MP

Cinétique et Principe Fondamental de la Dynamique (PFD)

Cours

v01

CPGE - *Lycée IBN TIMIYA - MARRAKECH*

Yassine FARTOUH
Professeur agrégé en Sciences Industrielles de l'Ingénieur
Ingénierie Mécanique
-SII-IM-
fartouh.cpge@gmail.com
Année scolaire : 2022/2023

Table des matières

1 Objectifs

La dynamique permet la résolution de 2 types de problèmes :

- Les efforts sont connus... et on détermine les mouvements.
- On connaît les mouvements désirés... et on détermine les actions mécaniques engendrées.

On peut ainsi **dimensionner les actionneurs** (moteurs, vérins,...) ainsi que les **pièces** ou **systèmes de pièces** soumises à des accélérations ou décélérations (bielles, suspensions, structures,...).

2 Géométrie des masses

- Centre de masse : $\boxed{\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m}\int_V \overrightarrow{OM}.dm}$
- Barycentre : $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i\overrightarrow{OG_i}$

- Coordonnées cartésiennes : $dS = dxdy$
- Coordonnées polaires : $dS = rdrd\theta$
- Théorèmes de Guldin :
  - 1^{er}th. de Guldin : $S = 2\pi.L.r_g$
  - 2^{e}th. de Guldin : $V = 2\pi.S.r_g$

3 L'opérateur d'inertie

3.1 Définition

Nous avons vu au chapitre précédent que l'opérateur d'inertie était défini par :

$$\overrightarrow{u} \mapsto \bar{\bar{I}}_{(A,S)}.\overrightarrow{u} = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \left(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{AM}\right) dm$$

$\bar{\bar{I}}_{(A,S)}$ est linéaire et est donc représentable dans une base b par une matrice. On peut démontrer que cette matrice est symétrique ; on pose alors par définition :

$$\boxed{\bar{\bar{I}}_{(A,S)} = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_b}$$

L'opérateur d'inertie permet de synthétiser les caractéristiques d'un solide S. On peut voir cet opérateur comme une **description de la répartition des masses dans le solide**.

On peut calculer les différents termes de la matrice par les expressions suivantes, en posant :

$$\overrightarrow{AM} = x.\overrightarrow{x} + y.\overrightarrow{y} + z.\overrightarrow{z}$$

Moments d'inertie (kg.m^2)	**Produits d'inertie** (kg.m^2)
$A = \int_S (y^2+z^2)\,dm$	$D = \int_S yz\,dm$
$B = \int_S (x^2+z^2)\,dm$	$E = \int_S xz\,dm$
$C = \int_S (x^2+y^2)\,dm$	$F = \int_S xy\,dm$

Démonstration :

On a : $\bar{\bar{I}}_{(A,S)}.\overrightarrow{x} = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \left(\overrightarrow{x} \wedge \overrightarrow{AM}\right) dm$

$$\bar{\bar{I}}_{(A,S)}.\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ -F \\ -E \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AM} \wedge \left(\overrightarrow{x} \wedge \overrightarrow{AM}\right) = \begin{pmatrix} y^2+z^2 \\ -xy \\ -xz \end{pmatrix}$$

Par identification, on trouve alors :

$$A = \int_S (y^2+z^2)\, dm \qquad F = \int_S xy\, dm \qquad E = \int_S xz\, dm$$

3.2 Moment d'inertie par rapport à un axe

Le moment d'inertie I_Δ d'un solide S par rapport à un axe Δ est (avec Δ passant par O de direction $\overrightarrow{u}$) :

$$I_\Delta = \overrightarrow{u} \cdot \left(\bar{\bar{I}}_{(O,S)}.\overrightarrow{u}\right)$$

Attention

Le produit matriciel $\bar{\bar{I}}_{(O,S)}.\overrightarrow{u}$ n'a de sens que si $\bar{\bar{I}}_{(O,S)}$ et $\overrightarrow{u}$ sont exprimés **dans la même base** !

3.3 Base propre d'inertie

Pour tout solide, il existe une base principale d'inertie $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$, c'est-à-dire une base dans laquelle l'**opérateur d'inertie** en un point Q (point quelconque du solide S) est **diagonal**.

Si $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$ est une base principale d'inertie pour un solide S, les axes $(Q, \overrightarrow{x})$, $(Q, \overrightarrow{y})$ et $(Q, \overrightarrow{z})$ sont des axes principaux (ou axes propres) d'inertie.
La matrice d'inertie au point Q est sous la forme :

$$\boxed{\bar{\bar{I}}_{(Q,S)} = \begin{pmatrix} A_P & 0 & 0 \\ 0 & B_P & 0 \\ 0 & 0 & C_P \end{pmatrix}_{b_P}}$$

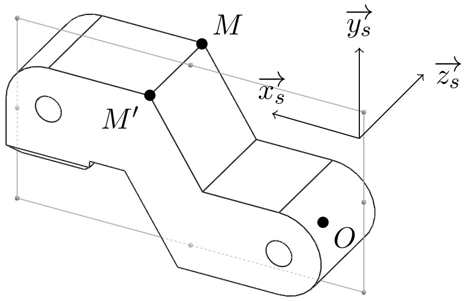
3.4 Propriétés

Le moment d'inertie par rapport à un axe est une **quantité positive** ou au pire considérée négligeable (pour des solides infiniment fins selon une direction).

Un moment d'inertie par rapport à un axe est **minimum** si cet axe passe **par le centre d'inertie du solide**. On ne peut par contre rien dire concernant les produits d'inertie par rapports à des plans.

Lorsque le solide possède un élément de symétrie, l'opérateur d'inertie peut se simplifier.

3.4.1 Un plan de symétrie



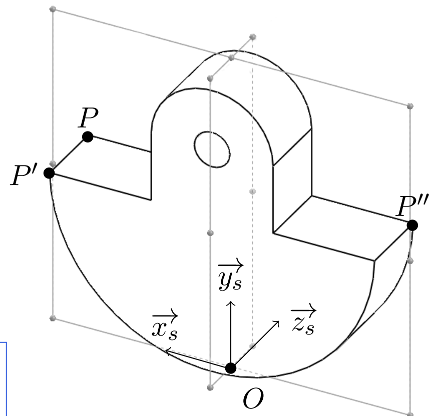
Si $(O, \overrightarrow{x_s}, \overrightarrow{y_s})$ est un plan de symétrie pour le solide, alors en associant deux à deux des points symétriques M et M' de coordonnées (x, y, z) et $(x, y, -z)$ pour calculer les produits d'inertie en O, on montre que :

$$\int_S xz\, dm = \int_S yz\, dm = 0 \quad \text{car} \quad \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} z\, dz = 0$$

On a alors comme opérateur :

$$\boxed{\bar{\bar{I}}_{(O,S)} = \begin{pmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{b_s}}$$

3.4.2 Symétrie par rapport à deux plans sécants perpendiculaires



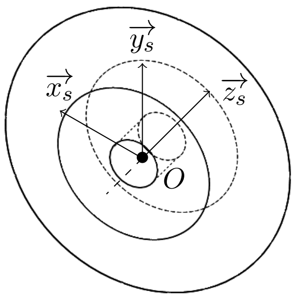
Les produits d'inertie sont tous nuls : $D = 0$, $E = 0$ et $F = 0$, car à chaque élément de volume centré en un point $P\,(x, y, z)$ correspond un élément de volume centré symétriquement :

- soit en un point $P'\,(x, y, -z)$
- soit en un point $P''\,(-x, y, z)$

La matrice d'inertie en un point O appartenant aux 2 plans de symétrie est donc diagonale, sous la forme :

$$\boxed{\bar{\bar{I}}_{(O,S)} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{b_s}}$$

3.4.3 Axe de révolution



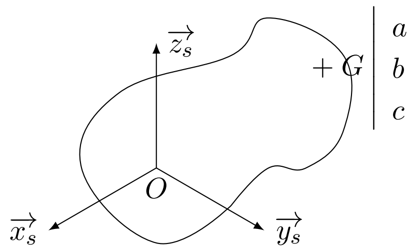
Pour un solide de révolution d'axe $(O, \overrightarrow{z_s})$, la matrice d'inertie est diagonale mais avec la relation supplémentaire :

$$A = B = \frac{C}{2} + \int_S z^2 dm \quad \text{car} \quad \int_S x^2 dm = \int_S y^2 dm$$

La matrice d'inertie en un point O appartenant à l'axe de révolution s'écrit donc sous la forme :

$$\boxed{\bar{\bar{I}}_{(O,S)} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}_{b_s}}$$

3.5 Théorème de Huygens



Ce théorème permet de trouver l'expression de l'opérateur d'inertie en un point quelconque d'un solide (ici : O) à partir de l'opérateur d'inertie au centre de gravité G.

En posant $\overrightarrow{OG} = a.\overrightarrow{x_s} + b.\overrightarrow{y_s} + c.\overrightarrow{z_s}$, le théorème de Huygens donne :

$$\boxed{\bar{\bar{I}}_{(O,S)} = \bar{\bar{I}}_{(G,S)} + m \begin{pmatrix} b^2+c^2 & -ab & -ac \\ -ab & a^2+c^2 & -bc \\ -ac & -bc & a^2+b^2 \end{pmatrix}}$$

Attention

Cette relation n'est **valable** qu'entre **le centre de gravité G de S et un autre point**. Si on veut passer d'un point A à un point B, il faudra passer d'abord de A à G et ensuite de G à B.

4 Torseur cinétique

4.1 Définition

Le torseur cinétique d'un solide en mouvement par rapport a un repère R_g en un point A quelconque s'écrit :

$$\{\mathcal{C}_{S/R_g}\} = {}_A\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R\{\mathcal{C}_{S/R_g}\}} = \int_S \overrightarrow{V_{M\in S/R_g}}\, dm = m\,\overrightarrow{V_{G\in S/R_g}} \\ \overrightarrow{M_A\{\mathcal{C}_{S/R_g}\}} = \overrightarrow{\sigma_{A\in S/R_g}} = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{V_{M\in S/R_g}}\, dm \end{array} \right\}$$

Par convention, on adoptera la notation suivante :

$$\boxed{\{\mathcal{C}_{S/R_g}\} = {}_A\left\{ \begin{array}{c} m\,\overrightarrow{V_{G\in S/R_g}} \\ \overrightarrow{\sigma_{A\in S/R_g}} \end{array} \right\}}$$

$\{\mathcal{C}_{S/R_g}\}$ est bien un torseur donc la relation de changement de point du moment est aussi valable pour ce type torseur :

$$\boxed{\overrightarrow{\sigma_{A\in S/R_g}} = \overrightarrow{\sigma_{B\in S/R_g}} + \overrightarrow{AB} \wedge m\,\overrightarrow{V_{G\in S/R_g}}}$$

La résultante du torseur cinétique $m\,\overrightarrow{V_{G\in S/R_g}}$ est appelée **quantité de mouvement**.

4.2 Calcul du moment cinétique

4.2.1 Méthode pratique de détermination du moment cinétique

Jusqu'à présent, les expressions du moment cinétique semblent amener des calculs fastidieux. L'objectif de ce chapitre est de trouver une méthode pratique pour le calcul du moment cinétique :

Démonstration :

On a : $\overrightarrow{\sigma_{A\in S/R_g}} = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{V_{M\in S/R_g}}\, dm$

Or : $\overrightarrow{V_{M\in S/R_g}} = \overrightarrow{V_{A\in S/R_g}} + \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R_g}}$

D'où : $\overrightarrow{\sigma_{A\in S/R_g}} = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{V_{A\in S/R_g}} dm + \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega_{S/R_g}} \wedge \overrightarrow{AM}\right) dm$

Et enfin : $\overrightarrow{\sigma_{A\in S/R_g}} = m\,\overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V_{A\in S/R_g}} + \underbrace{\int_S \overrightarrow{AM} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega_{S/R_g}} \wedge \overrightarrow{AM}\right) dm}$

Par définition, on appelle **opérateur d'inertie** (ou tenseur d'inertie) du solide S au point A l'opérateur $\bar{\bar{I}}_{(A,S)}$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\overrightarrow{u} \mapsto \bar{\bar{I}}_{(A,S)}.\overrightarrow{u} = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \left(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{AM}\right) dm$$

L'expression du moment cinétique se simplifie de la manière suivante :

$$\boxed{\overrightarrow{\sigma_{A\in S/R_g}} = \bar{\bar{I}}_{(A,S)}.\overrightarrow{\Omega_{S/R_g}} + m\,\overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V_{A\in S/R_g}}}$$

4.2.2 Cas particuliers classiques

- $A = G$, alors : $\boxed{\overrightarrow{\sigma_{G\in S/R_g}} = \bar{\bar{I}}_{(G,S)}.\overrightarrow{\Omega_{S/R_g}}}$
- $A \in S$ et fixe dans R_g, alors : $\boxed{\overrightarrow{\sigma_{A\in S/R_g}} = \bar{\bar{I}}_{(A,S)}.\overrightarrow{\Omega_{S/R_g}}}$

5 Torseur dynamique

5.1 Définition

Le torseur dynamique d'un solide en mouvement par rapport a un repère R_g en un point A quelconque s'écrit :

$$\{\mathcal{D}_{S/R_g}\} = {}_A\left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{R\{\mathcal{D}_{S/R_g}\}} = \int_S \overrightarrow{\Gamma_{M\in S/R_g}} dm = m\,\overrightarrow{\Gamma_{G\in S/R_g}} \\ \overrightarrow{M_A\{\mathcal{D}_{S/R_g}\}} = \overrightarrow{\delta_{A\in S/R_g}} = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{\Gamma_{M\in S/R_g}}\, dm \end{array}\right\}$$

Les deux autres termes $m\,\overrightarrow{\Gamma_{G\in S/R_g}}$ et $\int_S \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{\Gamma_{M\in S/R_g}} dm$ forment aussi un torseur, le **torseur dynamique** du solide S par rapport à R_g au point A lié à S.

Par convention, on adoptera la notation suivante :

$$\boxed{\{\mathcal{D}_{S/R_g}\} = {}_A\left\{\begin{array}{c} m\,\overrightarrow{\Gamma_{G\in S/R_g}} \\ \overrightarrow{\delta_{A\in S/R_g}} \end{array}\right\}}$$

La résultante du torseur dynamique $m\,\overrightarrow{\Gamma_{G\in S/R_g}}$ est appelée **quantité d'accélération**.

Comme pour tout torseur, la loi de changement de point des moments est vérifiée, et ce quels que soient les points A et B de l'espace :

$$\boxed{\overrightarrow{\delta_{A\in S/R_g}} = \overrightarrow{\delta_{B\in S/R_g}} + \overrightarrow{AB} \wedge m\,\overrightarrow{\Gamma_{G\in S/R_g}}}$$

5.2 Relation entre torseur cinétique et torseur dynamique

5.2.1 Résultantes

On a la relation suivante :

$$\boxed{\overrightarrow{R\{\mathcal{D}_{S/R_g}\}} = \left[\frac{d\overrightarrow{R\{\mathcal{C}_{S/R_g}\}}}{dt}\right]_{R_g} = \left[\frac{d(m\,\overrightarrow{V_{G\in S/R_g}})}{dt}\right]_{R_g}}$$

5.2.2 Moments

On peut écrire la relation suivante (A est un point géométrique quelconque) :

$$\boxed{\overrightarrow{\delta_{A\in S/R_g}} = \left[\frac{d\overrightarrow{\sigma_{A\in S/R_g}}}{dt}\right]_{R_g} + \overrightarrow{V_{A/R_g}} \wedge m\,\overrightarrow{V_{G\in S/R_g}}}$$

5.3 Cas particuliers

5.3.1 Le point A est fixe dans le repère R_g

On a alors : $\overrightarrow{V_{A/R_g}} = \overrightarrow{0}$, d'où : $\boxed{\overrightarrow{\delta_{A\in S/R_g}} = \left[\frac{d\overrightarrow{\sigma_{A\in S/R_g}}}{dt}\right]_{R_g}}$

5.3.2 Les points A et G sont confondus

On a alors : $\overrightarrow{V_{A/R_g}} \wedge \overrightarrow{V_{G\in S/R_g}} = \overrightarrow{0}$, d'où : $\boxed{\overrightarrow{\delta_{G\in S/R_g}} = \left[\frac{d\overrightarrow{\sigma_{A\in S/R_g}}}{dt}\right]_{R_g}}$

6 Le Principe Fondamental de la Dynamique

6.1 Hypothèses

Pour la suite du cours, nous prendrons comme hypothèses (sauf exceptions) :
- référentiels galiléens ;
- principe de conservation de la masse ;
- solide indéformable $\big(\forall(A,B)\in(S)^2$ alors $AB = \text{cste}\big)$;
- liaisons parfaites (pas d'adhérence, ni de frottement).

6.2 Énoncé du Principe Fondamental de la Dynamique (PFD)

Le PFD appliqué au solide S dans son mouvement par rapport à R_g au point A s'écrit alors :

$$\boxed{\{\mathcal{T}_{\text{ext}\to S}\}_A = \left\{\mathcal{D}_{S/R_g}\right\}_A}$$

On peut décomposer cette égalité torsorielle en 2 égalités vectorielles :

- Théorème de la résultante dynamique (TRD) : $\boxed{\overrightarrow{F_{\text{ext}\to S}} = m\,\overrightarrow{\Gamma_{G\in S/R_g}}}$
- Théorème du moment dynamique (TMD)en A : $\boxed{\overrightarrow{M_{A,\text{ext}\to S}} = \overrightarrow{\delta_{A\in S/R_g}}}$

Attention

Il faut déterminer les **deux** torseurs séparément :

- $\{\mathcal{T}_{\text{ext}\to S}\}_A$ issu du bilan des actions mécaniques extérieures sur S
- $\left\{\mathcal{D}_{S/R_g}\right\}_A$ issu de l'étude du mouvement de S par rapport à R_g

...et ensuite faire l'égalité dans le même repère d'écriture et au même point pour obtenir **au maximum** 6 équations scalaires.

6.3 Cas d'un ensemble de solides

Soit un ensemble de solides $\sum = S_1 + S_2 + S_3 + ... + S_n$.

On peut faire la somme des torseurs, à condition d'être **au même point** par exemple A, on a alors comme expression du PFD :

$$\boxed{\left\{\mathcal{T}_{\text{ext}\to\sum}\right\}_A = \left\{\mathcal{D}_{S_1/R_g}\right\}_A + \left\{\mathcal{D}_{S_2/R_g}\right\}_A + \left\{\mathcal{D}_{S_3/R_g}\right\}_A + ... + \left\{\mathcal{D}_{S_n/R_g}\right\}_A}$$

Remarque

- Une égalité de torseur correspond à :
  - ◇ un système de deux équations vectorielles ;
  - ◇ un système de 6 équations scalaires ;
- On peut remarquer qu'en statique le torseur dynamique est nul donc on retrouve bien le PFS.

6.4 Cas particuliers « classiques »

6.4.1 Solide en translation

En calculant le moment dynamique au centre de gravité G de S on obtient : $\overrightarrow{\delta_{G\in S/R_g}} = \overrightarrow{0}$

Donc le PFD pour un solide en translation écrit au centre de gravité G **uniquement** :

$$\boxed{\{\mathcal{T}_{\text{ext}\to S}\}_G = {}_G\left\{\begin{array}{c} m\,\overrightarrow{\Gamma_{G\in S/R_g}} \\ \overrightarrow{0} \end{array}\right\}}$$

En un point quelconque A lié à S (changement de point entre G et A) : $\overrightarrow{\delta_{A\in S/R_g}} = m\,\overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{\Gamma_{G\in S/R_g}}$

Le PFD pour un solide en **translation** écrit en un **point quelconque** A lié à S donne alors :

$$\{\mathcal{T}_{\text{ext}\to S}\}_A = {}_A\left\{ \begin{array}{c} m\,\overrightarrow{\Gamma_{G\in S/R_g}} \\ m\,\overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{\Gamma_{G\in S/R_g}} \end{array} \right\}$$

Remarque

- La résultante de ce torseur est **invariante**.
- Lorsque $A \neq G$, le moment dynamique n'est pas égal au vecteur nul ! sauf si $\overrightarrow{AG}$ est colinéaire à $\overrightarrow{\Gamma_{G\in S/R_g}}$ soit tout point appartenant à l'axe de translation passant par G.

6.4.2 Solide en rotation autour d'un axe fixe $(O, \overrightarrow{z})$

On peut écrire le PFD en un point de l'axe de rotation, par exemple O :

$$\boxed{\{\mathcal{T}_{\text{ext}\to S}\}_O = {}_O\left\{ \begin{array}{c} m\,\overrightarrow{\Gamma_{G\in S/R_g}} \\ J\ddot{\theta}.\overrightarrow{z} \end{array} \right\}}$$

Avec :

- θ : angle définissant la rotation du solide S autour de l'axe $(O, \overrightarrow{z})$
- J : **moment d'inertie** du solide S par rapport à l'axe $(O, \overrightarrow{z})$

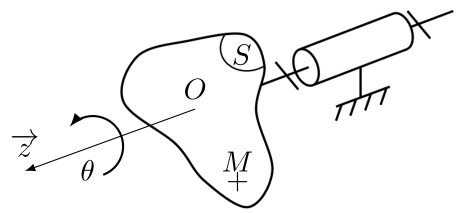


FIGURE 1 – S en rotation autour de $(O, \overrightarrow{z})$

Si le **centre de gravité** G est porté par l'**axe de rotation** alors :

$$\boxed{\{\mathcal{T}_{\text{ext}\to S}\}_O = {}_O\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ J\ddot{\theta}.\overrightarrow{z} \end{array} \right\}}$$

6.5 Cas général

Lorsqu'on ne se trouve pas dans un de ces 2 cas particuliers, le calcul se complique un peu. On est alors amené à passer par la cinétique, discipline construite à partir de la cinématique, dans laquelle on introduit la notion de masse (notamment pour le calcul du torseur dynamique, et dans le cadre de l'utilisation des méthodes énergétiques, pour calculer l'énergie cinétique d'un solide).

7 Méthodologie de résolution

Comme on l'a indiqué en début de cours, en dynamique on rencontre deux types de problématique :

- les efforts sont connus ; on détermine les mouvements.
- on connaît les mouvements désirés ; on détermine les actions mécaniques engendrées.

Dans tous les cas, il nous faut des équations pour pouvoir relier les actions mécaniques aux paramètres de mouvement. La démarche globale est exposée ci-après.

7.1 Graphe de structure

On repère sur le graphe de liaison les différentes liaisons entre les sous-ensembles considérés.

On place aussi sur ce graphe les actions mécaniques extérieures, afin de connaître les interactions avec l'environnement du système (graphe de structure).

7.2 Isolement

On isole un solide S ou un ensemble de solides $\sum$, autrement c'est à ce stade que l'on va définir ce qui est l'extérieur et l'intérieur du système. La suite de l'étude ne concerne **que les actions extérieures**.

C'est une des phases importantes, permettant de faire ressortir ou au contraire de masquer l'influence de certaines actions mécaniques.

7.3 Inventaire des actions mécaniques extérieures

On réalise alors l'inventaire des actions mécaniques extérieures (IAME) par rapport à la partie isolée précédemment. On retrouve ce que l'on a déjà établi en statique (actions à distance - actions de contact).

7.4 Écriture du PFD

On écrit le PFD :

$$\boxed{\{\mathcal{T}_{\text{ext}\to S}\}_A = \left\{\mathcal{D}_{S/R_g}\right\}_A} \qquad \text{ou} \qquad \boxed{\{\mathcal{T}_{\text{ext}\to\Sigma}\}_A = \left\{\mathcal{D}_{\Sigma/R_g}\right\}_A}$$

Dans le second cas, $\left\{\mathcal{D}_{\Sigma/R_g}\right\}_A = \left\{\mathcal{D}_{S_1/R_g}\right\}_A + \left\{\mathcal{D}_{S_2/R_g}\right\}_A + ...$

7.5 Détermination du torseur dynamique

C'est souvent la partie qui amène le plus de calcul, particulièrement pour les moments.

- Résultante Dynamique : $\boxed{\overrightarrow{R\{\mathcal{D}_{S/R_g}\}} = m\,\overrightarrow{\Gamma_{G\in S/R_g}}}$
- Moment Dynamique : $\boxed{\overrightarrow{M_A\{\mathcal{D}_{S/R_g}\}} = \overrightarrow{\delta_{A\in S/R_g}}}$

Ce moment dynamique dépend du mouvement **et** du point d'écriture.

7.5.1 Cas n°1 : S est en translation par rapport à R_g

- Au point G : $\overrightarrow{\delta_{G\in S/R_g}} = \overrightarrow{0}$
- Au point A : $\overrightarrow{\delta_{A\in S/R_g}} = \overrightarrow{AG} \wedge m\,\overrightarrow{\Gamma_{G\in S/R_g}}$

7.5.2 Cas n°2 : S n'est pas en translation par rapport à R_g

- On connaît la matrice d'inertie au point A : $\bar{\bar{I}}_{(A,S)}$

- ◇ On calcule : $\overrightarrow{\sigma_{A\in S/R_g}} = \bar{\bar{I}}_{(A,S)}.\overrightarrow{\Omega_{S/R_g}} + m\,\overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V_{A\in S/R_g}}$
- ◇ Puis : $\overrightarrow{\delta_{A\in S/R_g}} = \left[\dfrac{d\overrightarrow{\sigma_{A\in S/R_g}}}{dt}\right]_{R_g} + m\left(\overrightarrow{V_{A/R_g}} \wedge \overrightarrow{V_{G\in S/R_g}}\right)$

- On connaît la matrice d'inertie au point G : $\bar{\bar{I}}_{(G,S)}$
  - ◇ **Méthode 1** : on déplace la matrice de G vers A en utilisant le théorème de Huygens. On est alors ramené au cas précédent.
  - ◇ **Méthode 2** :
    - ○ on calcule le moment cinétique en G : $\overrightarrow{\sigma_{G\in S/R_g}} = \bar{\bar{I}}_{(G,S)}.\overrightarrow{\Omega_{S/R_g}}$
    - ○ on déplace ensuite en A : $\overrightarrow{\sigma_{A\in S/R_g}} = \overrightarrow{\sigma_{G\in S/R_g}} + \overrightarrow{AG} \wedge m\,\overrightarrow{V_{G\in S/R_g}}$
    - ○ puis on dérive : $\overrightarrow{\delta_{A\in S/R_g}} = \left[\dfrac{d\overrightarrow{\sigma_{A\in S/R_g}}}{dt}\right]_{R_g} + \overrightarrow{V_{A/R_g}} \wedge m\,\overrightarrow{V_{G\in S/R_g}}$

7.6 Écriture des équations - Résolution

On écrit alors les 6 équations scalaires issues du PFD (ou du moins celles qui permettent de répondre au problème posé). Il faut pour cela écrire les torseurs **au même point** et **dans la même base**.

Si la résolution n'aboutit pas, on peut être amené soit à faire des hypothèses simplificatrices, soit à isoler d'autres solides ou ensembles de solides.

8 Conseils pour le calcul

Il est **inutile** d'exprimer les différents vecteurs dans **les bases globales**.

Pour calculer la composante suivant un axe d'un vecteur, on utilisera souvent la relation suivante :

$$\boxed{\left[\frac{d}{dt}\vec{u}\right]_R \cdot \vec{z} = \left[\frac{d}{dt}\vec{u}\cdot\vec{z}\right]_R - \vec{u}\cdot\left[\frac{d}{dt}\vec{z}\right]_R}$$

Cette relation est très utilisée pour le calcul du moment dynamique, si seule la composante suivant $\vec{z}$ est utile au calcul. Exemple :

$$\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{\sigma_{A\in S/R_g}}\right]_R \cdot \vec{z} = \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{\sigma_{A\in S/R_g}}\cdot\vec{z}\right) - \overrightarrow{\sigma_{A\in S/R_g}}\cdot\left[\frac{d}{dt}\vec{z}\right]_R$$

Cette méthode permet de manipuler des calculs **plus simples** et **plus rapides**.

Pour calculer la dérivée d'un vecteur $\vec{u}$ exprimé dans R_2, on ne projettera pas mais on utilisera la formule de dérivation vectorielle (dite « formule de Bour ») :

$$\left[\frac{d\vec{u}}{dt}\right]_{R_1} = \left[\frac{d\vec{u}}{dt}\right]_{R_2} + \overrightarrow{\Omega_{R_2/R_1}} \wedge \vec{u}$$

Le moment d'inertie d'un solide S par rapport à l'axe Δ, noté $I_{S/\Delta}$ se calcule avec la relation ($\vec{k}$ étant un vecteur unitaire porté par Δ) :

$$I_{S/\Delta} = \vec{k}\cdot\left(\bar{\bar{I}}_{(O,S)}.\vec{k}\right)$$