)=I(G,S)+m\begin{bmatrix}b^2+c^2 & -ab & -ac \\ -ab & a^2+c^2 & -bc \\ -ac & -bc & a^2+b^2\end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}$$

On voit 3 théorèmes de Huygens pour le déplacement des moments d'inertie autour des axes $(A,\overrightarrow{x_S})$, $(A,\overrightarrow{y_S})$ et $(A,\overrightarrow{z_S})$

$$I_A^x=I_G^x+m(b^2+c^2)=I_G^x+md_x^2$$
$$I_A^y=I_G^y+m(a^2+c^2)=I_G^y+md_y^2$$
$$I_A^z=I_G^z+m(a^2+b^2)=I_G^z+md_z^2$$

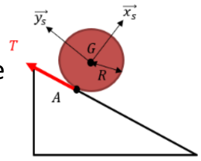
$$\overrightarrow{OG}=\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S} ;\overrightarrow{O'G}=\begin{bmatrix}a'\\b'\\c'\end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S} ;A=\begin{bmatrix}b^2+c^2 & -ab & -ac \\ -ab & a^2+c^2 & -bc \\ -ac & -bc & a^2+b^2\end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S} ;A'=\begin{bmatrix}b'^2+c'^2 & -a'b' & -a'c' \\ -a'b' & a'^2+c'^2 & -b'c' \\ -a'c' & -b'c' & a'^2+b'^2\end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}$$

$I(O',S)=I(O,S)+m(A'-A)$ – Nécessité de connaître G pour avoir A et A'

Représentation physique des termes de $I(A,S)$

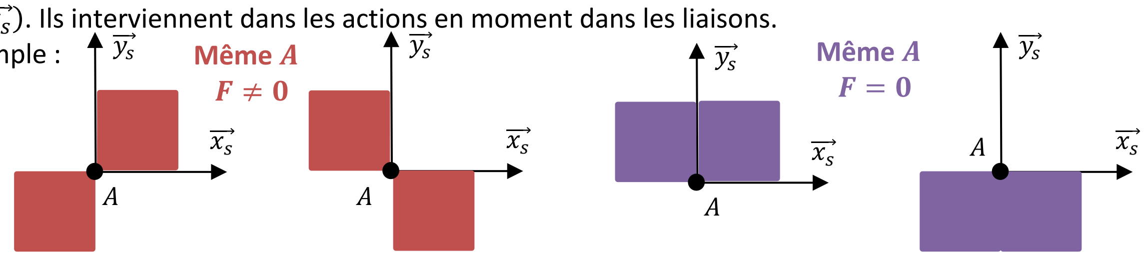
Termes diagonaux : Ils représentent la « masse » (quantité et distance) à mettre en rotation pour tourner l'objet autour des 3 axes $(A,\overrightarrow{x_S})$, $(A,\overrightarrow{y_S})$ et $(A,\overrightarrow{z_S})$, soit l'inertie autour de ces 3 axes. Ils interviennent dans les équations différentielles du mouvement en rotation.

Soit un cylindre (rayon R, matrice $I(G,S)=\begin{bmatrix}A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C\end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}$), roulant autour de $(A,\overrightarrow{z_S})$ soumis à la gravité et à la force tangentielle T au contact en A. On a : $C\ddot{\theta}=-RT$

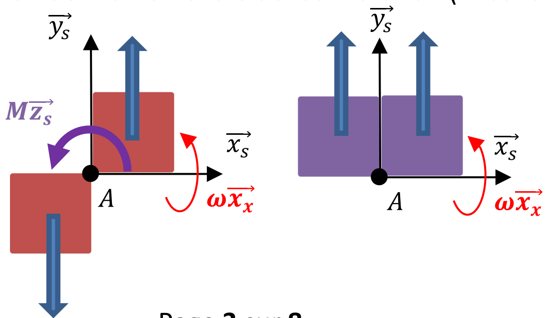


Termes hors diagonaux : Ils représentent la répartition des masses autour des axes $(A,\overrightarrow{x_S})$, $(A,\overrightarrow{y_S})$ et $(A,\overrightarrow{z_S})$. Ils interviennent dans les actions en moment dans les liaisons.

Exemple :



Ils sont à l'origine de l'apparition de moments lors de leur rotation (ω constante ou non) :



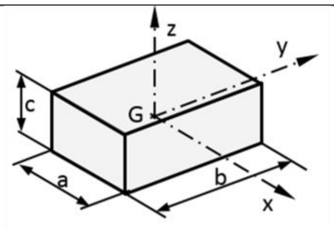
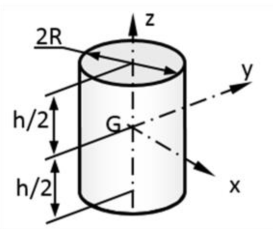
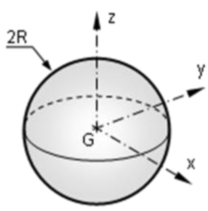
Ex. Rotation $(A,\overrightarrow{x_S})$: E et F (ligne colonne x) sont **chacun** générateurs de moments sur $(A,\overrightarrow{y_S})$ et $(A,\overrightarrow{z_S})$ - cf. équilibrage

Symétries et forme de la matrice d'inertie – O sur l'élément de symétrie

<table>
<tr><td>$(O,\overrightarrow{x_S},\overrightarrow{y_S})$
Plan de symétrie
de normale $\overrightarrow{z_S}$</td><td>Deux plans de symétrie parmi
$(O,\overrightarrow{x_S},\overrightarrow{y_S})(O,\overrightarrow{x_S},\overrightarrow{z_S})\ (O,\overrightarrow{y_S},\overrightarrow{z_S})$</td><td>Axe de révolution
$(O,\overrightarrow{z_S})$</td></tr>
<tr><td>$I(O,S)=\begin{bmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}$</td><td>$I(O,S)=\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}$</td><td rowspan="3">$I(O,S)$
$=\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}$
$A=\frac{C}{2}+\int_S z^2 dm$
$\forall \mathfrak{B}(\_,\_,\overrightarrow{z_S})$</td></tr>
<tr><td>Solide sphérique de centre O</td><td>Problème plan $(O,\overrightarrow{x_S},\overrightarrow{y_S}) : z=0$</td></tr>
<tr><td>$I(O,S)=\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}$
$A=\frac{2}{3}I_O\ (autour\ de\ O)$
$\forall \mathfrak{B}_S$</td><td>$I(O,S)=\begin{bmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & A+B \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}$</td></tr>
</table>

Attention : on ne parle que de forme, les termes peuvent changer d'un point à l'autre

Matrices d'inertie usuelles à savoir retrouver

<table>
<tr><td></td><td>$$I(G,S)=\begin{bmatrix} \frac{m}{12}(b^2+c^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{12}(a^2+c^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{12}(a^2+b^2) \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}$$</td></tr>
<tr><td></td><td>$$I(G,S)=\begin{bmatrix} m\left(\frac{R^2}{4}+\frac{h^2}{12}\right) & 0 & 0 \\ 0 & m\left(\frac{R^2}{4}+\frac{h^2}{12}\right) & 0 \\ 0 & 0 & m\frac{R^2}{2} \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}$$
Matrice inchangée dans toute base contenant l'axe de révolution</td></tr>
<tr><td></td><td>$$I(G,S)=\begin{bmatrix} \frac{2}{5}mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5}mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5}mR^2 \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}$$</td></tr>
<tr><td>Masse ponctuelle S_i en M_i
$\overrightarrow{OM_i}=\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_S}$</td><td>$$I(M_i,S_i)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}$$
$$I(O,S_i)=m_i\begin{bmatrix} {y_i}^2+{z_i}^2 & -x_i y_i & -x_i z_i \\ -x_i y_i & {x_i}^2+{z_i}^2 & -y_i z_i \\ -x_i z_i & -y_i z_i & {x_i}^2+{y_i}^2 \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}$$</td></tr>
</table>

Matrice d'inertie d'un ensemble de solides en un même point

$$I(A,S)=\sum_{i=1}^{N} I(A,S_i)=\sum_{i=1}^{N}\left[I(G_i,S_i)+m_i\begin{bmatrix} {y_i}^2+{z_i}^2 & -x_iy_i & -x_iz_i \\ -x_iy_i & {x_i}^2+{z_i}^2 & -y_iz_i \\ -x_iz_i & -y_iz_i & {x_i}^2+{y_i}^2 \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}\right] \quad ; \quad \overrightarrow{AG_i}=\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_S}$$

Linéarité de l'intégrale

Masses négatives pour formes creuses

Définition

$$I(O,S)=\begin{bmatrix} A^* & 0 & 0 \\ 0 & B & -D \\ 0 & -D & C \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S}$$

$(O,\overrightarrow{x_S})$ est l'un (des 3) axe(s) principaux d'inertie de ce solide en O

A^* valeur propre, $\overrightarrow{x_S}$ vecteur propre

En tout point du solide, il existe 3 axes principaux d'inertie associés aux vecteurs propres

Opérations

Moment d'inertie par rapport à l'axe (A,Δ)

$$I_\Delta(S)=\vec{\delta}.I(A,S)\vec{\delta} \quad ; \quad \|\vec{\delta}\|=1$$

$\vec{\delta}$ et $I(A,S)$ exprimés dans la même base

Moment d'inertie par rapport au point A avec $I(A,S)=$

$$\begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S} : I_A=\frac{\operatorname{Tr} I(A,S)}{2}=\frac{A+B+C}{2}$$

Moment d'inertie autour d'un axe $(A,\overrightarrow{x_S})$ avec $I(G,S)=$

$$\begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{\mathfrak{B}_S} : I_{(A,\overrightarrow{x_S})}=I_A^{xx}=A+md^2$$ avec d distance entre $(A,\overrightarrow{x_S})$ et $(G,\overrightarrow{x_S})$

Changement de base

$$I(O,S)_{B_2}=P^{-1}I(O,S)_{B_1}P$$

$P^{-1}=P^T \quad ; \quad P$ matrice de passage de B_1 à B_2

Moment d'inertie d'une masse ponctuelle m_i en M autour de l'axe $\Delta=(O,\vec{z})$

$$d=\sqrt{{x_i}^2+{y_i}^2}\ (distance\ de\ M\ à\ l'axe)$$

$$I_\Delta=m_i\,d^2$$

Conditions d'équilibrage dynamique

Solide équilibré ? Actions dans les liaisons indépendantes de θ, $\dot{\theta}$, $\ddot{\theta}$ et t

Le solide S de centre de gravité G est équilibré en rotation autour de $(O,\overrightarrow{x_S})$ si :

1 : $G\in(O,x_S)$: Pas de force centrifuge, tournante

2 : $(O,\overrightarrow{x_S})$ est un axe principal d'inertie de S $(E=F=0)$ en tout point O sur l'axe : Pas de moments variables dans les liaisons

Remarque : La condition 1 est nécessaire à la condition 2.

Dès que la condition 1 est vérifiée, si la condition 2 est vérifiée en un point de l'axe, elle est vraie sur tout l'axe

Cinétique - Dynamique

Cinétique

$$\{\mathcal{C}(S/R_0)\}$$

$$\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_c}(S/R_0) = \int_E \vec{V}(M,S/R_0)dm \\ \vec{\sigma}(A,S/R_0) = \int_E \overrightarrow{AM}\wedge\vec{V}(M,S/R_0)dm \end{Bmatrix}_A$$

$$\forall(A,B), \vec{\sigma}(A,S/R_0) = \vec{\sigma}(B,S/R_0) + \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{R_c}(S/R_0)$$

$$\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_c}(S/R_0) = M\vec{V}(G,S/R_0) \\ \vec{\sigma}(A,S/R_0) = I(A,S)\vec{\Omega}(S/R_0) + M\overrightarrow{AG}\wedge\vec{V}(A,S/R_0) \end{Bmatrix}_A$$

$$\{\mathcal{C}(E/R_0)\} = \sum_{i=1}^{N}\{\mathcal{C}(S_i/R_0)\}$$

Dynamique

$$\{\mathcal{D}(S/R_0)\}$$

$$\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_d}(S/R_0) = \int_E \vec{\Gamma}(M,S/R_0)dm \\ \vec{\delta}(A,S/R_0) = \int_E \overrightarrow{AM}\wedge\vec{\Gamma}(M,S/R_0)dm \end{Bmatrix}_A$$

$$\forall(A,B), \vec{\delta}(A,E/R_0) = \vec{\delta}(B,S/R_0) + \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{R_d}(S/R_0)$$

$$\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_d}(S/R_0) = M\vec{\Gamma}(G,S/R_0) \\ \vec{\delta}(A,S/R_0) = \left.\frac{d\vec{\sigma}(A,S/R_0)}{dt}\right)_{R_0} + M\vec{V}(A,S/R_0)\wedge\vec{V}(G,S/R_0) \end{Bmatrix}_A$$

$$\{\mathcal{D}(E/R_0)\} = \sum_{i=1}^{N}\{\mathcal{D}(S_i/R_0)\}$$

Principe Fondamental de la Dynamique PFD

PFD
$$\{\mathcal{D}(E/R_g)\} = \{\mathcal{T}(\bar{E}\rightarrow E)\}$$

Théorème de la résultante dynamique TRD : $M\vec{\Gamma}(G,E/R_g) = \vec{R}_{\bar{E}\rightarrow E}$

Théorème du moment dynamique TMD : $\vec{\delta}(A,E/R_g) = \overrightarrow{M_{A\bar{E}\rightarrow E}}$

6 équations par isolement
- Actions de liaisons de travail nul
- Equations différentielles du mouvement + action exerçant un travail

Cas particuliers d'un solide indéformable en …

$\vec{t}$ dans une direction fixe $\vec{u}$
$TRD\ sur\ \vec{u}: F = ma$

$\vec{r}$ autour d'un axe $(A,\vec{u})$ de direction $\vec{u}$ fixe d'inertie J autour de $(A,\vec{u})$
$TMD\ sur\ (A,\vec{u}) :\ C = J\ddot{\theta}$

Remarques

PFD comparable à PFS
Autant d'équations – Mêmes isolements

Théorème des actions réciproques
$\{\mathcal{T}(E_2\rightarrow E_1)\} = -\{\mathcal{T}(E_1\rightarrow E_2)\}$

Simplification du PFD en moment (TMD) sur un axe en G ou A fixe : $\sum \overrightarrow{M_{A,F_{\bar{S}\rightarrow S}}}.\vec{u} = \vec{\delta}(A,S/R_0).\vec{u}$

$$(uv)' = uv' + u'v \quad ; \quad u = \vec{\sigma}(G,S/R_0) \quad ; \quad v = \vec{u}$$

$$\boldsymbol{\vec{\delta}(G,S/R_0).\vec{u}} = \left.\frac{d\vec{\sigma}(G,S/R_0)}{dt}\right)_{R_0}.\vec{u} = \frac{d\vec{\sigma}(G,S/R_0).\vec{u}}{dt} - \vec{\sigma}(G,S/R_0).\left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_{R_0} \text{ avec } \left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_{R_0} = \vec{0} \text{ si axe fixe}$$

Masse ponctuelle en G : $\vec{\sigma}(G,S/R_0) = \vec{\delta}(G,S/R_0) = \vec{0}$
Négliger les masses : $\overrightarrow{R_c} = \overrightarrow{R_d} = \vec{0}$ - $I(M,S)$ cst - $\vec{\sigma}$ et $\vec{\delta}$ simplifiées
Négliger les inerties : $I(G,S)$ = matrice nulle
Négliger les deux : $\{\mathcal{C}(S/R_0)\} = \{\mathcal{D}(S/R_0)\} = \{0\}$

Imposer un mouvement dans une liaison revient à imposer une action mécanique inconnue. On ne peut imposer effort et mouvement en même temps

Energie - Puissance

Energie cinétique

$$T(S/R_0) = \frac{1}{2}\int_E \vec{V}^2(M,S/R_0)\,dm$$

$$T(S/R_0) = \frac{1}{2}M\vec{V}^2(G,S/R_0) + \frac{1}{2}\vec{\Omega}(S/R_0).\left[I(G,S)\vec{\Omega}(S/R_0)\right]$$

$$T(S/R_0) = \frac{1}{2}M\vec{V}^2(G,S/R_0) + \frac{1}{2}\vec{\Omega}(S/R_0).\vec{\sigma}(G,S/R_0)$$

$$T(S/R_0) = \frac{1}{2}\{\mathcal{C}_{S/R_0}\}\odot\{\mathcal{V}_{S/R_0}\}\ \forall P$$

$$T(E/R_0) = \sum_{i=1}^{N} T(S_i/R_0)$$

Un comoment

$$\begin{Bmatrix}\overrightarrow{R_1}\\ \overrightarrow{M_1}\end{Bmatrix}_P \odot \begin{Bmatrix}\overrightarrow{R_2}\\ \overrightarrow{M_2}\end{Bmatrix}_P$$

$$\overrightarrow{R_1}.\overrightarrow{M_2} + \overrightarrow{R_2}.\overrightarrow{M_1}$$

Au même point !

Mouvements plans	
Translation de vitesse V	Rotation Ω d'axe fixe $(A,\vec{z})$ Distance de G à l'axe $(A,\vec{z})$: R
$T(S/R_0) = \frac{1}{2}MV^2$	$T(S/R_0) = \frac{1}{2}MR^2\Omega^2 + \frac{1}{2}I_{zz}^G\Omega^2$ $T(S/R_0) = \frac{1}{2}\Omega^2 I_{zz}^A$
Translation + Rotation : Somme des Ec des mvt indépendants	

Puissance

Puissance des actions extérieures

$$P(\bar{S} \to S/R_0) = \{\mathcal{T}_{\bar{S}\to S}\}\odot\{\mathcal{V}(S/R_0)\}\ \forall P$$

$$P(\bar{E} \to E/R_0) = \sum_{i=1}^{N} P(\bar{S} \to S_i/R_0)$$

$$\begin{Bmatrix}\vec{R}\\ \overrightarrow{M_A(\vec{R})}\end{Bmatrix}_A \odot \begin{Bmatrix}\vec{\Omega}(S/R_0)\\ \vec{V}(A,S/R_0)\end{Bmatrix}_A$$

$$\vec{R}.\vec{V}(A,S/R_0) + \overrightarrow{M_A(\vec{R})}.\vec{\Omega}(S/R_0)$$

Puissance d'inter efforts

$$P(S_i,S_j) = P(S_j,S_i) = \left\{\mathcal{T}_{S_i\to S_j}\right\}\odot\{\mathcal{V}(S_j/S_i)\}$$

$$P_i(E) = \sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N} P(S_i,S_j)$$

$$P(S_i,S_j) = P(S_i \to S_j/R_0) + P(S_j \to S_i/R_0)$$

Ce n'est pas parce que la liaison est parfaite que la puissance $S_i \to S_j$ ou $S_j \to S_i$ est nulle…

Liaison parfaite sans moteur : $P(S_i,S_j) = 0$

Sans mouvements relatifs : $P(S_i,S_j) = 0$

Théorème de l'Energie Cinétique TEC

Enoncé

$$\frac{dT(US_i/R_g)}{dt} = P_{ext} + P_{int}$$

On isole US_i

R_g : Référentiel Galiléen

$$P_{ext} = P(\overline{US_i} \to US_i/R_g)$$
$$P_{int} = P_i(US_i)$$

Utilité

Obtention des équations différentielles du mouvement en relation avec les actions exerçant un travail

C'est l'équivalent du résultat d'une stratégie d'isolement en statique, les effets dynamiques en plus, le tout en une seule fois

Hypothèses et conséquences

Liaisons parfaites

$$\Rightarrow P_{diss}^{liaisons} = P_{int}^{liaisons} + P_{ext}^{liaisons} = 0$$

$P_{diss}^{liaisons} = P_{int}^{liaisons} = 0$ si bâti isolé

Régime stationnaire

$$\Rightarrow \frac{dT(US_i/R_g)}{dt} = 0$$

Masses et inerties négligées

$$\Rightarrow T(S/R_0) = 0$$

Applications classiques

- Résolution de l'équation du mouvement (vitesse, position) en régime instationnaire en fonction des actions extérieures
- Détermination de la relation entrée/sortie en efforts en régime stationnaire connaissant la relation cinématique

Calcul d'inertie ou de masse équivalente : Exprimer T

Inertie équivalente ramenée à l'arbre d'entrée	Inertie équivalente ramenée à l'arbre de sortie	Masse équivalente
$T(US_i/R_0) = \frac{1}{2} J_{eq}{}^{e} {\omega_e}^2$	$T(US_i/R_0) = \frac{1}{2} J_{eq}{}^{s} {\omega_s}^2$	$T(US_i/R_0) = \frac{1}{2} M_{eq} V^2$

Puissance entrante = Puissance sortante ?

Considérons un système isolé auquel sont appliqués des actions mécaniques en entrée et en sortie

$$Régime\ stationnaire: \frac{dT\left(US_i/R_g\right)}{dt} = 0$$

$$Liaisons\ parfaites: P_{diss}^{liaisons} = P_{int}^{liaisons} + P_{ext}^{liaisons} = 0$$

$$\Rightarrow \quad P_{entrante} = P_{sortante}$$

Notion de rendement – N'a de sens qu'en régime stationnaire ! Dépend de la vitesse…

$$\eta = \frac{P_{sortante}}{P_{entrante}}$$

$$\eta = \frac{P_n}{P_1} = \frac{P_n}{P_{n-1}} \dots \frac{P_2}{P_1} = \prod_{i=1}^{n-1} \eta_i$$

$$P_{diss}^{liaisons} = -(1-\eta) P_{entrante}$$

Rq : $P_e + P_{diss}^{liaisons} = \eta P_e$

Donc : Pas de η dans un eq.dif.mvt

Cas d'un réducteur : $\frac{\omega_s}{\omega_e} = k$

C_e & C_s couples $\overline{E} \rightarrow E$

$$C_s = -\frac{\eta}{k} C_e$$

Relation en couples/efforts entrée sortie

Relation cinématique e/s : imposée par le mécanisme supposé indéformable -> ne peut évoluer
Relation F/C d'e/s : peut évoluer en fonction du rendement et des accélérations.
La relation issue du TEC doit conduire à l'obtention de la relation entre efforts/couples connaissant la relation cinématique entrée/sortie et non l'inverse, sauf cas particulier : régime stationnaire & rendement égal à 1.
Une manière simple d'obtenir la relation statique e/s d'un mécanisme est de déterminer la relation cinématique e/s et d'utiliser le TEC en liaisons parfaites et régime stationnaire.
Rq : Une résolution cinématique est plus simple qu'une résolution statique !

Choix du théorème

Objectifs des deux théorèmes
Obtenir des actions de liaisons
Obtenir des équations différentielles du mouvement liées aux actions entrée/sortie

PFD

Obtention de 6 équations par isolement
Equations donnant les actions à travail nul
Equations différentielles du mouvement sur la/les équation(s) de mobilité donnant les actions à travail non nul et les lois d'accélérations des pièces
On obtient toutes les actions du système, et donc la loi entrée/sortie en effort (souvent pas plusieurs équations)
Application lourde s'il y a beaucoup de solides
Difficultés d'applications s'il y a des pertes
Penser à ne déterminer que l'équation utile au problème (ex : Moment en P suivant $\vec{z}$)

TEC

Equations différentielles du mouvement sur la/les équation(s) de mobilité donnant les actions à travail non nul et les lois d'accélérations des pièces, en un calcul assez simple
On obtient en particulier la relation entrée/sortie en effort
Impossibilité de déterminer les actions à travail nul
Très adapté aux problèmes à 1 mobilité
Fonctionne très bien qu'il y ait peu ou beaucoup de solides