

Jamel Jaber

MP
MP*

Probabilités discrètes

Cours, exercices corrigés,
extraits des sujets de concours



ellipses

Références sciences

Probabilités discrètes en MP et MP*

Cours et exercices corrigés
Extraits des sujets de concours

Jamel Jaber



Avant-propos

La réforme des programmes des classes préparatoires aux grandes écoles d'ingénieurs a fait la part belle à l'enseignement des probabilités discrètes. Cet ouvrage est issu du cours dispensé depuis trois ans aux élèves de ma classe de MP^* . Il propose un cours complet, ainsi que des exercices et des problèmes corrigés portant sur quatre chapitres couvrant la nouveauté du programme 2014 : Dénombrabilité, Familles sommables, Espaces probabilisés et Variables aléatoires discrètes. Ce livre est tout naturellement destiné aux étudiants des classes préparatoires scientifiques MP et MP^* et du premier cycle universitaire.

↪ Le cours est détaillé et illustré par de nombreux exemples et applications.

À la fin de chaque chapitre, le lecteur trouvera une série d'exercices, qui constitue une illustration du cours, assortis de leurs corrigés détaillés.

↪ Les exercices proposés se répartissent en trois catégories :

- des applications directes qui aideront l'étudiant à bien assimiler le cours.
- des exercices classiques ou originaux qui incitent le lecteur à la réflexion.
- des exercices issus des épreuves orales des concours X-ens, Mines-Ponts, Centrale-Supélec...

↪ Pour se mettre en situation d'épreuve, des extraits de sujets de concours vous sont proposés, avec une correction détaillée.

↪ Les corrigés rédigés et détaillés de tous les exercices et problèmes.

Les lecteurs qui le souhaitent peuvent me contacter à l'adresse suivante :

jamel.jaber@free.fr

ou s'adresser aux Éditions Ellipses qui transmettront.

Je tiens à remercier mes collègues qui ont permis la réalisation de cet ouvrage. Je dois remercier mon ami Mohamed Amine Ben Amor pour son aide très précieuse en $\text{\LaTeX}$.

Un très grand merci également à Faten, Yahia et Yosr pour tout leur amour et leur soutien tout au long de la rédaction de cet ouvrage.

Je salue enfin les Editions Ellipses pour la qualité de leur travail.

Table des matières

1	Ensembles dénombrables	7
1.1	Dénombrabilité	7
1.2	Suite exhaustive de parties finies	11
1.3	Exemples de parties non dénombrables	12
1.4	Exercices	15
1.5	Solutions des exercices	17
2	Familles sommables	21
2.1	Familles positives	21
2.2	Familles sommables à valeurs complexes	31
2.3	Exercices	42
2.4	Solutions des exercices	47
3	Espace probabilisé	65
3.1	Modélisation d'une expérience aléatoire	65
3.2	Probabilité	70
3.3	Probabilité conditionnelle et indépendance	79
3.4	Exercices	93
3.5	Solution des exercices	100
4	Variables aléatoires discrètes	123
4.1	Définition et premières propriétés	123
4.2	Couple de variables aléatoires	136
4.3	Indépendance de variables aléatoires	143
4.4	Espérance	152
4.5	L'espace $\mathcal{L}^2_d(\Omega; \mathcal{B}; P)$	162
4.6	Fonctions génératrices	174
4.7	Inégalités et approximations	181
4.8	Exercices	186
4.9	Solution des exercices	205
5	Sujets de révisions	267

Chapitre 1

Ensembles dénombrables

L'un des concepts fondamentaux en mathématiques, est la notion de cardinal d'un ensemble E , noté $\text{card}(E)$, introduite par George Cantor. Pour les ensembles finis, la définition de cardinal ne présente pas de difficulté. Intuitivement, c'est le nombre d'éléments d'un ensemble. Deux ensembles finis ont le même cardinal s'ils contiennent le même nombre d'éléments. La notion devient moins intuitive lorsqu'on considère des ensembles infinis.

Soient E et F deux ensembles. On dit que E et F sont *équipotents* s'il existe une bijection $f : E \rightarrow F$. On vérifie sans peine que :

- E et E sont équipotents (l'application identité de E est une bijection).
- Si E et F sont équipotents alors F et E sont équipotents (la réciproque d'une bijection est une bijection).
- Si E et F sont équipotents et F et G sont équipotents alors E et G sont équipotents (par composition de bijections).

Nous adoptons donc cette définition : deux ensembles (finis ou infinis) *ont même cardinal (taille)* s'ils sont équipotents. Un ensemble E est fini s'il est vide ou s'il existe un entier n , qui est unique, tel que E et l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$ sont équipotents. Autrement dit, E est fini si E a la même taille qu'une partie finie de $\mathbb{N}$.

Dans ce chapitre, on s'intéresse aux **ensembles qui sont, à une bijection près, des parties infinies de $\mathbb{N}$.**

1.1 Dénombrabilité

Définition 1 *Un ensemble E est dénombrable s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$.*

Soit E un ensemble dénombrable. Choisir une bijection de $\mathbb{N}$ dans E revient

à énumérer les éléments de E , c'est-à-dire écrire

$$E = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$$

sous la forme d'ensemble des valeurs d'une suite injective $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Définition 2 *Un ensemble E est au plus dénombrable s'il est fini ou dénombrable.*

Exemple : L'ensemble $\mathbb{Z}$ est dénombrable. On peut expliciter des bijections de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$, par exemple

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{Z} \\ n &\mapsto \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ pair} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Il est simple aussi de démontrer que $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ est dénombrable, puisque l'application $n \mapsto n+1$ réalise une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}^*$. Plus généralement, on démontre que les parties de $\mathbb{N}$ sont finies ou dénombrables.

Proposition 3 *Toute partie infinie de $\mathbb{N}$ est dénombrable.*

Preuve. Soit $\mathcal{A}$ une partie infinie de $\mathbb{N}$. L'existence du minimum d'une partie non vide de $\mathbb{N}$ permet de construire l'application $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{A}$ définie par

$$f(0) = \min \mathcal{A} \text{ et } f(n) = \min \mathcal{A} \setminus \{f(0), f(1), \dots, f(n-1)\} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(n)$ existe, puisque l'ensemble $\mathcal{A} \setminus \{f(0), f(1), \dots, f(n-1)\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$.

Par construction, la suite $(f(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante, ce qui montre que f est injective. Soit $x \in \mathcal{A}$. La stricte croissance de la suite $(f(n))_{n \in \mathbb{N}}$ entraîne aussi que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = +\infty$. Il existe un entier k tel que $f(k) \geq x$. Posons

$$k_0 = \min\{k \in \mathbb{N} : f(k) \geq x\}.$$

Alors, $x = f(k_0)$. En effet, par définition de k_0 , $f(k_0) \geq x$. D'autre part, comme

$$x \in \mathcal{A} \setminus \{f(0), f(1), \dots, f(k_0-1)\} \text{ et } f(k_0) = \min \mathcal{A} \setminus \{f(0), f(1), \dots, f(k_0-1)\},$$

on en déduit que $f(k_0) \leq x$. D'où $f(k_0) = x$. Ce qui montre la surjectivité de l'application f . ■

Comme conséquence du résultat précédent on a :

Corollaire 4 *Un ensemble non vide est au plus dénombrable si, et seulement si, il est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$.*

Exemple 5 *L'ensemble $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable, puisqu'il est infini et l'application*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N}^2 &\rightarrow \mathbb{N}^* \\ (n, m) &\mapsto 2^n(2m+1) \end{aligned}$$

est bijective car tout entier strictement positif s'écrit d'une façon unique comme produit de puissance de 2 et d'un entier impair.

Le théorème suivant donne une méthode pratique pour montrer la dénombrabilité d'un ensemble donné.

Théorème 6 *Soit E un ensemble non vide. Alors on a équivalence :*

1. *L'ensemble E est au plus dénombrable.*
2. *Il existe une surjection de $\mathbb{N}$ dans E .*
3. *Il existe une injection de E dans $\mathbb{N}$.*

Preuve. (1) $\Rightarrow$ (2). Supposons que E est au plus dénombrable. Il existe, alors, une bijection $f : \mathbb{N} \rightarrow E$ ou une bijection $f : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow E$ avec n un entier naturel. Dans le premier cas f est une surjection de $\mathbb{N} \rightarrow E$. Dans le second cas, fixons $a \in E$ et définissons l'application $g : \mathbb{N} \rightarrow E$ par $g(k) = f(k)$ si $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ et $g(k) = a$ sinon. Il est clair que g est une surjection de $\mathbb{N}$ dans E .

(2) $\Rightarrow$ (3). Soit $f : \mathbb{N} \rightarrow E$ une surjection. Pour tout $x \in E$, l'ensemble

$$f^{-1}(\{x\}) = \{n \in \mathbb{N} : f(n) = x\}$$

est non vide, soit $n_x = \min f^{-1}(\{x\})$. L'application g définie par

$$\begin{aligned} g : E &\rightarrow \mathbb{N} \\ x &\mapsto n_x \end{aligned}$$

est clairement injective.

(3) $\Rightarrow$ (1). Soit $f : E \rightarrow \mathbb{N}$ une application injective, alors f est en bijection avec $f(E)$ qui est une partie de $\mathbb{N}$, par conséquent E est un ensemble au plus dénombrable. ■

On peut remplacer dans le théorème 6, l'ensemble $\mathbb{N}$ par n'importe quel ensemble dénombrable X .

Comme conséquence on a les résultats suivants.

Corollaire 7 *Une partie d'un ensemble au plus dénombrable est au plus dénombrable.*

Preuve. Si A est une partie non vide d'un ensemble au plus dénombrable E . Il existe une application injective $f : E \rightarrow \mathbb{N}$, la restriction de f à A est encore injective. ■

Proposition 8 *Le produit de deux ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable.*

Preuve. Soit E et F deux ensembles au plus dénombrables. Si E ou F est vide alors $E \times F$ est vide. Sinon, soit $f : \mathbb{N} \rightarrow E$ et $g : \mathbb{N} \rightarrow F$ deux applications surjectives. L'application

$$\begin{aligned} g : \mathbb{N}^2 &\rightarrow E \times F \\ (n, m) &\mapsto (f(n), g(m)) \end{aligned} ,$$

est surjective. Comme $\mathbb{N}^2$ est dénombrable (voir exemple 5), on en déduit que $E \times F$ est au plus dénombrable. ■

Par récurrence, on montre que le produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable. En particulier, $\mathbb{N}^p$ est dénombrable pour tout $p \in \mathbb{N}^*$

Exemple 9 *L'ensemble $\mathbb{Q}$ est dénombrable. En effet, le produit $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ est dénombrable et l'application*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* &\rightarrow \mathbb{Q} \\ (n, m) &\mapsto \frac{n}{m} \end{aligned} ,$$

est surjective.

Exemple 10 *Soit $p \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble $\mathbb{Q}^p$ est dénombrable, comme produit fini des ensembles dénombrables. L'ensemble $\mathbb{Q}_p[X]$ des polynômes de degré au plus p est en bijection avec $\mathbb{Q}^{p+1}$ par suite $\mathbb{Q}_p[X]$ est dénombrable.*

Proposition 11 *Une réunion au plus dénombrable d'ensembles au plus dénombrables est un ensemble au plus dénombrable.*

Preuve. Soit I un ensemble au plus dénombrable et $(E_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles au plus dénombrables. On peut supposer que les E_i sont non vides (sinon, on peut supprimer les ensembles E_i qui sont vides, ce qui ne change pas la réunion). Pour tout $i \in I$, il existe une application surjective $f_i : \mathbb{N} \rightarrow E_i$.

Soit a un élément de $\bigcup_{i \in I} E_i$. Il existe $i \in I$ tel que $a \in E_i$, par suite il existe un entier $j \in \mathbb{N}$ tel que $a = f_i(j)$. Par conséquent, l'application

$$\begin{aligned} f : I \times \mathbb{N} &\rightarrow \bigcup_{i \in I} E_i \\ (i, j) &\mapsto f_i(j) \end{aligned}$$

est surjective. Comme $I \times \mathbb{N}$ est au plus dénombrable d'après la proposition 8, il en est de même de $\bigcup_{i \in I} E_i$, (cf. théorème 6). ■

Exemple 12 L'ensemble $\mathbb{Q}[X]$ (respectivement, $\mathbb{Z}[X]$) des polynômes à coefficients dans $\mathbb{Q}$ (respectivement, dans $\mathbb{Z}$) est dénombrable. En effet, on a : $\mathbb{Q}[X] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Q}_n[X]$ (respectivement, $\mathbb{Z}[X] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}_n[X]$).

Exemple 13 Un nombre réel α est dit algébrique s'il existe un polynôme non nul $P \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $P(\alpha) = 0$. Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des nombres réels algébriques. Alors l'ensemble $\mathcal{A}$ est dénombrable.

En effet, pour tout polynôme non nul $P \in \mathbb{Z}[X]$ l'ensemble

$$Z(P) = \{x \in \mathbb{R} : P(x) = 0\}$$

est fini. Comme $\mathcal{A} = \bigcup_{P \in \mathbb{Z}[X]} Z(P)$, qui est réunion dénombrable d'ensembles finis, $\mathcal{A}$ est au plus dénombrable. L'ensemble $\mathcal{A}$ est infini (il contient $\mathbb{Z}$) donc $\mathcal{A}$ est dénombrable.

1.2 Suite exhaustive de parties finies

Soit E un ensemble non vide.

Définition 14 Soit $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de parties de E . La suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est appelée *suite exhaustive de parties finies* si chaque J_n est finie, $J_n \subseteq J_{n+1}$ et $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_n = E$.

- La suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$, telle que $J_n = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, est une suite exhaustive de parties finies de $\mathbb{N}$.
- La suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$, telle que $J_n = \{k \in \mathbb{N} : -n \leq k \leq n\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, est une suite exhaustive de parties finies de $\mathbb{Z}$.

- La suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$, telle que $J_n = \{0, 1, 2, \dots, n\} \times \{0, 1, 2, \dots, n\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, est une suite exhaustive de parties finies de $\mathbb{N}^2$. Une autre suite exhaustive de $\mathbb{N}^2$ est la suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$J_n = \{(p, q) : p + q \leq n\}.$$

Le théorème suivant caractérise la dénombrabilité en termes de suites exhaustives.

Théorème 15 *Un ensemble E est au plus dénombrable si, et seulement si, E possède une suite exhaustive de parties finies.*

Preuve. Si E est fini alors on pose $J_n = E$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si E est dénombrable, il existe une bijection $f : \mathbb{N} \rightarrow E$. On définit l'ensemble J_n , pour tout entier n , par $J_n = f(\{0, 1, 2, \dots, n\})$. Alors $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite exhaustive de parties finies de E . Inversement, soit $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite exhaustive des parties finies. Comme $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_n$ et chaque J_n est au plus dénombrable, d'après la proposition 11, E est au plus dénombrable. ■

Comme application, on redémontre que l'ensemble $\mathbb{Q}$ est dénombrable. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\mathbb{Q}_n = \left\{ \frac{p}{q} : |p| \leq n, |q| \leq n+1, q \neq 0 \right\}$$

Chaque partie $\mathbb{Q}_n$ est clairement finie, $\mathbb{Q}_n \subseteq \mathbb{Q}_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Q}_n = \mathbb{Q}$. Comme de plus $\mathbb{Q}$ est infini, il est dénombrable.

1.3 Exemples de parties non dénombrables

Théorème 16 *L'ensemble $\mathbb{R}$ est infini non dénombrable.*

Comme un sous-ensemble d'un ensemble dénombrable est au plus dénombrable (cf corollaire 7), il suffit, pour montrer le théorème, de démontrer que $]0, 1[$ est non dénombrable. On donne deux démonstrations de ce résultat, une troisième preuve est donnée en exercice (voir exercice 1).

Preuve. 1. Supposons que $]0, 1[$ est dénombrable. On peut donc trouver une bijection $n \mapsto x_n$ de $\mathbb{N}$ dans $]0, 1[$, en particulier

$$]0, 1[= \{x_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Tout réel $x_n \in]0, 1[$ admet un unique développement décimal propre de la forme,

$$x_n = 0, a_{1,n} a_{2,n} \dots a_{n,n} a_{n,n+1} \dots$$

où la suite $(a_{k,n})_{k \in \mathbb{N}^*}$ est à valeurs dans $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$ et n'est pas stationnaire en 9. On va construire un réel $x \in]0, 1[$ qui ne peut pas être l'un des x_n . Considérons le réel

$$x = 0, b_1 b_2 \dots b_n \dots$$

avec $b_n = 1$ si $a_{n,n} = 2$ et $b_n = 2$ si $a_{n,n} \neq 2$. Alors $x \in]0, 1[$ et $x \neq x_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Contradiction. ■

Preuve. 2. On démontre, par l'absurde, que le segment $J_0 = [0, 1]$ est non dénombrable. Sinon, J_0 peut s'écrire sous la forme :

$$[0, 1] = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

On écrit : $J_0 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. Au moins l'un des trois segments

$$[0, \frac{1}{3}], [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \text{ ou } [\frac{2}{3}, 1]$$

ne contient pas x_0 . Notons J_1 ce segment. De même, en coupant J_1 en trois segments de même longueur on construit un segment J_2 inclus dans J_0 qui ne contient pas x_0 et x_1 et de longueur $\frac{1}{9}$. En utilisant ce procédé, on construit ainsi

une suite de segments décroissante $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que la longueur de $J_n = \frac{1}{3^{n+1}}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, J_n ne contient pas $x_0, x_1, \dots, x_n$. Donc, par hypothèse, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} J_n$ est vide. Or, une suite décroissante de segments dont la diamètre tend vers 0 est d'intersection non vide. Contradiction. ■

Comme conséquences, on a :

Corollaire 17 *L'ensemble des irrationnels $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est non dénombrable.*

Preuve. Sinon, $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ serait dénombrable. ■

Corollaire 18 *Tout intervalle non réduit à un point est non dénombrable.*

Preuve. On a montré que $]0, 1[$ est non dénombrable. Or, tout intervalle $]a, b[$, a et $b \in \mathbb{R}$, est équipotent à $]0, 1[$. En effet l'application $t \mapsto tb + (1 - t)a$ est une bijection de $]0, 1[$ dans $]a, b[$. Donc, $]a, b[$ est non dénombrable. Soit I un intervalle non réduit à un point, alors I contient un intervalle ouvert de type $]a, b[$, $a < b \in \mathbb{R}$ donc I est non dénombrable. ■

Corollaire 19 *Il existe des nombres réels transcendants (non algébriques).*

Preuve. Sinon, on aurait $\mathbb{R} = \mathcal{A}$, l'ensemble des réels algébriques, donc $\mathbb{R}$ serait dénombrable d'après l'exemple 13. ■

Notons, que l'ensemble des réels transcendants est infini non dénombrable. Donc la “plupart” des réels sont transcendants mais on en connaît peu. On sait, par exemple que $e, \pi, \ln(2)$ sont transcendants.

Corollaire 20 *$\mathbb{R}$ est un $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel de dimension infinie.*

Preuve. Sinon $\mathbb{R}$ serait isomorphe à $\mathbb{Q}^n$, avec $n = \dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$. En particulier, $\mathbb{R}$ est en bijection avec $\mathbb{Q}^n$ qui est dénombrable. Contradiction. ■

Théorème 21 *L'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ des parties de $\mathbb{N}$ est non dénombrable.*

La preuve de ce théorème est une conséquence directe du lemme suivant.

Lemme 22 (Cantor) *Soit E un ensemble. Alors E et $\mathcal{P}(E)$, l'ensemble des parties de E , ne sont pas en bijection.*

Preuve. Soit $f : E \rightarrow \mathcal{P}(E)$ une application et A l'ensemble défini par

$$A = \{x \in E : x \notin f(x)\} \in \mathcal{P}(E)$$

Supposons qu'il existe $y \in E$ tel que $f(y) = A$. Par définition de A on a :

$$y \in A \Leftrightarrow y \notin f(y) \Leftrightarrow y \notin A$$

Ce qui est absurde. Ce qui montre que f n'est pas surjective donc il n'existe pas de bijection de E dans $\mathcal{P}(E)$. ■

Le lemme de Cantor affirme que, pour tout ensemble E , il n'existe pas de surjection (et *a fortiori* de bijection) de E sur $\mathcal{P}(E)$. Noter qu'il existe une injection de E dans $\mathcal{P}(E)$, à savoir l'application $x \mapsto \{x\}$, donc E est en bijection avec une partie stricte de $\mathcal{P}(E)$. On dit que le cardinal de $\mathcal{P}(E)$ est plus grand que celui de E .

Corollaire 23 *L'ensemble $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ des suites à valeurs dans $\{0,1\}$, est non dénombrable.*

Preuve. L'application

$$\begin{array}{ccc} f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) & \rightarrow & \{0,1\}^{\mathbb{N}} \\ A & \mapsto & u \text{ définie par } \begin{cases} u_n = 1 \text{ si } n \in A \\ u_n = 0 \text{ sinon} \end{cases} \end{array},$$

est une bijection. ■

Pour finir.

1. Pour montrer qu'un ensemble X est au plus dénombrable, il suffit de
 - Trouver une application injective de X dans $\mathbb{N}$ ou un ensemble dénombrable.
 - Trouver une application surjective de $\mathbb{N}$ ou un ensemble dénombrable dans X .
 - Montrer que X est la réunion au plus dénombrable d'ensembles au plus dénombrables.
2. Pour montrer qu'un ensemble X est non dénombrable, on peut raisonner par l'absurde et supposer que X s'écrit sous la forme :

$$\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$$

puis exhiber un élément de X qui ne figure pas dans cette suite.

1.4 Exercices

Exercice 1 : Le but de cet exercice est de démontrer que $\mathbb{R}$ est non dénombrable. Supposons qu'il existe une bijection $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}$. On pose pour tout réel x , $m(x) = \sup\{\sum_{y \in A} 2^{-f(y)} : A \text{ fini et } A \subseteq]-\infty, x[\}$.

1. Montrer que $0 < m(x) \leq 2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Soit $E = \{x \in \mathbb{R} : m(x) > x\}$. Justifier l'existence de $c = \sup E$.
3. Justifier l'existence d'un réel $y \in E$ tel que $y + 2^{-f(c)} > c$.
4. Montrer que $m(y + 2^{-f(c)}) \geq m(y) + 2^{-f(c)}$ et déduire que

$$y + 2^{-f(c)} \in E.$$

5. Conclure.

Exercice 2 : Montrer que l'ensemble $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ des parties finies de $\mathbb{N}$ est dénombrable. Que dire de l'ensemble des parties infinies de $\mathbb{N}$?

Exercice 3 : Quelles sont les fonctions continues $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $f(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{Q}$?

Exercice 4 : Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'intervalles ouverts non vides de $\mathbb{R}$. Montrer que si les A_i sont deux à deux disjoints, alors I est au plus dénombrable.

Exercice 5 : Soit A un ensemble non dénombrable et B une partie dénombrable de A . Montrer que A et $B \setminus A$ sont équipotents.

Exercice 6 : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante.

1. Montrer que f admet une limite à droite et une limite à gauche en tout point. On note pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$

$$f(x_0)^+ = \lim_{x \rightarrow x_0, x > x_0} f(x) \text{ et } f(x_0)^- = \lim_{x \rightarrow x_0, x < x_0} f(x).$$

2. Montrer que $f(x_0)^- \leq f(x_0) \leq f(x_0)^+$ pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$.
3. Montrer que si $x_0 < x_1$ alors $f(x_0)^+ \leq f(x_1)^-$.
4. Dédire que l'ensemble des points de discontinuité de f est au plus dénombrable.
5. Inversement, soit D un ensemble au plus dénombrable. Construire une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ croissante telle que l'ensemble D soit exactement l'ensemble des points de discontinuité de f .

Exercice 7 : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction quelconque, on désigne par A l'ensemble

$$A = \left\{ a \in \mathbb{R} : \lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ existe et } \lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a) \right\}.$$

Le but de cet exercice est de démontrer que A est au plus dénombrable.

1. Soit $\mathcal{J}$ l'ensemble des intervalles de type $]p, q[$ avec $p, q \in \mathbb{Q}$. Montrer que $\mathcal{J}$ est un ensemble dénombrable.
2. Pour tout $r \in \mathbb{Q}$, on pose

$$A_r = \left\{ a \in A : \lim_{x \rightarrow a} f(x) < r < f(a) \text{ ou } f(a) < r < \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right\}$$

- (a) Soit $a \in A_r$. Justifier l'existence d'un intervalle $J_r \in \mathcal{J}$ tel que $J_r \cap A_r = \{a\}$.
- (b) Dédire que A_r est au plus dénombrable.

3. Conclure.

Exercice 8 : Soit X un ensemble non dénombrable de réels positifs. Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de X telle que la série $\sum x_n$ diverge.

Exercice 9 : On considère une famille de nombres réels strictement positifs $(x_i)_{i \in I}$. On suppose qu'il existe un réel positif M tel que pour toute partie finie J de I , on ait $\sum_{i \in J} x_i \leq M$. Montrer que I est au plus dénombrable. On pourra montrer, d'abord, que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble $\left\{ i \in I : x_i \geq \frac{1}{k} \right\}$ est fini.

1.5 Solutions des exercices

Exercice 1 :

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Il est clair que $m(x) > 0$. Comme

$$\mathbb{N} = \{f(y) : y \in \mathbb{R}\},$$

on en déduit que $\sum_{y \in A} 2^{-f(y)} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} = 2$, pour tout $A \subseteq]-\infty, x[$, donc $m(x) \leq 2$.

2. L'ensemble E est non vide puisqu'il contient les réels strictement négatifs, de plus E est majoré par 2 ce qui justifie l'existence de c .
3. Comme $c - 2^{-f(c)}$ n'est pas un majorant de E , il existe $y \in E$ et

$$y > c - 2^{-f(c)}.$$

4. Soit A une partie finie de $]-\infty, y[$. Alors $A \cup \{c\}$ est une partie finie de $]-\infty, y + 2^{-f(c)}[$, car $c \in]-\infty, y + 2^{-f(c)}[$. On écrit :

$$\sum_{z \in A} 2^{-f(z)} + 2^{-f(c)} = \sum_{z \in A \cup \{c\}} 2^{-f(z)} \leq m(y + 2^{-f(c)}).$$

Par passage au sup, sur tous les parties finies A de $]-\infty, y[$, on obtient :

$$m(y + 2^{-f(c)}) \geq m(y) + 2^{-f(c)}.$$

Comme $y \in E$, il vient : $m(y + 2^{-f(c)}) > y + 2^{-f(c)}$, donc

$$y + 2^{-f(c)} \in E.$$

5. On a $y + 2^{-f(c)} \in E$ et $y + 2^{-f(c)} > c$, ce qui est absurde par définition de c . Donc, $\mathbb{R}$ est non dénombrable.

Exercice 2 :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{P}_n(\mathbb{N})$ l'ensemble des parties de $\{0, 1, \dots, n\}$. Chaque $\mathcal{P}_n(\mathbb{N})$ est fini et $\mathcal{P}_f(\mathbb{N}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{P}_n(\mathbb{N})$. La proposition 11 montre que $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ est au plus dénombrable. De plus, l'ensemble $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ est infini ($\{n\} \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$) donc $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ est dénombrable.
- L'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ est non dénombrable et $\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \mathcal{P}_f(\mathbb{N}) \cup \mathcal{P}_{if}(\mathbb{N})$, avec $\mathcal{P}_{if}(\mathbb{N})$ désigne l'ensemble des parties infinies de $\mathbb{N}$. On en déduit que $\mathcal{P}_{if}(\mathbb{N})$ est infini non dénombrable.

Exercice 3 : Soit f une telle fonction. Si f est non constante alors par continuité de f on a : $f(\mathbb{R})$ est un intervalle non réduit à un point donc non dénombrable. Mais, par hypothèse, $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{Q} \cup f(\mathbb{Q})$ qui est dénombrable, donc $f(\mathbb{R})$ est dénombrable, absurde. Par suite, les seules fonctions vérifiant les conditions de l'exercice sont les fonctions constantes rationnelles.

Exercice 4 : Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, l'ensemble $\mathbb{Q} \cap A_i$ est non vide pour tout $i \in I$. Pour tout $i \in I$, on choisit un réel $x_i \in A_i \cap \mathbb{Q}$. On définit l'application $f : I \rightarrow \mathbb{Q}$ par $f(i) = x_i$ pour tout $i \in I$. L'application f est clairement injective, par suite I est au plus dénombrable.

Exercice 5 : On écrit $B = \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$. L'ensemble $A \setminus B$ est non dénombrable, puisque $A = A \setminus B \cup B$. Considérons un ensemble dénombrable $C = \{c_n : n \in \mathbb{N}\}$ de $A \setminus B$. La fonction $f : A \setminus B \mapsto A$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \notin C \\ c_{n+1} & \text{si } x = c_{2n+1} \\ b_n & \text{si } x = c_{2n} \end{cases} \quad \text{pour tout } x \in A \setminus B,$$

est clairement bijective.

Exercice 6 :

1. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. La fonction f est croissante et majorée sur $] -\infty, x_0[$, d'où l'existence de $f(x_0)^- = \lim_{x \rightarrow x_0, x < x_0} f(x)$. De même on démontre l'existence de $f(x_0)^+$.
2. Soit $t < x_0$. Par croissance de f , on a $f(t) \leq f(x_0)$ pour tout t tel que $t < x_0$. Par passage à la limite lorsque t tend vers x_0 et $t < x_0$, on obtient : $f(x_0)^- \leq f(x_0)$. De même on démontre que $f(x_0) \leq f(x_0)^+$.
3. On fixe un réel $t \in]x_0, x_1[$. Pour tout réel t' tel que $x_0 < t < t' < x_1$ on a :

$$f(x_0) \leq f(t) \leq f(t') \leq f(x_1).$$

Lorsque t' tend vers x_1 , on obtient $f(t) \leq f(x_1)^-$. Ceci est vrai pour tout réel $t \in]x_0, x_1[$, en passant à la limite lorsque t tend vers x_0 , il vient : $f(x_0)^+ \leq f(x_1)^-$.

4. D'après 2, un point x_0 est un point de discontinuité de f si et seulement si, $f(x_0)^- < f(x_0)^+$. On désigne par $Disc(f)$ l'ensemble des points de discontinuité de f . D'après la question précédente, la famille $(]f(x)^-, f(x)^+[)_{x \in Disc(f)}$ est une famille d'intervalles ouverts disjoints deux à deux. Par suite l'ensemble $Disc(f)$ est au plus dénombrable (cf. exercice 4).

5. Soit $D = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ un ensemble dénombrable. Posons, la fonction f définie par :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \mathbb{I}_{]x_n, +\infty[}(x),$$

où $\mathbb{I}_A$ est la fonction indicatrice de A , pour toute partie A de $\mathbb{R}$. L'inégalité

$$\left| \frac{1}{2^n} \mathbb{I}_{]x_n, +\infty[}(x) \right| \leq \frac{1}{2^n} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad (1.1)$$

montre que la série définissant f converge normalement, par suite simplement, sur $\mathbb{R}$. Donc f est bien définie. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note f_n la fonction définie par :

$$f_n(x) = \frac{1}{2^n} \mathbb{I}_{]x_n, +\infty[}(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Chaque f_n étant croissante donc f est croissante. Montrons que f est continue en tout point de $\mathbb{R} \setminus D$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $\mathbb{R} \setminus D$ et la série $\sum f_n$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de continuité sous le signe somme, f est continue sur $\mathbb{R} \setminus D$. Reste à montrer que f n'est pas continue en tout point de D . Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé. On écrit, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f_k(x) + h(x)$ avec

$$h(x) = \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq k}}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \mathbb{I}_{]x_n, +\infty[}(x).$$

La fonction f_k est discontinue en x_k et la fonction h est continue en x_k , car chaque f_n ($n \neq k$) est continue en x_k et la série converge uniformément sur $\mathbb{R}$. Ce qui montre que f est discontinue en x_k .

Exercice 7 :

1. L'application

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}^2 &\rightarrow \mathcal{J} \\ (p, q) &\mapsto]p, q[\end{aligned}$$

est clairement surjective et $\mathbb{Q}^2$ est dénombrable, donc l'ensemble $\mathcal{J}$ est dénombrable.

2.

- (a) Fixons $a \in A_r$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $f(a) < r < \lim_{x \rightarrow a} f(x)$. Il existe $\delta > 0$ tel que pour tout y vérifiant $|y - a| < \delta$ et $y \neq a$ on a $f(y) > r$, (il suffit d'appliquer la définition de la limite avec $\varepsilon = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - r > 0$). Soient $p, q \in \mathbb{Q}$ tels que $a - \delta < p < a < q < a + \delta$. Alors $J_r =]p, q[$ un intervalle de l'ensemble $\mathcal{J}$ et $J_r \subseteq]a - \delta, a + \delta[$. Pour tout $y \in J_r$ et $y \neq a$ on a $f(y) > r$, il vient donc que $J_r \cap A_r = \{a\}$.
- (b) On définit ainsi une application $\varphi : A_r \rightarrow \mathcal{J}$ par $\varphi(a) = J_r$ pour tout $a \in J_r$. Le fait que $J_r \cap A_r = \{a\}$ montre que φ est injective. Donc A_r est au plus dénombrable.

3. Il est clair que $A = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} A_r$. Donc A est au plus dénombrable comme réunion dénombrable d'ensembles au plus dénombrables.

Exercice 8 : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $X_n = \left\{ x \in X : x > \frac{1}{n} \right\}$. Le fait que

$X = \bigcup_{n=1}^{+\infty} X_n \cup \{0\}$ entraîne qu'il existe n_0 tel que X_{n_0} est infini, sinon, X serait au plus dénombrable (cf. proposition 11). Il est simple de voir que toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de X_{n_0} convient.

Exercice 9 : Fixons $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $\{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ un sous-ensemble de cardinal n de l'ensemble $A_k = \left\{ i \in I : x_i \geq \frac{1}{k} \right\}$. On a :

$$\frac{n}{k} \leq x_{i_1} + x_{i_2} + \dots + x_{i_n} \leq M.$$

On en déduit que tous les sous-ensembles finis de A_k ont au maximum kM éléments, ce qui montre que A_k est fini et que $\text{card}(A_k) \leq kM$. Comme l'ensemble I est la réunion des A_k , pour $k \in \mathbb{N}^*$, il est au plus dénombrable.

Chapitre 2

Familles sommables

Tout au long de ce chapitre I désigne un ensemble au plus dénombrable. Etant donnée une famille de nombres réels ou complexes $(a_i)_{i \in I}$ on cherche à donner un sens, lorsque c'est possible, à la somme $\sum_{i \in I} a_i$. Cette somme a bien un sens trivial dans le cas où I est fini. On suppose que I est dénombrable (dans la pratique I sera $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}^2$). Une première idée pour définir cette somme est d'énumérer l'ensemble $I = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ et de définir $\sum_{i \in I} a_i$ comme

étant $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{x_n}$, lorsque cette série converge. Cependant, cette notion n'est pas satisfaisante puisqu'elle dépend de l'énumération de I . Ce chapitre propose un cadre pour s'affranchir de ces contraintes. Dans un premier temps nous étudions la sommabilité dans le cas des familles positives, ensuite nous donnons la définition et les propriétés de la sommabilité pour les familles quelconques.

On rappelle que toute partie non vide D de $\mathbb{R}$ majorée admet une borne supérieure notée $\sup D$, qui est égale au plus petit majorant de D .

2.1 Familles positives

2.1.1 Définitions et propriétés

Soit $(a_i)_{i \in I}$ une famille de réels positifs. Pour toute partie finie J de I , on désigne par $\sum_{i \in J} a_i$ la somme des réels a_i , pour i décrivant J .

Définition 24 La famille $(a_i)_{i \in I}$ est dite sommable s'il existe un réel M tel que $\sum_{i \in J} a_i \leq M$ pour toute partie finie J de I . C'est-à-dire, la famille $(a_i)_{i \in I}$ est

sommable si l'ensemble $\left\{ \sum_{i \in J} a_i : J \text{ finie et } J \subseteq I \right\}$ est majoré. Dans ce cas, on définit la somme de la famille $(a_i)_{i \in I}$ que l'on note $\sum_{i \in I} a_i$ comme étant la borne supérieure de cet ensemble.

$$\sum_{i \in I} a_i = \sup \left\{ \sum_{i \in J} a_i : J \text{ partie finie de } I \right\}.$$

Remarque 25 L'hypothèse de la dénombrabilité de l'ensemble I , dans la définition de la sommabilité, n'est pas indispensable. Cependant l'exercice 9 du chapitre précédent montre qu'une si une famille des réels strictement positifs $(a_i)_{i \in I}$ est sommable alors I est au plus dénombrable.

Exemple 26 La famille $(e^{-|n|})_{n \in \mathbb{Z}}$ est sommable. En effet, soit J une partie finie de $\mathbb{Z}$. Il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $J \subseteq \{-n, -n+1, \dots, 0, 1, \dots, n\}$. Donc,

$$\begin{aligned} \sum_{i \in J} e^{-|i|} &\leq \sum_{i=-n}^n e^{-|i|} = \sum_{i=0}^n e^{-i} + \sum_{i=1}^n e^{-i} = 1 + 2 \sum_{i=1}^n e^{-i} \\ &\leq 1 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} e^{-i} = \frac{1 + e^{-1}}{1 - e^{-1}}. \end{aligned}$$

Exemple 27 Considérons la famille $(x)_{x \in \mathbb{Q} \cap [0,1]}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons J_n la partie finie de $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ définie par $J_n = \left\{ \frac{1}{k} : 1 \leq k \leq n \right\}$. Comme

$$\sum_{x \in J_n} x = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \rightarrow +\infty \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty,$$

on en déduit que la famille $(x)_{x \in \mathbb{Q} \cap [0,1]}$ n'est pas sommable.

Proposition 28

1. Soient $(a_i)_{i \in I}$ et $(b_i)_{i \in I}$ deux familles de réels positifs. On suppose que

$$0 \leq a_i \leq b_i \text{ pour tout } i \in I.$$

Si la famille $(b_i)_{i \in I}$ est sommable, alors la famille $(a_i)_{i \in I}$ est sommable et on a :

$$\sum_{i \in I} a_i \leq \sum_{i \in I} b_i.$$

2. Soit I' une partie de I . Si la famille $(a_i)_{i \in I}$ de réels positifs est sommable alors la famille $(a_i)_{i \in I'}$ est sommable.

Preuve. Pour toute partie finie J de I , on a :

$$\sum_{i \in J} a_i \leq \sum_{i \in J} b_i \leq \sum_{i \in I} b_i.$$

Par suite la famille $(a_i)_{i \in I}$ est sommable et $\sum_{i \in I} a_i \leq \sum_{i \in I} b_i$. Le deuxième point découle du fait que toute partie finie de I' est une partie finie de I . ■

L'utilisation de la définition pour étudier la sommabilité d'une famille n'est pas pratique en général, sauf peut être pour des cas simples. Le résultat suivant montre que l'étude de sommabilité se ramène à celle de la convergence des suites. On rappelle que l'ensemble I admet une suite exhaustive des parties finies (cf. théorème 15).

Proposition 29 Soit $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite exhaustive de parties finies de I . Une famille $(a_i)_{i \in I}$ de réels positifs est sommable si, et seulement si, la suite $(\sum_{i \in J_n} a_i)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée. Dans ce cas on a :

$$\sum_{i \in I} a_i = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i \in J_n} a_i.$$

Preuve. Remarquons, d'abord, que la suite $(\sum_{i \in J_n} a_i)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. Supposons que la famille $(a_i)_{i \in I}$ est sommable. Par définition de la sommabilité, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\sum_{i \in J_n} a_i \leq \sum_{i \in I} a_i$. Ce qui montre que la suite $(\sum_{i \in J_n} a_i)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée, par suite elle est convergente, et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i \in J_n} a_i \leq \sum_{i \in I} a_i \quad (2.1)$$

Supposons, réciproquement, que la suite $(\sum_{i \in J_n} a_i)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée. Soit J une partie finie de I . Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $J \subseteq J_{n_0}$. Par conséquent,

$$\sum_{i \in J} a_i \leq \sum_{i \in J_{n_0}} a_i \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i \in J_n} a_i$$

Comme ceci est vrai pour toute partie finie $J \subseteq I$, il en résulte que la famille $(a_i)_{i \in I}$ est sommable et

$$\sum_{i \in I} a_i \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i \in J_n} a_i \quad (2.2)$$

Les inégalités (2.1) et (2.2) montrent que $\sum_{i \in I} a_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i \in J_n} a_i$. ■

Corollaire 30 Soient $(a_i)_{i \in I}$ et $(b_i)_{i \in I}$ deux familles de réels positifs sommables et $\lambda \in \mathbb{R}^+$, alors la famille $(a_i + \lambda b_i)_{i \in I}$ est sommable et on a :

$$\boxed{\sum_{i \in I} (a_i + \lambda b_i) = \sum_{i \in I} a_i + \lambda \sum_{i \in I} b_i}$$

Preuve. Cela découle de l'égalité : $\sum_{i \in J_n} (a_i + \lambda b_i) = \sum_{i \in J_n} a_i + \lambda \sum_{i \in J_n} b_i$, pour toute suite exhaustive de parties finies $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de I . ■

On s'intéresse aux cas particuliers suivants :

Cas où $I = \mathbb{N}$: Ce cas est important, et on fait le lien avec la notion de série.

L'utilisation de la suite exhaustive de $\mathbb{N}$ définie par : $(J_n = \{0, 1, \dots, n\})_{n \in \mathbb{N}}$ permet de caractériser la sommabilité des suites à termes positifs.

Corollaire 31 Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs. La famille $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable si, et seulement si, la série de terme général a_n converge. Dans le cas de convergence on a :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n .$$

Cas où $I = \mathbb{Z}$: En utilisant la suite exhaustive de $\mathbb{Z}$ définie par

$$(J_n = \{k \in \mathbb{Z} : -n \leq k \leq n\})_{n \in \mathbb{N}},$$

on obtient :

Corollaire 32 Une famille de réels positifs $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est sommable si, et seulement si, les deux séries $\sum_{n \geq 0} a_n$ et $\sum_{n \geq 1} a_{-n}$ convergent et dans ce cas on a :

$$\boxed{\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N a_n .}$$

Preuve. On écrit :

$$\sum_{i \in J_n} a_i = \sum_{i=-n}^n a_i = \sum_{i=0}^n a_i + \sum_{i=1}^n a_{-i}$$

La suite $(\sum_{i \in J} a_i)_{n \in \mathbb{N}}$ converge si, et seulement si, les deux suites $(\sum_{i=0}^n a_i)_{n \in \mathbb{N}}$ et

$(\sum_{i=1}^n a_{-i})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent. ■

Cas où $I = \mathbb{N}^2$: Dans ce cas, l'utilisation des suites exhaustives définies par

$$J_n = \{0, 1, \dots, n\}^2 \text{ et } K_n = \{(i, j) : i + j \leq n\}$$

permet de caractériser la sommabilité des suites doubles.

Corollaire 33 *Soit $(a_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ une suite double de réels positifs. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *La famille $(a_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable.*
2. *La suite de terme général $\sum_{i=0}^n (\sum_{j=0}^n a_{i,j})$ converge.*
3. *La suite de terme général $\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} a_{i,j}$ converge.*

Le résultat suivant montre que la somme d'une famille sommable ne dépend pas de l'ordre de sommation.

Proposition 34 *Soit $(a_i)_{i \in I}$ une famille sommable de réels positifs et σ une permutation de I ($\sigma : I \rightarrow I$ une bijection). Alors la famille $(a_{\sigma(i)})_{i \in I}$ est sommable et on a :*

$$\boxed{\sum_{i \in I} a_{\sigma(i)} = \sum_{i \in I} a_i.}$$

Preuve. Pour toute partie finie J de I , on a $\sum_{i \in J} a_{\sigma(i)} \leq \sum_{i \in I} a_i$. Ce qui montre que la famille $(a_{\sigma(i)})_{i \in I}$ est sommable et par passage au sup sur toutes les parties finies de I , il s'ensuit que

$$\sum_{i \in I} a_{\sigma(i)} \leq \sum_{i \in I} a_i. \quad (2.3)$$

Ceci est vrai pour toute permutation σ de I et pour toute famille sommable $(a_i)_{i \in I}$. En appliquant l'inégalité (2.3) avec σ^{-1} et la famille $(a_{\sigma(i)})_{i \in I}$, on obtient

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i \in I} a_{\sigma^{-1}(\sigma(i))} \leq \sum_{i \in I} a_{\sigma(i)}.$$

Ce qui montre le résultat. ■

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels positifs. La convergence de la série $\sum u_n$ est équivalente à la sommabilité de la famille $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Le résultat suivant est une conséquence de la proposition précédente.

Corollaire 35 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs. La série $\sum u_n$ converge si, et seulement si, la série $\sum u_n$ est commutativement convergente, c'est-à-dire, pour tout permutation σ de $\mathbb{N}$ la série $\sum u_{\sigma(n)}$ converge. Dans ce cas on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)}.$$

Application : Soit $\sigma : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ une permutation. Alors pour tout $\alpha > 1$, la série $\sum \frac{1}{\sigma(n)^\alpha}$ converge, car la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente. On en déduit, par exemple, que la série $\sum \frac{1}{n\sigma(n)}$ converge, car

$$0 \leq \frac{1}{n\sigma(n)} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{\sigma(n)^2} \right) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*,$$

et la série de terme général $\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{\sigma(n)^2} \right)$ converge. Remarquons au passage que

$$\max \left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sigma(n)} : \sigma \text{ est une permutation de } \mathbb{N}^* \right\} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \zeta(2).$$

En effet : en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ et toute permutation σ :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n\sigma(n)} &\leq \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{\sigma(n)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} = \zeta(2). \end{aligned}$$

Par suite $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sigma(n)} \leq \zeta(2)$. L'égalité est atteinte si $\sigma = id_{\mathbb{N}^*}$.

2.1.2 Sommation par paquets

Le théorème de sommation par paquets est un outil puissant pour étudier la sommabilité d'une famille et calculer sa somme.

Une famille $(I_\lambda)_{\lambda \in A}$ de parties non vides de I est dite une partition de I si les ensembles I_λ sont deux à deux disjoints et leur réunion est I . Etant donnée une famille $(a_i)_{i \in I}$ de réels positifs, le théorème suivant montre que

la sommabilité de la famille $(a_i)_{i \in I}$ est équivalente à la sommabilité de la famille $(a_i)_{i \in I_\lambda}$ pour tout $\lambda \in A$ et la sommabilité de la famille $(s_\lambda)_{\lambda \in A}$, avec $s_\lambda = \sum_{i \in I_\lambda} a_i$.

Théorème 36 (Somme par paquets). Soit $(I_\lambda)_{\lambda \in A}$ une partition de I et $(a_i)_{i \in I}$ une famille de réels positifs. La famille $(a_i)_{i \in I}$ est sommable si, et seulement si, les deux conditions suivantes sont réalisées :

1. Pour tout $\lambda \in A$, la famille $(a_i)_{i \in I_\lambda}$ est sommable de somme $S_\lambda = \sum_{i \in I_\lambda} a_i$.
2. La famille $(S_\lambda)_{\lambda \in A}$ est sommable.

Dans ce cas, on a :

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{\lambda \in A} S_\lambda = \sum_{\lambda \in A} \left(\sum_{i \in I_\lambda} a_i \right).$$

Remarquons, d'abord, que puisque I est au plus dénombrable alors si $(I_\lambda)_{\lambda \in A}$ est une partition de I , l'ensemble A est au plus dénombrable. En effet, il suffit de choisir, pour tout $\lambda \in A$, un élément $i_\lambda \in I_\lambda$ et l'application $\lambda \mapsto i_\lambda$ est clairement injective de A dans I .

Dans le cas où la partition est indexée par $A = \mathbb{N}$, le théorème 36 s'énonce :

Théorème 37 Soit $(a_i)_{i \in I}$ une famille de réels positifs et $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une partition de I . Alors, la famille $(a_i)_{i \in I}$ est sommable si, et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$ la famille $(a_i)_{i \in I_n}$ est sommable et la série de terme général $\sum_{i \in I_n} a_i$ converge.

Dans ce cas, on a :

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{i \in I_n} a_i.$$

Preuve. (théorème 36). Supposons d'abord que la famille $(a_i)_{i \in I}$ est sommable. Comme pour tout $\lambda \in A$, $I_\lambda \subseteq I$ on en déduit que la famille $(a_i)_{i \in I_\lambda}$ est sommable, soit $S_\lambda = \sum_{i \in I_\lambda} a_i$. Montrons que la famille $(S_\lambda)_{\lambda \in A}$ est sommable. Soit $J = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$ une partie finie de A . Comme $I_{\lambda_1} \cap \dots \cap I_{\lambda_k} = \emptyset$ et $I_{\lambda_1} \cup \dots \cup I_{\lambda_k} \subseteq I$, il s'ensuit que :

$$\sum_{\lambda \in J} S_\lambda = \sum_{i \in I_{\lambda_1}} a_i + \sum_{i \in I_{\lambda_2}} a_i + \dots + \sum_{i \in I_{\lambda_k}} a_i \leq \sum_{i \in I} a_i.$$

Ce qui montre que la famille $(S_\lambda)_{\lambda \in A}$ est sommable et que

$$\sum_{\lambda \in J} S_\lambda \leq \sum_{i \in I} a_i. \quad (2.4)$$

Inversement, Supposons que les familles $(a_i)_{i \in I_\lambda}$ et $(S_\lambda)_{\lambda \in A}$ sont sommables. Soit J une partie finie de I . Le fait que $J \subseteq \bigcup_{\lambda \in A} I_\lambda$ assure l'existence d'un nombre fini d'éléments de A , $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$, tels que $J \subseteq I_{\lambda_1} \cup \dots \cup I_{\lambda_p}$. Par suite,

$$\sum_{i \in J} a_i \leq \sum_{i \in I_{\lambda_1}} a_i + \sum_{i \in I_{\lambda_2}} a_i + \dots + \sum_{i \in I_{\lambda_p}} a_i = S_{\lambda_1} + \dots + S_{\lambda_p} \leq \sum_{\lambda \in A} S_\lambda.$$

par conséquent, la famille $(a_i)_{i \in I}$ est sommable et

$$\sum_{i \in I} a_i \leq \sum_{\lambda \in A} S_\lambda. \quad (2.5)$$

Les inégalités (2.4) et (2.5) montrent que $\sum_{i \in I} a_i = \sum_{\lambda \in A} S_\lambda$. ■

Le théorème de sommation par paquets permet de prouver qu'une famille est sommable en partitionnant I d'une façon judicieuse. Une fois prouvé que la famille est sommable, il fournit un moyen de calculer sa somme. Lorsqu'on utilise deux ou plusieurs partitions de I on obtient des égalités et des sommes de séries.

Remarque : Soit $(I_\lambda)_{\lambda \in A}$ une partition de I et $(a_i)_{i \in I}$ une famille de réels positifs.

- Si chaque I_λ est fini pour tout $\lambda \in A$, alors la famille $(a_i)_{i \in I_\lambda}$ est automatiquement sommable. Donc pour justifier la sommabilité de $(a_i)_{i \in I}$ il suffit de vérifier la sommabilité de $(S_\lambda)_{\lambda \in A}$.
- Si l'ensemble A est fini. Pour montrer la sommabilité de $(a_i)_{i \in I}$ il suffit de vérifier la sommabilité de chaque famille $(a_i)_{i \in I_\lambda}$, puisque dans ce cas la sommabilité de la famille $(S_\lambda)_{\lambda \in A}$ est vérifiée.

Exemple 38 *Etudions la sommabilité de la famille*

$$\left(\frac{1}{(p+q)^\alpha} \right)_{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2}.$$

Considérons la partition $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$J_n = \{(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2 : p + q = n\}.$$

Comme chaque J_n est fini, alors d'après le théorème 37, la famille

$(\frac{1}{(p+q)^\alpha})_{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable si, et seulement si, la série de terme général $u_n = \sum_{(p,q) \in J_n} \frac{1}{(p+q)^\alpha}$ converge. Or,

$$u_n = \sum_{(p,q) \in J_n} \frac{1}{(p+q)^\alpha} = \sum_{(p,q) \in J_n} \frac{1}{n^\alpha} = \frac{1}{n^\alpha} \text{card}(J_n) = \frac{n-1}{n^\alpha} \sim \frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

On en déduit que la famille $(\frac{1}{(p+q)^\alpha})_{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable si, et seulement si, $\alpha > 2$, et dans ce cas on a :

$$\sum_{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{(p+q)^\alpha} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-1}{n^\alpha} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha-1}} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \zeta(\alpha-1) - \zeta(\alpha),$$

où ζ est la fonction zêta de Riemann définie sur $]1, +\infty[$ par $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

2.1.3 Séries doubles

Soit $(a_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ une suite double de réels positifs. Si on applique le théorème 37 à la famille $(a_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ en considérant les partitions de $\mathbb{N}^2$ suivantes :

- $J_p = \{(p, q) : q \in \mathbb{N}\}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ (Somme par colonnes).
- $K_q = \{(p, q) : p \in \mathbb{N}\}$ pour tout $q \in \mathbb{N}$ (Somme par lignes).
- $R_n = \{(p, q) : p+q = n\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (Somme par diagonales).

On obtient le résultat suivant :

Théorème 39 (Fubini) : La suite double de réels positifs $(a_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable si, et seulement si, l'une des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée.

1. Pour tout p la série $\sum_q a_{p,q}$ est convergente et la série $\sum_p \sum_{q=0}^{+\infty} a_{p,q}$ converge.
2. Pour tout q la série $\sum_p a_{p,q}$ est convergente et la série $\sum_q \sum_{p=0}^{+\infty} a_{p,q}$ converge.
3. La série de terme général $S_n = \sum_{p+q=n} a_{p,q}$ converge.

Dans ce cas on a :

$$\sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} a_{p,q} = \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{q=0}^{+\infty} a_{p,q} = \sum_{q=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} a_{p,q} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p+q=n} a_{p,q}.$$

Exemple 40 Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Une application directe du théorème de Fubini montre que la convergence des séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ assure la sommabilité la famille $(a_n b_m)_{(n,m) \in \mathbb{N}^2}$ et que

$$\sum_{(n,m) \in \mathbb{N}^2} a_n b_m = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \right)$$

Exemple 41 On cherche à calculer la somme $\sum_{n=2}^{+\infty} (\zeta(n) - 1)$ avec

$$\zeta(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^x} \text{ pour tout } x > 1.$$

L'égalité $\sum_{n \geq 2} (\zeta(n) - 1) = \sum_{n \geq 2} \sum_{k \geq 2} \frac{1}{k^n}$ nous invite à étudier la sommabilité de la suite double $(\frac{1}{k^n})_{(n,k) \in (\mathbb{N}^* \setminus \{1\})^2}$.

– Pour tout k fixé la série géométrique $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{k^n}$ converge et

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{k^n} = \frac{1}{k^2 - k} \sim \frac{1}{k^2}.$$

– La série $\sum_{k \geq 2} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{k^n}$ est donc convergente.

D'après le théorème de Fubini, la famille $(\frac{1}{k^n})_{(n,k) \in (\mathbb{N}^* \setminus \{1\})^2}$ est sommable et on a :

$$\sum_{(n,k) \in (\mathbb{N}^* \setminus \{1\})^2} \frac{1}{k^n} = \sum_{n=2}^{+\infty} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^n} = \sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{k^n}$$

donc,

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (\zeta(n) - 1) = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^2 - k} = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = 1.$$

Exemple 42 Soit $x \in [0, 1[$. Une application du théorème de Fubini montre la sommabilité de la famille $(x^{nk})_{(n,k) \in \mathbb{N}^*}$. En effet,

– Pour tout n fixé la famille $(x^{nk})_{(n,k) \in \mathbb{N}^*}$ est sommable puisque la série

$$\sum_k (x^n)^k \text{ converge et } S_n = \sum_{k=1}^{\infty} (x^n)^k = \frac{x^n}{1 - x^n}.$$

– La série $\sum_n \frac{x^n}{1-x^n}$ converge car $\frac{x^n}{1-x^n} \sim x^n$.

Par suite la famille $(x^{nk})_{(n,k) \in \mathbb{N}^*}$ est sommable et sa somme est égale à :

$$\sum_{(n,k) \in (\mathbb{N}^*)^2} x^{nk} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n} \quad (2.6)$$

D'autre part, lorsqu'on applique le théorème de sommation par paquets à la famille $(x^{nk})_{(n,k) \in \mathbb{N}^*}$ avec la partition $(K_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$K_p = \{(n, k) \in (\mathbb{N}^*)^2 : nk = p\}.$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \sum_{(n,k) \in (\mathbb{N}^*)^2} x^{nk} &= \sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{(n,k) \in K_p} x^{nk} = \sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{(n,k) \in K_p} x^p \\ &= \sum_{p=1}^{+\infty} x^p \left(\sum_{(n,k) \in K_p} 1 \right) = \sum_{p=1}^{+\infty} x^p d(p), \end{aligned} \quad (2.7)$$

où $d(p)$ désigne le nombre de diviseurs de p . Les égalités (2.6) et (2.7) montrent que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{p=1}^{+\infty} d(p)x^p \text{ pour tout } x \in [0, 1[.$$

2.2 Familles sommables à valeurs complexes

2.2.1 Définition et propriétés

Définition 43 Une famille de nombre complexes $(a_i)_{i \in I}$ est sommable si la famille des réels positifs $(|a_i|)_{i \in I}$ est sommable.

L'étude de la sommabilité d'une famille de nombres complexes se ramène, donc, à travailler avec des familles de réels positifs.

Exemple 44 Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, alors la famille $((\frac{z}{p})^{n+1})_{(p,n) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ est

sommable. En effet : Pour p fixé la série $\sum_{n \geq 1} (\frac{|z|}{p})^{n+1}$ converge, comme série

géométrique de raison $\frac{|z|}{p} < 1$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{|z|}{p})^n = \frac{|z|^2}{p^2 - |z|^2} \sim \frac{|z|^2}{p^2}$, donc la série

$\sum_{p \geq 1} \sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{|z|}{p})^n$ converge.

Dans le cas où $I = \mathbb{N}$ ou une partie de $\mathbb{N}$, on a :

Proposition 45 *Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombre réels ou complexes. La famille $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable si, et seulement si, la série $\sum a_n$ est absolument convergente.*

Attention : *Une série convergente mais non absolument convergente est non sommable.*

Le théorème suivant donne un sens à la somme $\sum_{i \in I} a_i$ d'une famille sommable $(a_i)_{i \in I}$.

Théorème 46

1. Soient $(a_i)_{i \in I}$ une famille de nombres réels et $(a_i^+)_{i \in I}$, $(a_i^-)_{i \in I}$ les deux familles de nombres réels positifs définies par :

$$a_i^+ = \max(a_i, 0) \text{ et } a_i^- = \max(-a_i, 0) \text{ pour tout } i \in I.$$

La famille $(a_i)_{i \in I}$ est sommable si, et seulement si, les deux familles $(a_i^+)_{i \in I}$ et $(a_i^-)_{i \in I}$ sont sommables, et dans ce cas on définit la somme de la famille $(a_i)_{i \in I}$ par :

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i \in I} a_i^+ - \sum_{i \in I} a_i^-$$

2. Une famille $(a_j)_{j \in I}$ de nombres complexes est sommable si, et seulement si, les familles $(\operatorname{Re}(a_j))_{j \in I}$ et $(\operatorname{Im}(a_j))_{j \in I}$ sont sommables et dans ce cas, sa somme est définie par :

$$\sum_{j \in I} a_j = \sum_{j \in I} \operatorname{Re}(a_j) + i \sum_{j \in I} \operatorname{Im}(a_j)$$

Preuve. Commençons par le cas où $(a_i)_{i \in I}$ est une famille de nombres réels. On écrit, pour tout $i \in I$:

$$a_i = a_i^+ - a_i^- \text{ et } |a_i| = a_i^+ + a_i^-.$$

La sommabilité de la famille $(a_i)_{i \in I}$ est équivalente à la sommabilité de la famille $(|a_i|)$ qui est équivalente à la sommabilité de $(a_i^+)_{i \in I}$ et $(a_i^-)_{i \in I}$. Dans le cas général, si la famille de nombres complexes $(a_i)_{i \in I}$ est sommable alors les familles

$$(\operatorname{Re}(a_j))_{j \in I} \text{ et } (\operatorname{Im}(a_j))_{j \in I}$$

sont sommables, puisque $|\operatorname{Re}(a_j)| \leq |a_j|$ et $|\operatorname{Im}(a_j)| \leq |a_j|$ pour tout $j \in I$.
L'inégalité

$$|a_j| \leq |\operatorname{Re}(a_j)| + |\operatorname{Im}(a_j)|,$$

montre la réciproque. ■

Proposition 47 (*Sommabilité par suites exhaustives*). Soit $(a_i)_{i \in I}$ une famille de nombre complexes et $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite exhaustive de parties finies de I . Si la famille $(a_i)_{i \in I}$ est sommable alors la suite $(\sum_{i \in J_n} a_i)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et on a :

$$\sum_{i \in I} a_i = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i \in J_n} a_i$$

Preuve. Traitons, d'abord, le cas où $(a_i)_{i \in I}$ est une famille de nombre réels. Dans ce cas les familles $(a_i^+)_{i \in I}$ et $(a_i^-)_{i \in I}$ sont sommables. Il découle de l'égalité $\sum_{i \in J_n} a_i = \sum_{i \in J_n} a_i^+ - \sum_{i \in J_n} a_i^-$ que la suite $(\sum_{i \in J_n} a_i)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i \in J_n} a_i = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i \in J_n} a_i^+ - \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i \in J_n} a_i^- = \sum_{i \in I} a_i^+ - \sum_{i \in I} a_i^- = \sum_{i \in I} a_i.$$

Dans le cas général, on applique ce qui précède aux familles $(\operatorname{Re}(a_i))_{i \in I}$ et $(\operatorname{Im}(a_i))_{i \in I}$. ■

La réciproque du résultat précédente n'est pas vraie, par exemple, la famille $(n)_{n \in \mathbb{Z}}$ ou la famille $(\frac{(-1)^n}{n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne sont pas sommables bien que les suites $(\sum_{i=-n}^n i)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\sum_{i=1}^n \frac{(-1)^i}{i})_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergent.

On applique la proposition précédente dans les cas où $I = \mathbb{Z}$ ou $I = \mathbb{N}^2$.

Si $I = \mathbb{Z}$, en utilisant la suite exhaustive $J_n = \{-n, -n+1, \dots, 0, 1, \dots, n\}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient :

Corollaire 48 Une famille $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est sommable si, et seulement si, les séries $\sum_{n \geq 0} |a_n|$ et $\sum_{n \geq 1} |a_{-n}|$ convergent et dans ce cas on a :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}.$$

Preuve. L'équivalence est une conséquence du corollaire 32 et de la proposition 47. ■

Exemple 49 Soit $r \in [0, 1[$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Etudions la sommabilité de la famille $(r^{|n|}e^{in\alpha})_{n \in \mathbb{Z}}$.

Comme les séries $\sum_{n \geq 0} |r^{|n|}e^{in\alpha}| = \sum_{n \geq 0} r^n$ et $\sum_{n \geq 1} |r^{|-n|}e^{-in\alpha}| = \sum_{n \geq 1} r^n$ convergent, il s'ensuit que la famille $(r^{|n|}e^{in\alpha})_{n \in \mathbb{Z}}$ est sommable, et on a :

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|}e^{in\alpha} &= \sum_{n=0}^{+\infty} r^n e^{in\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty} r^n e^{-in\alpha} \\ &= \frac{1}{1 - re^{i\alpha}} + \frac{re^{-i\alpha}}{1 - re^{-i\alpha}} \\ &= \frac{1 - r^2}{(1 - r \cos(\alpha))^2 + r^2 \sin^2(\alpha)}. \end{aligned}$$

Si $I = \mathbb{N}^2$, on utilise les suites exhaustives définies par

$$J_n = \{0, 1, \dots, n\}^2 \text{ et } K_n = \{(p, q) : p + q = n\} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

On obtient le corollaire suivant :

Corollaire 50 Une famille $(a_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable si, et seulement si, l'une des conditions suivantes est réalisée :

- La suite de terme général $\sum_{p=0}^n (\sum_{q=0}^n |a_{p,q}|)$ converge.
- La suite de terme général $\sum_{i=0}^n (\sum_{j=0}^{n-i} |a_{i,j}|)$ converge.

Et dans ce cas on a :

$$\boxed{\sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} a_{p,q} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{p=0}^n (\sum_{q=0}^n a_{p,q}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n (\sum_{j=0}^{n-i} a_{i,j}).}$$

Preuve. L'équivalence est une conséquence du corollaire 33 et de la proposition 47. ■

Proposition 51

1. L'ensemble des familles sommables indexées par I , noté $\ell^1(I)$, est un espace vectoriel. On définit une norme sur $\ell^1(I)$ en posant

$$\|(a_i)_{i \in I}\| = \sum_{i \in I} |a_i| \text{ pour tout famille } (a_i)_{i \in I} \in \ell^1(I).$$

2. L'application

$$\begin{aligned} S : \ell^1(I) &\rightarrow \mathbb{C} \\ (a_i)_{i \in I} &\mapsto \sum_{i \in I} a_i \end{aligned}$$

est linéaire et continue. En particulier, on a :

$$\left| \sum_{i \in I} a_i \right| \leq \sum_{i \in I} |a_i|, \text{ pour toute famille sommable } (a_i)_{i \in I}.$$

Preuve. Fixons une suite exhaustive de parties finies, $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$, de I . Soient $(a_i)_{i \in I}$ et $(b_i)_{i \in I}$ deux familles sommables. Comme

$$|a_i + \lambda b_i| \leq |a_i| + |\lambda| |b_i| \text{ pour tout } i \in I \text{ et tout } \lambda \in \mathbb{C},$$

on en déduit que la famille $(a_i + \lambda b_i)_{i \in I}$ est sommable. D'autre part, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i \in J_n} (a_i + \lambda b_i) = \sum_{i \in J_n} a_i + \lambda \sum_{i \in J_n} b_i$$

ce qui donne par passage à la limite,

$$S((a_i)_{i \in I} + \lambda(b_i)_{i \in I}) = \sum_{i \in I} (a_i + \lambda b_i) = \sum_{i \in I} a_i + \lambda \sum_{i \in I} b_i = S((a_i)_{i \in I}) + \lambda S((b_i)_{i \in I}).$$

Ce qui prouve la linéarité de S . Soit $(a_i)_{i \in I} \in \ell^1(I)$ telle que $\|(a_i)_{i \in I}\| = 0$. Pour tout $i \in I$, l'inégalité

$$|a_i| \leq \|(a_i)_{i \in I}\| = 0$$

montre que $a_i = 0$, par suite la famille $(a_i)_{i \in I}$ est nulle. De plus, on vérifie facilement que

$$\|\lambda(a_i)_{i \in I}\| = |\lambda| \|(a_i)_{i \in I}\|$$

et que

$$\|(a_i)_{i \in I} + (b_i)_{i \in I}\| \leq \|(a_i)_{i \in I}\| + \|(b_i)_{i \in I}\|.$$

Reste à montrer la continuité de l'application S . Soit $(a_i)_{i \in I} \in \ell^1(I)$. On a, $\left| \sum_{i \in J_n} a_i \right| \leq \sum_{i \in J_n} |a_i|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par passage à la limite lorsque n tend vers $+\infty$ on obtient :

$$\begin{aligned} |S((a_i)_{i \in I})| &= \left| \sum_{i \in I} a_i \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \sum_{i \in J_n} a_i \right| \\ &\leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i \in J_n} |a_i| = \sum_{i \in I} |a_i| = \|(a_i)_{i \in I}\|. \end{aligned}$$

D'où la continuité de S . ■

2.2.2 Sommation par paquets

Le théorème de sommation par paquets pour les familles à valeurs complexes ne permet pas de vérifier la sommabilité, mais elle permet de calculer la somme d'une famille sommable en utilisant une partition de I .

Théorème 52 Soit $(I_\lambda)_{\lambda \in A}$ une partition de I et $(a_i)_{i \in I}$ est une famille **sommable**. Alors on a :

1. La famille $(a_i)_{i \in I_\lambda}$ est sommable de somme $S_\lambda = \sum_{i \in I_\lambda} a_i$.
2. La famille $(S_\lambda)_{\lambda \in A}$ est sommable.
3. L'égalité

$$\boxed{\sum_{i \in I} a_i = \sum_{\lambda \in A} S_\lambda = \sum_{\lambda \in A} \sum_{i \in I_\lambda} a_i.}$$

Preuve. Soit $(a_i)_{i \in I}$ une famille sommable de nombres complexes. La famille $(|a_i|)_{i \in I}$ est alors sommable. Le théorème 36, montre que la famille $(|a_i|)_{i \in I_\lambda}$ est sommable pour tout $\lambda \in A$. Soit $S_\lambda = \sum_{i \in I_\lambda} a_i$. Comme, pour tout $\lambda \in A$,

$$|S_\lambda| \leq \sum_{i \in I_\lambda} |a_i| \leq \sum_{i \in I} |a_i|$$

par suite, la famille $(S_\lambda)_{\lambda \in A}$ est sommable.

Pour établir le dernier point du théorème on distingue deux cas :

– Si la famille $(a_i)_{i \in I}$ est à valeurs réelles. On écrit :

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i \in I} (a_i + |a_i|) - \sum_{i \in I} |a_i|.$$

Comme les deux familles $(a_i + |a_i|)$ et $(|a_i|)_{i \in I}$ sont positives, on applique le théorème 36 et on obtient ainsi

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} a_i &= \sum_{\lambda \in A} \sum_{i \in I_\lambda} (a_i + |a_i|) - \sum_{\lambda \in A} \sum_{i \in I_\lambda} |a_i| \\ &= \sum_{\lambda \in A} \left(\sum_{i \in I_\lambda} (a_i + |a_i|) - \sum_{i \in I_\lambda} |a_i| \right) = \sum_{\lambda \in A} \sum_{i \in I_\lambda} a_i. \end{aligned}$$

– Si la famille $(a_i)_{i \in I}$ est à valeurs complexes. On écrit :

$$(a_i)_{i \in I} = (\operatorname{Re}(a_i))_{i \in I} + i \cdot (\operatorname{Im}(a_i))_{i \in I}.$$

En utilisant le cas réel on obtient :

$$\begin{aligned}\sum_{i \in I} a_i &= \sum_{i \in I} \operatorname{Re}(a_i) + i \cdot \sum_{i \in I} \operatorname{Im}(a_i) \\ &= \sum_{\lambda \in A} \sum_{i \in I_\lambda} \operatorname{Re}(a_i) + i \cdot \sum_{\lambda \in A} \sum_{i \in I_\lambda} \operatorname{Im}(a_i) = \sum_{\lambda \in A} \sum_{i \in I_\lambda} a_i.\end{aligned}$$

Ce qui montre le théorème. ■

En combinant les théorèmes 52 et 36 on obtient le résultat suivant :

Théorème 53 Soit $(a_i)_{i \in I}$ une famille de nombres complexes et $(I_\lambda)_{\lambda \in A}$ une partition de I . La famille $(a_i)_{i \in I}$ est sommable si, et seulement si, les deux conditions suivantes sont réalisées.

1. Pour tout $\lambda \in A$, la famille $(|a_i|)_{i \in I_\lambda}$ est sommable de somme

$$S_\lambda = \sum_{i \in I_\lambda} |a_i|.$$

2. La famille $(S_\lambda)_{\lambda \in A}$ est sommable.

Dans ce cas on a :

$$\boxed{\sum_{i \in I} a_i = \sum_{\lambda \in A} S_\lambda = \sum_{\lambda \in A} \sum_{i \in I_\lambda} a_i}$$

2.2.3 Application aux séries

Dans le cas où $I = \mathbb{N}$, le théorème 52 s'applique aux séries absolument convergentes.

Exemple 54 Sachant que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, on cherche à calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

Les séries $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ sont absolument convergentes, en appliquant le théorème 52, on obtient :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{3}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8},$$

et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Par suite,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

La proposition suivante montre qu'une série absolument convergente est commutativement convergente.

Proposition 55 *Si la série $\sum_n a_n$ est absolument convergente alors pour toute permutation $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ la série $\sum_n a_{\sigma(n)}$ converge absolument et on a :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

Preuve. Le résultat se démontre en appliquant le théorème 52 à la famille sommable $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et la partition $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{N}$ définie par $J_n = \{\sigma(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. ■

Attention : pour les séries semi-convergentes (convergentes mais non absolument), le résultat est faux. Dans le cas d'une série réelle, on démontre que, si on a une série semi-convergente $\sum u_n$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ on peut trouver une permutation σ de $\mathbb{N}$ telle que la série $\sum u_{\sigma(n)}$ converge vers $\alpha \in \mathbb{R}$.

2.2.4 Suites doubles

Théorème de Fubini

Afin d'étudier la sommabilité des familles indexées par $\mathbb{N}^2$ (les suites doubles), on utilise souvent les partitions suivantes de $\mathbb{N}^2$:

- Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $I_p = \{(p, q) : q \in \mathbb{N}\}$.
- Pour tout $q \in \mathbb{N}$, $J_q = \{(p, q) : p \in \mathbb{N}\}$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $K_n = \{(p, q) \in \mathbb{N}^2 : p + q = n\}$.

On en déduit donc par application du théorème 53 le résultat suivant :

Théorème 56 (Fubini) : Soit $(a_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ une suite double. Alors la famille $(a_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable si, et seulement si, l'une de ces conditions est réalisée.

1. Pour tout $p \in \mathbb{N}$ la série $\sum_q |a_{p,q}|$ converge et la série $\sum_p \sum_{q=0}^{+\infty} |a_{p,q}|$ converge.
2. Pour tout $q \in \mathbb{N}$ la série $\sum_p |a_{p,q}|$ converge et la série $\sum_q \sum_{p=0}^{+\infty} |a_{p,q}|$ converge.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ la série de terme général $\sum_{p+q=n} |a_{p,q}|$ converge.

Et dans ce cas on a :

$$\sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} a_{p,q} = \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\sum_{q=0}^{+\infty} a_{p,q} \right) = \sum_{q=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} a_{p,q} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{p+q=n} a_{p,q} \right).$$

Exemple 57 Montrons l'égalité :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{1 - z^{2n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{2n-1}}{1 - z^{2n-1}} \text{ pour tout } z \in \mathbb{C} \text{ et } |z| < 1.$$

Remarquons, d'abord, que ces deux séries convergent, puisque

$$\frac{z^n}{1 - z^{2n}} \sim z^n \text{ et } \frac{z^{2n-1}}{1 - z^{2n-1}} \sim z^{2n-1}.$$

En utilisant l'égalité $\frac{1}{1 - z^{2n}} = \sum_{k=0}^{+\infty} (z^{2n})^k$ on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{1 - z^{2n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} z^{(2k+1)n}.$$

Montrons que la suite double $(z^{(2k+1)n})_{(n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}}$ est sommable. Pour k fixé, la série $\sum_n |z|^{(2k+1)n}$ est convergente, comme une série géométrique de rai-

son $|z|^{(2k+1)} < 1$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} |z|^{(2k+1)n} = \frac{|z|^{2k+1}}{1 - |z|^{2k+1}} \sim |z|^{2k+1}$, donc la série

$\sum_k \sum_{n=1}^{+\infty} |z|^{(2k+1)n}$ est convergente. On a alors :

$$\sum_{(n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}} z^{(2k+1)n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} z^{(2k+1)n} = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} z^{(2k+1)n},$$

par suite,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{1 - z^{2n}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^{2k+1}}{1 - z^{2k+1}} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^{2k-1}}{1 - z^{2k-1}}.$$

Application 2 : Soit $(a_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*}$ la famille définie par $a_{p,q} = \frac{1}{p^2 - q^2}$ si

$p \neq q$ et $a_{p,q} = 0$ si $p = q$. On vérifie que les deux sommes $\sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{q=1}^{+\infty} a_{p,q}$ et

$\sum_{q=1}^{+\infty} \sum_{p=1}^{+\infty} a_{p,q}$ existent et sont différentes, ce qui montre que cette famille

n'est pas sommable. On pose $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$, on a :

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{p=1}^N a_{p,q} &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2q} \sum_{p=1, p \neq q}^N \left(\frac{1}{p-q} - \frac{1}{p+q} \right) \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2q} \left(\sum_{p=1-q, p \neq 0}^{N-q} \frac{1}{k} - \sum_{p=1+q}^{N+q} \frac{1}{k} \right) \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2q} \left(\frac{1}{q} - H_{N+q} + H_{N-q} \right) \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2q} \left(\frac{1}{q} - \ln(N+q) + \ln(N-q) + o(1) \right) \\ &= \frac{1}{2q^2}. \end{aligned}$$

D'où $\sum_{p=1}^{+\infty} a_{p,q} = \frac{1}{2q^2}$. Donc

$$\sum_{q=1}^{+\infty} \sum_{p=1}^{+\infty} a_{p,q} = \frac{1}{2} \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{q^2} = \frac{1}{2} \zeta(2)$$

Il est clair qu'un calcul analogue montre que :

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{q=1}^{+\infty} a_{p,q} = -\frac{1}{2} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} = -\frac{1}{2} \zeta(2)$$

D'où

$$\sum_{q=1}^{+\infty} \sum_{p=1}^{+\infty} a_{p,q} = - \sum_{q=1}^{+\infty} \sum_{p=1}^{+\infty} a_{p,q}$$

Produit de deux séries absolument convergentes

Considérons deux séries absolument convergentes $\sum a_n$ et $\sum b_n$. Une application directe du théorème de Fubini (cas d'une famille positive, théorème 39) montre que la famille $(a_n b_m)_{(n,m) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable. On applique maintenant le théorème 56, on obtient que

- La série de terme général $\sum_{p+q=n} |a_p b_q|$ converge. Donc, la série de terme général

$$C_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q = \sum_{p=0}^n a_p b_{n-p}$$

converge absolument et que :

$$\sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} a_p b_q = \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{q=0}^{+\infty} a_p b_q = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p+q=n} a_p b_q$$

Par suite, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} C_n = \left(\sum_{p=0}^{+\infty} a_p \right) \left(\sum_{q=0}^{+\infty} b_q \right)$$

La série de terme général $C_n = \sum_{p=0}^n a_p b_{n-p}$ est appelée produit de Cauchy de deux séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$.

Proposition 58 Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries absolument convergentes, alors la série de terme général

$$C_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q = \sum_{p=0}^n a_p b_{n-p}$$

est absolument convergente et on a :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} C_n = \left(\sum_{p=0}^{+\infty} a_p \right) \left(\sum_{q=0}^{+\infty} b_q \right)} \quad (2.8)$$

Remarques : 1. Si les deux séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont convergentes mais non absolument, la convergence de la série $\sum C_n$ n'est plus assurée.

Par exemple, si $a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ pour tout $n \geq 1$, alors

$$C_n = \sum_{p=1}^n \frac{(-1)^p}{\sqrt{p}} \frac{(-1)^{n-p}}{\sqrt{n-p}} = (-1)^n \sum_{p=1}^n \frac{1}{\sqrt{p} \sqrt{n-p}}.$$

Or,

$$|C_n| = \sum_{p=1}^n \frac{1}{\sqrt{p}\sqrt{n-p}} \geq \sum_{p=1}^n \frac{2}{p+n-p} = 2$$

Ce qui montre que C_n ne tend pas vers 0 et par suite la série $\sum C_n$ diverge grossièrement.

2. On démontre que si l'une de deux séries est absolument convergente et l'autre est convergente alors la série $\sum C_n$ converge et on a l'égalité (2.8), ce résultat est dû à Mertens (cf. exercice 12).

Pour finir :

Pour étudier une famille $(a_i)_{i \in I}$, on procède dans la pratique de la façon suivante.

1. On commence par étudier la sommabilité de la famille des réels positifs $(|a_i|)_{i \in I}$ soit par
 - Majoration des ses sommes finies.
 - Application du théorème 36, en considérant une partition convenable de I .
 - Application du théorème de Fubini, dans le cas des suites doubles.
2. Ensuite, toute partition $(I_\lambda)_{\lambda \in A}$ de I nous amène à l'égalité

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{\lambda \in A} \sum_{i \in I_\lambda} a_i,$$

dans le cas de sommabilité.

3. Dans le cas où $I = \mathbb{N}^2$, l'utilisation des partitions suivantes

$$J_n = \{(p, q) : p + q = n\} \text{ ou } J_n = \{(p, q) : p \times q = n\},$$

est parfois utile.

2.3 Exercices

Exercice 1 : Etudier la sommabilité des familles suivantes :

1. $(\frac{1}{x^3})_{x \in \mathbb{Q} \cap [1, +\infty[}$.
2. $((\frac{1}{(p+q)^\alpha})_{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2}$.
3. $(\frac{1}{(p^2+q^2)^\alpha})_{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2}$.

4. $\left(\frac{1}{a^p + b^p}\right)_{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ où $a > 1$ et $b > 1$.

5. $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in A}$ avec

$$A = \{n \in \mathbb{N}^* : \text{l'écriture décimale de } n \text{ ne contient pas } 9\}.$$

6. $\left(\frac{1}{n^2 - m^2}\right)_{(n,m) \in A}$ où $A = \mathbb{N}^2 \setminus \{(n,n) : n \in \mathbb{N}\}$.

Exercice 2 : Calculer les sommes éventuelles suivantes :

1. $\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p=n}^{+\infty} \frac{1}{p!}$.

2. $\sum_{\substack{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2 \\ p|q}} \frac{1}{p^x q^x}$ avec $x > 1$.

3. $\sum_{\substack{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2 \\ \text{pgcd}(p,q)=1}} \frac{1}{p^2 q^2}$.

4. $\sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} \frac{1}{p! q! (p+q+1)}$.

Exercice 3 : Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que $\sum v_k$ converge absolument. Montrer que la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(k+1)v_k}{k} \text{ pour tout } n \geq 1,$$

est convergente et calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

Exercice 4 : Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$ on a l'égalité

$$\sum_{p=2}^{+\infty} \frac{z^2}{p(p-z)} = \sum_{n=2}^{+\infty} (\zeta(n) - 1) z^n,$$

où $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ pour tout $x > 1$.

Exercice 5 : (Oral Mines-Ponts)

1. Montrer que la fonction $\exp(\exp(x))$ est développable en série entière et calculer son développement.

2. Même question avec la fonction $f(x) = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x+k}$.

Exercice 6 : (Oral Centrale). On pose $f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{1+t^n}$.

- Déterminer le domaine de définition de f .
- Montrer que $f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} t^n}{1-t^n}$ pour tout $t \in]-1, 1[$.
- Montrer que la série de fonctions $\sum (1-t) \frac{(-1)^{n+1} t^n}{1-t^n}$ converge uniformément sur $[0, 1[$.
- Calculer $\lim_{t \rightarrow 1^-} (1-t)f(t)$. (On rappelle que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2)$).
- Montrer que f est développable en série entière. Donner une interprétation arithmétique des coefficients de ce développement.

Exercice 7 : Pour tout $n \geq 1$, on désigne par $d(n)$ le nombre de diviseurs de n et $\varphi(n)$ le nombre des entiers compris entre 1 et n qui sont premiers avec n .

- Montrer l'égalité : $\zeta(x)^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d(n)}{n^x}$ pour tout réel $x > 1$.
- Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a : $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$.
 - Déduire que :

$$\frac{\zeta(x-1)}{\zeta(x)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varphi(n)}{n^x} \text{ pour tout } x > 2.$$

Exercice 8 :

- Montrer l'existence et calculer la valeur de

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}.$$

- En déduire la valeur de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{E(\sqrt{n})}{n(n+1)},$$

où $E(x)$ désigne la partie entière de x .

Exercice 9 : On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par

$$u_n = n - \zeta(2) - \zeta(3) - \dots - \zeta(n) \text{ pour tout } n \geq 1.$$

1. Vérifier que pour tout $n \geq 1$, on a :

$$u_n = \sum_{j=2}^{+\infty} \frac{1}{j^n(j-1)}.$$

2. Montrer que la série $\sum (-1)^n n u_n$ converge et que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n u_n = \frac{5}{4} - \frac{1}{2} \zeta(2).$$

Exercice 10 : Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < 1$. Montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(1-x^n)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sigma(n) x^n,$$

où, $\sigma(n)$ est la somme des diviseurs positifs de n .

Exercice 11 : (Oral Centrale). Soit $\mu : \mathbb{N}^* \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ la fonction nommée d'après Möbius qui, à un entier n , associe $\mu(n) = 0$ si n est divisible par le carré d'un nombre premier (i.e. il existe p premier tel que p^2 divise n) et $\mu(n) = (-1)^r$ si n a pour décomposition en facteurs premiers $p_1.p_2...p_r$, où $p_1, p_2, \dots, p_r$ sont distincts deux à deux. Noter que comme 1 est le produit de zéro nombre premier, on a $\mu(1) = 1$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$. Montrer que $\sum_{d|n} \mu(d) = 0$. En déduire que

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\mu(i)}{i^2} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i^2}}.$$

On admet que $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

2. Soit φ l'indicatrice d'Euler, qui à n associe le nombre d'entiers k inférieurs à n vérifiant $\text{pgcd}(k, n) = 1$. On rappelle que

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

(a) Montrer que pour tout entier non nul n , on a :

$$\sum_{d|n} \frac{n}{d} \mu(d) = \varphi(n).$$

(b) Montrer que pour tout $x > 0$, on a :

$$\sum_{1 \leq n \leq x} \varphi(n) = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i \leq x} \mu(i) (E(\frac{x}{i}) + E(\frac{x}{i})^2)$$

où $E(y)$ désigne la partie entière d'un réel y .

(c) Dédurre que

$$\sum_{1 \leq n \leq x} \varphi(n) \underset{+\infty}{\sim} \frac{3x^2}{\pi^2}.$$

Exercice 12 : (Théorème de Mertens). Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries convergentes. On suppose que la série $\sum u_n$ est absolument convergente et on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k} = \sum_{p+q=n} u_p v_q.$$

Le but de cet exercice est de montrer que la série $\sum w_n$ converge et que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right) \quad (2.9)$$

On pose $V_n = \sum_{k=0}^n v_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Justifier l'écriture : $\sum_{k=0}^n w_k = \sum_{p=0}^{+\infty} a_p(n)$, où

$$a_p(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } p > n \\ u_p V_{n-p} & \text{si } p \leq n \end{cases}$$

2. En utilisant le théorème de la double limite montrer la convergence de la série $\sum w_n$ et montrer l'égalité (2.9).

2.4 Solutions des exercices

Exercice 1 :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$J_n = \{1 + \frac{1}{k} : 1 \leq k \leq n\} \subseteq \mathbb{Q} \cap [1, +\infty[.$$

On a :

$$\sum_{x \in J_n} \frac{1}{x^3} = \sum_{k=1}^n \frac{k^3}{(1+k)^3} \rightarrow +\infty \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

Ce qui montre la non sommabilité de la famille en considération.

2. On a déjà montré que cette famille est sommable si, et seulement si, $\alpha > 2$ (cf. exemple 38). On donne une autre preuve par application du théorème de Fubini. La famille est sommable si, et seulement si, pour p fixé dans $\mathbb{N}^*$, la série $\sum_q \frac{1}{(p+q)^\alpha}$ converge et la série de terme général $S_p = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(p+q)^\alpha}$ converge. La première condition est réalisée si, et seulement si $\alpha > 1$. Etudions la convergence de la série $\sum_p S_p$. Nous commençons par chercher un équivalent simple de S_p . Par comparaison série-intégrale on écrit :

$$\int_q^{q+1} \frac{dt}{(p+t)^\alpha} \leq \frac{1}{(p+q)^\alpha} \leq \int_{q-1}^q \frac{dt}{(p+t)^\alpha} \text{ pour tout } q \geq 1.$$

En sommant ces inégalités, on obtient :

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{(p+t)^\alpha} \leq S_p \leq \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(p+t)^\alpha},$$

donc

$$\frac{1}{(\alpha-1)} \frac{1}{(p+1)^{\alpha-1}} \leq S_p \leq \frac{1}{(\alpha-1)} \frac{1}{p^{\alpha-1}},$$

Ce qui montre que $S_p \sim \frac{1}{(\alpha-1)} \frac{1}{p^{\alpha-1}}$. Par conséquent la famille est sommable si, et seulement si, $\alpha > 2$.

3. Par convexité de la fonction $x \mapsto x^2$, on obtient :

$$\frac{1}{2}(p+q)^2 \leq p^2 + q^2 \leq (p+q)^2,$$

ce qui donne

$$\frac{1}{(p+q)^{2\alpha}} \leq \frac{1}{(p^2 + q^2)^\alpha} \leq \frac{2}{(p+q)^{2\alpha}}.$$

Donc la famille $(\frac{1}{(p^2 + q^2)^\alpha})_{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable si, et seulement si, la famille $(\frac{1}{(p+q)^{2\alpha}})_{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable si, et seulement si, $\alpha > 1$ (d'après l'exemple précédent).

4. On écrit l'inégalité suivante :

$$a^p + b^p \geq \frac{1}{2} \sqrt{a^p} \sqrt{b^p}. \quad (2.10)$$

Comme les séries $\sum_n \frac{2}{\sqrt{a^n}}$ et $\sum_n \frac{1}{\sqrt{b^n}}$ convergent, puisque $\frac{1}{\sqrt{a}}$ et $\frac{1}{\sqrt{b}}$ sont strictement inférieurs à 1, la famille $(\frac{2}{\sqrt{a^p} \sqrt{b^q}})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable. L'inégalité (2.10) montre que la famille $(\frac{1}{a^p + b^p})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable.

5. Considérons la partition de A définie par :

$$J_n = \{k \in \mathbb{N} : 10^n \leq k \leq 10^{n+1} - 1\} \cap A \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

On a $\text{card}(J_n) = 8.9^n$ car l'écriture décimale d'un entier $p \in J_n$ s'écrit $p = p_1.p_2..p_{n+1}$ avec $1 \leq p_1 \leq 8$ et $0 \leq p_i \leq 8$ pour tout $2 \leq i \leq n+1$. Par suite

$$\sum_{n \in J_n} \frac{1}{k} \leq \frac{1}{10^n} \sum_{n \in J_n} 1 = 8.(\frac{9}{10})^n,$$

et la série $\sum 8.(\frac{9}{10})^n$ est convergente. D'après le théorème 37, la famille est sommable.

6. On considère la partition $(I_p)_{p \in \mathbb{Z}^*}$ de l'ensemble A définie par :

$$I_p = \{(n, m) : n - m = p\}, \text{ pour tout } p \in \mathbb{Z}^*.$$

La famille $\left(\left|\frac{1}{n^2 - m^2}\right|\right)_{(n,m) \in I_1}$ n'est pas sommable, puisque

$$\sum_{(n,m) \in I_1} \left|\frac{1}{n^2 - m^2}\right| = \sum_m \frac{1}{(m+1)^2 - m^2},$$

et la série de terme général $\frac{1}{(m+1)^2 - m^2} = \frac{1}{2m+1}$ diverge. Le théorème 36 montre que la famille $\left(\frac{1}{n^2 - m^2}\right)_{(n,m) \in A}$ n'est pas sommable.

Exercice 2 :

1. Montrons la sommabilité de la famille $\left(\frac{1}{p!}\right)_{(n,p) \in A}$ où

$$A = \{(n, p) : n \leq p\}.$$

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on pose $J_p = \{(n, p) : n \leq p\}$. Clairement, la famille $(J_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est une partition de A . Pour tout $p \geq 1$,

$$\sum_{(n,p) \in J_p} \frac{1}{p!} = \sum_{n=0}^p \frac{1}{p!} = \frac{p+1}{p!}.$$

La série de terme général $S_p = \sum_{(n,p) \in J_p} \frac{1}{p!}$ est convergente. Par application du théorème 37, la famille $\left(\frac{1}{p!}\right)_{(n,p) \in A}$ est sommable et on a

$$\sum_{(n,p) \in A} \frac{1}{p!} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{p+1}{p!} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(p-1)!} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!} = 2e.$$

D'autre part, en utilisant la partition $K_n = \{(n, p) : n \leq p\}$ on a :

$$\sum_{(n,p) \in A} \frac{1}{p!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p=n}^{+\infty} \frac{1}{p!} = 2e.$$

2. Soit $A = \{(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2 : p/q\}$. Comme la série $\sum \frac{1}{n^x}$ converge pour tout $x > 1$, la famille $\left(\frac{1}{p^x} \cdot \frac{1}{q^x}\right)_{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable, ce qui

montre la sommabilité de la famille $(\frac{1}{p^x} \cdot \frac{1}{q^x})_{(p,q) \in A}$. Pour chaque $p \in \mathbb{N}^*$ on pose $A_p = \{(p, kp) : k \in \mathbb{N}^*\}$. La famille $(A_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ est une partition de A . Par suite

$$\sum_{(p,q) \in A} \frac{1}{p^x q^x} = \sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{p^x (kp)^x} = \sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{p^{2x} k^x} = \zeta(x) \zeta(2x).$$

3. La famille $(\frac{1}{p^2 q^2})_{(p,q) \in A}$, où $A = \{(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2 : \text{pgcd}(p, q) = 1\}$ est sommable puisque la famille $(\frac{1}{p^2 q^2})_{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ l'est. Notons, pour tout $d \in \mathbb{N}^*$, A_d l'ensemble $\{(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2 : \text{pgcd}(p, q) = d\}$. La famille $(A_d)_{d \in \mathbb{N}^*}$ est une partition de $(\mathbb{N}^*)^2$. Pour tout d fixé on a :

$$\sum_{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{p^2 q^2} = \sum_{d=1}^{+\infty} \sum_{(p,q) \in A_d} \frac{1}{p^2 q^2} \quad (2.11)$$

D'autre part, on a $(p, q) \in A_d$ si, et seulement si, il existe k, k' tel que $\text{pgcd}(k, k') = 1$, $p = kd$ et $q = k'd$. Donc

$$\sum_{(p,q) \in A_d} \frac{1}{p^2 q^2} = \sum_{(k,k') \in A_1} \frac{1}{k^2 k'^2 d^4}. \quad (2.12)$$

Les relations (2.11) et (2.12) donnent,

$$\sum_{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{p^2 q^2} = \sum_{d=1}^{+\infty} \frac{1}{d^4} \cdot \sum_{(k,k') \in A_1} \frac{1}{k^2 k'^2}.$$

D'où

$$\sum_{(p,q) \in A} \frac{1}{p^2 q^2} = \sum_{(k,k') \in A_1} \frac{1}{k^2 k'^2} = \frac{\zeta(2)^2}{\zeta(4)}.$$

4. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $I_n = \{(p, q) \in \mathbb{N}^2 : p + q = n\}$. On écrit :

$$\begin{aligned} \sum_{(p,q) \in I_n} \frac{1}{p! q! (p+q+1)} &= \sum_{p=0}^n \frac{1}{p! (n-p)! (n+1)} \\ &= \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{n!} \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} \\ &= \frac{2^n}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

Comme la série de terme général $\frac{2^n}{(n+1)!}$ est convergente, on en déduit que la famille $(\frac{1}{p!q!(p+q+1)})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable et on a :

$$\sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} \frac{1}{p!q!(p+q+1)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{(n+1)!} = \frac{1}{2}(e^2 - 1).$$

Exercice 3 : Remarquons, d'abord, que la série $\sum_k \frac{(k+1)v_k}{k}$ converge car

$$\frac{(k+1)v_k}{k} \sim v_k. \text{ On écrit :}$$

$$\sum_{n \geq 1} u_n = \sum_n \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} \frac{(k+1)e^{-k}}{k}.$$

Etudions, donc, la sommabilité de la famille $(a_{n,k})_{(n,k) \in A}$, avec

$$A = \{(n, k) : n \geq 1 \text{ et } n \leq k\} \text{ et}$$

$$a_{n,k} = \frac{1}{n(n+1)} \frac{(k+1)v_k}{k} \text{ pour tout } (n, k) \in A.$$

On considère la partition $(J_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de A définie par $J_k = \{(n, k) \in \mathbb{N}^{*2} : n \leq k\}$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ (on fixe l'ordonnée). Appliquons le théorème de sommation par paquets à la famille $(a_{n,k})_{(n,k) \in A}$. On a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ l'ensemble J_k est fini et

$$\begin{aligned} S_k &= \sum_{(n,k) \in J_n} a_{n,k} = \sum_{n=1}^k \frac{1}{n(n+1)} \frac{(k+1)v_k}{k} \\ &= \frac{(k+1)v_k}{k} \sum_{n=1}^k \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{(k+1)v_k}{k} \left(1 - \frac{1}{k+1} \right) = v_k. \end{aligned}$$

La famille $(S_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est sommable, puisque la série $\sum_k v_k$ converge. Par suite la famille $(a_{n,k})_{(n,k) \in A}$ est sommable et

$$\sum_{(n,k) \in A} a_{n,k} = \sum_{k=1}^{+\infty} v_k.$$

Considérons la partition $(K_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de A définie par $K_n = \{(n, k) \in \mathbb{N}^{*2} : n \leq k\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. La sommabilité de la famille $(a_{n,k})_{(n,k) \in A}$

montre que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la série

$$\sum_{k \geq n} \frac{1}{n(n+1)} \frac{(k+1)e^{-k}}{k}$$

converge (qu'on le sait déjà) et que la série

$$\sum_n \sum_{k \geq n} \frac{1}{n(n+1)} \frac{(k+1)v_k}{k} = \sum_n u_n.$$

converge. Par suite,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} \frac{(k+1)v_k}{k} = \sum_{(n,k) \in A} a_{n,k} = \sum_{k=1}^{+\infty} v_k.$$

Exercice 4 : La série $\sum_{p \geq 2} \frac{z^2}{p(p-z)}$ converge pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{2, 3, \dots\}$ et on a pour tout $z \in \mathbb{C}$ et $|z| < 1$,

$$\sum_{p=2}^{+\infty} \frac{z^2}{p(p-z)} = \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{z^2}{p^2} \left(\frac{1}{1 - \frac{z}{p}} \right) = \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{z^2}{p^2} \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z}{p} \right)^n \right) = \sum_{p=2}^{+\infty} \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{z}{p} \right)^n.$$

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$. Montrons que la famille $((\frac{z}{p})^n)_{p \geq 2, n \geq 2}$ est sommable. Pour $p \geq 2$ fixé on a la série $\sum_{n \geq 2} |\frac{z}{p}|^n$ converge dont la somme est égale à

$$S_p = \sum_{n=2}^{+\infty} \left| \frac{z}{p} \right|^n = \frac{|z|^2}{p(p - |z|)} \sim \frac{|z|^2}{p^2}.$$

Donc, la série de terme général S_p converge. D'après le théorème de Fubini la famille $((\frac{z}{p})^n)_{p \geq 2, n \geq 2}$ est sommable. Par suite,

$$\sum_{p \geq 2, n \geq 2} \left(\frac{z}{p} \right)^n = \sum_{p=2}^{+\infty} \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{z}{p} \right)^n = \sum_{n=2}^{+\infty} \sum_{p=2}^{+\infty} \left(\frac{z}{p} \right)^n.$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{z^2}{p(p-z)} &= \sum_{p=2}^{+\infty} \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{z}{p} \right)^n = \sum_{n=2}^{+\infty} \sum_{p=2}^{+\infty} \left(\frac{z}{p} \right)^n \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} z^n \sum_{p=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{p} \right)^n = \sum_{n=2}^{+\infty} z^n (\zeta(n) - 1). \end{aligned}$$

Exercice 5 :

1. En utilisant le développement en série entière de la fonction exponentielle, on a pour tout réel x ,

$$\begin{aligned} f(x) &= \exp(\exp(x)) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\exp(x)^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\exp(kx)}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(kx)^n}{n!} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{k^n x^n}{k! n!} \stackrel{(*)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!} \right) \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sigma(n)}{n!} x^n, \end{aligned}$$

où, $\sigma(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Reste à justifier la permutation

($*$). Il suffit de montrer que la famille $(\frac{k^n x^n}{k! n!})_{(k,n) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable

pour tout $x \in \mathbb{R}$. Pour, k fixe, la série de $\sum_n \frac{k^n |x|^n}{k! n!}$ est sommable

et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{k^n |x|^n}{k! n!} = \frac{\exp(k|x|)}{k!}$, et la série de terme général $\frac{\exp(k|x|)}{k!}$ est convergente.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -3, -4, \dots\}$, la suite $u_k(x) = \frac{1}{x+k}$ est positive à partir d'un certain rang et elle est décroissante, donc la série définissant f vérifie, à partir d'un certain rang, le critère spécial des séries alternées.

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < 2$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x+k} = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k} \frac{(-1)^k}{1 + \frac{x}{k}} = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{k^n} \\ &= \sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+k} x^n}{k^{n+1}}. \end{aligned}$$

Pour tout k fixé la série de terme général $\frac{|x|^n}{k^{n+1}}$ converge et on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|x|^n}{k^{n+1}} = \frac{1}{k} \frac{|x|}{k} \frac{1}{1 - \frac{|x|}{k}} = \frac{|x|}{k^2 - |x|k} \sim \frac{|x|}{k^2},$$

la série $\sum_k \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|x|^n}{k^{n+1}}$ converge. Le théorème de Fubini s'applique. On en déduit que, pour tout x tel que $|x| < 2$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} + \sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+k} x^n}{k^{n+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n \left(\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^{n+1}} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \eta(n+1) (-1)^n x^n, \end{aligned}$$

$$\text{avec } \eta(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^x} \text{ pour tout } x > 0.$$

Exercice 6 :

1. Pour tout réel $t \in]-1, 1[$ on a $\left| \frac{t^n}{1+t^n} \right| \sim |t|^n$, donc la série $\sum \frac{t^n}{1+t^n}$ converge. Si $|t| \geq 1$ la série $\sum \frac{t^n}{1+t^n}$ diverge grossièrement. La fonction f est définie sur $] -1, 1[$.
2. Pour tout $t \in]-1, 1[$, on a :

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{1+t^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} t^{nk} \\ &\stackrel{\circledast}{=} \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} (t^k)^n \right) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1} t^k}{1-t^k}. \end{aligned}$$

Justification de $\circledast$: La famille $((-1)^{k+1} t^{nk})_{(k,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*}$ est sommable. En effet, pour tout n fixé dans $\mathbb{N}^*$ la série de terme général $|t|^{nk}$ converge, de somme $\sum_{k=1}^{+\infty} |t|^{nk} = \frac{|t|^n}{1-|t|^n}$, et la série $\sum \frac{|t|^n}{1-|t|^n}$ converge puisque $\frac{|t|^n}{1-|t|^n} \sim |t|^n$.

3. La série $\sum \frac{(-1)^{n+1} t^n}{1-t^n}$ vérifie le critère spécial des séries alternées pour tout $t \in [0, 1[$ puisque la fonction $h : x \mapsto \frac{t^x}{1-t^x}$ est décroissante ($h'(x) = t^x \frac{\ln t}{(t^x - 1)^2} < 0$). Soit $N \in \mathbb{N}^*$, pour tout $t \in [0, 1[$,

on a :

$$\left| \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} t^n}{1-t^n} (1-t) \right| \leq \frac{t^N}{1-t^N} (1-t) = \frac{t^N}{1+t+t^2+\dots+t^{N-1}} \leq \frac{1}{N},$$

puisque $t^k \leq t^N$ si $k \leq n$. Ce qui montre la convergence uniforme de la série $\sum \frac{(-1)^{n+1} t^n}{1-t^n} (1-t)$ sur $[0, 1[$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{(-1)^{n+1} t^n}{1-t^n} (1-t) = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ et la série $\sum \frac{(-1)^{n+1} t^n}{1-t^n} (1-t)$ converge uniformément sur $[0, 1[$. Le théorème d'interversion des limites s'applique,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 1} (1-t) f(t) &= \lim_{t \rightarrow 1} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} t^n}{1-t^n} (1-t) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln(2). \end{aligned}$$

5. Pour tout $t \in]-1, 1[$, on écrit :

$$f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} t^n}{1-t^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} t^{kn}.$$

Soit, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ l'ensemble $I_p = \{(n, k) : nk = p\}$. Comme la famille $((-1)^{n+1} t^{kn})_{(n,k) \in \mathbb{N}^{*2}}$ est sommable, par le théorème de sommation par paquets, on obtient

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{(n,k) \in \mathbb{N}^{*2}} (-1)^{n+1} t^{kn} = \sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{(n,k) \in I_p} (-1)^{n+1} t^{kn} \\ &= \sum_{p=1}^{+\infty} \left(\sum_{(n,k) \in I_p} (-1)^{n+1} \right) t^p = \sum_{p=1}^{+\infty} \chi(p) t^p. \end{aligned}$$

Donc f est développable en série entière sur $] -1, 1[$. On a

$$\chi(p) = \sum_{n|p} (-1)^{n+1},$$

c'est-à-dire, $\chi(p)$ est la différence de la somme des diviseurs impairs de p et la somme de diviseurs pairs de p .

Exercice 7 :

1. On a déjà montré (voir exercice 2) que

$$\zeta(x)^2 = \sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^{*2}} \frac{1}{p^x q^x}$$

D'autre part, en appliquant le théorème 37 à la famille

$$\left(\frac{1}{p^x q^x}\right)_{(p,q) \in \mathbb{N}^{*2}}$$

avec la partition définie par $J_n = \{(p, q) \in \mathbb{N}^{*2} : pq = n\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient :

$$\begin{aligned} \zeta(x)^2 &= \sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^{*2}} \frac{1}{p^x q^x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{(p,q) \in J_n} \frac{1}{p^x q^x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \sum_{(p,q) \in J_n} 1 \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \text{card}(J_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d(n)}{n^x}. \end{aligned}$$

2.

- (a) Fixons un diviseur d de n . Soit $1 \leq k \leq n$ on a $\text{pgcd}(k, n) = d$ si, et seulement si, il existe p, q premiers entre eux tels que $k = pd$ et $n = qd$. Ce qui revient à dire que l'ensemble

$$\begin{aligned} A_d &= \{k \in \mathbb{N} : 1 \leq k \leq n \text{ et } \text{pgcd}(k, n) = d\} \\ &= \{pd : 1 \leq p \leq \frac{n}{d} \text{ et } \text{pgcd}(p, \frac{n}{d}) = 1\} \end{aligned}$$

Donc, $\text{card}(A_d) = \varphi(\frac{n}{d})$. Comme l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$ est la réunion disjointe des ensembles $(A_d)_{d|n}$, on en déduit, par égalité des cardinaux, que :

$$n = \sum_{d|n} \varphi(\frac{n}{d}) = \sum_{d|n} \varphi(d).$$

- (b) On écrit :

$$\zeta(x) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varphi(n)}{n^x} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varphi(n)}{n^x}.$$

Montrons que la famille $(\frac{\varphi(n)}{p^x n^x})_{(n,p) \in \mathbb{N}^{*2}}$ est sommable pour tout $x > 2$. Soit $(J_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ la partition de $\mathbb{N}^{*2}$ définie par

$$J_k = \{(p, n) \in \mathbb{N}^{*2} : pn = k\}.$$

Pour tout $k \geq 1$ on a :

$$\sum_{(p,n) \in J_k} \frac{\varphi(n)}{p^x n^x} = \sum_{(p,n) \in J_k} \frac{\varphi(n)}{k^x} = \frac{1}{k^x} \sum_{n|k} \varphi(n) = \frac{k}{k^x} = \frac{1}{k^{x-1}},$$

et la série de terme général $\sum_{(p,n) \in J_k} \frac{\varphi(n)}{p^x n^x}$ est donc convergente.

D'après le théorème 37, la famille $(\frac{\varphi(n)}{p^x n^x})_{(n,p) \in \mathbb{N}^{*2}}$ est sommable et

$$\zeta(x) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varphi(n)}{n^x} = \sum_{(p,n) \in \mathbb{N}^{*2}} \frac{\varphi(n)}{p^x n^x} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{x-1}} = \zeta(x-1).$$

Exercice 8 :

1. Il suffit de montrer la sommabilité de la famille

$$\left(\frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)} \right)_{(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*}.$$

On a, pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, la série $\sum_p \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}$ converge car

$$\frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)} \sim \frac{1}{p^2},$$

de plus

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)} &= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p+q^2} - \frac{1}{p+q^2+1} \\ &= \frac{1}{q^2}, \end{aligned}$$

et la série $\sum_q \frac{1}{q^2}$ converge. D'après le théorème de Fubini, la famille $(\frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)})_{(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*}$ est sommable et on a :

$$\begin{aligned} \sum_{(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*}^{\infty} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)} &= \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)} \\ &= \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)} \\ &= \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q^2} = \zeta(2). \end{aligned}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \{(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* : p + q^2 = n\}$. En appliquant le théorème de sommation par paquets à la famille $(\frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)})_{(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*}$ avec la partition $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*}^{\infty} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{(p,q) \in I_n} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{(p,q) \in I_n} \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{card}(I_n)}{n(n+1)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E(\sqrt{n})}{n(n+1)}. \end{aligned}$$

Car, le nombre d'éléments de I_n est le nombre des entiers $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $1 \leq q^2 \leq n$, égal à $E(\sqrt{n})$. On en déduit que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{E(\sqrt{n})}{n(n+1)} = \zeta(2).$$

Exercice 9 :

1. Une application directe du théorème de Fubini montre que la famille $(\frac{1}{i^k})_{(i,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \setminus \{1\}}$ est sommable. On écrit donc :

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=2}^n \zeta(k) &= \sum_{k=2}^n \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i^k} = \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{k=2}^n \frac{1}{i^k} \\
 &= (n-1) + \sum_{i=2}^{+\infty} \frac{1}{i^2} \frac{1 - \frac{1}{i^{n-1}}}{1 - \frac{1}{i}} \\
 &= n-1 + \sum_{i=2}^{+\infty} \frac{i^{n-1} - 1}{i^n(i-1)} \\
 &= n-1 + \sum_{i=2}^{+\infty} \frac{1}{i(i-1)} - \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i^n(i-1)} \\
 &= n - \sum_{i=2}^{+\infty} \frac{1}{i^n(i-1)}.
 \end{aligned}$$

Où on a utilisé le fait que $\sum_{i=2}^{+\infty} \frac{1}{i(i-1)} = 1$.

2. On a : $\sum_n (-1)^n n u_n = \sum_n \sum_{i=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{i^n(i-1)}$. Etudions, donc, la sommabilité de la famille $(\frac{(-1)^n n}{i^n(i-1)})_{(i,n) \in (\mathbb{N}^* \setminus \{1\})^2}$. Pour $i \geq 2$ fixé, la série de terme général $\left| \frac{(-1)^n n}{i^n(i-1)} \right| = \frac{n}{i^n(i-1)}$ converge, puisque la série entière $\sum n x^n$ converge pour tout x tel que $|x| < 1$. En utilisant l'identité $\sum_{n=1}^{+\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$ pour tout $x \in]-1, 1[$, on obtient

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{i^n(i-1)} = \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} - \frac{1}{i(i+1)}.$$

Clairement, la série $\sum_i (\frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} - \frac{1}{i(i+1)})$ est convergente. D'après

le théorème de Fubini, la famille $(\frac{(-1)^n}{i^n(i-1)})_{(i,n) \in (\mathbb{N}^* \setminus \{1\})^2}$ est sommable. Il vient :

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n u_n &= \sum_{n=2}^{+\infty} \sum_{i=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{i^n(i-1)} \\
 &= \sum_{i=2}^{+\infty} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{i^n(i-1)} \\
 &= \sum_{i=2}^{+\infty} \frac{1}{i-1} \times \left(\frac{-\frac{1}{i}}{(1+\frac{1}{i})^2} + \frac{1}{i} \right) \\
 &= \sum_{i=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{i(i-1)} - \frac{i}{(i-1)(i+1)^2} \right) \\
 &= 1 - \sum_{i=2}^{+\infty} \frac{i}{(i-1)(i+1)^2} \\
 &= 1 - \sum_{i=2}^{+\infty} \left[\frac{1}{4} \left(\frac{1}{(i+1)} - \frac{1}{(i-1)} \right) + \frac{1}{2 \times (i+1)^2} \right] \\
 &= 1 - \frac{1}{4} \left(\frac{3}{2} + 2(\zeta(2) - 1 - \frac{1}{4}) \right) = \frac{5}{4} - \frac{\zeta(2)}{2}.
 \end{aligned}$$

Exercice 10 : On a $\sum_n \frac{nx^n}{1-x^n} = \sum_n \sum_{k=1}^{\infty} n(x^n)^k$. Montrons, donc, la sommabilité de la suite double $(nx^{nk})_{(n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, la série $\sum_k n|x|^{nk}$ est convergente, car $|x^n| < 1$ et $\sum_{k=1}^{\infty} n|x|^{nk} = n \frac{|x|^n}{1-|x|}$.

De plus, la série de terme général $n \frac{|x|^n}{1-|x|}$ converge, puisque

$n \frac{|x|^n}{1-|x|} \sim n|x|^n$. Ce qui montre la sommabilité de la famille considérée.

En appliquant le théorème 56, on obtient

$$\sum_{(n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*} nx^{nk} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} nx^{nk} = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{nk}.$$

En utilisant l'égalité : $\sum_{n=1}^{+\infty} ny^n = \frac{y}{(1-y)^2}$ pour tout $y \in]-1, 1[$, il

vient :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^n}{1-x^n} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{(1-x^k)^2}.$$

En considérant la partition $(I_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ définie par $I_p = \{(n, k) : nk = p\}$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{(n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*} nx^{nk} &= \sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{(n,k) \in I_p} nx^{nk} = \sum_{p=1}^{+\infty} x^p \left(\sum_{(n,k) \in I_p} n \right) \\ &= \sum_{p=1}^{+\infty} \sigma(p) x^p. \end{aligned}$$

Exercice 11 :

1. Soit n un entier strictement supérieur à 1. La décomposition de n en produit des facteurs premiers s'écrit $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$. On a :

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \mu(1) + \sum_{2 \leq d|p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_r} \mu(d).$$

Cette égalité provenant du fait que $\mu(d) = 0$ dès que d admet un facteur carré p_i^2 . D'autre part, il y a $\binom{r}{k}$ façons de choisir k nombres premiers parmi les p_i , et chacun de ces choix fournit un diviseur de n avec k facteurs, dont l'évaluation de la fonction de Möbius est $(-1)^k$. Par suite

$$\sum_{d|n} \mu(d) = 1 + \sum_{k=1}^r (-1)^k \binom{r}{k} = (1 + (-1))^r = 0.$$

Les deux séries $\sum \frac{\mu(i)}{i^2}$ et $\sum \frac{1}{j^2}$ sont absolument convergentes, donc la famille $(\frac{\mu(i)}{i^2 j^2})_{(i,j) \in \mathbb{N}^{*2}}$ est sommable. Donc

$$\left(\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i^2} \right) \left(\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\mu(i)}{i^2} \right) = \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^{*2}} \frac{\mu(i)}{i^2 j^2} = \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^{*2}} \frac{\mu(i)}{(ij)^2}.$$

En considérant la partition $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de $\mathbb{N}^{*2}$ définie par

$$A_n = \{(i, j) : ij = n\} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

et en appliquant le théorème de sommations par paquets, on obtient :

$$\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^{*2}} \frac{\mu(i)}{(ij)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{(i,j) \in A_n} \frac{\mu(i)}{(ij)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i|n} \mu(i) = 1,$$

car $\sum_{i|n} \mu(i) = \begin{cases} 0 & \text{si } n > 1 \\ 1 & \text{si } n = 1 \end{cases}$. Il s'ensuit que $(\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i^2})(\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\mu(i)}{i^2}) = 1$.

2.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on écrit :

$$\begin{aligned} \sum_{d|n} \frac{n}{d} \mu(d) &= \sum_{d|n} \left(\sum_{d' | \frac{n}{d}} \varphi(d') \right) \mu(d) \\ &= \sum_{dd' | n} \varphi(d') \mu(d) \\ &= \sum_{d' | n} \varphi(d') \left(\sum_{d | \frac{n}{d'}} \mu(d) \right) \\ &= \varphi(n). \end{aligned}$$

La dernière égalité provenant du fait que $\sum_{d | \frac{n}{d'}} \mu(d) = 0$ si $d' \neq n$.

(b) On écrit :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i \leq x} \mu(i) (E(\frac{x}{i}) + E(\frac{x}{i})^2) &= \sum_{1 \leq i \leq x} \mu(i) \frac{E(\frac{x}{i})(1 + E(\frac{x}{i}))}{2} \\ &= \sum_{1 \leq i \leq x} \mu(i) \sum_{j=1}^{E(\frac{x}{i})} j \\ &= \sum_{1 \leq i \leq x} \mu(i) \left(\sum_{1 \leq j \leq \frac{x}{i}} j \right) \\ &= \sum_{(i,j) | 1 \leq i, j \leq x} \mu(i) j \\ &= \sum_{1 \leq n \leq x} \sum_{i|n} \frac{n}{i} \mu(i) = \sum_{1 \leq n \leq x} \varphi(n). \end{aligned}$$

(c) Pour tout $x > 0$, on a :

$$\frac{1}{x^2} \sum_{1 \leq n \leq x} \varphi(n) = \frac{1}{2} \left(\sum_{1 \leq i \leq x} \mu(i) \frac{E(\frac{x}{i})}{x^2} + \sum_{1 \leq i \leq x} \mu(i) \frac{E(\frac{x}{i})^2}{x^2} \right) \quad (2.13)$$

Le premier terme du second membre tend vers 0 quand x tend vers l'infini, car :

$$\left| \sum_{1 \leq i \leq x} \mu(i) \frac{E(\frac{x}{i})}{x^2} \right| \leq \sum_{1 \leq i \leq x} |\mu(i)| \frac{1}{ix} \leq \frac{1}{x} \sum_{i=1}^{E(x)} \frac{1}{i} \sim \frac{\ln(x)}{x}$$

Par suite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{1 \leq i \leq x} \mu(i) \frac{E(\frac{x}{i})}{x^2} = 0$. D'autre part, en utilisant l'écriture $y = E(y) - \{y\}$ pour tout réel y , on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i \leq x} \mu(i) \frac{E(\frac{x}{i})^2}{x^2} &= \sum_{1 \leq i \leq x} \mu(i) \frac{(\frac{x}{i} - \{\frac{x}{i}\})^2}{x^2} \\ &= \sum_{1 \leq i \leq x} \frac{\mu(i)}{i^2} - 2 \sum_{1 \leq i \leq x} \frac{\mu(i)}{x^2} \left\{ \frac{x}{i} \right\} \\ &\quad + \sum_{1 \leq i \leq x} \frac{\mu(i)}{x^2} \left\{ \frac{x}{i} \right\}^2. \end{aligned}$$

Comme $0 \leq \left\{ \frac{x}{i} \right\} < 1$ il vient

$$\left| 2 \sum_{1 \leq i \leq x} \frac{\mu(i)}{x^2} \left\{ \frac{x}{i} \right\} + \sum_{1 \leq i \leq x} \frac{\mu(i)}{x^2} \left\{ \frac{x}{i} \right\}^2 \right| \leq \frac{3}{x^2} \sum_{1 \leq i \leq x} |\mu(i)| \leq \frac{3}{x}.$$

Donc

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{1 \leq i \leq x} \mu(i) \frac{E(\frac{x}{i})^2}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{1 \leq i \leq x} \frac{\mu(i)}{i^2} \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\mu(i)}{i^2} = \frac{6}{\pi^2}. \end{aligned}$$

En utilisant l'égalité (2.13), on en déduit que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} \sum_{1 \leq n \leq x} \varphi(n) = \frac{3}{\pi^2}.$$

Exercice 12 :

1. On écrit :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n w_k &= \sum_{k=0}^n \sum_{p=0}^k u_p v_{k-p} = \sum_{p=0}^n \sum_{k=p}^n u_p v_{k-p} = \sum_{p=0}^n u_p \left(\sum_{k=p}^n v_{k-p} \right) \\ &= \sum_{p=0}^n u_p \left(\sum_{k=0}^{n-p} v_k \right) = \sum_{p=0}^n u_p V_{n-p}. \end{aligned}$$

Posons pour tout $p, n \in \mathbb{N}$, $a_p(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } p > n \\ u_p V_{n-p} & \text{si } p \leq n \end{cases}$. On a

$$\text{bien } \sum_{k=0}^n w_k = \sum_{p=0}^{\infty} a_p(n).$$

2. La convergence de la série $\sum w_n$ est équivalente à la convergence de la suite $(\sum_{k=0}^n w_k)_{n \in \mathbb{N}}$. Pour chaque $p \in \mathbb{N}$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_p(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_p V_{n-p} = u_p \sum_{k=0}^{\infty} v_n.$$

La série $\sum a_p(n)$ converge uniformément par rapport à n . En effet, la convergence de la série $\sum v_n$ assure l'existence d'un réel M tel que $|V_n| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par suite

$$|a_p(n)| \leq |u_p V_{n-p}| \leq M |u_p|,$$

et la série $\sum_p M |u_p|$ converge. En utilisant le théorème de la double limite, on obtient

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n w_k &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{p=0}^{\infty} a_p(n) = \sum_{p=0}^{\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} a_p(n) \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} u_p \sum_{k=0}^{\infty} v_n = \left(\sum_{p=0}^{\infty} u_p \right) \left(\sum_{p=0}^{\infty} v_p \right). \end{aligned}$$

Chapitre 3

Espace probabilisé

3.1 Modélisation d'une expérience aléatoire

3.1.1 Univers et événements

Une expérience aléatoire est une expérience pour laquelle on ne peut pas prédire le résultat que l'on va obtenir. On associe à une telle expérience un ensemble qui contient tous les résultats possibles, appelé **univers** ou **ensemble fondamental**. Cet ensemble est en général noté Ω . Il peut être fini, infini dénombrable, ou infini non dénombrable. Un élément $\omega \in \Omega$ est une **réalisation de l'expérience**, ou **éventualité**.

Exemple 1 : On lance n fois un dé numéroté de 1 à 6. Chaque résultat est un n -uplet $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ où $\omega_i \in \{1, 2, \dots, 6\}$. Donc $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}^n$.

Exemple 2 : On lance une pièce de monnaie jusqu'à l'obtention de la première face. Si on s'intéresse au nombre de lancers nécessaires, alors $\Omega = \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ (le résultat ∞ veut dire qu'on n'obtient jamais face). Si on s'intéresse au résultat obtenu, alors $\Omega = \{\omega_i : i \in \mathbb{N}^*\} \cup \{\omega_\infty\}$

(i-1) fois
où ω_i est le résultat : $(\overbrace{P, P, \dots, P}^{(i-1) \text{ fois}}, F)$ et $\omega_\infty = (P, P, \dots)$: tous les lancers donnent pile. L'univers Ω est dénombrable.

Exemple 3 : On lance une pièce de monnaie une infinité de fois. Un résultat est une suite d'éléments à valeurs dans l'ensemble $\{P, F\}$. Donc, $\Omega = \{P, F\}^{\mathbb{N}}$. L'ensemble Ω dans ce cas est infini non dénombrable (cf. corollaire 23).

Exemple 4 : On s'intéresse à la durée de vie d'un appareil électrique. Alors $\Omega = \mathbb{R}^+$ où un résultat possible est un réel $t \in \mathbb{R}^+$ qui représente la

durée de vie de l'appareil. Dans ce cas aussi l'univers est infini non dénombrable.

Lors d'une expérience aléatoire, on se donne une propriété que peut vérifier un résultat de l'expérience. Par exemple, lorsqu'on lance un dé, on considère la propriété «obtenir un nombre pair». On associe à une telle propriété un sous-ensemble de l'univers appelé un **événement**. Comme exemple, lorsque on lance un dé, l'ensemble $\{2, 4, 6\}$ est un événement qui correspond à la propriété «obtenir un nombre pair». Un événement est donc un sous-ensemble de l'univers Ω . Un événement A est réalisé si le résultat ω de l'expérience appartient à A .

- Dans l'exemple 1, soit $A = \{1\} \times \{1, 2, \dots, 6\}^{n-1} \subseteq \Omega$. L'événement A correspond à la propriété «obtenir 1 au premier lancer».
- Dans l'exemple 2, soit $k \in \mathbb{N}^*$ et A_k l'événement «obtenir pile au $(k-1)$ -ième premiers lancers». Alors, avec la première interprétation, on a : $A_k = \{k, k+1, \dots\} \cup \{\infty\}$.

Pour analyser une expérience aléatoire on commence par considérer une "classe" d'événements.

Dans le cas où l'ensemble Ω est au plus dénombrable (comme les exemples 1 et 2), cette classe est la plupart de temps l'ensemble de tous les sous-ensembles de Ω , $\mathcal{P}(\Omega)$. Ainsi tout sous-ensemble peut être considéré comme événement.

Dans le cas où Ω est infini, non dénombrable, l'ensemble des parties de Ω est très grand et plus complexe (penser par exemple à $\mathcal{P}(\mathbb{R})$), et on conçoit qu'il contienne des ensembles auxquels on ne peut associer aucune signification par rapport à notre expérience. Le choix de $\mathcal{P}(\Omega)$ comme ensemble des événements serait alors source de difficultés théoriques et on se restreint à une partie $\mathcal{B}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$. Cette partie doit satisfaire quelques conditions logiques :

1. L'ensemble Ω est un événement, qu'on appelle **événement certain**.
2. Si A est un événement, son complémentaire $\bar{A} = \Omega \setminus A$ est aussi un événement appelé **événement contraire** de A .
3. Une réunion dénombrable d'événements est un événement (stabilité par réunion dénombrable).

Après avoir défini l'ensemble des événements (une partie de $\mathcal{P}(\Omega)$ satisfaisant les propriétés 1, 2 et 3), on associe à chaque événement un nombre qui mesure sa vraisemblance de réalisation. Cette application ainsi définie sur l'ensemble des événements est appelée **probabilité**. Reprenons donc depuis le début.

3.1.2 Tribu ou σ -algèbre

Définition 59 On appelle *tribu* ou *σ -algèbre* sur un ensemble Ω , toute partie $\mathcal{B}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ satisfaisant les propriétés suivantes :

1. $\Omega \in \mathcal{B}$.
2. Si $A \in \mathcal{B}$ alors $\overline{A} \in \mathcal{B}$ i.e : $\mathcal{B}$ est stable par passage au complémentaire.
3. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{B}$ alors $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{B}$ ($\mathcal{B}$ est stable par réunion dénombrable).

Exemples : 1. $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu sur Ω . (Si Ω est au plus dénombrable, on choisit en général $\mathcal{P}(\Omega)$ comme tribu).

2. $\{\Omega, \emptyset\}$ est une tribu.

3. Soit $A \subseteq \Omega$, alors $\{\Omega, A, \overline{A}, \emptyset\}$ est une tribu.

Définition 60 Un espace probabilisable est la donnée d'un couple $(\Omega, \mathcal{B})$ où $\mathcal{B}$ est une tribu sur Ω . L'ensemble Ω est appelé l'univers et tout élément de $\mathcal{B}$ est un événement.

Exemple 61 Soit Ω un ensemble infini non dénombrable. On pose

$$\mathcal{B} = \{ A \subseteq \Omega : A \text{ ou } \overline{A} = \Omega \setminus A \text{ est au plus dénombrable} \}$$

Alors $(\Omega, \mathcal{B})$ est un espace probabilisable. En effet, on a $\Omega \in \mathcal{B}$ puisque $\overline{\Omega}$ est l'ensemble vide donc fini. De plus, par définition de $\mathcal{B}$ on a si $A \in \mathcal{B}$ alors $\overline{A} \in \mathcal{B}$. Enfin, soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{B}$, montrons que l'ensemble $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{B}$.

- Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, A_n est au plus dénombrable, alors A est au plus dénombrable (cf. proposition 11) et donc $A \in \mathcal{B}$.
- Sinon, il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que A_{n_0} est infini non dénombrable donc $\overline{A_{n_0}}$ est au plus dénombrable. Comme

$$\overline{A} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{A_n} \subseteq \overline{A_{n_0}},$$

alors $\overline{A}$ est au plus dénombrable, donc $A \in \mathcal{B}$.

Vocabulaire : Soit $(\Omega, \mathcal{B})$ un espace probabilisable.

1. Ω est appelé **événement certain**.
2. $\emptyset$ est appelé **événement impossible**.

3. Deux événements A et B sont dits **incompatibles** si $A \cap B = \emptyset$.

Proposition 62 Soit $(\Omega, \mathcal{B})$ un espace probabilisable, alors :

1. $\emptyset \in \mathcal{B}$.
2. $\mathcal{B}$ est stable par intersection dénombrable : Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'événements alors $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ est un événement.
3. $\mathcal{B}$ est stable par réunion et intersection finies : Etant donné $A_1, A_2, \dots, A_p$ p événements alors $\bigcup_{n=1}^p A_n \in \mathcal{B}$ et $\bigcap_{n=1}^p A_n \in \mathcal{B}$.
4. Si $A, B \in \mathcal{B}$ alors $B \setminus A \in \mathcal{B}$.

Preuve.

1. $\emptyset = \overline{\Omega} \in \mathcal{B}$.
2. Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{B}$, alors $\overline{A_n} \in \mathcal{B}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Par suite : $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{A_n}} \in \mathcal{B}$.
3. Si $A_1, A_2, \dots, A_p \in \mathcal{B}$ on écrit $\bigcup_{n=1}^p A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, avec $A_n = \emptyset$ pour tout $n \geq p+1$. Comme $A_n \in \mathcal{B}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\bigcup_{n=1}^p A_n \in \mathcal{B}$. De même on a $\bigcap_{n=1}^p A_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{B}$ où $A_n = \Omega$ pour tout $n \geq p+1$.
4. Si $A, B \in \mathcal{B}$ alors $B \setminus A = B \cap \overline{A} \in \mathcal{B}$.

ce qui achève la démonstration. ■

Remarque : Il est simple de vérifier que l'intersection d'un nombre quelconque de tribus sur Ω est une tribu. Soit $\mathcal{F}$ une partie de $\mathcal{P}(\Omega)$. La plus petite tribu qui contient $\mathcal{F}$ est appelée **tribu engendrée par $\mathcal{F}$** . Par exemple, la tribu engendrée par une partie $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ est la tribu $\{\Omega, A, \overline{A}, \emptyset\}$. La tribu engendrée par une partie $\mathcal{F}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ est donc l'intersection de toutes les tribus qui contiennent $\mathcal{F}$.

3.1.3 Opérations sur les événements

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements.

- Une réalisation $\omega \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ si, et seulement si, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\omega \in A_p$. L'ensemble $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ décrit alors l'événement «au moins l'un des événements A_n est réalisé».

- De même l'ensemble $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ est l'événement «tous les événements A_n sont réalisés».
- Soit $B = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{p \geq n} A_p$. Remarquons que B est un événement, puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n = \bigcup_{p \geq n} A_p \in \mathcal{B}$ (par stabilité de $\mathcal{B}$ par réunion dénombrable) donc $B \in \mathcal{B}$ comme intersection dénombrable d'événements. D'autre part, une réalisation $\omega \in B$ si, et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe un entier $p \geq n$ tel que $\omega \in A_p$. C'est-à-dire, B est réalisé si, et seulement si, une infinité d'événements $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont réalisés. On en déduit que B décrit l'événement «une infinité des événements $A_n, n \in \mathbb{N}$ sont réalisés». L'événement B est appelé limite supérieure de la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, noté $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$.
- On vérifie de même que l'ensemble $C = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{p \geq n} A_p$ est un événement. Une réalisation $\omega \in C$ si, et seulement si, il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $\omega \in A_p$ pour tout $p \geq n$. Donc C décrit l'événement «les événements A_n sont réalisés à partir d'un certain rang». L'événement C est appelé limite inférieure de la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, noté $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$.

3.1.4 Systèmes complets d'événements

La connaissance d'une famille au plus dénombrable d'événements $(A_i)_{i \in I}$ qui constitue une partition de Ω , joue un rôle important dans le calcul des probabilités (voir théorème 79).

Définition 63 Soit $(\Omega, \mathcal{B})$ un espace probabilisable. Une famille au plus dénombrable $(A_i)_{i \in I}$ d'événements est appelé **un système complet d'événements** si elle vérifie les conditions suivantes :

- Les événements $A_i, i \in I$ sont incompatibles deux à deux, c'est-à-dire $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour tout $i \neq j \in I$.
- $\Omega = \bigcup_{i \in I} A_i$.

Exemple 1 : Dans le cas où Ω est au plus dénombrable la famille formée par les événements élémentaires $(\{\omega\})_{\omega \in \Omega}$ est un système complet d'événements.

Exemple 2 : Soit $A \in \mathcal{B}$, la famille $(A, \bar{A})$ est un système complet d'événements.

3.2 Probabilité

3.2.1 Définitions et propriétés

Considérons un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{B})$, qui modélise une expérience aléatoire, nous souhaitons associer à un événement donné un nombre réel qui mesure les chances qu'il se produise. On définit une application sur $\mathcal{B}$ qui à chaque événement A associe un réel $P(A)$, appelé **probabilité** de A , compris entre 0 et 1 : plus $P(A)$ est proche de 0 moins l'événement risque de se réaliser, plus $P(A)$ est proche de 1 plus l'événement se réalisera souvent.

Définition 64 On appelle **probabilité** sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{B})$ toute application

$$P : \mathcal{B} \rightarrow [0, 1]$$

Vérifiant :

1. $P(\Omega) = 1$.
2. (σ -additivité) : Pour toute suite d'événements $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ incompatibles deux à deux, la famille $(P(A_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable et on a :

$$P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n).$$

Définition 65 Un espace probabilisé est la donnée d'un triplet $(\Omega, \mathcal{B}, P)$, où P est une probabilité sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{B})$.

Exemple : Reprenons l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B})$ de l'exemple 61. L'application $P : \mathcal{B} \rightarrow [0, 1]$ définie par :

$$\begin{cases} P(A) = 0 & \text{si } A \text{ est au plus dénombrable} \\ P(A) = 1 & \text{si } \bar{A} \text{ est au plus dénombrable} \end{cases} \quad \text{pour tout } A \in \mathcal{B},$$

définit bien une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{B})$. En effet :

- P est bien définie, puisqu'une partie de Ω et son complémentaire ne peuvent pas être à la fois au plus dénombrables.
- On a bien $P(\Omega) = 1$.
- Montrons la σ -additivité de P . Considérons une suite d'événements $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ incompatibles deux à deux.

Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, A_n est au plus dénombrable alors $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ est au plus dénombrable. Donc $P(A_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et

$$P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = 0.$$

Sinon, il existe un entier n_0 tel que A_{n_0} est infinie non dénombrable (en particulier $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ est non dénombrable). Comme pour tout entier $n \neq n_0$ on a $A_n \subseteq \overline{A_{n_0}}$ qui est au plus dénombrable, A_n est au plus dénombrable. Donc $P(A_{n_0}) = 1$, $P(A_n) = 0$ pour tout $n \neq n_0$ et $P(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = 1$. On a bien,

$$P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n).$$

Par suite $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ est un espace probabilisé.

On énonce dans la proposition quelques propriétés fondamentales d'une probabilité.

Proposition 66 *Soit P une probabilité sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{B})$, alors :*

1. $P(\emptyset) = 0$.
2. Pour tout $A \in \mathcal{B}$

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

3. Pour tout système complet d'événements $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = 1.$$

4. Pour toute famille finie $(A_1, A_2, \dots, A_p)$ d'événements incompatibles deux à deux on a :

$$P\left(\bigcup_{n=1}^p A_n\right) = \sum_{n=1}^p P(A_n). \quad (3.1)$$

5. Pour tous $A, B \in \mathcal{B}$,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B). \quad (3.2)$$

6. L'application P est croissante :

$$\boxed{\text{Si } A, B \in \mathcal{B}, A \subseteq B \text{ implique } P(A) \leq P(B).}$$

Preuve.

1. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite d'événements définie par $A_n = \emptyset$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. La σ -additivité de P implique que la série $\sum P(\emptyset)$ converge, soit $P(\emptyset) = 0$.
2. Soit A un événement et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite d'événements définie par : $A_0 = A$, $A_1 = \bar{A}$ et $A_n = \emptyset$ pour tout $n \geq 2$. Par la σ -additivité de l'application probabilité, il vient

$$1 = P(\Omega) = P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = P(A) + P(\bar{A}). \quad (3.3)$$

3. Conséquence directe de la définition de la probabilité.
4. Soient $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite d'événements définie par $B_0 = \emptyset$, $B_n = A_n$ pour $1 \leq n \leq p$ et $B_n = \emptyset$ pour tout $n \geq p+1$. Alors, par la σ -additivité de P , on a :

$$P\left(\bigcup_{n=1}^p A_n\right) = P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B_n) = \sum_{n=1}^p P(A_n). \quad (3.4)$$

5. En utilisant l'égalité :

$$A \cup B = (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B) \cup (\bar{A} \cup B),$$

et en appliquant (3.1), on obtient :

$$P(A \cup B) = P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cup B) + P(A \cap B). \quad (3.5)$$

D'autre part, comme $A = (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B)$,

$$P(A) = P(A \cap \bar{B}) + P(A \cap B), \quad (3.6)$$

de même on a :

$$P(B) = P(\bar{A} \cup B) + P(A \cap B). \quad (3.7)$$

Les égalités (3.5), (3.6) et (3.7) permettent de conclure.

6. Si $A \subseteq B$, on écrit $B = A \cup (B \setminus A)$. Par conséquent,

$$P(B) = P(A) + P(B \setminus A) \geq P(A)$$

Ce qui achève la preuve. ■

La σ -additivité de l'application probabilité peut être généralisée ainsi : Pour toute famille d'événements incompatibles deux à deux $(A_i)_{i \in I}$ où I est au plus dénombrable, la famille $(P(A_i))_{i \in I}$ est sommable et on a :

$$P\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sum_{i \in I} P(A_i).$$

L'égalité (3.2) se généralise à l'union finie d'événements. Plus précisément, on a la formule de Poincaré : Pour tous événements $A_1, A_2, \dots, A_n$, on a :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}). \quad (3.8)$$

On démontre ce résultat par récurrence (voir aussi l'application 144).

Application 67 Le pourcentage des étudiants qui passent les concours X , ENS et $Mines-Ponts$ est donnée par, $X : 40\%$, $ENS : 30\%$, $Mines-Ponts : 60\%$, X et $ENS : 10\%$, X et $Mines-Ponts : 50\%$, ENS et $Mines-Ponts : 40\%$ et 1% des étudiants passent les trois concours. Par une application directe de la formule de Poincaré, le lecteur peut établir que 31% des étudiants passent au moins un concours.

3.2.2 Modélisation d'une expérience aléatoire

On se place dans le cadre où l'univers Ω est au plus dénombrable (qui est le cadre du programme officiel). On choisit en général $\mathcal{P}(\Omega)$ comme tribu. Soit P une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$. Comme la famille $(\{\omega\})_{\omega \in \Omega}$ est un système complet d'événements, la famille de réels positifs $(P(\{\omega\}))_{\omega \in \Omega}$ est sommable et on a :

$$\sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) = 1.$$

Inversement, toute famille sommable de réels positifs $(\alpha_\omega)_{\omega \in \Omega}$ telle que $\sum_{\omega \in \Omega} \alpha_\omega = 1$, permet de définir une probabilité sur l'espace $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.

Proposition 68 Soit Ω un ensemble au plus dénombrable et $(\alpha_\omega)_{\omega \in \Omega}$ une famille sommable de réels positifs telle que $\sum_{\omega \in \Omega} \alpha_\omega = 1$. L'application P définie par

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} \alpha_\omega \text{ pour tout événement } A \in \mathcal{P}(\Omega),$$

est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.

Preuve. Il suffit de vérifier que l'application P vérifie les propriétés 1 et 2 de la définition 64. Remarquons, d'abord, que pour tout événement A , la famille $(\alpha_\omega)_{\omega \in A}$ est sommable, puisque la famille $(\alpha_\omega)_{\omega \in \Omega}$ est sommable, et on a

$$0 \leq \sum_{\omega \in A} \alpha_\omega \leq \sum_{\omega \in \Omega} \alpha_\omega = 1,$$

ce qui montre que l'application P est bien définie et à valeurs dans $[0, 1]$.

D'autre part, par définition de l'application P , on a :

$$P(\Omega) = \sum_{\omega \in \Omega} \alpha_\omega = 1.$$

Soient $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite formée par des événements incompatibles deux à deux et $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. La famille $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une partition de B . D'après le théorème de sommation par paquets appliqué à la famille sommable $(\alpha_\omega)_{\omega \in B}$, on obtient :

$$P(B) = \sum_{\omega \in B} \alpha_\omega = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{\omega \in A_n} \alpha_\omega = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n).$$

Ce qui achève la démonstration. ■

Remarque : Ainsi, Pour définir une probabilité sur l'espace $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$, dans le cas où Ω est au plus dénombrable, il suffit de définir la probabilité des événements élémentaires $P(\{\omega\})$ pour tout $\omega \in \Omega$, de telle sorte que la famille $(P(\{\omega\}))_{\omega \in \Omega}$ soit sommable et de somme égale à 1. La famille $(P(\{\omega\}))_{\omega \in \Omega}$ est appelée **une loi de probabilité** sur Ω .

Exemple 69 Sur l'espace probabilisable $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$ on définit une probabilité P en posant :

$$P(\{n\}) = \frac{1}{\zeta(2)n^2} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

En effet, on a $P(\{n\}) \geq 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(\{n\}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\zeta(2)n^2} = \frac{\zeta(2)}{\zeta(2)} = 1.$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et A_k l'événement « l'entier est multiple de k », alors :

$$P(A_k) = \sum_{n \in A_k} P(\{n\}) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(\{nk\}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\zeta(2)n^2 k^2} = \frac{1}{k^2}.$$

Exemple 70 (Suite de lancers). On lance une pièce de monnaie jusqu'à obtenir pile. Une série de lancers s'achève par l'obtention d'une pile. Par suite cette épreuve peut être modélisée par l'univers $\Omega = \{\omega_i : i \in \mathbb{N}^*\} \cup \{\omega_\infty\}$ avec

$\omega_i = (\overbrace{F, F, \dots, F}^{(i-1) \text{ fois}}, P)$ et $\omega_\infty = (F, F, \dots)$, correspondant au cas où on n'obtient jamais pile. On considère la tribu $\mathcal{P}(\Omega)$. On définit une probabilité P , en posant :

$$P(\{\omega_i\}) = (1-p)^{i-1}p \text{ pour tout } i \in \mathbb{N}^* \text{ et } P(\{\omega_\infty\}) = 0.$$

avec $p \in]0, 1[$. On va voir que l'espace probabilisé ainsi défini, modélise la suite des lancers indépendants lorsque la probabilité d'obtenir pile est p .

Probabilité uniforme sur un ensemble fini

Soit Ω un ensemble fini. La probabilité uniforme sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est la probabilité pour laquelle les événements élémentaires ont tous la même probabilité, c'est-à-dire :

$$P(\{\omega\}) = \frac{1}{\text{card}(\Omega)} \text{ pour tout } \omega \in \Omega.$$

Par suite, pour tout événement A on a :

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\}) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}.$$

Remarque : On ne peut pas définir une probabilité uniforme sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$, dans le cas où Ω est dénombrable. En effet, si tous les événements élémentaires ont la même probabilité c'est-à-dire $P(\{\omega\})$ est constante, la sommabilité de la famille $(P(\{\omega\}))_{\omega \in \Omega}$ entraîne que $P(\{\omega\}) = 0$ pour tout $\omega \in \Omega$ et par suite $P(\Omega) = 0$, ce qui est absurde.

Probabilité de la réunion d'événements non incompatibles.

Etant donné un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$, souvent on cherche la probabilité d'un événement $A \in \mathcal{B}$ qui s'exprime sous la forme $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ ou $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$, avec $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'événements dont on connaît la probabilité de chaque événement A_n , pour tout $n \in \mathbb{N}$. Les deux résultats suivants, qui sont des conséquences de la σ -additivité de l'application probabilité, nous permettent de conclure dans le cas où la suite des événements $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone.

Théorème 71 Propriété de continuité croissante : Soient $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements croissante, c'est-à-dire telle que $A_n \subseteq A_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n).$$

Théorème 72 Propriété de continuité décroissante : Soient $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements décroissante, c'est-à-dire telle que $A_{n+1} \subseteq A_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n).$$

Preuve. (Théorème 71). L'idée est de construire à partir de la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$, incompatibles deux à deux et telle que

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

On considère la suite d'événements $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$B_0 = A_0 \text{ et } B_n = A_n \setminus A_{n-1} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

- $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'événements incompatibles deux à deux. En effet, si $n \neq m$ (par exemple $n < m$) alors

$$B_n \subseteq A_n \subseteq A_{m-1} \text{ et } B_m = A_m \cap \overline{A_{m-1}} \subseteq \overline{A_{m-1}},$$

donc $B_n \cap B_m = \emptyset$.

- On a : $A_n = \bigcup_{i=0}^n B_i$. En effet, si $0 \leq i \leq n$, $B_i \subseteq A_i \subseteq A_n$, donc $\bigcup_{i=0}^n B_i \subseteq A_n$. D'autre part, soit $\omega \in A_n$, il existe un plus petit entier k dans $\{0, 1, \dots, n\}$ tel que $\omega \in A_k$. Donc $\omega \in B_k$, par suite $\omega \in \bigcup_{i=0}^n B_i$. Ce qui montre que $A_n \subseteq \bigcup_{i=0}^n B_i$.
- On a : $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, puisque $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{i=0}^n B_i = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$.

Par σ -additivité de P , on obtient :

$$P(A_n) = P\left(\bigcup_{i=0}^n B_i\right) = \sum_{i=0}^n P(B_i),$$

donc

$$P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^n P(B_i) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n).$$

Ce qui achève la preuve. ■

Preuve. (Théorème 72). La suite $(\overline{A_n})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante d'événements. En appliquant le théorème 71, on obtient :

$$P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = P\left(\overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{A_n}}\right) = 1 - P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{A_n}\right) = 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} P(\overline{A_n}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n),$$

et la propriété est démontrée. ■

Vocabulaire : Soit $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ un espace probabilisé.

1. Tout événement de probabilité 0 est dit **événement négligeable** (ou **presque impossible**).
2. Tout événement de probabilité 1 est dit **événement presque certain** (ou **presque sûr**).

Attention : Un événement négligeable n'est pas forcément l'événement impossible (voir l'exemple 70). De même un événement presque certain n'est pas en général l'événement certain. Ces deux notions dépendent du choix de la probabilité P .

Comme corollaire du théorème 71, on a :

Corollaire 73 Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements telle que la série $\sum P(A_n)$ converge. Alors

$$P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n).$$

Preuve. Montrons d'abord la propriété suivante : Pour toute famille d'événements $A_0, A_1, \dots, A_n$ on a :

$$P\left(\bigcup_{i=0}^n A_i\right) \leq \sum_{i=0}^n P(A_i). \quad (3.9)$$

La propriété est vraie si $n = 0$. Supposons que l'inégalité (3.9) est vraie pour toute familles d'événements $A_0, A_1, \dots, A_n$. Considérons $(n + 1)$ événements $A_0, A_1, \dots, A_n, A_{n+1}$ et posons $A' = \bigcup_{i=0}^n A_i$. On écrit :

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=0}^n A_i\right) &= P(A' \cup A_{n+1}) = P(A') + P(A_{n+1}) - P(A' \cap A_{n+1}) \\ &\leq P(A') + P(A_{n+1}) = P\left(\bigcup_{i=0}^n A_i\right) + P(A_{n+1}) \leq \sum_{i=0}^{n+1} P(A_i). \end{aligned}$$

Considérons, maintenant, une suite d'événements $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Soit $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite d'événements définie par $B_n = \bigcup_{i=0}^n A_i$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante d'événements et $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, on obtient :

$$P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(B_n). \quad (3.10)$$

D'après l'inégalité (3.9), il vient :

$$P(B_n) = P\left(\bigcup_{i=0}^n A_i\right) \leq \sum_{i=0}^n P(A_i).$$

Comme la série de terme général $P(A_n)$ converge, on en déduit que

$$P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(B_n) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^n P(A_i) = \sum_{i=0}^{+\infty} P(A_i).$$

Ce qui montre le résultat. ■

Remarque : Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements. L'égalité (3.10) s'écrit :

$$\boxed{P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\bigcup_{i=0}^n A_i\right).} \quad (3.11)$$

L'égalité précédente se voit comme une généralisation du résultat du théorème 71. En passant par les événements contraires, on démontre de même l'égalité :

$$\boxed{P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\bigcap_{i=0}^n A_i\right).} \quad (3.12)$$

Ces deux égalités sont utiles en pratique, puisqu'elles n'exigent pas la monotonie de la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Une conséquence immédiate du corollaire précédente est :

Corollaire 74 *Une réunion au plus dénombrable d'événements négligeables est négligeable.*

Preuve. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements négligeables. Comme

$$P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = 0,$$

alors $P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = 0$. ■

3.3 Probabilité conditionnelle et indépendance

3.3.1 Probabilités conditionnelles

Définition

La notion de probabilité conditionnelle apparaît naturellement lorsqu'on connaît une information d'avance sur le résultat d'une expérience aléatoire.

Théorème 75 *Soient $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ un espace probabilisé, et B un événement non négligeable. L'application $P_B : \mathcal{B} \rightarrow [0, 1]$ définie par :*

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \text{ pour tout } A \in \mathcal{B}.$$

*est une probabilité sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{B})$, appelée **probabilité conditionnelle relative à B** .*

Preuve. On a P_B définit bien une application de $\mathcal{B}$ dans $[0, 1]$, puisque on a $0 \leq P(A \cap B) \leq P(B)$. Il est clair que $P_B(\Omega) = 1$. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements deux à deux incompatibles. Comme la suite $(B \cap A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est formée par des événements deux à deux incompatibles, on aura :

$$P\left(B \cap \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (B \cap A_n)\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B \cap A_n)$$

En divisant cette égalité par $P(B)$ on obtient

$$P_B\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_B(A_n).$$

Ce qui achève la preuve. ■

Vocabulaire : Pour tout événement $A \in \mathcal{B}$, $P_B(A)$ noté aussi $P(A | B)$, est appelé **probabilité de A sachant B** .

La notation $P(A | B)$ est plus commode que $P_B(A)$ si l'expression de B est un peu compliquée.

Remarque : Dans cette définition de la probabilité conditionnelle, l'idée est que, sachant que B est réalisé l'événement intéressant n'est plus l'événement A de départ mais plutôt $A \cap B$. L'application $A \mapsto P(A \cap B)$ n'est pas une probabilité puisque l'image de Ω n'est pas 1. Pour en faire une probabilité, il suffit de la renormaliser en divisant par $P(B)$.

Exemple 76 *On lance deux dés numérotés de 1 à 6 d'une façon indépendante. L'expérience est modélisée par la probabilité uniforme sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$, où $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}^2$. On cherche à calculer la probabilité d'obtenir une somme paire sachant que le premier dé donne 1. On considère les événements A et B , avec A «obtenir une somme paire» et B «le premier dé donne 1». La probabilité cherchée est :*

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\text{card}(A \cap B)}{\text{card}(B)} = \frac{1}{2},$$

puisque

$$A \cap B = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5)\}$$

et

$$B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6)\}.$$

La connaissance de la probabilité conditionnelle $P(A | B)$ permet de calculer la probabilité $P(A \cap B)$. Voici une illustration simple.

Exemple 77 *Lors d'une étude sur une population donnée, on suppose que la probabilité p_n qu'une famille ait n enfants est $p_n = (\frac{1}{3})^n$ pour tout $n \geq 1$. On suppose que la probabilité qu'un enfant soit une fille ou un garçon est $\frac{1}{2}$. On veut calculer la probabilité qu'une famille ait exactement trois filles et pas de*

garçon.

On considère les événements A et B définis par A «la famille a trois enfants» et B «la famille a trois filles». La probabilité cherchée est donc $P(B \cap A)$. Or, par définition de la probabilité conditionnelle, on a

$$P(B \cap A) = P(B \mid A)P(A).$$

D'autre part, la probabilité pour qu'une famille ait trois filles sachant qu'elle a trois enfants est $(\frac{1}{2})^3$, donc la probabilité cherchée est

$$P(B \cap A) = (\frac{1}{2})^3 \times (\frac{1}{3})^3 = \frac{1}{216}.$$

Formule des probabilités composées

Nous venons d'utiliser dans l'exemple précédent la formule :

$$P(A \cap B) = P(B)P(A \mid B).$$

Cette égalité peut être généralisée pour calculer la probabilité d'une intersection finie d'événements.

Théorème 78 Soit $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ une famille d'événements, $(n \geq 2)$, d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ tels que $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$. Alors, on a :

$$\boxed{P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \dots P_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n).} \quad (3.13)$$

Preuve. Toutes les probabilités conditionnelles dans cette formule sont bien définies, puisque pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$,

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k) \geq P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0.$$

Le membre de droite de l'égalité (3.13) s'écrit, par définition d'une probabilité conditionnelle :

$$\begin{aligned} &P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \dots P_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n) = \\ &P(A_1) \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)} \cdot \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{P(A_1 \cap A_2)} \dots \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)}{P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1})} \end{aligned}$$

et l'on conclut par simplification. ■

Formule des probabilités totales

La formule des probabilités totales permet de calculer la probabilité d'un événement connaissant un système complet d'événements. Commençons par un exemple simple. Soit A un événement tel que $P(A) \in]0, 1[$. La famille $(A, \bar{A})$ est un système complet d'événements, donc pour tout événement B , on a $B = (B \cap A) \cup (B \cap \bar{A})$. Par σ -additivité de P , on obtient

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A}) = P(B \mid A)P(A) + P(B \mid \bar{A})P(\bar{A}).$$

Plus généralement, on a :

Théorème 79 Soit $(A_i)_{i \in I}$ un système complet d'événements dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ tel que $P(A_i) > 0$ pour tout $i \in I$. Pour tout événement $B \in \mathcal{B}$, on a :

$$P(B) = \sum_{i \in I} P(A_i)P(B \mid A_i).$$

Preuve. Soit $B \in \mathcal{B}$, on a :

$$B = B \cap \Omega = B \cap \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} (B \cap A_i).$$

Par σ -additivité de l'application P , on aura :

$$P(B) = \sum_{i \in I} P(B \cap A_i) = \sum_{i \in I} P(A_i)P(B \mid A_i).$$

La formule est ainsi démontrée. ■

Exemple 80 Un mobile se déplace sur les sommets d'un triangle ABC . Si à l'instant $t = n \in \mathbb{N}$, le mobile se trouve en un sommet du triangle il se déplace à l'instant $t = n + 1$ en l'un des deux autres sommets avec équiprobabilité. À l'instant $t = 0$ le mobile est en A . On cherche à calculer les probabilités a_n , b_n et c_n pour que le mobile à l'instant n soit, respectivement, en A en B et C . Considérons les événements A_n «le mobile est en A à l'instant $t = n$ », B_n «le mobile est en B à l'instant $t = n$ » et C_n «le mobile est en C à $t = n$ ». On a : $a_n = P(A_n)$, $b_n = P(B_n)$ et $c_n = P(C_n)$. Il est clair que $a_0 = 1$, $b_0 = c_0 = 0$. Soit $n \geq 1$, on a $(A_{n-1}, B_{n-1}, C_{n-1})$ est un système complet d'événements. Par la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1}P(A_n \mid A_{n-1}) + b_{n-1}P(A_n \mid B_{n-1}) + c_{n-1}P(A_n \mid C_{n-1}) \\ b_n = a_{n-1}P(B_n \mid A_{n-1}) + b_{n-1}P(B_n \mid B_{n-1}) + c_{n-1}P(B_n \mid C_{n-1}) \\ c_n = a_{n-1}P(C_n \mid A_{n-1}) + b_{n-1}P(C_n \mid B_{n-1}) + c_{n-1}P(C_n \mid C_{n-1}) \end{cases}$$

Comme

$$P(A_n \mid A_{n-1}) = 0 \text{ et } P(A_n \mid B_{n-1}) = P(A_n \mid C_{n-1}) = \frac{1}{2},$$

on obtient le système suivant

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{2}(b_{n-1} + c_{n-1}) \\ b_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + c_{n-1}) \\ c_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + b_{n-1}) \end{cases} \quad (3.14)$$

En posant, X_n le vecteur de $\mathbb{R}^3$ défini par $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ et M la matrice définie par

$$M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

le système (3.14) s'écrit : $X_n = MX_{n-1}$ pour tout $n \geq 1$. On obtient par récurrence :

$$X_n = M^n X_0 \text{ pour tout } n \geq 1.$$

La matrice M est diagonalisable, puisqu'elle est symétrique réelle. Des calculs simples montrent que M s'écrit :

$$M = P \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} P^{-1},$$

avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Par suite,

$$X_n = P \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix} P^{-1} X_0,$$

après calcul, on trouve

$$\begin{cases} a_n = \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3} \\ b_n = \frac{1}{3} - \frac{4}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n - \frac{1}{2^n} \\ c_n = \frac{1}{2^n} + \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3} \end{cases}.$$

On aurait pu remarquer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1} = 1$. Donc, la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie :

$$a_n = -\frac{1}{2}(a_{n-1} - 1) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

La suite de terme général $a_n - \frac{1}{3}$ est géométrique de raison $-\frac{1}{2}$. Par suite

$$a_n - \frac{1}{3} = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \left(a_0 - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

Ce qui donne

$$a_n = \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3}.$$

De même, on calcule b_n et c_n .

Exemple 81 On considère n urnes, $U_1, U_2, \dots, U_n$. Chaque urne U_k contient k boules rouges et $(n+1-k)$ boules blanches. On choisit une urne avec la probabilité de choisir U_k valant αk , (α constante). On tire une boule de l'urne choisie. Calculons la probabilité d'obtenir une boule rouge.

Notons, pour tout entier $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, A_k l'événement «on choisit l'urne U_k ». Les événements A_k , $1 \leq k \leq n$, forment un système complet d'événements. Comme $P(A_k) = \alpha k$, pour tout $1 \leq k \leq n$, on en déduit que

$$\sum_{k=1}^n \alpha k = 1, \text{ d'où}$$

$$\alpha = \frac{1}{\sum_{k=1}^n k} = \frac{2}{n(n+1)}.$$

D'autre part, Soit R l'événement «obtenir une boule rouge». En appliquant la formule des probabilités totales, on a :

$$P(R) = \sum_{k=1}^n P(A_k)P(R | A_k).$$

Par hypothèse, $P(R | A_k) = \frac{k}{n+1}$, par suite

$$P(R) = \sum_{k=1}^n \alpha \frac{k^2}{n+1} = \frac{2}{n(n+1)^2} \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{6n(n+1)^2} = \frac{2n+1}{3(n+1)}.$$

Formule de Bayes

Le théorème de Bayes est une conséquence immédiate des probabilités conditionnelles et de la formule des probabilités totales.

Théorème 82 Formule de Bayes : Soit $(A_i)_{i \in I}$ un système complet d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ tel que $P(A_i) > 0$ pour tout $i \in I$. Soit B un événement non négligeable. Pour tout $i \in I$, on a :

$$P(A_i | B) = \frac{P(B | A_i)P(A_i)}{\sum_{k \in I} P(A_k)P(B | A_k)}.$$

Preuve. Il suffit d'écrire les égalités :

$$P(A_i | B) = \frac{P(B \cap A_i)}{P(B)} = \frac{P(B | A_i)P(A_i)}{P(B)},$$

puis d'appliquer la formule des probabilités totales au dénominateur. ■

Remarque : Soient A et B deux événements tels que $P(A) \in]0, 1[$ et $P(B) > 0$. Alors :

$$P(A | B) = \frac{P(B | A)P(A)}{P(B | A)P(A) + P(B | \bar{A})P(\bar{A})}.$$

Exemple 83 On considère un nombre infini d'urnes $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, U_n contient n boules rouges et $2n$ boules blanches. La probabilité de choisir l'urne U_n est αe^{-n} ($\alpha \in \mathbb{R}$). De l'urne choisie on tire une boule et on obtient une boule rouge. On se propose de chercher la probabilité p_k pour que cette boule provienne de l'urne U_k . Soit A_n l'événement « choisir l'urne U_n » et R l'événement « on tire une boule rouge ». Un système complet d'événements est $\{A_n : n \in \mathbb{N}^*\}$. La probabilité cherchée est $p_k = P(A_k | R)$. Par la formule de Bayes, on a :

$$P(A_k | R) = \frac{P(R | A_k)P(A_k)}{\sum_{n=1}^{+\infty} P(R | A_n)P(A_n)},$$

Par hypothèse, on a pour tout $n \geq 1$, $P(R | A_n) = \frac{n}{3n} = \frac{1}{3}$. Donc,

$$p_k = \frac{\frac{\alpha}{3}e^{-k}}{\frac{1}{3} \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha e^{-n}} = e^{-(k-1)} (1 - e^{-1}).$$

3.3.2 Indépendance d'événements

Quand l'information donnée a priori sur un phénomène aléatoire n'a aucune influence sur la réalisation d'un autre phénomène, par exemple, lancers de deux dés, ces phénomènes aléatoires sont dits indépendants. Cette hypothèse d'indépendance sera fondamentale dans toute la théorie des probabilités, et simplifiera beaucoup les calculs.

Indépendance de deux événements

Définition 84 Soit $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ un espace probabilisé. Deux événements A et $B \in \mathcal{B}$ sont dits indépendants, si

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Remarques :

1. Si A et B sont deux événements de probabilités non nulles alors A et B sont indépendants si, et seulement si, $P(A | B) = P(A)$, ce qui est équivalent aussi à $P(B | A) = P(B)$ (la réalisation de l'un n'influe pas sur celle de l'autre).
2. L'indépendance et l'incompatibilité sont deux notions totalement différentes. Deux événements incompatibles A et B avec $P(A) > 0$ et $P(B) > 0$ ne sont jamais indépendants.
3. L'indépendance est une notion qui dépend de la probabilité. C'est-à-dire que deux événements peuvent être indépendants dans $(\Omega, \mathcal{B}, P_1)$ et non indépendants dans $(\Omega, \mathcal{B}, P_2)$.

Exemple : On lance simultanément deux dés ordinaires équilibrés. On considère les événements A «le premier dé donne 4», B «le deuxième dé donne 3» et C «obtenir une somme égale à 7». Par équiprobabilité on a :

$$P(A) = P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

et $P(A \cap B) = \frac{1}{36}$. Ce qui montre que A et B sont indépendants dans $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$, ce qui peut être déduit de l'énoncé puisque le résultat du premier dé n'influe pas sur le résultat du deuxième dé. Considérons maintenant la probabilité conditionnelle relative à C , P_C . On a :

$$P_C(A) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{\text{card}(A \cap C)}{\text{card}(C)} = \frac{1}{6},$$

car

$$(A \cap C) = \{(4, 3)\} \text{ et } C = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\},$$

On démontre de même que $P_C(B) = \frac{1}{6}$ et que $P_C(A \cap B) = \frac{1}{6}$. Par suite les deux événements A et B ne sont pas indépendants dans $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P_C)$.

Proposition 85 Soient $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ un espace probabilisé et A et B deux événements indépendants. Alors, les événements A et $\bar{B}$ sont indépendants.

Preuve. Il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned} P(A \cap \bar{B}) &= P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A)P(B) \\ &= P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(\bar{B}). \end{aligned}$$

Ce qui montre l'indépendance des événements A et $\bar{B}$. ■

On en déduit que :

1. Si le couple (A, B) est constitué d'événements indépendants, alors il en est de même pour les couples suivants : $(A, \bar{B})$, $(\bar{A}, B)$ et $(\bar{A}, \bar{B})$.
2. Si A est un événement presque certain ($P(A) = 1$), il est indépendant de tout autre événement B . Car, $P(\bar{A} \cap B) = 0 = P(\bar{A})P(B)$ donc $\bar{A}$ et B , et par suite A et B , sont indépendants.
3. Si A est un événement non négligeable, alors $P_A = P$ si, et seulement si A est un événement presque certain. En effet, $P_A = P$ implique que A est indépendant de tout autre événement B en particulier, A et $\bar{A}$ sont indépendants donc $P(A) = 1$. Le deuxième point montre la réciproque.

Indépendance d'une famille d'événements

On se propose de généraliser la notion d'indépendance au cas d'une suite d'événements. Examinons d'abord la situation suivante.

Exemple 86 Lors d'une enquête, on teste une famille à 2 enfants. On considère les événements A «les deux enfants sont de sexes différents», B «l'aîné est un garçon» et C «la cadette est une fille». Évidemment

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2},$$

et

$$P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = \frac{1}{4}.$$

Donc les événements A, B et C sont deux à deux indépendants.

D'autre part, on a :

$$P(C | A \cap B) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(A \cap B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} = 1 \neq P(C).$$

Donc la connaissance de la réalisation de A et B à la fois modifie notre information sur C . La notion d'indépendance deux à deux n'est donc pas suffisante pour traduire l'idée d'indépendance. Ceci motive la définition de l'indépendance mutuelle d'une famille d'événements.

Définition 87 Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$. On dit que la famille $(A_i)_{i \in I}$ est une famille d'événements mutuellement indépendants (ou indépendants) si, pour toute sous-famille finie d'indices $\{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subseteq I$, on a :

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \dots P(A_{i_k})$$

Remarques :

1. Des événements mutuellement indépendants sont clairement deux à deux indépendants mais la réciproque est fausse, comme nous le montre l'exemple 86.
2. Il résulte de la définition que si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille d'événements mutuellement indépendants alors, pour toute partie $I' \subseteq I$, la famille $(A_i)_{i \in I'}$ est encore une famille d'événements mutuellement indépendants.

Proposition 88 Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'événements mutuellement indépendants d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$. Alors la famille $(B_i)_{i \in I}$, où $B_i = A_i$ ou $\overline{A_i}$ pour tout $i \in I$, est une famille d'événements mutuellement indépendants.

Preuve. Soit $\{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subseteq I$, montrons que

$$P(B_{i_1} \cap B_{i_2} \dots \cap B_{i_k}) = P(B_{i_1})P(B_{i_2}) \dots P(B_{i_k}).$$

Supposons d'abord qu'il existe un seul indice i_p , $1 \leq p \leq k$, tel que $B_{i_p} = \overline{A_{i_p}}$. Comme les événements $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_p}$ sont indépendants, les deux événements $\bigcap_{j \in \{1, k\}, j \neq p} A_{i_j}$ et A_{i_p} sont indépendants. D'après la proposition 85, les événements $\bigcap_{j \in \{1, k\}, j \neq p} A_{i_j}$ et $\overline{A_{i_p}}$ sont indépendants. Par suite

$$\begin{aligned} P(B_{i_1} \cap B_{i_2} \dots \cap B_{i_k}) &= P\left(\bigcap_{j \in \{1, k\}, j \neq p} A_{i_j} \cap \overline{A_{i_p}}\right) = P\left(\bigcap_{j \in \{1, k\}, j \neq p} A_{i_j}\right)P(\overline{A_{i_p}}) \\ &= \prod_{j \in \{1, k\}, j \neq p} P(A_{i_j}) \cdot P(\overline{A_{i_p}}) = P(B_{i_1}) \cdot P(B_{i_2}) \dots P(B_{i_k}). \end{aligned}$$

Dans le cas où il existe n indices $i_{p_1}, i_{p_2}, \dots, i_{p_n}$ tels que $B_{i_{p_s}} = \overline{A_{i_{p_s}}}$, pour tout $1 \leq s \leq n$. En appliquant le même argument du premier cas n fois, on obtient le résultat. ■

Comme application de l'indépendance d'événements, on donne une preuve probabiliste de la formule d'Euler.

Application 89 (Indicateur d'Euler). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par $\varphi(n)$ le nombre des entiers k compris entre 1 et n premiers avec n . On se propose de démontrer la formule d'Euler : si $p_1, p_2, \dots, p_r$ sont les diviseurs premiers d'un entier $n \geq 2$, alors :

$$\boxed{\frac{\varphi(n)}{n} = \prod_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)}. \quad (3.15)$$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ fixé et $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$. On munit cet ensemble de la tribu $\mathcal{P}(\Omega)$ et de la probabilité uniforme, c'est-à-dire,

$$P(\{k\}) = \frac{1}{n} \text{ pour tout } k \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

(Cet espace probabilisé, modélise par exemple le choix d'un entier entre 1 et n). Pour tout entier $p \in \{1, 2, \dots, n\}$, on considère l'événement A_p « l'entier choisi est un multiple de p ». Pour tout entier p qui divise n , il existe un entier q tel que $n = p \cdot q$. Par suite, $A_p = \{p, 2p, \dots, qp\}$ et

$$P(A_p) = \sum_{k=1}^q P(\{kp\}) = \frac{q}{n} = \frac{1}{p}.$$

Soient $p_1, p_2, \dots, p_r$ les diviseurs premiers de n .

- Les événements $A_{p_1}, A_{p_2}, \dots, A_{p_r}$ sont mutuellement indépendants. En effet : soit $\{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, 2, \dots, r\}$. Il est clair que

$$A_{p_{i_1}} \cap A_{p_{i_2}} \cap \dots \cap A_{p_{i_k}} = A_{p_{i_1} \cdot p_{i_2} \cdot \dots \cdot p_{i_k}},$$

puisque $p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_k}$ sont premiers entre eux. Donc,

$$\begin{aligned} P(A_{p_{i_1}} \cap A_{p_{i_2}} \cap \dots \cap A_{p_{i_k}}) &= P(A_{p_{i_1} \cdot p_{i_2} \cdot \dots \cdot p_{i_k}}) = \frac{1}{p_{i_1} \cdot p_{i_2} \cdot \dots \cdot p_{i_k}} \\ &= P(A_{p_{i_1}}) \cdot P(A_{p_{i_2}}) \cdot \dots \cdot P(A_{p_{i_k}}). \end{aligned}$$

- Considérons l'événement :

$$A = \{k : 1 \leq k \leq n \text{ et } \text{pgcd}(k, n) = 1\},$$

Par définition de φ on a :

$$P(A) = \frac{\text{card}(A)}{n} = \frac{\varphi(n)}{n}. \quad (3.16)$$

D'autre part, un entier k appartient à A si, et seulement si, k est divisible par aucun des p_i , $1 \leq i \leq r$. Autrement dit, $A = \bigcap_{i=1}^r \overline{A_{p_i}}$. Comme, d'après la proposition 88, les événements $\overline{A_{p_i}}$, $1 \leq i \leq r$, sont indépendants, On en déduit que :

$$P(A) = \prod_{i=1}^r P(\overline{A_{p_i}}) = \prod_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{p_i}\right). \quad (3.17)$$

Les égalités (3.17) et (3.16) donnent :

$$\boxed{\frac{\varphi(n)}{n} = \prod_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)}. \quad (3.18)$$

Voici une autre application importante de l'indépendance d'événements :

Application 90 On considère une suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'événements mutuellement indépendants. Alors on a :

$$P\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\right) = 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=0}^n P(\overline{A_k}).$$

En effet, par indépendance de la famille $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on a :

$$P\left(\bigcup_{k=0}^n A_k\right) = 1 - P\left(\bigcap_{k=0}^n \overline{A_k}\right) = 1 - \prod_{k=0}^n p(\overline{A_k}) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

En appliquant l'égalité (3.11), il vient :

$$P\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\bigcup_{k=0}^n A_k\right) = 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=0}^n p(\overline{A_k}).$$

Si on suppose que la série $\sum P(A_n)$ diverge alors l'événement A «au moins l'un des événements A_n est réalisé» est presque certain. En effet, d'abord, on sait que $A = \bigcup_{k=0}^{\infty} A_k$. En utilisant l'inégalité de convexité :

$$1 + x \leq \exp(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R},$$

il vient :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \prod_{k=0}^n p(\overline{A_k}) = \prod_{k=0}^n (1 - P(A_k)) \leq \prod_{k=0}^n \exp(-P(A_k)) \\ &= \exp\left(-\sum_{k=0}^n P(A_k)\right). \end{aligned}$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n P(A_k) = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=0}^n p(\overline{A_k}) = 0$. Il résulte que :

$$P(A) = P\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\right) = 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=0}^n p(\overline{A_k}) = 1.$$

Remarque : On considère une épreuve de Bernoulli, c'est-à-dire, une expérience à deux issues $\{S, E\}$ avec la probabilité de l'événement S valant $p \in]0, 1[$ (exemple : lancer d'une pièce de monnaie avec S est l'événement «obtenir pile»). On répète cette épreuve une infinité de fois et on souhaite construire un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ modélisant cette expérience aléatoire.

– Si on suppose que l'épreuve s'arrête lorsqu'on obtient S . L'univers

Ω est l'ensemble $\{\omega_i : i \in \mathbb{N}^*\} \cup \{\omega_\infty\}$ où $\omega_i = \overbrace{(E, E, \dots, E, S)}^{i-1 \text{ fois}}$ et $\omega_\infty = (E, E, \dots)$, qui est dénombrable. On est donc dans le cadre de la proposition 68 et la tribu $\mathcal{B} = \mathcal{P}(\Omega)$ convient.

- Si l'épreuve ne s'arrête pas, alors chaque éventualité est une suite à valeurs dans $\{S, E\}$. Dans ce cas $\Omega = \{S, E\}^{\mathbb{N}}$ qui est non dénombrable (cf. corollaire 23). On cherche donc à construire une tribu $\mathcal{B}$ sur Ω telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble A_n «obtenir S au cours de la n ième épreuve» soit un événement et telle que la famille $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit formée par des événements indépendants. Il semble raisonnable de munir Ω de la tribu $\mathcal{B}$ engendrée par les ensembles A_n , c'est-à-dire, la plus petite tribu contenant tous les A_n , $n \in \mathbb{N}$. Cependant, il est extrêmement difficile de décrire cette tribu (déjà, il est en particulier difficile d'exhiber une partie de Ω qui ne soit pas dans cette tribu). La construction d'un tel espace probabilisé dépasse les objectifs du programme. **Nous admettrons l'existence d'un espace probabilisé modélisant une suite infinie d'expériences à deux issues.**

Pour finir :

1. Pour calculer la probabilité d'une réunion dénombrable d'événements $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$:
 - On peut utiliser la σ -additivité si les événements sont incompatibles deux à deux.
 - Utiliser le théorème 71 dans le cas où la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion.
 - Sinon, on peut utiliser la formule (3.11) :

$$P\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\bigcup_{k=0}^n A_k\right).$$

- Parfois, il est utile de se rappeler que

$$P\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} P(A_k).$$

2. Pour calculer la probabilité d'une intersection dénombrable d'événements $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on peut :
 - Utiliser le théorème 72 dans le cas où la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion.
 - Utiliser la formule (3.12) :

$$P\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\bigcap_{k=0}^n A_k\right).$$

3. Pour calculer la probabilité d'une intersection finie d'événements.
- Si les événements $(A_k)_{0 \leq k \leq n}$ ou $(\overline{A_k})_{0 \leq k \leq n}$ sont indépendants, alors

$$P\left(\bigcap_{k=0}^n A_k\right) = \prod_{k=0}^n P(A_k).$$

- Sinon, on peut utiliser la formule des probabilités composées (théorème 78).
4. Pour calculer la probabilité d'un événement :
- Utiliser la formule de probabilités totales (théorème 79) dans le cas où on connaît un système complet d'événements.
 - Exprimer l'événement comme réunion ou intersection dénombrable d'événements.
5. Pour calculer la probabilité conditionnelle d'un événement on peut utiliser la formule de Bayes (cf. théorème 82).
6. Pour montrer l'indépendance d'une suite d'événements $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, il suffit de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille d'événements $(A_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une famille d'événements indépendants.
7. Savoir utiliser l'indépendance d'une famille quelconque d'événements.

3.4 Exercices

Exercice 1 : Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$.

1. On suppose que $P(A) = \frac{3}{4}$ et $P(B) = \frac{3}{8}$. Montrer que

$$\frac{1}{8} \leq P(A \cap B) \leq \frac{3}{8}.$$

2. Montrer que pour tous événements A et B on a :

$$|P(A \cap B) - P(A)P(B)| \leq \frac{1}{4}.$$

Exercice 2 : Soient $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un système complet d'événements dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ et $C \in \mathcal{B}$ tels que $P(B_n \cap C) > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout événement A , on a :

$$P(A | C) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B_n | C)P(A | B_n \cap C).$$

Exercice 3 : Soit Ω un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$. On munit l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ de la probabilité uniforme. Soient A et B deux événements indépendants. On pose $i = \text{pgcd}(n, \text{card}(A))$. Montrer qu'il existe $k \in \{0, 1, \dots, i\}$ tel que $\text{card}(B) = k \frac{n}{i}$.

Exercice 4 : Une urne contient n boules numérotées de 1 à n . On effectue un tirage de p boules, $1 \leq p \leq n$. On fixe un entier k tel que $1 \leq k \leq n$.

1. On suppose dans cette question que les p boules sont extraites simultanément. Quelle est la probabilité des événements :

(a) $A_k := \text{«les boules obtenues ont un numéro inférieur ou égal à } k\text{»}$.

(b) $B_k := \text{«le plus grand numéro obtenu est } k\text{»}$.

(c) Montrer que

$$\sum_{k=p}^n \binom{k-1}{p-1} = \binom{n}{p}.$$

(d) Soit

$$S_{n,p} = \{(n_1, n_2, \dots, n_p) \in (\mathbb{N}^*)^p : n_1 + n_2 + \dots + n_p = n\}.$$

$$\text{Montrer que } \text{card} S_{n,p} = \binom{n-1}{p-1}.$$

2. On suppose dans cette question que les tirages sont successifs et avec remise. Calculer la probabilité des événements suivants :

(a) $A := \text{«le premier numéro obtenu est strictement inférieur au dernier»}$.

(b) $B := \text{«la somme des numéros obtenus est } n\text{»}$.

(c) $C := \text{«2 numéros exactement sont apparus»}$.

Exercice 5 : On dispose de deux urnes U_1 et U_2 . L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires. L'urne U_2 contient quatre boules blanches et trois boules noires. On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes : on choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie. On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient. Si la boule pour le premier tirage est blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1 . Sinon le tirage suivant se fait dans l'urne U_2 , etc. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement «la boule tirée au n -ième tirage est blanche» et $p_n = P(B_n)$.

1. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$p_{n+1} = \frac{-6}{35}p_n + \frac{4}{7}.$$

2. En déduire la probabilité p_n .

Exercice 6 : On dispose de deux urnes A et B . On suppose que chaque urne contient n boules numérotées de 1 à n et on tire une boule de chacune. Quelle est la probabilité pour que le numéro de la boule tirée de l'urne A soit supérieur à celui de la boule tirée de B .

Exercice 7 : Une urne contient n boules numérotées de 1, 2, 3, ..., n . Les boules sont tirées une par une. Quelle est la probabilité pour qu'au moins une fois il y ait une coïncidence entre le rang du tirage et le numéro de la boule obtenue.

Exercice 8 : On dispose d'une classe de n étudiants avec ($n \leq 365$).

1. Quelle est la probabilité P_n qu'au moins deux étudiants fêtent leur anniversaire le même jour ? (on suppose que toutes les années comptent 365 jours).
2. Montrer que $P_n \geq 1 - \exp\left(\frac{-n(n-1)}{730}\right)$.
3. Pour quelles valeurs de n la probabilité P_n est elle supérieure à $\frac{1}{2}$.

Exercice 9 : Un gardien dispose de n clés différentes, il doit ouvrir une porte ($n \geq 2$). Quand il est ivre, il remélange les clés après chaque essai, sinon, il retire la mauvaise clé du lot. Sachant qu'il est ivre un jour sur trois et que ce soir-là il a essayé plus de deux clés, quelle est la probabilité qu'il soit ivre ?

Exercice 10 : On considère n individus $I_1, I_2, \dots, I_n$. L'individu I_1 reçoit une information sous forme oui ou non qu'il transmet à I_2 , et ainsi de suite, jusqu'à I_n . Chaque individu transmet le message avec une probabilité $p \in]0, 1[$ et transmet le contraire avec une probabilité $1 - p$. Quelle est la probabilité P_n pour que le message soit fidèlement transmis à I_n . Que se passe-t-il quand $n \rightarrow +\infty$?

Exercice 11 : Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On dispose de $3k$ dés dont k sont pipés. Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut $p \in]0, 1[$.

1. On tire un dé au hasard parmi les dés. On lance ce dé et on obtient le chiffre 6. Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?

2. Soit $n \in \mathbb{N}$, On tire un dé au hasard parmi les dés. On lance ce dé n fois et on obtient n fois le chiffre 6. Quelle est la probabilité p_n que ce dé soit pipé ? Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$.

Exercice 12 : Deux joueurs A et B tirent sur une cible. Ils tirent chacun leur tour, le premier qui atteint la cible a gagné. Lorsque le joueur A tire, il atteint la cible avec une probabilité de $p \in]0, 1[$. Le joueur B atteint la cible avec une probabilité $q \in]0, 1[$. Le joueur A tire le premier. Pour tout $n \geq 1$, on considère les événements A_{2n-1} «le joueur A gagne à l'issue du $(2n - 1)$ -ième tir» et B_{2n} «le joueur B gagne à l'issue du $2n$ -ième tir».

1. Calculer $P(A_1)$, $P(B_1)$, puis $P(A_{2n-1})$ et $P(B_{2n})$ en fonction de p , q pour tout $n \geq 2$.
2. En déduire $P(A)$ et $P(B)$ où A = «le joueur A gagne» et B = «le joueur B gagne». Vérifier que $P(A) + P(B) = 1$.
3. A quelle condition nécessaire et suffisante la partie est elle équilibrée ?

Exercice 13 : Deux joueurs A et B , ont des quantités initiales d'argent dont la somme est n dinars, jouent un jeu dans lequel la probabilité que le joueur A gagne un tour est $p \in]0, 1[$ et la probabilité que B gagne est $q = 1 - p$. Chaque fois que l'un des joueurs gagne, il obtient un dinar de l'autre joueur. On suppose que le joueur A commence avec en poche une somme de k dinars ($0 \leq k \leq n$). Quelle est la probabilité que le joueur A obtienne finalement tout l'argent de B ?

Exercice 14 : (Boîtes d'allumettes de Banach) : Un mathématicien a dans chacune de ses deux poches une boîte qui contient n allumettes. Lorsqu'il désire fumer il choisit au hasard une des ses poches pour prendre une boîte. On considère le moment où, pour la première fois, le mathématicien s'aperçoit que l'une des boîtes d'allumettes est vide, à ce moment, l'autre boîte contient un nombre k d'allumettes. On désigne par p_k la probabilité qu'elle contient k allumettes.

1. Calculer la probabilité p_k pour $0 \leq k \leq n$.
2. Calculer $\sum_{k=0}^n 2^k \binom{2n-k}{n}$.
3. Calculer la probabilité p que les deux boîtes soient vides lorsque le mathématicien s'aperçoit que l'une des boîtes est vide. Déterminer un équivalent de p lorsque n tend vers l'infinie.

Exercice 15 : (Mines-Ponts 2016). La probabilité qu'une famille possède n enfants vaut αp^n , où α et p sont des réels strictement positifs fixés indépendants de n .

1. Déterminer α en fonction de p .
2. Quelle est la probabilité que la famille possède k garçons (on suppose qu'à chaque naissance, la probabilité que l'enfant soit un garçon est égale à $\frac{1}{2}$).
3. Quelle est la probabilité d'avoir au moins deux garçons sachant qu'il y en a au moins un ?

Exercice 16 : (Mines-Ponts 2016). Un objet a une probabilité p d'être dans un meuble. Ce meuble contient 8 tiroirs. Sachant que l'on a ouvert les 7 premiers tiroirs et que l'objet ne s'y trouvait pas, quelle est la probabilité qu'il soit dans le dernier ?

Exercice 17 : Soit $p \in]0, 1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la probabilité que n clients visitent un super-marché est $p_n = p^n q$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Deux sur trois clients achètent un certain article A . La probabilité qu'un article vendu soit défectueux est $\frac{1}{4}$. On suppose que les achats sont indépendants.

1. Quelle est la probabilité pour qu'un client achète un article non défectueux ?
2. Quelle est la probabilité pour qu'un client achète un article défectueux ?
3. On suppose que k articles non défectueux ont été vendus. Montrer que la probabilité b_n que n clients ont visité le super-marché est égale à

$$b_n = \binom{n}{k} p^{n-k} \frac{(6-p)^{k+1}}{6^{n+1}}.$$

Exercice 18 : (Lemme de Borel-Cantelli). Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements mutuellement indépendants de l'espace $(\Omega, \mathcal{B}, P)$. On considère l'événement

$$A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{p \geq n} A_p.$$

On rappelle que A est l'événement «une infinité d'événements A_n se réalisent».

1. Montrer que si la série $\sum P(A_n)$ converge alors $P(A) = 0$.

2. Montrer que si la série $\sum P(A_n)$ diverge alors $P(A) = 1$.
3. Application : On lance une infinité de fois une pièce de monnaie pour la quelle la probabilité d'obtenir pile est $p \in]0, 1[$ (d'après la remarque 3.3.2, on admet l'existence d'un espace probabilisé qui modélise cette expérience).
 - (a) Montrer que l'événement «pile apparait infinité de fois» est un événement presque certain.
 - (b) Calculer la probabilité d'avoir une séquence de deux piles une infinité de fois.

Exercice 19 : Soit p une probabilité sur l'espace probabilisable $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$.

1. Que vaut $\lim_{n \rightarrow \infty} P(\{n\})$?
2. Soit $x > 1$ fixé. On définit la probabilité p sur $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$ par :

$$P(\{n\}) = \frac{\lambda}{n^x}.$$

- (a) Que vaut λ ?
- (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit A_n l'événement «être divisible par n ». calculer $p(A_n)$.
- (c) A quelle condition les événements A_n et A_m sont ils indépendants ?
3. Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Décrire l'événement $\bigcap_{p \in \mathcal{P}} \overline{A_p}$ et en déduire la formule :

$$\zeta(x) = \frac{1}{\prod_{p \in \mathcal{P}} (1 - \frac{1}{p^x})}.$$

4. Montrer que la famille $(\frac{1}{p})_{p \in \mathcal{P}}$ n'est pas sommable.

Exercice 20 : On souhaite démontrer qu'il n'existe pas de probabilité P sur l'espace probabilisé $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$ telle que, pour tout entier $n > 1$, la probabilité de l'événement A_n «être divisible par n » soit $\frac{1}{n}$. On raisonne par l'absurde et on suppose qu'une telle probabilité existe.

1. Montrer que la famille des événements $(A_p)_{p \in \mathcal{P}}$, où $\mathcal{P}$ désigne l'ensemble des nombres premiers, est une famille d'événements indépendants.

2. Soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite croissante des nombres premiers et A l'ensemble des entiers naturels ayant une infinité de diviseurs premiers. Exprimer A en fonction des événements A_{p_i} , $i \in \mathbb{N}^*$. En déduire la probabilité de A , puis conclure.

Exercice 21 : Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements mutuellement indépendants de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$. On pose $A = \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$. On sait que si la série de terme général $P(A_n)$ diverge alors $P(A) = 1$ (cf. exemple 90).

1. On suppose de plus que $P(A_n) \neq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $P(A) = 1$ si, et seulement si, la série $\sum P(A_n)$ diverge.
2. On suppose que $P(A_n) = \frac{1}{(n+1)^2}$.
 - (a) Calculer $P(A)$.
 - (b) Calculer la probabilité pour qu'un seul événement de $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit réalisé.

Exercice 22 : Des boules en nombre infini numérotés $1, 2, \dots$ sont placées successivement, indépendamment les unes des autres, dans trois boîtes. Nous admettrons l'existence d'un espace probabilisé modélisant cette expérience.

1. Pour $k \geq 2$, on note A_k l'événement «toutes les boules jusqu'à la $(k-1)$ -ième ont été placées dans la même boîte et la k -ième boule est placée dans une boîte différente». Calculer $P(A_k)$ puis $\sum_{k=2}^{+\infty} P(A_k)$.
2. Quelle est la probabilité de l'événement A «toutes les boules sont placées dans une même boîte» ?
3. Pour $n \geq 3$, on note B_n l'événement «toutes les boules jusqu'à la $(n-1)$ -ième ont été placées dans deux des boîtes et la n -ième boule est placée la troisième boîte, la seule où il n'y avait pas encore de boule». Calculer $P(B_n | A_k)$ pour tout $k \geq 2$, puis $P(B_n)$.

Exercice 23 : Soit n un entier supérieur à 2.

1. Un entier X est choisi au hasard de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$. On note p_n la probabilité pour que $X^2 - 1$ soit divisible par 10. Déterminer p_n puis sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.

2. On choisit au hasard deux entiers X et Y de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$. On note p_n la probabilité pour que $X + Y$ soit un carré parfait. Calculer p_n et montrer que $p_n \sim \frac{4(\sqrt{2}-1)}{3\sqrt{n}}$.

3.5 Solution des exercices

Exercice 1 :

1. On a : $P(A \cap B) \leq \min(P(A), P(B)) \leq \frac{3}{8}$. Comme $P(A \cup B) \leq 1$, on obtient :

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) + P(B) - P(A \cup B) \\ &\geq \frac{3}{8} + \frac{3}{4} - 1 = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

2. On montre, d'abord, que

$$P(A \cap B) - P(A)P(B) \leq \frac{1}{4}. \quad (3.19)$$

Sans perte de généralité on peut supposer que $P(A) \leq P(B)$. On écrit :

$$\begin{aligned} P(A \cap B) - P(A)P(B) &\leq P(A) - P(A)P(B) \\ &= P(A)(1 - P(B)) \\ &\leq P(A)(1 - P(A)) \\ &\leq \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

où, on a utilisé le fait que

$$\sup_{x \in [0,1]} x(1-x) = \frac{1}{4}.$$

En utilisant l'identité $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$, il vient :

$$\begin{aligned} P(A)P(B) - P(A \cap B) &= P(A)P(B) - P(A) + P(A \cap \overline{B}) \\ &= P(A \cap \overline{B}) - P(A)P(\overline{B}) \leq \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

d'après l'inégalité (3.19). Ce qui montre le résultat recherché.

Remarque : On peut retrouver facilement cette inégalité en utilisant l'application covariance (voir application 168).

Exercice 2 : On applique la formule des probabilités totales sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P_C)$. On écrit, pour tout événement A :

$$P_C(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_C(B_n)P_C(A | B_n).$$

On obtient l'égalité désirée, puisque

$$P_C(A | B_n) = \frac{P_C(A \cap B_n)}{P_C(B_n)} = \frac{P(A \cap B_n \cap C)}{P(B_n \cap C)} = P(A | B_n \cap C).$$

Exercice 3 : L'égalité $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ entraîne que

$$n \text{card}(A \cap B) = \text{card}(A)\text{card}(B).$$

En divisant par i , on obtient :

$$\frac{n}{i} \text{card}(A \cap B) = \frac{\text{card}(A)}{i} \text{card}(B)$$

Comme $\frac{n}{i}$ et $\frac{\text{card}(A)}{i}$ sont premiers entre eux, on en déduit que $\frac{n}{i}$ divise $\text{card}(B)$, donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\text{card}(B) = k \frac{n}{i}$. De plus, $0 \leq \text{card}(B) \leq n$ donc $0 \leq k \leq i$.

Exercice 4 :

1. Un tirage est une combinaison (choix non ordonné) de p boules prises parmi n boules, donc $\text{card}(\Omega) = \binom{n}{p}$.

- (a) L'événement A_k est réalisé si, et seulement si, les p boules tirées sont parmi les k premières boules. Par suite la probabilité

cherchée est nulle si $k < p$ est elle est égale à $\frac{\binom{k}{p}}{\binom{n}{p}}$ si $k \geq p$.

- (b) L'événement B_k est réalisé si, et seulement si, on obtient la boule numéro k et les $(p-1)$ autres boules sont choisies parmi les $(k-1)$ premières boules. Par suite $P(B_k) = 0$ si $k < p$ et

$$P(B_k) = \frac{\binom{k-1}{p-1}}{\binom{n}{p}} \text{ si } k \geq p.$$

- (c) Les événements $(B_k)_{p \leq k \leq n}$ forment un système complet d'événements, donc

$$\sum_{k=p}^n P(B_k) = \sum_{k=p}^n \frac{\binom{k-1}{p-1}}{\binom{n}{p}} = 1.$$

Ce qui donne, en multipliant par $\binom{n}{p}$,

$$\sum_{k=p}^n \binom{k-1}{p-1} = \binom{n}{p}. \quad (3.20)$$

- (d) On montre par récurrence sur $p \in \{1, 2, \dots, n\}$ que, pour tout $q \geq p$ on a $\text{card}(S_{q,p}) = \binom{q-1}{p-1}$. Il est clair que, si $q \geq 1$ alors $S_{q,1} = \{q\}$, donc l'égalité est vérifiée. Supposons que pour tout $q \geq p$ on a $\text{card}(S_{q,p}) = \binom{q-1}{p-1}$. Fixons un entier $q \geq p+1$. On a :

$$S_{q,p+1} = \{(n_1, n_2, \dots, n_{p+1}) \in (\mathbb{N}^*)^p : n_1 + n_2 + \dots + n_{p+1} = q\}$$

Comme n_{p+1} varie entre 1 et $q-p$, il est facile de voir que l'application $(n_1, n_2, \dots, n_{p+1}) \mapsto (n_1, n_2, \dots, n_p)$ définit bien une bijection de $S_{q,p+1}$ dans $\bigcup_{k=1}^{q-p} S_{q-k,p}$. Par suite, en utilisant l'égalité (3.20), on obtient :

$$\begin{aligned} \text{card}(S_{q,p+1}) &= \sum_{k=1}^{q-p} \text{card}(S_{q-k,p}) = \sum_{k=1}^{q-p} \binom{q-k-1}{p-1} \\ &= \sum_{k=p}^{q-1} \binom{k-1}{p-1} = \binom{q-1}{p}. \end{aligned}$$

Ce qui montre le résultat.

2. Une réalisation est une p -liste de $\{1, 2, \dots, n\}$ donc, $\text{card}(\Omega) = n^p$.

- (a) Notons, pour tout $1 \leq i \leq n$, l'événement A_i «le premier numéro obtenu est i ». On a $P(A_i) = \frac{1}{n}$. Par la formule des probabilités totales, on a :

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A | A_i) P(A_i).$$

Quand le premier numéro est fixé est égal à i , l'événement A est réalisé si, et seulement si, le dernier numéro est choisi parmi $\{i+1, i+2, \dots, n\}$. Donc, si $i = n$ on a $P(A | A_i) = 0$ et si $i < n$, $P(A | A_i) = \frac{n-i}{n}$. Par conséquent,

$$P(A) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n-1} (n-i) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2n^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}.$$

- (b) On a :

$$B = \{(n_1, n_2, \dots, n_p) \in \mathbb{N}^{*p} \text{ tels que } n_1 + n_2 + \dots + n_p = n\}.$$

En utilisant la question 1-d, on obtient :

$$P(B) = \frac{\text{card}(B)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{\binom{n-1}{p-1}}{n^p}.$$

- (c) Une réalisation $\omega \in C$ si et seulement si, ω est une p -liste parmi un ensemble fixé $\{i, j\}$, et contient les deux numéros. Si on fixe deux numéros $1 \leq i, j \leq n$, on a $(2^p - 2)$ réalisations possibles (on exclu les p -listes $(i, i, \dots, i)$ et $(j, j, \dots, j)$). Comme on a $\binom{n}{2}$ choix des numéros i, j , alors $\text{card}(C) = \binom{n}{2} (2^p - 2)$.

$$\text{Donc } P(C) = \frac{\binom{n}{2} (2^p - 2)}{n^p}.$$

Exercice 5 :

1. En utilisant la formule des probabilités totales on obtient :

$$P(B_{n+1}) = P(B_{n+1} | B_n) P(B_n) + P(B_{n+1} | \overline{B_n}) P(\overline{B_n}).$$

Or, $P(B_{n+1} | B_n) = \frac{2}{5}$, puisque si l'événement B_n est réalisé alors le $(n+1)$ -ième tirage s'effectue dans l'urne U_1 . De même, on trouve $P(B_{n+1} | \overline{B_n}) = \frac{4}{7}$. Par suite, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$p_{n+1} = \frac{2}{5} p_n + \frac{4}{7} (1 - p_n) = \frac{-6}{35} p_n + \frac{4}{7}.$$

2. Le réel $x_0 = \frac{20}{41}$ est l'unique solution de l'équation :
 $\frac{-6}{35}x + \frac{4}{7} = x$. La suite de terme général $p_n - x_0$ est géométrique de raison $\frac{-6}{35}$. Donc $p_n - x_0 = (\frac{-6}{35})^{n-1}(p_1 - x_0)$. Calculons p_1 . On considère les événements U_1 «la première boule tirée provient de U_1 » et U_2 «la première boule tirée provient de U_2 ». Les événements U_1 et U_2 forment un système complet d'événements, il vient, par application de la formule des probabilités totales :

$$P(B_1) = P(B_1 | U_1)P(U_1) + P(B_1 | U_2)P(U_2).$$

Ce qui donne : $p_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{7} = \frac{17}{35}$. On en déduit que :

$$p_n = (\frac{-6}{35})^{n-1}(p_1 - x_0) + x_0 = -\frac{3}{1435} \cdot (\frac{-6}{35})^{n-1} + \frac{20}{41}.$$

Exercice 6 : Pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, on note S_i l'événement «on tire le numéro i de A et un numéro strictement supérieur à i de B ». La probabilité cherchée est

$$p = P(S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n) = \sum_{i=1}^n P(S_i)$$

Or, $P(S_i) = \frac{1}{n} \cdot \frac{n-i}{n}$, par suite

$$p = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n (n-i) = \frac{n-1}{2n}.$$

Méthode 2 : On peut raisonner autrement, en remarquant que la probabilité cherchée est aussi égale à la probabilité de tirer un numéro de B strictement supérieur à celui de A et que la probabilité de tirer deux numéros égaux est $\frac{1}{n}$. Comme ces trois événements forment un système complet d'événements, on en déduit que $p + p + \frac{1}{n} = 1$, donc $p = \frac{n-1}{2n}$.

Exercice 7 : Une réalisation est une permutation de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$ donc $\text{card}(\Omega) = n!$. Considérons, pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, l'événement A_i = «la i -ième boule est tirée au i -ième tirage». La probabilité cherchée n'est autre que la probabilité $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)$. Pour tout k -uplet $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ tel que $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$,

$$P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = \frac{(n-k)!}{n!},$$

puisque $A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}$ est l'ensemble de permutations qui fixent $i_1, i_2, \dots, i_k$. Par la formule de Poincaré (3.8),

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}).$$

Comme, pour chaque k entre 1 et n ,

$$\text{card} \{(i_1, i_2, \dots, i_k) : 1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k \leq n\} = \binom{n}{k},$$

il vient :

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \frac{(n-k)!}{n!} \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{1}{k!}. \end{aligned}$$

Lorsque n tend vers ∞ , $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)$ tend vers $1 - \frac{1}{e}$.

Exercice 8 :

1. Chaque éventualité est une n -liste $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ de nombres compris entre 1 et 365. La probabilité cherchée est la probabilité de l'événement A_n «la liste contient au moins deux nombres égaux». Comme, par hypothèse, la probabilité est uniforme, on a donc : $P_n = \frac{\text{card}(A_n)}{365^n}$. Il est plus simple de calculer la probabilité $P(\overline{A_n})$. Une liste $(k_1, k_2, \dots, k_n) \in \overline{A_n}$ si, et seulement si, $k_i \neq k_j$ pour tout $i \neq j \in \{1, 2, \dots, n\}$, donc

$$\text{card}(\overline{A_n}) = 365 \cdot (365 - 1) \dots (365 - n + 1).$$

Par conséquent,

$$P_n = 1 - \frac{\text{card}(\overline{A_n})}{365^n} = 1 - \prod_{k=0}^{n-1} \frac{(365 - k)}{365} = 1 - \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{365}\right).$$

2. Par l'inégalité de convexité : $1 - x \leq e^{-x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on en déduit que

$$P_n \geq 1 - \prod_{k=0}^{n-1} e^{-\frac{k}{365}} = 1 - e^{-\frac{n(n-1)}{730}}.$$

3. Pour que $P_n \geq \frac{1}{2}$, il suffit que $1 - e^{-\frac{n(n-1)}{730}} \geq \frac{1}{2}$. Cette dernière inégalité peut s'écrire aussi $\frac{n(n-1)}{730} \geq \ln(2)$. On en déduit que $P_n \geq \frac{1}{2}$ si

$$n(n-1) \geq 730 \ln(2).$$

L'équation, $X^2 - X - 730 \ln(2) = 0$ admet 2 solutions :

$$\frac{1}{2} \sqrt{2920 \ln 2 + 1} + \frac{1}{2} \text{ et } \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{2920 \ln 2 + 1}.$$

Donc, pour $n \geq \frac{1}{2} \sqrt{2920 \ln 2 + 1} + \frac{1}{2} = 23$, on a $P_n \geq \frac{1}{2}$. On vérifie numériquement que :

$$P_{22} = 0.475\,70, P_{23} = 0.507\,30 \text{ et } P_{55} = 0.986\,26,$$

Donc, dans une classe d'environ 55 étudiants, il y a plus de 98% de chance que deux de ces étudiants aient leur anniversaire le même jour. Ce résultat est tellement contraire à notre intuition qu'on l'appelle *le paradoxe des anniversaires*.

Exercice 9 : Soit I l'événement «le gardien est ivre», par hypothèse, on a $P(I) = \frac{1}{3}$. Soit A l'événement «le gardien utilise au moins 2 clés». La probabilité cherchée est la probabilité $P(I | A)$. Par la formule de Bayes, on a :

$$P(I | A) = \frac{P(A | I)P(I)}{P(A | I)P(I) + P(A | \bar{I})P(\bar{I})}$$

Or,

$$P(A | I) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \text{ et } P(A | \bar{I}) = \frac{(n-1)(n-2)}{n(n-1)},$$

car si le gardien est ivre la probabilité d'échec à chaque essai est $\frac{n-1}{n}$, ou sinon, la probabilité d'échec au premier essai est $\frac{(n-1)}{n}$ et celle au deuxième essai est $\frac{(n-2)}{(n-1)}$. D'où :

$$P(I | A) = \frac{(n-1)^2}{(n-1)^2 + 2n(n-2)}.$$

Exercice 10 : Pour tout $n \geq 1$, on considère l'événement A_n «le message est fidèlement transmis entre $I_1, I_2, \dots, I_n$ » et on pose $p_n = P(A_n)$. On raisonne suivant les $(n-1)$ premiers individus, c'est-à-dire, on utilise la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(A_{n-1}, \overline{A_{n-1}})$. On écrit pour tout $n \geq 2$:

$$P(A_n) = P(A_n | A_{n-1})P(A_{n-1}) + P(A_n | \overline{A_{n-1}})P(\overline{A_{n-1}}).$$

On a $P(A_n | A_{n-1}) = p$, car si le message est transmis fidèlement entre $(I_1, \dots, I_{n-1})$ alors A_n est réalisé si, et seulement si, I_{n-1} transmet le message fidèlement à I_n . De même $P(A_n | \overline{A_{n-1}}) = (1-p)$. D'où

$$p_n = pp_{n-1} + (1-p)(1-p_{n-1}) = (2p-1)p_{n-1} + (1-p).$$

La fonction $x \mapsto (2p-1)x + (1-p)$ admet un unique point fixe qui est $\frac{1}{2}$, donc la suite $x_n = p_n - \frac{1}{2}$ est géométrique de raison $(2p-1)$. Par suite on obtient :

$$p_n - \frac{1}{2} = (2p-1)^{n-1}(p_1 - \frac{1}{2}).$$

Comme $p_1 = p$, on trouve pour tout $n \geq 1$,

$$p_n = 2^{n-1}(p - \frac{1}{2})^n + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(2p-1)^n + \frac{1}{2}.$$

Clairement, la suite p_n tend vers $\frac{1}{2}$ lorsque n tend vers $+\infty$. C'est-à-dire que lorsqu'on a un nombre assez grand d'individus, la probabilité pour qu'un message soit transmis fidèlement est presque $\frac{1}{2}$.

Exercice 11 :

1. On note A l'événement «le dé choisi est pipé» et B l'événement «on obtient le chiffre 6». La probabilité demandée est $P(A | B)$. Par la formule de Bayes on a :

$$P(A | B) = \frac{P(B | A)P(A)}{P(B | A)P(A) + P(B | \overline{A})P(\overline{A})}.$$

Comme, $P(A) = \frac{k}{3k} = \frac{1}{3}$, $P(B | A) = p$ et $P(B | \overline{A}) = \frac{1}{6}$ on obtient :

$$P(A | B) = \frac{\frac{p}{3}}{\frac{p}{3} + \frac{1}{6} \times \frac{2}{3}} = \frac{3p}{3p+1}.$$

2. Considérons les événements A «choisir un dé pipé» et B «obtenir n fois le chiffre 6». On écrit :

$$p_n = P(A | B) = \frac{P(B | A)P(A)}{P(B | A)P(A) + P(B | \bar{A})P(\bar{A})}.$$

Comme $P(B | A) = p^n$ et $P(B | \bar{A}) = \frac{1}{6^n}$, il vient :

$$p_n = \frac{\frac{1}{3}p^n}{\frac{1}{3}p^n + \frac{1}{6^n} \cdot \frac{2}{3}} = \frac{p^n}{p^n + 2(\frac{1}{6})^n}.$$

- Si $p > \frac{1}{6}$, alors $p_n \sim 1$, donc p_n tend vers 1, lorsque n tend vers ∞ .
- Si $p < \frac{1}{6}$, alors $p_n \sim \frac{p^n}{2(\frac{1}{6})^n} = \frac{1}{2}(6p)^n$ tend vers 0, lorsque n tend vers ∞ .
- Si $p = \frac{1}{6}$, alors $p_n = \frac{1}{3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 12 :

1. Pour tout $n \geq 1$, l'événement A_{2n-1} est réalisé si, et seulement si, les $(n-1)$ premiers tirs de A et les $(n-1)$ premiers tirs de B sont des échecs et A atteint la cible lors de son n -ième tir. Comme les tirs sont indépendants, on a :

$$P(A_{2n-1}) = (1-p)^{n-1}(1-q)^{n-1}p.$$

L'événement B_{2n} est réalisé si, et seulement si, les n premiers tirs de A et les $(n-1)$ premiers tirs de B sont des échecs et B réussit lors de son n -ième tir. Ce qui donne :

$$P(B_{2n}) = (1-p)^n(1-q)^{n-1}q.$$

2. On a : $A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_{2n-1}$ et $B = \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_{2n}$. Comme les événements $(A_{2n-1})_{n \geq 1}$ sont incompatibles, on obtient :

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_{2n-1}) = \sum_{n=1}^{+\infty} (1-p)^{n-1}(1-q)^{n-1}p \\ &= \frac{p}{1 - (1-p)(1-q)}. \end{aligned}$$

De même, on a :

$$\begin{aligned} P(B) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P(B_{2n}) = \sum_{n=1}^{+\infty} (1-p)^n (1-q)^{n-1} q \\ &= \frac{q(1-p)}{1 - (1-p)(1-q)}. \end{aligned}$$

On vérifie bien que $P(A) + P(B) = 1$.

3. Le jeu est équilibré si, et seulement si, $q = \frac{p}{1-p}$ (ce qui impose $p < \frac{1}{2}$).

Exercice 13 : Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on désigne par A_k l'événement «le joueur A gagne les n dinars avec la somme initiale de k dinars» et $u_k = P(A_k)$. Par hypothèse, on a $u_0 = 0$ et $u_n = 1$. Considérons l'événement $R =$ «le joueur A gagne le premier tour». Par la formule des probabilités totales, on obtient :

$$P(A_k) = P(R)P(A_k | R) + P(\overline{R})P(A_k | \overline{R}).$$

Donc, $u_k = pu_{k+1} + qu_{k-1}$, soit $u_{k+1} = \frac{1}{p}u_k + \frac{q}{p}u_{k-1}$. L'équation caractéristique de la suite est $pr^2 - r + q = 0$ dont les racines sont 1 et $\frac{q}{p}$.

- Si $p \neq \frac{1}{2}$ ($\frac{q}{p} \neq 1$), alors il existe deux réels α, β tels que

$$u_k = \alpha + \beta\left(\frac{q}{p}\right)^k.$$

Or, par hypothèse

$$\alpha + \beta = u_0 = 0 \text{ et } \alpha + \beta\left(\frac{q}{p}\right)^n = u_n = 1,$$

donc $\beta = \frac{1}{\left(\frac{q}{p}\right)^n - 1}$ et $\alpha = -\beta$. Par conséquent :

$$u_k = \frac{1}{\left(\frac{q}{p}\right)^n - 1} \left(\left(\frac{q}{p}\right)^k - 1 \right) = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^k - 1}{\left(\frac{q}{p}\right)^n - 1}.$$

- Si $p = \frac{1}{2}$, alors il existe α, β tels que : $u_k = (\alpha + k\beta)$. En tenant compte de fait que $u_0 = 0$ et $u_n = 1$, on trouve $\alpha = 0$ et $\beta = \frac{1}{n}$. D'où $u_k = \frac{k}{n}$.

Exercice 14 :

- Notons B_1 et B_2 les deux boîtes. Au moment où le mathématicien s'aperçoit que la boîte B_1 est vide, il a tiré n allumettes de la boîte B_1 , $n - k$ de B_2 , puis il a tiré B_1 . Chaque choix de boîte s'effectue avec une probabilité égale à $\frac{1}{2}$. Parmi les $(2n - k)$ allumettes tirées, n allumettes sont choisis de la boîte B_1 et $n - k$ de l'autre, donc on a $\binom{2n - k}{n}$ possibilités. Ainsi la probabilité pour que B_2 contienne k allumettes quand le mathématicien s'aperçoit que la boîte B_1 est vide est égale à $\binom{2n - k}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n - k - 1}$. On fait le même raisonnement dans le cas où la boîte B_2 est vide. La probabilité cherchée est donc :

$$p_k = 2 \binom{2n - k}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n - k - 1} = \binom{2n - k}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n - k}.$$

- Les événements A_k , $0 \leq k \leq n$, avec A_k «l'autre boîte contient k allumettes quand le mathématicien s'aperçoit qu'une boîte est vide», forment un système complet d'événements, donc

$$\sum_{k=0}^n P(A_k) = \sum_{k=0}^n \binom{2n - k}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n - k} = 1,$$

ce qui donne, en multipliant par 2^{2n} ,

$$\sum_{k=0}^n 2^k \binom{2n - k}{n} = 2^{2n} = 4^n.$$

- On a :

$$p = p_0 = \binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n}} = \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{2n}}.$$

Par la formule de Stirling : $n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$, il vient

$$p \sim \frac{(2n)^{2n} e^{-2n} \sqrt{4\pi n}}{n^{2n} e^{-2n} 2\pi n 2^{2n}} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

Exercice 15 :

1. Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'événement A_n : «la famille possède n enfants». La suite d'événements $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements donc $\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = 1$. Par suite $\alpha \sum_{n=0}^{+\infty} p^n = 1$ ce qui donne $\alpha = (1 - p)$.
2. Soit B_k l'événement B_k : «la famille a k garçons». Par la formule de probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} P(B_k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(B_k | A_n) P(A_n) = \sum_{n=k}^{+\infty} P(B_k | A_n) P(A_n) \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} \alpha p^n = \alpha \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} \left(\frac{p}{2}\right)^n. \end{aligned}$$

Or, pour tout $t \in]-1, 1[$, le développement en série entière de la fonction $t \mapsto (1-t)^{-(k+1)}$ s'écrit : $\frac{1}{(1-t)^{k+1}} = \sum_{n=m}^{+\infty} \binom{n}{k} t^{n-k}$ donc

$$P(B_k) = \frac{1-p}{\left(1-\frac{p}{2}\right)^{k+1}} \left(\frac{p}{2}\right)^k.$$

3. On considère les événements C : «la famille possède au moins deux garçons» et D : «la famille possède au moins un garçon». On cherche, alors, la probabilité de l'événement C sachant que l'événement D est réalisé. On écrit :

$$P(C | D) = \frac{P(D \cap C)}{P(D)} = \frac{P(C)}{P(D)}$$

Comme

$$\begin{aligned} P(C) &= 1 - (P(B_0) + P(B_1)) \\ &= 1 - \frac{1-p}{\left(1-\frac{p}{2}\right)} - \frac{1-p}{\left(1-\frac{p}{2}\right)^2} \frac{p}{2} = \frac{p^2}{(p-2)^2}, \end{aligned}$$

et

$$P(D) = 1 - P(B_0) = 1 - \frac{1-p}{\left(1-\frac{p}{2}\right)} = \frac{p}{2-p},$$

on obtient : $P(C | D) = \frac{p}{2-p}$.

Exercice 16 : Considérons les événements, A : «l'objet se trouve dans le meuble» et, pour tout $i \in \{1, 2, \dots, 8\}$, A_i : «l'objet se trouve dans le tiroir numéro i ». On cherche la probabilité $P(A_8 \mid \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_7})$. On a :

$$P(A_8) = P(A_8 \mid A)P(A) + P(A_8 \mid \overline{A})P(\overline{A}) = \frac{p}{8},$$

et

$$\begin{aligned} & P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_7}) \\ &= P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_7} \mid A)P(A) + P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_7} \mid \overline{A})P(\overline{A}) \\ &= \frac{1}{8}p + 1 - p. \end{aligned}$$

Il vient :

$$\begin{aligned} P(A_8 \mid \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_7}) &= \frac{P(A_8 \cap \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_7})}{P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_7})} \\ &= \frac{P(A_8)}{P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_7})} = \frac{p}{p + 8(1 - p)}. \end{aligned}$$

Exercice 17 :

1. Soit B l'événement «le client achète un article» et C l'événement «le client achète un article non défectueux». La probabilité recherchée est :

$$P(C) = P(B \cap C) = P(B)P(C \mid B) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2}.$$

2. De même, en notant D l'événement «le client achète un article défectueux», on a :

$$P(D) = P(B \cap D) = P(B)P(D \mid B) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{6}.$$

3. Soient $k, n \in \mathbb{N}$, A_k l'événement « k articles non défectueux sont vendus» et B_n l'événement « n clients ont visités le super marché». On a $P(B_n) = p^n q$ et

$$P(A_k \mid B_n) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{6}\right)^{n-k},$$

car, parmi les n clients, k clients achètent des articles non défectueux, chacun avec une probabilité $\frac{1}{2}$ et les $(n - k)$ achètent des articles défectueux, avec une probabilité $\frac{1}{6}$. Par la formule de Bayes, on obtient :

$$b_n = P(B_n | A_k) = \frac{P(A_k | B_n)P(B_n)}{\sum_{j=0}^{\infty} P(B_j)P(A_k | B_j)}.$$

En utilisant le développement de la fonction $x \mapsto (1 - x)^\alpha$, on obtient, pour tout $t \in]-1, 1[$:

$$\frac{1}{(1 - t)^{p+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{p} t^n.$$

Par suite :

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} P(B_j)P(A_k | B_j) &= \sum_{j=k}^{\infty} \binom{j}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{6}\right)^{j-k} p^j q \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^k p^k q \sum_{j=0}^{\infty} \binom{j+k}{k} \left(\frac{p}{6}\right)^j \\ &= \left(\frac{p}{2}\right)^k \frac{q \cdot 6^{k+1}}{(6 - p)^{k+1}} \end{aligned}$$

On trouve, donc :

$$b_n = \frac{\binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{6}\right)^{n-k} p^n q}{\left(\frac{p}{2}\right)^k \frac{q \cdot 6^{k+1}}{(6 - p)^{k+1}}} = \binom{n}{k} p^{n-k} \frac{(6 - p)^{k+1}}{6^{n+1}}.$$

Exercice 18 : Il est clair que la suite d'événements $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, par le théorème de la continuité décroissante, on écrit :

$$P(A) = P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{p \geq n} A_p\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\bigcup_{p \geq n} A_p\right).$$

1. Comme $0 \leq P\left(\bigcup_{p=n}^{+\infty} A_p\right) \leq \sum_{p=n}^{+\infty} P(A_p)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{p=n}^{+\infty} P(A_p) = 0$ on obtient $P(A) = 0$.

2. En appliquant l'égalité (3.11), on obtient :

$$P\left(\bigcup_{p=n}^{+\infty} A_p\right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} P\left(\bigcup_{p=n}^N A_p\right).$$

Pour calculer $P\left(\bigcup_{p=n}^N A_p\right)$, on utilise l'indépendance des événements A_n , et par suite de $\overline{A_n}$. On a :

$$P\left(\bigcup_{p=n}^N A_p\right) = 1 - P\left(\bigcap_{p=n}^N \overline{A_p}\right) = 1 - \prod_{p=n}^N (1 - P(A_p)).$$

D'autre part, en utilisant l'inégalité de convexité :

$$1 + x \leq \exp(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R},$$

on obtient,

$$0 \leq \prod_{p=n}^N (1 - P(A_p)) \leq \prod_{p=n}^N \exp(-P(A_p)) = \exp\left(-\sum_{p=n}^N P(A_p)\right).$$

Le fait que la série de terme général $P(A_p)$ diverge, montre que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{p=n}^N P(A_p) = +\infty,$$

d'où $\lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{p=n}^N (1 - P(A_p)) = 0$. Par suite

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} P\left(\bigcup_{p=n}^N A_p\right) = 1 = P(A).$$

3.

- (a) On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'événement A_n : «obtenir pile au nième lancer». Les événements A_n sont indépendants et $P(A_n) = p$. Comme la série $\sum P(A_n)$ diverge, d'après la deuxième question la probabilité pour qu'une infinité d'événements A_n soient réalisés est égale à 1.

- (b) Soit C l'événement «obtenir une infinité de fois une séquence de 2 piles». Si on considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'événement $B_n = A_n \cap A_{n+1}$, il vient $C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{p \geq n} B_p$. Cependant on ne peut pas appliquer la première question, puisque les événements B_n et B_{n+1} ne sont pas indépendants. Par contre, la sous-suite $(B_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est clairement formée par d'événements indépendants. Comme $P(B_{2n}) = p^2$ et que la série $\sum P(B_{2n})$ diverge alors $P(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{p \geq n} B_{2p}) = 1$. On en déduit que $P(C) = 1$, car $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{p \geq n} B_{2p} \subseteq C$. On montre de même que l'événement «obtenir une infinité de fois une séquence de m piles» est presque certain pour tout $m \geq 1$.

Exercice 19 :

1. Comme la série $\sum P(\{n\})$ converge, on en déduit que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(\{n\}) = 0.$$

- 2.

- (a) On a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(\{n\}) = P(\mathbb{N}^*) = 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda}{n^x} = \lambda \zeta(x).$$

Il résulte que $\lambda = \frac{1}{\zeta(x)}$.

- (b) On a $A_n = \{kn : k \in \mathbb{N}^*\}$, donc

$$\begin{aligned} P(A_n) &= \sum_{i \in A_n} P(\{i\}) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(\{kn\}) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda}{(kn)^x} = \frac{\lambda}{n^x} \zeta(x) = \frac{1}{n^x}. \end{aligned}$$

- (c) Pour tous entiers n et $m \geq 1$, on a $A_n \cap A_m = A_{\text{ppcm}(n,m)}$. Par suite :

$$P(A_n \cap A_m) = P(A_{\text{ppcm}(n,m)}) = \frac{1}{(\text{ppcm}(n,m))^x}.$$

Donc les événements A_n et A_m sont indépendants si, et seulement si,

$$\frac{1}{(nm)^x} = \frac{1}{(\text{ppcm}(n, m))^x},$$

soit, $\text{ppcm}(n, m) = nm$. Ce qui est équivalent à $\text{pgcd}(n, m) = 1$.

3. Soit $A = \bigcap_{p \in \mathcal{P}} \overline{A_p}$. Un entier $n \in A$ si, et seulement si, n n'a pas de diviseur premier. Or, tout entier $n \geq 2$ admet un diviseur premier, par suite $A = \{1\}$. D'autre part, les événements $(A_p)_{p \in \mathcal{P}}$ sont indépendants. En effet, soit $\{p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_k}\}$ une partie finie de $\mathcal{P}$. Les nombres $p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_k}$ sont premiers entre eux. Donc

$$\begin{aligned} P(A_{p_{i_1}} \cap A_{p_{i_2}} \cap \dots \cap A_{p_{i_k}}) &= P(A_{p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_k}}) \\ &= \frac{1}{(p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_k})^x} \\ &= P(A_{p_{i_1}}) P(A_{p_{i_2}}) \dots P(A_{p_{i_k}}). \end{aligned}$$

Par suite, en notant $(p_n)_{n \geq 1}$ la suite des entiers premiers rangés par ordre croissant, on a par application de la formule 3.12,

$$\begin{aligned} P(A) &= P\left(\bigcap_{p \in \mathcal{P}} \overline{A_p}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\bigcap_{i=1}^n \overline{A_{p_i}}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{1}{p_i^x}\right) := \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_i^x}\right). \end{aligned}$$

D'autre part, comme $A = \{1\}$ alors $P(A) = \lambda = \frac{1}{\zeta(x)}$. Finalement, on obtient :

$$\frac{1}{\zeta(x)} = \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_i^x}\right) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^x}\right).$$

4. Soit $(p_n)_{n \geq 1}$ la suite des entiers premiers rangés par ordre croissant. Supposons, par l'absurde, que la famille $(\frac{1}{p})_{p \in \mathcal{P}}$ est sommable, c'est-à-dire la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{p_n}$ converge. Alors, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \ln(1 - \frac{1}{p_n})$ converge aussi, puisque $\ln(1 - \frac{1}{p_n}) \sim -\frac{1}{p_n}$. Il résulte que la suite de

terme général $U_n = \prod_{i=1}^n (1 - \frac{1}{p_i})$ converge, car $\ln(u_n)$ converge, notons ℓ sa limite. Pour tout $x > 1$, on a $(1 - \frac{1}{p_i^x}) \geq (1 - \frac{1}{p_i})$, donc pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$

$$\prod_{i=1}^n (1 - \frac{1}{p_i}) \leq \prod_{i=1}^n (1 - \frac{1}{p_i^x}).$$

Par passage à la limite lorsque n tend vers $+\infty$, on obtient :

$$\ell \leq \frac{1}{\zeta(x)} \text{ pour tout } x > 1.$$

Ce qui montre que la fonction ζ est majorée sur $]1, +\infty[$. Or, on sait par comparaison série et intégrale, qu'au voisinage de 1 on a :

$$\zeta(x) \sim \frac{1}{x-1} \text{ tend vers } +\infty \text{ quand } x \text{ tend vers } 1.$$

Contradiction.

Exercice 20 :

1. Voir l'exercice précédent.
2. L'événement A est réalisé si, et seulement si, une infinité des événements $A_{p_i}, i \in \mathbb{N}^*$, est réalisée, c'est-à-dire : $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \bigcup_{i \geq n} A_{p_i}$.

Comme la série $\sum P(A_{p_n})$ diverge et les événements $(A_{p_n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont indépendants, on en déduit par application du lemme de Borel-Cantelli (cf. exercice 18), que $P(A) = 1$.

3. Comme A est de probabilité 1, il n'est pas vide. Il existe, donc au moins un entier ayant une infinité de diviseurs premiers. Contradiction.

Exercice 21 :

1. On sait que :

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\bigcup_{k=0}^n A_k\right) = 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=0}^n P(\overline{A_k}),$$

(voir exemple 90). Si la série $\sum P(A_k)$ diverge alors $P(A) = 1$ (cf. exemple 90). Inversement, supposons que $P(A) = 1$. Ceci entraîne que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=0}^n P(\overline{A_k}) = 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=0}^n (1 - P(A_k)).$$

Comme $P(A_k) < 1$ pour tout k , on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \prod_{k=0}^n (1 - P(A_k)) = -\infty = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \ln(1 - P(A_k)).$$

Ce qui montre que la série $\sum \ln(1 - P(A_k))$ diverge, donc la série $\sum P(A_k)$ diverge, puisque $\ln(1 - P(A_k)) \sim -P(A_k)$.

2.

(a) Pour calculer $P(A)$ il suffit, donc, de calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=0}^n P(\overline{A_k})$.

On écrit :

$$\begin{aligned} \prod_{k=0}^n P(\overline{A_k}) &= \prod_{k=0}^n \left(1 - \frac{1}{(k+2)^2}\right) = \prod_{k=0}^n \frac{(k+1)(k+3)}{(k+2)^2} \\ &= \prod_{k=0}^n \frac{(k+1)}{(k+2)} \cdot \prod_{k=0}^n \frac{(k+3)}{(k+2)} = \frac{n+3}{2(n+2)}. \end{aligned}$$

$$\text{D'où } P(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=0}^n P(\overline{A_k}) = \frac{1}{2}.$$

(b) Soit $n_0 \in \mathbb{N}^*$, On note B_{n_0} l'événement «seul l'événement A_{n_0} est réalisé». On cherche donc la probabilité de $A = \bigcup_{n_0 \in \mathbb{N}} B_{n_0}$.

En appliquant l'identité (3.12), on obtient :

$$\begin{aligned} P(B_{n_0}) &= P(A_{n_0} \cap \left(\bigcap_{n \neq n_0} \overline{A_n} \right)) = \lim_{N \rightarrow +\infty} P(A_{n_0} \cap \left(\bigcap_{\substack{n=0 \\ n \neq n_0}}^N \overline{A_n} \right)) \\ &= P(A_{n_0}) \lim_{N \rightarrow +\infty} P\left(\bigcap_{\substack{n=0 \\ n \neq n_0}}^N \overline{A_n} \right). \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
 \lim_{N \rightarrow +\infty} P\left(\bigcap_{\substack{n=0 \\ n \neq n_0}}^N \overline{A_n}\right) &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{\substack{n=0 \\ n \neq n_0}}^N P(\overline{A_n}) \\
 &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{n=0}^N P(\overline{A_n}) \frac{1}{P(\overline{A_{n_0}})} \\
 &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{N+3}{2(N+2)} \cdot \frac{(n_0+2)^2}{(n_0+1)(n_0+3)} \\
 &= \frac{1}{2} \frac{(n_0+2)^2}{(n_0+1)(n_0+3)}.
 \end{aligned}$$

On trouve : $P(B_{n_0}) = \frac{1}{2} \frac{1}{(n_0+1)(n_0+3)}$. Les événements B_n , $n \in \mathbb{N}$, sont incompatibles deux à deux, par conséquent :

$$\begin{aligned}
 P(A) &= P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B_n) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+3)} \\
 &= \frac{1}{4} \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N \left(\frac{1}{(n+1)} - \frac{1}{(n+3)}\right) \\
 &= \frac{1}{4} \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\sum_{n=1}^{N+1} \frac{1}{n} - \sum_{n=3}^{N+3} \frac{1}{n}\right) \\
 &= \frac{1}{4} \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{N+2} - \frac{1}{N+3}\right) = \frac{3}{8}.
 \end{aligned}$$

Exercice 22 : 1. La probabilité qu'une boule soit placée dans une boîte est $\frac{1}{3}$. L'événement A_k est réalisé si les $(k-1)$ -ièmes boules sont placées dans une même boîte B_1 ou B_2 ou B_3 et la k -ième dans une autre boîte. La probabilité pour que $(k-1)$ boules soient placées dans la boîte B_i et la k -ième dans une boîte différente est égale à $\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$. Donc $P(A_k) = 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} = 2\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$. Un calcul simple montre que la somme recherchée est 1.

2. Soit A l'événement «toutes les boules sont placées dans une même boîte». Alors, on a $A \subseteq \bigcap_{k=2}^{+\infty} \overline{A_k} = \overline{\bigcup_{k=2}^{+\infty} A_k}$. De plus, les événements A_k sont incompatibles, donc

$$0 \leq P(A) \leq P\left(\bigcap_{k=2}^{+\infty} \overline{A_k}\right) = 1 - P\left(\bigcup_{k=2}^{+\infty} A_k\right) = 1 - \sum_{k=2}^{+\infty} P(A_k) = 0.$$

La probabilité que toutes les boules soient placées dans la même boîte est donc nulle.

3. Soit $n \geq 3$ et $k \geq 2$. Alors $P(B_n | A_k) = 0$ si $n \leq k$. Car, dans ce cas, si A_k est réalisé alors il reste une boîte vide. Si $k < n$ et A_k est réalisé, alors on aura une boîte qui contient $(k-1)$ boules et une boîte qui contient une boule, par suite les $(n-k-1)$ boules seront donc placées dans l'un de deux boîtes déjà occupées et la n -ième boule sera dans la troisième boîte. Il vient :

$$\begin{aligned} P(B_n | A_k) &= \left(\sum_{l=0}^{n-k-1} \binom{n-k-1}{l} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k-1-l} \left(\frac{1}{3}\right)^l \right) \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{2^{n-k-1}}{3^{n-k-1}}. \end{aligned}$$

Pour calculer $P(B_n)$ on écrit,

$$\begin{aligned} P(B_n) &= P\left(B_n \cap \left(\bigcup_{k=2}^{+\infty} A_k\right)\right) + P\left(B_n \cap \overline{\left(\bigcup_{k=2}^{+\infty} A_k\right)}\right) \\ &= P\left(B_n \cap \left(\bigcup_{k=2}^{+\infty} A_k\right)\right) \quad \left(\text{car } P\left(\overline{\bigcup_{k=2}^{+\infty} A_k}\right) = 0\right) \\ &= \sum_{k=2}^{+\infty} P(B_n | A_k) \cdot P(A_k) \\ &= \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{3} \cdot \frac{2^{n-k-1}}{3^{n-k-1}} \cdot 2 \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} = \frac{2^n}{3^{n-1}} \sum_{k=2}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k \\ &= \frac{2^n}{3^{n-1}} \left(\frac{1}{2} - 2 \left(\frac{1}{2}\right)^n\right). \end{aligned}$$

On écrit :

$$\sum_{n=3}^{+\infty} P(B_n) = \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{2^n}{3^{n-1}} \left(\frac{1}{2} - 2 \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 1.$$

Exercice 23 :

1. Dire que l'entier $X^2 - 1$ est divisible par 10 s'écrit aussi $X^2 \equiv 1 [10]$ (le chiffre des unités de X^2 est 1), ce qui équivaut à $X \equiv 1 [10]$

ou $X \equiv -1 [10]$, c'est-à-dire le chiffre des unités de X est 1 ou 9. Soit n un entier ≥ 1 . Le nombre d'entiers $X \in \{1, 2, \dots, n\}$ vérifiant $X \equiv 1 [10]$ est $E(\frac{n-1}{10}) + 1$, avec $E(x)$ désigne la partie entière d'un réel x . En effet : $X \equiv 1 [10]$ et $1 \leq X \leq n$ si, et seulement si, $X = 10k + 1$ avec $0 \leq k \leq \frac{n-1}{10}$. De même le nombre d'entiers $X \equiv -1 [10]$ et $1 \leq X \leq n$ est $E(\frac{n+1}{10})$. Puisque la probabilité est uniforme, on obtient :

$$p_n = \frac{E(\frac{n-1}{10}) + 1 + E(\frac{n+1}{10})}{n}.$$

Comme pour tout réel x , on a : $x - 1 < E(x) \leq x$, il vient

$$\frac{2}{10} - \frac{1}{n} < p_n < \frac{2}{10},$$

ce qui montre que $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 0,2$.

Remarque : On peut refaire la question en remplaçant l'entier 10 par un nombre premier $q \geq 3$. On trouve $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \frac{2}{q}$.

2. Soit $k \in \{1, 2, \dots, 2n\}$. Le nombre de couples $(x, y) \in \{1, 2, \dots, n\}^2$ tels que $x + y = k$ est $k - 1$ si $1 \leq k \leq n$ et $2n - k + 1$ si $n + 1 \leq k \leq 2n$. Car, il est aussi égal au nombre d'entiers x vérifiant : $1 \leq x \leq n$ et $1 \leq k - x \leq n$. La probabilité étant uniforme, donc, pour tout $m \in \{1, 2, \dots, E(\sqrt{2n})\}$ la probabilité que

$$X + Y = m^2 \text{ est } \begin{cases} \frac{m^2 - 1}{n^2} & \text{si } 1 \leq m \leq E(\sqrt{n}) \\ \frac{2n - m^2 + 1}{n^2} & \text{si } E(\sqrt{n}) + 1 \leq m \leq E(\sqrt{2n}) \end{cases}.$$

On obtient donc :

$$p_n = \frac{1}{n^2} \left(\sum_{m=1}^{E(\sqrt{n})} (m^2 - 1) + \sum_{m=E(\sqrt{n})+1}^{E(\sqrt{2n})} \frac{2n - m^2 + 1}{n^2} \right).$$

En utilisant la somme $\sum_{k=1}^n k^2 = 2n^3 + 3n^2 + n$, il vient :

$$p_n = \frac{1}{n^2} \left(\left(2n + \frac{5}{6} \right) b_n - \frac{1}{2} b_n^2 - \frac{1}{3} b_n^3 \right. \\ \left. + \left(\frac{2}{3} a_n^3 + \left(-2n - \frac{5}{3} \right) a_n + 2n + 1 \right) \right)$$

où $a_n = E(\sqrt{n})$ et $b_n = E(\sqrt{2n})$. On écrit :

$$\left(2n + \frac{5}{6} \right) b_n - \frac{1}{2} b_n^2 - \frac{1}{3} b_n^3 = \frac{4\sqrt{2}}{3} n E(\sqrt{n}) + o(n E(\sqrt{n})) \\ \frac{2}{3} a_n^3 + \left(-2n - \frac{5}{3} \right) a_n + 2n + 1 = -\frac{4}{3} n E(\sqrt{n}) + o(n E(\sqrt{n})),$$

on en déduit que

$$p_n = \frac{4(\sqrt{2} - 1)E(\sqrt{n})}{3n} + o\left(\frac{E(\sqrt{n})}{n}\right).$$

Donc

$$p_n \sim \frac{4(\sqrt{2} - 1)E(\sqrt{n})}{3n} \sim \frac{4(\sqrt{2} - 1)}{3\sqrt{n}},$$

puisque $E(\sqrt{n}) \sim \sqrt{n}$.

Chapitre 4

Variables aléatoires discrètes

Lors d'une expérience, on s'intéresse souvent à une certaine quantité qui dépend du résultat et non au résultat obtenu. Par exemple, si l'expérience consiste à lancer deux dés, on s'intéresse à la somme obtenue ou à leur maximum, plutôt qu'au résultat de chacun d'eux. On peut alors définir une fonction X qui à chaque éventualité $\omega = (n_1, n_2)$ associe la somme des deux dés $n_1 + n_2$.

Ces fonctions auxquelles on s'intéresse sont en fait des fonctions définies sur l'univers Ω et sont appelées **variables aléatoires**. Un autre exemple significatif est le suivant :

Exemple 91 *Deux joueurs utilisent un dé à 6 faces (numérotées de 1 à 6) pour jouer au jeu suivant : Le joueur A donne 3 dinars au joueur B et lance le dé, le joueur B lance le dé jusqu'à obtenir un nombre supérieur ou égal à celui obtenu par le joueur A (la partie s'arrête alors), à chaque essai il donne 1 dinar au joueur A. On s'intéresse donc aux gains des joueurs A et B. On désigne par X le gain de A et par Y le gain de B.*

Alors X et Y sont deux fonctions définies sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$. Il est simple de voir que les valeurs prises par X et Y sont

$$X(\Omega) = \{-2, -1, 0, \dots\} \text{ et } Y(\Omega) = \{2, 1, 0, -1, \dots\}.$$

4.1 Définition et premières propriétés

4.1.1 Définitions

Définition 92 *Soit $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ un espace probabilisé. Une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ à valeurs dans un ensemble E est une application $X : \Omega \rightarrow E$ vérifiant :*

1. L'ensemble $X(\Omega)$ est au plus dénombrable.
 2. Pour tout $x \in X(\Omega)$, l'ensemble $X^{-1}(\{x\}) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\} \in \mathcal{B}$.
- Dans le cas où $E = \mathbb{R}$, X est dite variable aléatoire discrète réelle.

Remarque : Dans le cas où $\mathcal{B} = \mathcal{P}(\Omega)$, la 2ème condition de la définition est automatiquement vérifiée.

Notation : Si $X : \Omega \rightarrow E$ est une variable aléatoire, pour tout $x \in E$, l'ensemble $X^{-1}(\{x\})$ est noté simplement : $(X = x)$. Plus généralement, pour toute partie $A \subseteq E$, on désigne par $(X \in A)$ l'ensemble

$$(X \in A) := X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}.$$

Dans le cas d'une variable aléatoire réelle, pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'ensemble $(X \in [a, +\infty[)$ sera noté aussi $(X \geq a)$. C'est-à-dire :

$$(X \geq a) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \geq a\}.$$

De même on définit les événements $(X > a)$, $(X \leq a)$,...

Exemples : Soit $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ un espace probabilisé.

1. Toute application constante $X : \Omega \rightarrow E$ est une variable aléatoire discrète, puisque $X(\Omega) = \{e\}$, avec $e \in E$ et $X^{-1}(\{e\}) = \Omega$.
2. Soit $A \in \mathcal{B}$, la fonction indicatrice de A :

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_A : \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

est une variable aléatoire discrète. En effet,

$$X(\Omega) = \{0, 1\}, \quad X^{-1}(\{0\}) = \overline{A} \in \mathcal{B} \text{ et } X^{-1}(\{1\}) = A \in \mathcal{B}.$$

Si $X : \Omega \rightarrow E$ est une variable aléatoire discrète alors pour tout $x \in E$, l'ensemble $X^{-1}(\{x\})$ est un événement, puisque si $x \notin X(\Omega)$ alors : $X^{-1}(\{x\}) = \emptyset \in \mathcal{B}$. Ce résultat se généralise pour toute partie A de E .

Proposition 93 Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans E . Pour toute partie A de E , l'ensemble

$$(X \in A) = X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}$$

est un événement.

Preuve. Soit A une partie de E . On écrit :

$$(X \in A) = X^{-1}(A) = \bigcup_{x \in A} X^{-1}(\{x\}) = \bigcup_{x \in A \cap X(\Omega)} X^{-1}(\{x\}) \in \mathcal{B},$$

comme réunion au plus dénombrable d'événements. ■

Remarque : Pour toute variable aléatoire discrète réelle $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ on définit une fonction $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$F(x) = P(X \leq x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Alors, on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0.$$

En effet, comme pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x \leq y$, on a

$$(X \leq x) \subseteq (X \leq y),$$

la fonction F est alors croissante. De plus $F(x) \in [0, 1]$ pour tout réel x , par suite $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x)$ existent et sont finies. Pour calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ il suffit donc de calculer la limite de la suite $(F(n))_{n \in \mathbb{N}}$. Comme $\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (X \leq n)$, par application du théorème de la continuité croissante, on obtient :

$$1 = P(\Omega) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(X \leq n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F(n).$$

Par suite $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$.

Pour calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x)$, remarquer que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} P(X \leq -n) = \emptyset$ et la suite d'événements $((X \leq -n))_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. Le théorème de la continuité décroissante s'applique et on obtient :

$$0 = P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (X \leq -n)\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(X \leq -n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F(-n).$$

Ce qui montre que $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$.

Soit $X : \Omega \rightarrow E$ une variable aléatoire discrète. La famille $((X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est, clairement, un système complet d'événements. Comme de plus $X(\Omega)$ est au plus dénombrable $(P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ permet de définir une probabilité sur $X(\Omega)$, qu'on appelle **loi de probabilité de X** .

Définition 94 Soient $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ un espace probabilisé et $X : \Omega \rightarrow E$ une variable aléatoire discrète. On appelle la loi de probabilité de la variable X (ou la loi de X), l'application P_X définie par :

$$\begin{array}{ccc} P_X : \mathcal{P}(X(\Omega)) & \rightarrow & [0, 1] \\ A & \mapsto & P(X \in A) \end{array} .$$

En fait, la loi de probabilité d'une variable aléatoire X est

- Une probabilité sur $X(\Omega)$.
- Complètement déterminée par la donnée de l'ensemble $X(\Omega)$ et la famille de réels positifs $(P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$.

Théorème 95 Soient $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ un espace probabilisé et $X : \Omega \rightarrow E$ une variable aléatoire discrète de loi de probabilité P_X , alors on a :

1. P_X est une probabilité sur l'espace probabilisable $(X(\Omega), \mathcal{P}(X(\Omega)))$.
2. La loi de la variable aléatoire X est complètement déterminée par la donnée de la famille $(P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$. Plus précisément on a :

$$\boxed{P_X(A) = P(X \in A) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x).} \quad (4.1)$$

Preuve. On montre d'abord que l'application P_X vérifie les axiomes d'une probabilité.

- On a $P_X(X(\Omega)) = P(X \in X(\Omega)) = P(\Omega) = 1$.
- Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements incompatibles deux à deux de $\mathcal{P}(X(\Omega))$. Comme $(X \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (X \in A_n)$ et les événements $(X \in A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont incompatibles, on aura, par σ -additivité de P ,

$$\begin{aligned} P_X\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) &= P\left(X \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (X \in A_n)\right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X \in A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_X(A_n). \end{aligned}$$

L'application P_X est une probabilité sur un ensemble au plus dénombrable, elle est, donc, complètement déterminée par la donnée de la famille $(P_X(\{x\}))_{x \in X(\Omega)}$, ce qui montre le deuxième point du théorème. ■

Remarque : Souvent on considère des variables aléatoires discrètes réelles X sur $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ telles que $X(\Omega) = \mathbb{N}$. On dispose des formules intéressantes

qui nous aident à calculer la loi de probabilité de X . On a :

$$P(X > n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} P(X = k) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$P(X = n) = P(X > n - 1) - P(X > n)$$

Noter que $P(X > -1) = P(\Omega) = 1$.

On peut écrire aussi, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$P(X = n) = P(X \leq n) - P(X \leq n - 1).$$

Exemple 96 On lance deux dés numérotés de 1 à 6 d'une façon indépendante, on désigne par X la variable aléatoire indiquant le plus grand de deux résultats obtenus. On a $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}^2$ et $X(\Omega) = \{1, 2, \dots, 6\}$. Remarquons, d'abord que :

$$P(X \leq 0) = 0 \text{ et } P(X \leq 6) = 1.$$

Soit k tel que $1 \leq k \leq 5$, alors $P(X \leq k) = \frac{k^2}{36}$, puisque,

$$(X \leq k) = \{(n, m) : 1 \leq n \leq k \text{ et } 1 \leq m \leq k\}.$$

Donc $P(X \leq k) = \frac{k^2}{36}$ pour tout $0 \leq k \leq 6$. On en déduit que :

$$\begin{aligned} P(X = k) &= P(X \leq k) - P(X \leq k - 1) = \frac{k^2}{36} - \frac{(k - 1)^2}{36} \\ &= \frac{2k - 1}{36} \text{ pour tout } k \in \{1, 2, \dots, 6\}. \end{aligned}$$

Remarque : Soit X une variable discrète sur $(\Omega, \mathcal{B}, P)$. Alors la famille d'événements $(X = x)_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements. En particulier, on a :

$$\sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x) = 1$$

Inversement, la donnée d'une famille sommable de somme égale à 1 définit une loi de probabilité d'une variable aléatoire :

Proposition 97 Soient E un ensemble au plus dénombrable et $(\alpha_x)_{x \in E}$ une famille de réels positifs telle que $\sum_{x \in E} \alpha_x = 1$. Alors il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ et une variable aléatoire $X : \Omega \rightarrow E$ vérifiant :

$$X(\Omega) = E \text{ et } P(X = x) = \alpha_x \text{ pour tout } x \in E.$$

Preuve. Posons $\Omega = E$ et $\mathcal{B} = \mathcal{P}(E)$. Comme Ω est au plus dénombrable, d'après la proposition 68, la famille $(\alpha_x)_{x \in E}$ permet de définir une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(E))$, en posant $P(\{x\}) = \alpha_x$, pour tout $x \in E$. Soit $X = Id_E$, l'application identité de E , alors X est une variable aléatoire discrète définie sur l'espace $(E, \mathcal{P}(E), P)$. En effet $X(\Omega) = E$, qui est au plus dénombrable et $X^{-1}(\{x\}) = \{x\} \in \mathcal{B}$. De plus, on a :

$$P(X = x) = P(X^{-1}(\{x\})) = P(\{x\}) = \alpha_x.$$

Ce qui achève la preuve. ■

Etant donnée une variable aléatoire discrète $X : \Omega \rightarrow E$ et une application $f : E \rightarrow F$, on peut définir l'application composée $f \circ X : \Omega \rightarrow F$. L'application $f \circ X$, notée $f(X)$, est appelée **image de la variable aléatoire X par f** . La proposition suivante montre que l'image d'une variable aléatoire discrète est une variable aléatoire discrète.

Proposition 98 Soit X une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ à valeurs dans un ensemble E , et $f : E \rightarrow F$ une application. Alors, l'application $f(X)$ définie par $f(X) = f \circ X$ est une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ à valeurs dans F .

De plus la loi de probabilité de $f(X)$ est donnée par : Pour tout $y \in f(X)(\Omega)$,

$$P(f(X) = y) = \sum_{x \in f^{-1}(\{y\})} P(X = x).$$

Preuve. Comme $X(\Omega)$ est au plus dénombrable alors $f(X)(\Omega) = f(X(\Omega))$ est au plus dénombrable. Soit $y \in f(X)(\Omega)$, on a :

$$(f(X))^{-1}(\{y\}) = \{\omega \in \Omega : f(X(\omega)) = y\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in f^{-1}(\{y\})\}.$$

En appliquant la proposition 93, on obtient :

$$(f(X))^{-1}(\{y\}) = (X \in f^{-1}(\{y\})) \in \mathcal{B}.$$

Ce qui montre que l'application $f \circ X$ est une variable aléatoire discrète. Pour tout $y \in f(X)(\Omega)$, on a :

$$P(f(X) = y) = P((X \in f^{-1}(\{y\}))) = \sum_{x \in f^{-1}(\{y\})} P(X = x).$$

Ce qui montre le résultat. ■

Exemple : Etant donnée une variable aléatoire discrète réelle X alors $|X|$, $\exp(X)$, X^2 ,... sont des variables aléatoires discrètes. On a par exemple, $|X|(\Omega) \subseteq \mathbb{R}^+$ et pour tout réel strictement positif α ,

$$P(|X| = \alpha) = P(X = \alpha) + P(X = -\alpha).$$

Définition 99 Une variable aléatoire X sur $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ est dite *presque sûrement constante* s'il existe $x_0 \in X(\Omega)$ tel que $P(X = x_0) = 1$.

Pour une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ on s'intéresse toujours à sa loi. Deux variables aléatoires discrètes X et Y sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$, peuvent admettre la même loi de probabilité. Par exemple, si $A \in \mathcal{B}$ tel que $P(A) = \frac{1}{2}$, alors les deux variables aléatoires $\mathbb{I}_A$ et $\mathbb{I}_{\bar{A}}$ ont la même loi.

Définition 100 On dit que deux variables aléatoires discrètes X_1 et X_2 ont la même loi (ou suivent la même loi) si $P_{X_1} = P_{X_2}$, c'est-à-dire $X_1(\Omega) = X_2(\Omega)$ et

$$P(X_1 = x) = P(X_2 = x) \text{ pour tout } x \in X_1(\Omega).$$

On note $X_1 \sim X_2$.

4.1.2 Lois usuelles

Loi uniforme

Définition 101 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

★ La loi uniforme sur un ensemble fini $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ est la probabilité uniforme sur l'espace probabilisable $(\{a_1, a_2, \dots, a_n\}, \mathcal{P}(\{a_1, a_2, \dots, a_n\}))$.

★ On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, si

$$X(\Omega) = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \text{ et } P(X = a_k) = \frac{1}{n} \text{ pour tout } 1 \leq k \leq n.$$

On note $X \sim \mathcal{U}(\{a_1, a_2, \dots, a_n\})$.

Situation type : Soit X la variable aléatoire égale au numéro obtenu lors du lancer d'un dé usuel, alors $X \sim \mathcal{U}(\{1, 2, \dots, 6\})$.

Loi de Bernoulli

Définition 102 Soit $p \in]0, 1[$.

- ★ La loi de Bernoulli de paramètre p est la probabilité sur $(\{0, 1\}, \mathcal{P}(\{0, 1\}))$ définie par :

$$P(\{0\}) = 1 - p \text{ et } P(\{1\}) = p.$$

- ★ On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi de Bernoulli de paramètre p , on note $X \sim \beta(p)$, si

$$X(\Omega) = \{0, 1\}, P(X = 0) = 1 - p \text{ et } P(X = 1) = p.$$

Situation type : La loi de Bernoulli modélise une expérience à deux issues S et E (S succès et E échec). Exemple : lancer d'une pièce de monnaie, la probabilité d'obtenir pile étant $p \in]0, 1[$.

Loi binomiale

Définition 103 Soit $p \in]0, 1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

- ★ La loi binomiale de paramètre (n, p) est la probabilité sur l'espace probabilisable $(\{0, 1, 2, \dots, n\}, \mathcal{P}(\{0, 1, 2, \dots, n\}))$ définie par :

$$P(\{k\}) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \text{ pour tout } 0 \leq k \leq n.$$

- ★ On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètre (n, p) , qu'on note $X \sim B(n, p)$, si

$$X(\Omega) = \{0, 1, \dots, n\}, P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \forall 0 \leq k \leq n.$$

Situation type : On répète n fois une épreuve de Bernoulli d'une façon indépendante, la probabilité de succès à chaque épreuve étant $p \in]0, 1[$. On désigne par X le nombre de succès obtenus. Alors $X(\Omega) = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ et pour tout $k \in X(\Omega)$, l'événement $(X = k)$ est réalisé si, et seulement si, on obtient k succès. Comme, on a $\binom{n}{k}$ éléments de ω qui comportent k succès et chacun de ces ω a une même probabilité égale à $p^k (1 - p)^{n-k}$ on a donc :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

Loi géométrique

Définition 104 Soit $p \in]0, 1[$.

★ La loi géométrique de paramètre p est la probabilité sur $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$ définie par

$$P(\{k\}) = p(1-p)^{k-1} \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}^*.$$

★ On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi géométrique de paramètre p , qu'on note $X \sim \mathcal{G}(p)$, si

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^*, \quad P(X = k) = p(1-p)^{k-1} \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}^*$$

Remarque : On définit bien ainsi la loi d'une variable aléatoire discrète car, $p(1-p)^{k-1} \geq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et

$$\sum_{k=1}^{+\infty} p(1-p)^{k-1} = 1.$$

Situation type : Le temps d'attente du premier succès : On répète une suite d'épreuves de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$ jusqu'à obtenir le premier succès. Si X désigne le rang (le temps d'attente) du premier succès alors X suit la loi géométrique de paramètre p . En effet, on a $X(\Omega) = \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ (∞ correspond à l'éventualité «toutes les épreuves sont des échecs»).

– Soit $k \in \mathbb{N}^*$, l'événement $(X = k)$ est réalisé si, et seulement si, les $(k-1)$ premières épreuves donnent des échecs et le k -ième donne succès, avec la convention usuelle si $k = 1$ il y a alors 0 échecs. C'est-à-dire,

$$(X = k) = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_{k-1}} \cap A_k$$

où pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, A_i est l'événement «obtenir un succès au i -ième épreuve». Les événements $(A_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ sont indépendants, donc

$$P(X = k) = (1-p)^{k-1}p.$$

– L'événement $(X = \infty)$ est réalisé si, et seulement si, aucun des événements A_n , $n \in \mathbb{N}^*$, n'est réalisé. Donc, $(X = \infty) = \bigcap_{k=1}^{+\infty} \overline{A_k}$ et par suite, en appliquant l'égalité (3.12), on obtient :

$$P(X = \infty) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\bigcap_{k=1}^n \overline{A_k}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (1-p)^n = 0$$

On aurait pu aussi remarquer que $P(X = \infty) + \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k) = 1$, ce qui donne $P(X = \infty) = 0$.

La variable aléatoire discrète X prend la valeur ∞ avec une probabilité nulle et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(X = k) = (1 - p)^{k-1}p$. Si l'on néglige la valeur $+\infty$, on voit que X suit la loi géométrique de paramètre p .

Caractérisation de la loi géométrique : Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ qui suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$ (par exemple : X représente le temps d'attente du première pile lors d'une suite de lancers indépendants, la probabilité d'obtenir pile étant p).

Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$. Sachant que X prend une valeur supérieure strictement à k , on veut chercher la probabilité pour que X prenne la valeur $k + n$ (dans notre exemple type : sachant que les k premières lancers donnent des échecs, quelle est la probabilité pour que le premier succès se produise au $(k + n)$ -ième lancer).

Cela revient à chercher $P(X = k + n \mid X > k)$. On écrit :

$$P(X = k + n \mid X > k) = \frac{P((X > k) \cap (X = k + n))}{P(X > k)}.$$

Comme,

$$P((X > k) \cap (X = k + n)) = P(X = k + n) = p(1 - p)^{k+n-1}$$

et $P(X > k) = (1 - p)^k$, car l'événement $(X > k)$ est réalisé si, et seulement si, les k premières épreuves donnent des échecs, donc :

$$P(X = k + n \mid X > k) = \frac{p(1 - p)^{k+n-1}}{(1 - p)^k} = P(X = n).$$

Cette remarquable propriété traduit le fait que la loi géométrique est une loi sans mémoire. Si l'on pense à X comme à une durée, on peut dire que X ne tient pas compte du passé. On vient, donc de démontrer la proposition suivante :

Proposition 105 *Soit X une variable aléatoire discrète qui suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$, alors*

$$P(X = k + n \mid X > k) = P(X = n) \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}^* \text{ et } n \in \mathbb{N}.$$

L'absence de mémoire caractérise les variables aléatoires qui suivent les lois géométriques. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ non sûrement constante. On suppose que X est sans mémoire, c'est-à-dire que, pour tous $k \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$P(X = k + n \mid X > k) = P(X = n)$$

alors X suit une loi géométrique. En effet :

Soit $p = P(X = 1)$. Comme X est non sûrement constante, on en déduit que $0 \leq p < 1$. Prouvons, par récurrence, sur n la relation

$$P(X = n) = p(1 - p)^{n-1}.$$

Elle est évidente si $n = 1$. Supposons-la acquise pour un entier $n \geq 1$. Comme par hypothèse

$$P(X = n) = P(X = n + 1 \mid X > 1) = p(1 - p)^{n-1},$$

on écrit :

$$P(X = n + 1) = P(X = n + 1 \mid X > 1)P(X > 1) = p(1 - p)^{n-1}(1 - p),$$

par suite

$$P(X = n + 1) = p(1 - p)^n.$$

Noter, enfin que $p > 0$ car sinon, on aura $P(X = n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, ce qui est absurde.

Exemple 106 (loi de Pascal). On considère une suite d'épreuves de Bernoulli indépendantes, de probabilité de succès $p \in]0, 1[$. Soit $j \in \mathbb{N}^*$, on considère X la variable aléatoire qui indique le temps d'attente nécessaire pour obtenir j succès. On veut déterminer la loi de X .

(Exemple type : Une urne contient n_b boules blanches et n_r boules rouges. On tire successivement avec remise une boule de l'urne jusqu'à obtenir j boules rouges et on désigne par X le nombre de tirages nécessaires pour obtenir j boules rouges). Remarquons, que si $j = 1$ alors X suit la loi géométrique de paramètre p . Dans le cas général, on a :

$$X(\Omega) = \{k \in \mathbb{N} : k \geq j\} \cup \{+\infty\}.$$

Soit $k \geq j$. On a : $\omega \in (X = k)$ si, et seulement si, au cours de $(k - 1)$ premiers tirages on a $j - 1$ succès et le k -ième tirage est un succès. On a,

donc, $\binom{k-1}{j-1}$ éléments ω , et chacun de ces ω a la même probabilité égale à $p^{j-1}(1-p)^{k-j}p = p^j(1-p)^{k-j}$. Donc,

$$P(X = k) = \binom{k-1}{j-1} p^j (1-p)^{k-j}.$$

D'autre part l'événement $(X = +\infty)$ est réalisé si, et seulement si, on n'obtient jamais j succès. Il est donc inclus dans l'événement A : «à partir d'un certain rang toutes les épreuves donnent des échecs». En notant E_i l'événement «la i ième épreuve donne un échec», alors on a :

$$(X = \infty) \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left(\bigcap_{k \geq n} E_k \right).$$

Or,

$$P\left(\bigcap_{k \geq n} E_k\right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} P\left(\bigcap_{k=n}^N E_k\right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} (1-p)^{N-n+1} = 0.$$

Comme la suite d'événements $(\bigcap_{k \geq n} E_k)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante alors par la propriété de continuité croissante il vient :

$$P(X = +\infty) \leq P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left(\bigcap_{k \geq n} E_k\right)\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\bigcap_{k \geq n} E_k\right) = 0.$$

Ce qui montre que l'événement $(X = +\infty)$ est négligeable. En conclusion, la loi de X est donnée par $X(\Omega) = \{k \in \mathbb{N} \text{ et } k \geq j\}$ et

$$P(X = k) = \binom{k-1}{j-1} p^j (1-p)^{k-j} \text{ pour tout } k \geq j,$$

où on a négligé la valeur $+\infty$. On dit que X suit la **loi de Pascal** de paramètre (j, p) .

En utilisant l'identité $\sum_{k=j}^{+\infty} P(X = k) = 1$, on obtient :

$$\sum_{k=j}^{+\infty} \binom{k-1}{j-1} p^j (1-p)^{k-j} = 1$$

ou encore en divisant par p^j :

$$\boxed{\sum_{k=j}^{+\infty} \binom{k-1}{j-1} (1-p)^{k-j} = \frac{1}{p^j}.} \quad (4.2)$$

Loi de Poisson

Définition 107 Soit λ un réel strictement positif.

★ La loi de Poisson de paramètre λ est la probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ donnée par :

$$P(\{n\}) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

★ On dit qu'une variable aléatoire discrète X suit la loi de Poisson de paramètre λ , qu'on note $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, si

$$X(\Omega) = \mathbb{N}, P(X = n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

On définit bien ainsi la loi d'une variable aléatoire discrète car on a :

$$\frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \geq 0 \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = 1.$$

Il n'existe pas une situation type simple d'une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson, bien que cette loi soit utilisée fréquemment. Dans la pratique, les lois de Poisson sont utilisées pour décrire le comportement d'un nombre d'événements se produisant dans un laps de temps fixé. Par exemple, pour décrire le nombre de clients dans un magasin pendant un temps t ou le nombre d'appels reçus par un standard au cours d'un intervalle de temps.

Les lois de Poisson apparaissent aussi comme limites de lois binomiales dans un sens précisé dans la proposition suivante.

Proposition 108 Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires discrètes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$X_n \sim \mathcal{B}(n, p_n) \text{ avec } \lim_{n \rightarrow +\infty} n \cdot p_n = \lambda > 0.$$

Alors on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Preuve. Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé. Par hypothèse, pour tout $n \geq k$,

$$P(X_n = k) = \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k}.$$

On a $\binom{n}{k} = \frac{n.(n-1)..(n-k+1)}{k!} \sim \frac{n^k}{k!}$ donc $\binom{n}{k} p_n^k \sim \frac{(n.p_n)^k}{k!}$. Ce qui montre que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \binom{n}{k} p_n^k = \frac{\lambda^k}{k!}$. D'autre part, comme $p_n \sim \frac{\lambda}{n}$ tend vers 0, on écrit :

$$(n-k) \ln(1-p_n) \sim -np_n \text{ tend vers } -\lambda,$$

il vient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (1-p_n)^{n-k} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \exp((n-k) \ln(1-p_n)) = e^{-\lambda}.$$

Par suite $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$. ■

Remarque : Si une variable X suit une loi binomiale de paramètres n et p avec n assez grand et p très proche de 0, alors X suit approximativement la loi de Poisson de paramètre $\lambda = np$. Ainsi, on modélise souvent le nombre de succès lorsqu'on répète un très grand nombre de fois une expérience ayant une chance très faible de réussir par une loi de Poisson. Comme exemple, dans un village où il y a 3000 habitants, le nombre des personnes ayant leur anniversaire le 5 avril suit approximativement une loi de Poisson de paramètre $3000 \cdot \frac{1}{365} = 8.21$. On dit que la loi de Poisson est la **loi des événements rares**.

Exemple 109 Si X est une variable aléatoire suivant une loi de Poisson $P(\lambda)$. Alors on a : $P(X \text{ est pair}) > P(X \text{ est impair})$. En effet, on a :

$$\begin{aligned} P(X \text{ est pair}) - P(X \text{ est impair}) &= e^{-\lambda} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) \\ &= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-2\lambda} > 0. \end{aligned}$$

4.2 Couple de variables aléatoires

4.2.1 Définitions

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ à valeurs dans E et F respectivement, on définit ainsi l'application

$$\begin{aligned} (X, Y) : \Omega &\rightarrow E \times F \\ \omega &\mapsto (X(\omega), Y(\omega)) \end{aligned}$$

Proposition 110 *L'application (X, Y) est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $E \times F$.*

Preuve. On a :

$$(X, Y)(\Omega) = \{(X(\omega), Y(\omega)) : \omega \in \Omega\} \subseteq X(\Omega) \times Y(\Omega).$$

Les ensembles $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont au plus dénombrables, donc leur produit $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ est au plus dénombrable (cf. proposition 8). D'après le corollaire 7, $(X, Y)(\Omega)$ est au plus dénombrable. Soit $(x, y) \in (X, Y)(\Omega)$, on écrit :

$$(X, Y)^{-1}\{(x, y)\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x \text{ et } Y(\omega) = y\} \quad (4.3)$$

$$= X^{-1}(\{x\}) \cap Y^{-1}(\{y\}) \in \mathcal{B}. \quad (4.4)$$

Ce qui montre que l'application (X, Y) est bien une variable aléatoire discrète. ■

Définition 111 *Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ à valeurs dans E et F respectivement. La variable aléatoire discrète (X, Y) est appelée **couple de variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{B}, P)$** .*

*Dans le cas où $E = F = \mathbb{R}$, la variable (X, Y) est appelée **couple de variables aléatoires discrètes réelles**.*

Remarque 112

1. *Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$. Comme le couple (X, Y) est une variable aléatoire, alors la famille $((X, Y) = (x, y))_{(x, y) \in (X, Y)(\Omega)}$ est un système complet d'événements. Or, en utilisant l'égalité (4.4), pour tout $(x, y) \in (X, Y)(\Omega)$,*

$$((X, Y) = (x, y)) = (X = x) \cap (Y = y).$$

Donc, la famille $((X = x) \cap (Y = y))_{(x, y) \in (X \times Y)(\Omega)}$ est un système complet d'événements.

Remarquer enfin que si $(x, y) \notin (X, Y)(\Omega)$, alors l'événement

$$(X = x) \cap (Y = y) = \emptyset,$$

par suite, la famille $((X = x) \cap (Y = y))_{(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)}$ est un système complet d'événements.

2. Soit T une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ à valeurs dans $E \times F$. Alors il existe un couple de variables aléatoires discrètes (X, Y) tel que $T = (X, Y)$. En effet, soit $\pi_1 : E \times F \rightarrow E$ et $\pi_2 : E \times F \rightarrow F$ les applications définies par :

$$\pi_1(x, y) = x \text{ et } \pi_2(x, y) = y \text{ pour tout } (x, y) \in E \times F.$$

Considérons les variables aléatoires $X = \pi_1(T)$ et $Y = \pi_2(T)$. Pour tout $\omega \in \Omega$,

$$(X, Y)(\omega) = (X(\omega), Y(\omega)) = (\pi_1(T(\omega)), \pi_2(T(\omega))) = T(\omega).$$

On en déduit que $(X, Y) = T$.

4.2.2 Loi conjointe

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$.

Définition 113 La loi conjointe des variables X et Y est la loi du couple (X, Y) , elle est donnée par la famille

$$(P((X = x) \cap (Y = y)))_{(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)}$$

Noter que, si un couple $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$ n'appartient pas à $(X, Y)(\Omega)$ alors $P((X = x) \cap (Y = y)) = 0$.

Notation : L'événement $(X = x) \cap (Y = y)$ est noté simplement

$$(X = x, Y = y).$$

Exemple 114 On lance simultanément deux dés, on désigne par X le plus grand des deux numéros obtenus et Y le plus petit. La loi conjointe de X et Y est donnée par :

$$\begin{aligned} P(X = i, Y = j) &= 0 && \text{si } 1 \leq i < j \leq 6 \\ P(X = i, Y = j) &= 1/36 && \text{si } 1 \leq i = j \leq 6 \\ P(X = i, Y = j) &= 2/36 && \text{si } 1 \leq j < i \leq 6. \end{aligned}$$

Remarquons que pour toutes variables aléatoires discrètes X et Y la famille

$$(P((X = x, Y = y)))_{(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)}$$

est sommable et

$$\sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} P((X=x, Y=y)) = 1 \quad (4.5)$$

Inversement, étant donnée deux ensembles au plus dénombrables E et F et une famille de réels positifs $(\alpha_{x,y})_{(x,y) \in E \times F}$ sommable telle que

$$\sum_{(x,y) \in E \times F} \alpha_{x,y} = 1.$$

Alors la famille $(\alpha_{x,y})_{(x,y) \in E \times F}$ définit bien une loi conjointe d'un couple de variables aléatoires (X, Y) à valeurs dans $E \times F$.

En effet, il résulte de la proposition 97 qu'il existe une variable aléatoire T à valeur dans $E \times F$ telle que la loi de probabilité de T est donnée par :

$$P(T = (x, y)) = \alpha_{x,y} \text{ pour tout } (x, y) \in E \times F.$$

Vu la deuxième point de la remarque 112, il existe un couple de variables aléatoires (X, Y) tel que $T = (X, Y)$. C'est-à-dire, il existe un couple de variables aléatoires discrètes à valeurs dans $E \times F$ tel que

$$P(X = x, Y = y) = \alpha_{x,y} \text{ pour tout } (x, y) \in E \times F.$$

Exemple 115 On considère une suite d'épreuves de Bernoulli indépendantes (lancer d'une pièce de monnaie par exemple) de paramètre $p \in]0, 1[$. Soient X le rang du premier succès et Y le rang du second succès.

Cherchons la loi conjointe de X et Y .

on a :

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\} \text{ et } Y(\Omega) = \mathbb{N}^* \setminus \{1\} \cup \{+\infty\}.$$

Soient $i \geq 1$ et $j \geq 2$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on désigne par S_k l'événement «obtenir un succès au cours de la k -ième épreuve», on a :

$$(X = i, Y = j) = \emptyset \text{ si } i \geq j, \text{ et}$$

$$(X = i, Y = j) = \overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap \dots \cap \overline{S_{i-1}} \cap S_i \cap \overline{S_{i+1}} \cap \dots \cap \overline{S_{j-1}} \cap S_j \text{ si } i < j,$$

(avec les conventions habituelles si $i = 1$ ou $j = i + 1$).

Donc

$$P(X = i, Y = j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \geq j. \\ (1-p)^{j-2} p^2 & \text{si } i < j. \end{cases}$$

Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, l'événement $(X = i, Y = +\infty) = (X = i) \cap (\bigcap_{j=i+1}^{+\infty} \overline{S_j})$. Or

$$P\left(\bigcap_{j=i+1}^{+\infty} \overline{S_j}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\bigcap_{j=i+1}^n \overline{S_j}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (1-p)^{n-i} = 0.$$

Donc $P(X = i, Y = +\infty) = 0$. Le lecteur vérifiera, par application du théorème de Fubini, que la famille $(P(X = i, Y = j))_{i \geq 1, j \geq 2}$ est sommable dont la somme est égale à 1.

Exemple 116 Soient X et Y deux variables aléatoires sur un même espace probabilisé à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que la loi conjointe du couple (X, Y) vérifie :

$$\text{Pour tout } (i, j) \in \mathbb{N}^2, \quad P(X = i, Y = j) = \alpha \frac{(i+j)2^{i+j}}{i!j!}, \quad (4.6)$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$.

On cherche α tel que la relation ci-dessus défini bien une loi conjointe. Cela revient à chercher α pour que la famille $(\alpha \frac{(i+j)2^{i+j}}{i!j!})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ soit sommable de somme égale à 1.

Pour tout i fixé, la série $\sum_j \alpha \frac{(i+j)2^{i+j}}{i!j!}$ est convergente et

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{+\infty} \alpha \frac{(i+j)2^{i+j}}{i!j!} &= \frac{\alpha i 2^i}{i!} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{2^j}{j!} + \frac{\alpha}{i!} 2^i \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{j 2^j}{j!} \\ &= \frac{\alpha i 2^i}{i!} e^2 + \frac{\alpha}{i!} 2^{i+1} e^2. \end{aligned}$$

La série $\sum_i \sum_{j=0}^{+\infty} \alpha \frac{(i+j)2^{i+j}}{i!j!}$ est clairement convergente, ainsi la famille $(\alpha \frac{(i+j)2^{i+j}}{i!j!})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable et

$$\begin{aligned} \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} \alpha \frac{(i+j)2^{i+j}}{i!j!} &= \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \alpha \frac{(i+j)2^{i+j}}{i!j!} \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{\alpha i 2^i}{i!} e^2 + \frac{\alpha}{i!} 2^{i+1} e^2 \right) = 2\alpha e^4. \end{aligned}$$

Donc la relation (4.6) définit une loi conjointe si, et seulement si, $\alpha = \frac{1}{2} e^{-4}$.

4.2.3 Lois marginales

Définition 117 Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes. La loi de probabilité de X est appelée *la première loi marginale du couple* (X, Y) et celle de Y est appelée *la deuxième loi marginale*.

Une question qui se pose : Connaissant la loi du couple (X, Y) , peut-on retrouver les lois de X et de Y ? Le théorème suivant donne une réponse positive à cette question.

Théorème 118 Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$, alors :

$$P(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P(X = x, Y = y) \text{ pour tout } x \in X(\Omega). \quad (4.7)$$

et

$$P(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x, Y = y) \text{ pour tout } y \in Y(\Omega). \quad (4.8)$$

Preuve. Comme la famille d'événements $((Y = y))_{y \in Y(\Omega)}$ est un système complet d'événements, alors pour tout $x \in X(\Omega)$, on a :

$$P(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P((X = x) \cap (Y = y)).$$

De même on démontre l'autre égalité. ■

Exemple 119 On reprend l'exemple 115 où X est le rang du premier succès et Y est le rang du second succès. On veut chercher la loi de Y . En appliquant l'égalité (4.8) on obtient, pour tout entier $j \geq 2$,

$$P(Y = j) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(X = i, Y = j) = \sum_{i=1}^{j-1} p^2(1-p)^{j-2} = (j-1)p^2(1-p)^{j-2}.$$

Donc Y suit la loi de Pascal de paramètre $(2, p)$ (voir exemple 106). Remarquons que, la variable X suit la loi géométrique de paramètre p . On a pu, aussi, vérifier la loi de X en utilisant l'égalité (4.7).

Exemple 120 On reprend l'exemple 116. On cherche les lois marginales du couple (X, Y) . Une application directe du théorème 118 donne, pour tous entiers $i, j \in \mathbb{N}$:

$$P(X = i) = \frac{\alpha 2^i}{i!} (i+2) \text{ et } P(Y = j) = \frac{\alpha 2^j}{j!} (j+2).$$

4.2.4 Lois conditionnelles

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$. Etant donné $y \in Y(\Omega)$ tel que l'événement $(Y = y)$ est non négligeable, c'est-à-dire $P((Y = y)) \neq 0$, on définit la loi de la variable X sachant l'événement $(Y = y)$:

Définition 121 On appelle la loi de X sachant $(Y = y)$ (ou, la loi de X conditionnelle à $(Y = y)$) la loi de X dans l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P_{(Y=y)})$. Donc, elle est déterminée par la donnée de la famille

$$(P(X = x \mid Y = y))_{x \in X(\Omega)}.$$

Exemple 122 On reprend l'exemple 115.

- Soit $j \geq 2$, cherchons la loi de X sachant $(Y = j)$. Il suffit de calculer, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $P_{(Y=j)}(X = i)$. On écrit :

$$P(X = i \mid Y = j) = \frac{P(X = i, Y = j)}{P(Y = j)} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \geq j. \\ \frac{1}{j-1} & \text{si } i < j. \end{cases}.$$

La loi de X sachant $(Y = j)$ est la loi uniforme $\mathcal{U}(\{1, 2, \dots, j-1\})$.

- Soit $i \geq 1$, la loi de la variable $Y - i$ sachant $(X = i)$ est donnée par : $(Y - i)(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et

$$\begin{aligned} P_{(X=i)}(Y - i = j) &= \frac{P(X = i, Y = i + j)}{P(X = i)} = \frac{(1-p)^{i+j-2} p^2}{p(1-p)^{i-1}} \\ &= p(1-p)^{j-1} \text{ pour tout } j \geq 1. \end{aligned}$$

C'est-à-dire la loi de la variable $Y - i$ sachant $(X = i)$ est la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$

4.2.5 Relations entre les lois

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$. Le théorème 118 permet de retrouver les lois marginales connaissant la loi conjointe. La question qui se pose maintenant est : connaissant les lois de X et de Y , peut-on trouver la loi du couple (X, Y) ? La réponse à cette question, sauf dans des cas particuliers, est négative. Par contre, si on connaît la loi de X et la loi de Y sachant $(X = x)$, pour tout $x \in X(\Omega)$, on peut retrouver la loi conjointe et par suite la loi de Y .

Théorème 123 Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$. On suppose que pour tout $x \in X(\Omega)$, l'événement $(X = x)$ n'est pas négligeable. Alors :

– Pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$ on a :

$$\boxed{P(X = x, Y = y) = P(Y = y \mid X = x)P(X = x).} \quad (4.9)$$

– Pour tout $y \in Y(\Omega)$ on a :

$$\boxed{P(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(Y = y \mid X = x)P(X = x).} \quad (4.10)$$

Preuve. La formule (4.9) résulte de la définition de la probabilité conditionnelle. L'égalité (4.10) est une application directe de la formule (4.8). ■

Exemple 124 Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$, telles que Y suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et la loi de X conditionnelle à $(Y = n)$ est la loi uniforme sur $\{1, 2, \dots, n+1\}$. Alors, la loi de X est donnée par

$$P(X = i) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = i \mid Y = n)P(Y = n) \text{ pour tout } i \in \mathbb{N}.$$

Or,

$$P(X = i \mid Y = n) = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & \text{si } 1 \leq i \leq n+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

par suite

$$\begin{aligned} P(X = i) &= \sum_{n=i-1}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \sum_{n=i-1}^{+\infty} \frac{\lambda^{n+1}}{(n+1)!} \\ &= \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \sum_{n=i}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} (e^\lambda - 1 - \lambda - \dots - \frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!}). \end{aligned}$$

4.3 Indépendance de variables aléatoires

4.3.1 Structure

Soit $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ un espace probabilisé.

Proposition 125 *Les variables aléatoires discrètes réelles sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ forment un sous-algèbre de l'algèbre $\mathbb{R}^\Omega$ des fonctions de Ω dans $\mathbb{R}$. En particulier, la somme et le produit de deux variables aléatoires discrètes réelles sont des variables aléatoires discrètes.*

De plus, pour toutes variables aléatoires discrètes réelles X et Y , $\min(X, Y)$ et $\max(X, Y)$ sont deux variables aléatoires discrètes réelles.

Preuve. Il suffit de montrer que si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes réelles et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $X + \lambda Y$, XY , $\min(X, Y)$ et $\max(X, Y)$ sont des variables aléatoires discrètes. Soit $Z = (X, Y)$ la variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, alors $X + \lambda Y = f(Z)$, $XY = g(Z)$, $\min(X, Y) = h(Z)$ et $\max(X, Y) = l(Z)$ où f, g, h et l les fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = x + \lambda y, \quad g(x, y) = xy, \quad h(x, y) = \min(x, y) \text{ et } l(x, y) = \max(x, y),$$

pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. La proposition 98 permet donc de conclure. ■

Remarque : Dans la pratique on considère souvent les variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour calculer la loi de la variable aléatoire $X + Y$, il suffit de connaître la loi conjointe. En effet, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$(X + Y = k) = \bigcup_{i=0}^k (X = i, Y = k - i),$$

donc

$$P(X + Y = k) = \sum_{i=0}^k P(X = i, Y = k - i).$$

Dans le cas où $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{Z}$, alors

$$P(X + Y = k) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} P(X = i, Y = k - i).$$

4.3.2 Famille de variables aléatoires

On généralise ici la notion du couple de variables aléatoires.

Soient $X_1, X_2, \dots, X_n$ n variables aléatoires discrètes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ à valeurs dans $E_1, E_2, \dots, E_n$, respectivement. Comme dans le cas des couples de variables aléatoires discrètes, on définit une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ à valeurs dans $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$, notée $(X_1, X_2, \dots, X_n)$, par

$$(X_1, X_2, \dots, X_n)(\omega) = (X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega)) \text{ pour tout } \omega \in \Omega.$$

La variable aléatoire $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ ainsi définie, est appelée **n-uplet de variables aléatoires discrètes**. Dans les cas où les variables aléatoires sont réelles, le n -uplet $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ est appelé **vecteur aléatoire** sur $(\Omega, \mathcal{B}, P)$.

La loi conjointe de $X_1, X_2, \dots, X_n$ est la loi du n -uplet de variables aléatoires $(X_1, X_2, \dots, X_n)$, donc elle est déterminée par la donnée de la famille

$$(P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n))_{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega)}.$$

Etant donné un n -uplet de variables aléatoires discrètes $(X_1, X_2, \dots, X_n)$, pour tout $1 \leq i \leq n$, la loi de X_i est appelée **la i -ième loi marginale du n -uplets** $(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Les lois marginales s'obtiennent comme dans le cas de couple : Pour tout $x_i \in X_i(\Omega)$, on a

$$P(X_i = x_i) = \sum_{\substack{x_1 \in X_1(\Omega), \dots, x_{i-1} \in X_{i-1}(\Omega) \\ x_{i+1} \in X_{i+1}(\Omega), \dots, x_n \in X_n(\Omega)}} P(X_1 = x_1, \dots, X_i = x_i, \dots, X_n = x_n).$$

4.3.3 Indépendance de deux variables aléatoires

Définition 126 Deux variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ sont dites *indépendantes* si pour tous $x \in X(\Omega)$, $y \in Y(\Omega)$ les événements $(X = x)$ et $(Y = y)$ sont indépendants, c'est-à-dire pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$ on a :

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y).$$

Exemple 127 Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$. En utilisant la proposition 85, on en déduit que les variables aléatoires $\mathbb{I}_A$ et $\mathbb{I}_B$ sont indépendantes si, et seulement si, les événements A et B sont indépendants.

Proposition 128 Deux variables aléatoires discrètes X et Y sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ à valeurs dans E et F , respectivement, sont indépendantes si, et seulement si, pour toutes parties $A \in \mathcal{P}(E)$ et $B \in \mathcal{P}(F)$, on a :

$$P((X \in A) \cap (Y \in B)) = P(X \in A)P(Y \in B).$$

Preuve. Si X et Y sont indépendants. Soient $A \in \mathcal{P}(E)$ et $B \in \mathcal{P}(F)$. On pose $A' = A \cap X(\Omega)$ et $B' = B \cap Y(\Omega)$. Les ensembles A' et B' sont au plus dénombrables. De plus on a :

$$P(X \in A) = \sum_{x \in A'} P(X = x) \text{ et } P(Y \in B) = \sum_{y \in B'} P(Y = y).$$

D'autre part, on a :

$$(X \in A) \cap (Y \in B) = \bigcup_{(x,y) \in A' \times B'} (X = x, Y = y),$$

donc

$$P((X \in A) \cap (Y \in B)) = \sum_{(x,y) \in A' \times B'} P(X = x, Y = y).$$

Or, comme la famille $(P(X = x)P(Y = y))_{(x,y) \in A' \times B'}$ est sommable, alors

$$\begin{aligned} P((X \in A) \cap (Y \in B)) &= \sum_{x \in A'} \sum_{y \in B'} P(X = x)P(Y = y) \\ &= \left(\sum_{x \in A'} P(X = x) \right) \left(\sum_{y \in B'} P(Y = y) \right) = P(X \in A)P(Y \in B). \end{aligned}$$

Ce qui montre le résultat. ■

Remarques :

1. Soient X et Y deux variables aléatoires. On suppose que pour tout $y \in Y(\Omega)$ l'événement $(Y = y)$ est non négligeable, alors X et Y sont indépendantes si et seulement si :

$$P(X = x \mid Y = y) = P(X = x) \text{ pour tout } x \in X(\Omega).$$

2. Dans le cas où X et Y sont indépendantes la connaissance des lois marginales permet de retrouver la loi conjointe.

Le résultat suivant est très utile en pratique.

Proposition 129 *Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ à valeurs dans E et F , respectivement. Si X et Y sont indépendantes alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes pour toutes fonctions f définie sur E et g définie sur F .*

Preuve. Soit $x \in f(X)(\Omega)$ et $y \in g(Y)(\Omega)$, d'après la proposition précédente on a

$$\begin{aligned} P(f(X) = x, g(Y) = y) &= P((X \in f^{-1}(\{x\})) \cap (Y \in g^{-1}(\{y\}))) \\ &= P((X \in f^{-1}(\{x\}))P(Y \in g^{-1}(\{y\}))) \\ &= P(f(X) = x)P(g(Y) = y). \end{aligned}$$

Ce qui montre l'indépendance des deux variables $f(X)$ et $g(Y)$. ■

Comme exemple, si X et Y sont deux variables réelles indépendantes alors les variables aléatoires X^3 et $|Y|$ sont indépendantes.

4.3.4 Cas de n-variables aléatoires

Définition 130 Soient $X_1, X_2, \dots, X_n$ n variables aléatoires discrètes définies sur $(\Omega, \mathcal{B}, P)$.

1. On dit que les variables $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont deux à deux indépendantes si pour tous entiers distincts i et j comprises entre 1 et n les variables X_i et X_j sont indépendantes.
2. On dit que les variables $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes (ou indépendantes) si pour tous $x_1 \in X_1(\Omega), x_2 \in X_2(\Omega), \dots, x_n \in X_n(\Omega)$,

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n) = \prod_{i=1}^n P(X_i = x_i).$$

Comme dans le cas de deux variables aléatoires on a la caractérisation suivante.

Proposition 131 Les variables aléatoires discrètes $X_1, X_2, \dots, X_n$ de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ à valeurs dans $E_1, E_2, \dots, E_n$, respectivement, sont mutuellement indépendantes si, et seulement si, pour toutes parties A_1 de E_1 , A_2 de E_2 , ..., A_n de E_n on a :

$$P(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2, \dots, X_n \in A_n) = \prod_{i=1}^n P(X_i \in A_i).$$

Preuve. Supposons que les variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes. Posons pour tout $1 \leq i \leq n$, $A'_i = A_i \cap X_i(\Omega)$. On écrit :

$$\begin{aligned} P(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2, \dots, X_n \in A_n) &= \sum_{x_1 \in A'_1, x_2 \in A'_2, \dots, x_n \in A'_n} P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n) \\ &= \sum_{x_1 \in A'_1, x_2 \in A'_2, \dots, x_n \in A'_n} \prod_{i=1}^n P(X_i = x_i). \end{aligned}$$

Comme la famille $(\prod_{i=1}^n P(X_i = x_i))_{x_1 \in A'_1, (x_2, \dots, x_n) \in A'_2 \times \dots \times A'_n}$ est sommable, alors

$$\begin{aligned} P(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2, \dots, X_n \in A_n) &= \sum_{x_1 \in A_1} P(X_1 = x_1) \sum_{x_2 \in A_2} P(X_2 = x_2) \dots \sum_{x_n \in A_n} P(X_n = x_n) \\ &= \prod_{i=1}^n P(X_i \in A_i). \end{aligned}$$

La réciproque est évidente. ■

Remarque 132 Si $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ est une famille de variables aléatoires discrètes mutuellement indépendantes, alors toute sous-famille $(X_{i_1}, \dots, X_{i_k})$ est une famille de variables aléatoires discrètes mutuellement indépendantes. En effet, pour toutes parties A_{i_1} de E_{i_1} , A_{i_2} de E_{i_2} , ..., A_{i_k} de E_{i_k} , on a :

$$P(X_{i_1} \in A_{i_1}, X_{i_2} \in A_{i_2}, \dots, X_{i_k} \in A_{i_k}) = P(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2, \dots, X_n \in A_n),$$

où $A_j = X_j(\Omega)$ si $j \notin \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$. Par indépendance de la famille $(X_1, \dots, X_n)$ il vient

$$\begin{aligned} P(X_{i_1} \in A_{i_1}, X_{i_2} \in A_{i_2}, \dots, X_{i_k} \in A_{i_k}) &= \prod_{i=1}^n P(X_i \in A_i) \\ &= P(X_{i_1} \in A_{i_1}) \cdot P(X_{i_2} \in A_{i_2}) \cdots P(X_{i_k} \in A_{i_k}), \end{aligned}$$

car $P(X_j \in A_j) = 1$ pour tout $j \notin \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$.

Le résultat suivant généralise la proposition 129.

Proposition 133 Si $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires discrètes mutuellement indépendantes à valeurs dans $E_1, E_2, \dots, E_n$, respectivement, pour toutes fonctions $f_1, f_2, \dots, f_n$ définies sur $E_1, E_2, \dots, E_n$ respectivement, les variables aléatoires $f(X_1), f(X_2), \dots, f(X_n)$ sont mutuellement indépendantes.

Preuve. Soit, pour tout $1 \leq i \leq n$, $x_i \in f(X_i)(\Omega)$. Alors

$$\begin{aligned} P(f_1(X_1) = x_1, f_2(X_2) = x_2, \dots, f_n(X_n) = x_n) \\ &= P(X_1 \in f_1^{-1}(\{x_1\}), X_2 \in f_2^{-1}(\{x_2\}), \dots, X_n \in f_n^{-1}(\{x_n\})) \\ &= \prod_{i=1}^n P(X_i \in f_i^{-1}(\{x_i\})) = \prod_{i=1}^n P(f(X_i) = x_i). \end{aligned}$$

ce qui montre le résultat. ■

Proposition 134 Si $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires discrètes mutuellement indépendantes, alors pour tout m compris entre 1 et $n-1$, et toutes fonctions f de m variables et g de $(n-m)$ variables, les variables aléatoires $f(X_1, X_2, \dots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, X_{m+2}, \dots, X_n)$ sont indépendantes.

Preuve. Montrons, d'abord, que les variables aléatoires $Z = (X_1, X_2, \dots, X_m)$ et $T = (X_{m+1}, X_{m+2}, \dots, X_n)$ sont indépendantes. Soit $(x_1, x_2, \dots, x_m) \in Z(\Omega)$ et $(x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n) \in T(\Omega)$,

$$\begin{aligned} P(Z = (x_1, x_2, \dots, x_m), T = (x_{m+1}, \dots, x_n)) \\ &= P(X_1 = x_1, \dots, X_m = x_m, X_{m+1} = x_{m+1}, \dots, X_n = x_n) \\ &= \prod_{i=1}^m P(X_i = x_i) \cdot \prod_{i=m+1}^n P(X_i = x_i) \\ &= P(Z = (x_1, x_2, \dots, x_m)) P(T = (x_{m+1}, \dots, x_n)). \end{aligned}$$

La proposition 129 montre que les variables $f(Z) = f(X_1, X_2, \dots, X_m)$ et $g(T) = g(X_{m+1}, X_{m+2}, \dots, X_n)$ sont deux variables aléatoires indépendantes. ■

4.3.5 Propriétés liées à l'indépendance

Etant donné deux variables aléatoires discrètes **indépendantes** X et Y à valeurs dans $\mathbb{N}$.

- La loi de la variable somme $X + Y$ est donnée par :

$$P(X + Y = k) = \sum_{i=0}^k P(X = i) P(Y = k - i) \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}, \quad (4.11)$$

- La probabilité de l'événement $(X = Y)$ est

$$P(X = Y) = \sum_{i=0}^{+\infty} P(X = i) P(Y = i). \quad (4.12)$$

- Si les variables aléatoires sont à valeurs dans $\mathbb{Z}$ alors, pour tout $k \in \mathbb{Z}$ on a :

$$P(X + Y = k) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} P(X = i) P(Y = k - i). \quad (4.13)$$

Exemple 135 Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$, $\lambda > 0$, $\mu > 0$. Alors $X + Y$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$. En effet, par application de l'égalité (4.11), on a pour tout

$n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
 P(X + Y = n) &= \sum_{i=0}^n P(X = i)P(Y = n - i) \\
 &= \sum_{i=0}^n \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} \cdot \frac{\mu^{n-i}}{(n-i)!} e^{-\mu} = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{n!} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \lambda^i \mu^{n-i} \\
 &= \frac{(\lambda + \mu)^n}{n!} e^{-(\lambda+\mu)}.
 \end{aligned}$$

De même, on montre que si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, $Y \sim \mathcal{B}(m, p)$ telles que X et Y sont indépendantes alors $X + Y \sim \mathcal{B}(n + m, p)$.

La formule (4.11) peut être généralisée, par récurrence, au cas de n variables indépendantes. Soient $X_1, X_2, \dots, X_n$ n -variables aléatoires discrètes et indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, on dispose de la formule :

$$P(X_1 + X_2 + \dots + X_n = k) = \sum_{\substack{(i_1, i_2, \dots, i_n) \in X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega) \\ i_1 + i_2 + \dots + i_n = k}} \prod_{j=1}^n P(X_j = i_j). \quad (4.14)$$

Exemple 136 Soient $X_1, X_2, \dots, X_n$ n variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli $\beta(p)$. La variable aléatoire $S = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. En effet, les variables X_i étant à valeurs dans $\{0, 1\}$, S est à valeurs dans $\{0, 1, \dots, n\}$. Par application de la formule (4.14), on obtient :

$$\begin{aligned}
 P(X_1 + X_2 + \dots + X_n = k) &= \sum_{\substack{(i_1, i_2, \dots, i_n) \in \{0, 1\}^n \\ i_1 + i_2 + \dots + i_n = k}} \prod_{j=1}^n P(X_j = i_j) \\
 &= \sum_{\substack{(i_1, i_2, \dots, i_n) \in \{0, 1\}^n \\ i_1 + i_2 + \dots + i_n = k}} p^k (1 - p)^{n-k}.
 \end{aligned}$$

puisque, k valeurs de i_j valent 1 et $n - k$ valent 0. Comme

$$\text{card} \{(i_1, i_2, \dots, i_n) \in \{0, 1\}^n : i_1 + i_2 + \dots + i_n = k\} = \binom{n}{k},$$

il vient :

$$\begin{aligned} P(S = k) &= p^k (1-p)^{n-k} \sum_{\substack{(i_1, i_2, \dots, i_n) \in \{0,1\} \times \dots \times \{0,1\} \\ i_1 + i_2 + \dots + i_n = k}} 1 \\ &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}. \end{aligned}$$

Donc S suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

En utilisant les fonctions génératrices, on peut donner une autre preuve plus simple (cf. remarque 179).

4.3.6 Suite de variables aléatoires indépendantes

Définition 137 Une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires discrètes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ est dite suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes (ou indépendantes) si pour toute partie finie J de $\mathbb{N}$, les variables aléatoires $(X_n)_{n \in J}$ sont indépendantes.

Pour montrer l'indépendance d'une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, il suffit de montrer que les variables aléatoires $(X_n)_{0 \leq n \leq p}$ sont indépendantes pour tout $p \in \mathbb{N}^*$. En effet, toute partie finie J de $\mathbb{N}$ est incluse dans un intervalle entier $[0, p]$ et l'indépendance de la famille $(X_n)_{0 \leq n \leq p}$ entraîne l'indépendance de la famille $(X_n)_{n \in J}$, d'après la remarque 132.

Existence d'espaces probabilisés portant une suite des variables indépendantes

Le théorème suivant, qui sera admis, assure l'existence d'un espace probabilisé modélisant une suite de lois de probabilités données.

Théorème 138 Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de lois de probabilités. Il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ et une suite de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ indépendantes $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n suit la loi P_n (c'est-à-dire $P_{X_n} = P_n$).

Nous avons signalé dans le chapitre précédent qu'il est difficile de construire un espace probabilisé qui modélise une suite infinie d'expériences à deux issues. Ce théorème, qui est de grande importance en pratique, assure l'existence d'un tel espace.

Exemple : Soit $p \in]0, 1[$, on pose $P_n = \beta(p)$ pour tout n . Il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telle que pour tout n , $X_n \sim \beta(p)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on désigne

par A_n : «obtenir succès à la n -ième épreuve». Alors $A_n = (X_n = 1)$ est un événement. Comme, $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, on en déduit que les événements $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont indépendants.

En général, soit ρ une loi de probabilité, en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n = \rho$, il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ et une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires indépendantes qui suivent la même loi ρ . On dit que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **une suite de variables indépendantes identiquement distribuées**.

4.4 Espérance

Dans ce paragraphe on considère des variables aléatoires discrètes réelles.

4.4.1 Définition

Définition 139 Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que la variable X admet une espérance finie (ou intégrable) si la famille $(x.P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable. Dans ce cas, l'espérance de la variable aléatoire X est le réel :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x.P(X = x).$$

Notation : On note $\mathcal{L}_d^1(\Omega, \mathcal{B}, P)$ l'ensemble de variables aléatoires discrètes réelles admettant une espérance finie.

Remarques :

1. Si X est une variable aléatoire finie, c'est-à-dire $X(\Omega)$ est un ensemble fini, alors la condition de sommabilité est automatiquement vérifiée, et $X \in \mathcal{L}_d^1(\Omega, \mathcal{B}, P)$.
2. Soit X une variable aléatoire discrète positive (à valeurs dans $\mathbb{R}^+$). Si la famille de réels positifs $(xP(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ n'est pas sommable alors sa somme $\sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x) = +\infty$. On dit que X admet une espérance infinie.
3. Si $X(\Omega) = \mathbb{N}$. La sommabilité de la famille $(nP(X = n))_{n \in \mathbb{N}}$ est équivalente à la convergence de la série $\sum nP(X = n)$ et dans ce cas,

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} nP(X = n).$$

Espérances des lois usuelles

1. Soit X une variable réelle constante égale à $a \in \mathbb{R}$, alors $\mathbb{E}(X) = a$.
2. Soit A un événement et $\mathbb{I}_A$ l'indicatrice de A . Alors on a :

$$\boxed{\mathbb{E}(\mathbb{I}_A) = P(A).}$$

3. Si $X \sim \mathcal{U}(\{a_1, a_2, \dots, a_n\})$, alors $\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^n a_i P(X = a_i)$. Donc

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i.}$$

4. Si $X \sim \beta(p)$ où $0 < p < 1$, alors $\mathbb{E}(X) = P(X = 1)$, soit

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = p.}$$

5. Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ alors

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = np.}$$

En effet, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \sum_{k=0}^n k P(X = k) = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= np \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k} \\ &= np \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{(n-1-k)} = np. \end{aligned}$$

6. Si $X \sim \mathcal{G}(p)$, $p \in]0, 1[$, alors X admet une espérance finie et on a :

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}.}$$

En effet, la série $\sum n P(X = n) = p \sum n (1-p)^{n-1}$ est convergente, puisque le rayon de convergence de la série entière $\sum nx^n$ est égale à 1 et $(1-p) \in]0, 1[$. Donc $X \in \mathcal{L}_d^1(\Omega, \mathcal{B}, P)$ et on a :

$$\mathbb{E}(X) = p \sum_{n=1}^{+\infty} n (1-p)^{n-1}.$$

On sait que pour tout $x \in]-1, 1[$ on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot x^{n-1} = \frac{d}{dx} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right) = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Donc

$$\mathbb{E}(X) = p \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}$$

7. Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ où $\lambda > 0$, alors X admet une espérance finie et

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \lambda.}$$

En effet, la série $\sum nP(X = n) = e^{-\lambda} \sum n \frac{\lambda^n}{n!}$ est convergente et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} nP(X = n) = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} n \frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} = \lambda.$$

Remarque 140 Dans le cas où la variable aléatoire est à valeurs dans $\mathbb{N}$, on dispose d'une caractérisation (utile) de l'existence de l'espérance :

$X \in \mathcal{L}_d^1(\Omega, \mathcal{B}, P)$ si, et seulement si, la série $\sum P(X > n)$ est convergente et dans ce cas on a :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X > n). \quad (4.15)$$

En effet, $X \in \mathcal{L}_d^1(\Omega, \mathcal{B}, P)$ si, et seulement si, la série $\sum nP(X = n)$ est convergente. Comme

$$nP(X = n) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X = n),$$

la convergence de la série $\sum nP(X = n)$ est équivalente à la sommabilité de la suite double $(P(X = n))_{(k,n) \in A}$ où $A = \{(k, n) : 0 \leq k \leq n\}$. On applique le théorème de Fubini à cette famille. La famille $(P(X = n))_{(k,n) \in A}$ est sommable si, et seulement si, pour tout k fixé la série $\sum_{n \geq k+1} P(X = n)$ converge, on note sa somme

$$u_k = \sum_{n=k+1}^{+\infty} P(X = n) = P(X > k),$$

et la série de $\sum_k P(X > k)$ converge. Ceci montre que la série $\sum nP(X = n)$ converge si, et seulement si, la série $\sum_k P(X > k)$ converge et dans ce cas on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} P(X = n) = \sum_{(n,k) \in A}^{+\infty} P(X = n) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=k+1}^{+\infty} P(X = n) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k).\end{aligned}$$

Comme application de la formule (4.15), on retrouve l'espérance d'une variable aléatoire X qui suit la loi géométrique de paramètre p . On écrit :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k) = \sum_{k=0}^{+\infty} (1-p)^k = \frac{1}{p}.$$

Attention : Il faut savoir retrouver la formule (4.15) chaque fois que l'on en a besoin. Une autre preuve de ce résultat est donnée en exercice (voir exercice 21).

Soit $X \in \mathcal{L}_d^1(\Omega, \mathcal{B}, P)$, il arrive souvent qu'on ait besoin de calculer, non l'espérance de X , mais l'espérance de l'image de X par une fonction f . Le théorème suivant permet de calculer $\mathbb{E}(f(X))$, sans passer par la loi de $f(X)$.

Théorème 141 (Théorème de transfert). Soient X une variable aléatoire discrète sur l'espace $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ et $f : X(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. La variable aléatoire $f(X)$ est d'espérance finie si, et seulement si, la famille

$$(f(x)P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$$

est sommable et dans ce cas,

$$\boxed{\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)P(X = x).}$$

Preuve. Remarquons d'abord que $f(X)(\Omega) = \{f(x) : x \in X(\Omega)\}$. Pour tout $y \in f(X)(\Omega)$, on pose $I_y = f^{-1}(\{y\})$. Il est simple de voir que $(I_y)_{y \in f(X)(\Omega)}$ est une partition de $X(\Omega)$. On a aussi pour tout $y \in f(X)(\Omega)$,

$$|y| P(f(X) = y) = \sum_{x \in I_y} |f(x)| P(X = x).$$

Une application directe du théorème de sommation par paquets (théorème 36) montre que la famille $(f(x)P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable si, et seulement si, pour tout $y \in f(X)(\Omega)$ la famille $(f(x)P(X = x))_{x \in I_y}$ est sommable et la famille $(|y|P(f(X) = y))_{y \in I_y}$ est sommable. Ce qui montre que la famille $(f(x)P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable si, et seulement si, $f(X)$ admet une espérance finie. Dans ce cas, en appliquant le théorème 37 à la famille sommable $(f(x)P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)P(X = x) &= \sum_{y \in f(X)(\Omega)} \sum_{x \in I_y} f(x)P(X = x) \\ &= \sum_{y \in f(X)(\Omega)} yP(f(X) = y) = \mathbb{E}(f(X)). \end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration. ■

Exemples :

1. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors $\exp(X)$ admet une espérance finie si, et seulement si, la série $\sum e^n P(X = n)$ converge est dans ce cas,

$$\mathbb{E}(\exp(X)) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^n P(X = n).$$

2. Soit X une variable aléatoire telle que $X \sim \mathcal{G}(p)$, $p \in]0, 1[$. Alors la variable aléatoire $\frac{1}{X}$ admet une espérance finie. En effet, il suffit de montrer la convergence de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n} P(X = n)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{n} P(X = n) = \frac{1}{n} p(1-p)^{n-1}.$$

Comme la série $\sum \frac{x^n}{n}$ est convergente pour tout $x \in]-1, 1[$ et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x),$$

on en déduit que $\frac{1}{X} \in \mathcal{L}_d^1(\Omega, \mathcal{B}, P)$ et

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} p(1-p)^{n-1} = p \frac{\ln p}{p-1}.$$

3. Un calcul analogue permet de montrer que si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ alors,
- $$\frac{1}{X+1} \in \mathcal{L}_d^1(\Omega, \mathcal{B}, P) \text{ et } \mathbb{E}\left(\frac{1}{X+1}\right) = \frac{1}{\lambda}.$$

4.4.2 Propriétés de l'espérance

Théorème 142 (Linearité de l'espérance). Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes réelles d'espérances finies et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors les variables $X + Y$ et αX sont d'espérance finie et on a :

$$\boxed{\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) \text{ et } \mathbb{E}(\alpha X) = \alpha \mathbb{E}(X).}$$

Le théorème peut s'énoncer sous cette forme : L'ensemble $\mathcal{L}_d^1(\Omega, \mathcal{B}, P)$ est un espace vectoriel et l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{E} : \mathcal{L}_d^1(\Omega, \mathcal{B}, P) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ X & \mapsto & \mathbb{E}(X) \end{array}$$

est une forme linéaire.

Preuve. Soient X et Y deux variables aléatoires d'espérances finies, et $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \alpha x$. Clairement la famille $(f(x)P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable. Par le théorème de transfert, $\alpha X \in \mathcal{L}_d^1(\Omega, \mathcal{B}, P)$ et :

$$\mathbb{E}(\alpha X) = \sum_{x \in X(\Omega)} \alpha x P(X = x) = \alpha \mathbb{E}(X).$$

2. Posons $T = (X, Y)$ et $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = x + y$. La variable $X + Y$ est l'image de T par f , donc admet une espérance finie si, et seulement si, la famille $(f(x, y)P(T = (x, y)))_{(x, y) \in T(\Omega)}$ est sommable. C'est-à-dire, $X + Y \in \mathcal{L}_d^1(\Omega, \mathcal{B}, P)$ si, et seulement si, la famille $((x + y)P(X = x, Y = y))_{(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)}$ est sommable. En considérant la partition $(\{x\} \times Y(\Omega))_{y \in Y(\Omega)}$ de $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ et en appliquant le théorème de sommation par paquets on montre la sommabilité de la famille $(xP(X = x, Y = y))_{(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)}$. En effet :

- ▲ Pour tout $x \in X(\Omega)$, la famille $(xP(X = x, Y = y))_{y \in Y(\Omega)}$ est sommable, puisque

$$|x| P(X = x, Y = y) \leq |x| P(Y = y),$$

on pose

$$S_x = \sum_{y \in Y(\Omega)} |x| P(X = x, Y = y) = |x| P(X = x).$$

▲ Comme X est d'espérance finie, la famille $(|x| P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est donc sommable.

Ce qui montre que la famille $(xP(X = x, Y = y))_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)}$ est sommable. On dispose donc de l'égalité suivante :

$$\sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} xP(X = x, Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x) = \mathbb{E}(X).$$

De même la famille $(yP(X = x, Y = y))_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)}$ est sommable et :

$$\sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} yP(X = x, Y = y) = \sum_{y \in Y(\Omega)} yP(Y = y) = \mathbb{E}(Y).$$

L'inégalité :

$$|x + y| P(X = x, Y = y) \leq |x| P(X = x, Y = y) + |y| P(X = x, Y = y)$$

montre que la famille $((x + y)P(X = x, Y = y))_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)}$ est sommable et par suite $X + Y$ est d'espérance finie. Par le théorème de transfert, on écrit :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X + Y) &= \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} (x + y)P(X = x, Y = y) \\ &= \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y). \end{aligned}$$

Ce qui achève la preuve. ■

Corollaire 143 Soient $X \in \mathcal{L}_d^1(\Omega, \mathcal{B}, P)$, α et β deux réels. Alors :

$$\mathbb{E}(\alpha X + \beta) = \alpha \mathbb{E}(X) + \beta$$

En particulier,

$$\mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X)) = 0.$$

Application 144 (Formule de Poincaré). Soient $A_1, A_2, \dots, A_n$ n événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$. En utilisant le fait que $\mathbb{E}(\mathbb{I}_A) = P(A)$ pour tout événement $A \in \mathcal{B}$, où $\mathbb{I}_A$ est la fonction indicatrice de A , on démontre la formule de Poincaré dite aussi la formule de crible, à savoir :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}).$$

Remarquons d'abord qu'un raisonnement par récurrence facile permet de montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a : $\mathbb{I}_{A_1} \cdot \mathbb{I}_{A_2} \cdots \mathbb{I}_{A_k} = \mathbb{I}_{\bigcap_{i=1}^k A_i}$. Par suite, on écrit :

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_{\bigcup_{i=1}^n A_i} &= 1 - \mathbb{I}_{\bigcap_{i=1}^n \overline{A_i}} = 1 - \prod_{i=1}^n \mathbb{I}_{\overline{A_i}} = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - \mathbb{I}_{A_i}) \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \mathbb{I}_{A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}}. \end{aligned}$$

En prenant les espérances des premier et dernier membres de l'égalité on obtient la formule de Poincaré.

Proposition 145 (Positivité de l'espérance). *L'espérance est une forme linéaire positive, c'est-à-dire, pour toute variable aléatoire discrète X , à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ d'espérance finie,*

$$\mathbb{E}(X) \geq 0.$$

De plus on a égalité si, et seulement si, $X = 0$ presque sûrement.

Preuve. Si $X(\Omega) \subseteq \mathbb{R}^+$ et $X \in \mathcal{L}_d^1(\Omega, \mathcal{B}, P)$, alors

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x P(X = x) \geq 0.$$

D'autre part, on a $\mathbb{E}(X) = 0$ si, et seulement si, $x P(X = x) = 0$ pour tout $x \in X(\Omega)$. Donc, $P(X = x) = 0$ pour tout $x \in X(\Omega)$ et $x \neq 0$. Comme $\sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x) = 1$ alors $0 \in X(\Omega)$ et $P(X = 0) = 1$. Donc $X = 0$ presque sûrement. ■

Corollaire 146 (Croissance de l'espérance). *Si $X, Y \in \mathcal{L}_d^1(\Omega, \mathcal{B}, P)$ et $X \leq Y$ alors $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$. De plus on a égalité si, et seulement si, $X = Y$ presque sûrement.*

Preuve. Si $X, Y \in \mathcal{L}_d^1(\Omega, \mathcal{B}, P)$ et $X \leq Y$, alors $Y - X \geq 0$. Donc,

$$0 \leq \mathbb{E}(Y - X) = \mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(X).$$

D'où, $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$. On a égalité si, et seulement si, $Y - X = 0$ presque sûrement, c'est-à-dire $X = Y$ presque sûrement. ■

Corollaire 147 Soit X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{B}, P)$, alors $|X|$ admet une espérance finie si, et seulement si, X admet une espérance finie et dans ce cas on a :

$$|\mathbb{E}(X)| \leq \mathbb{E}(|X|).$$

Preuve. D'après le théorème de transfert, $|X| \in \mathcal{L}_d^1(\Omega, \mathcal{B}, P)$ si, et seulement si, la famille $(|x|P(X=x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable, c'est-à-dire $X \in \mathcal{L}_d^1(\Omega, \mathcal{B}, P)$. D'autre part, on a :

$$-|X| \leq X \leq |X|,$$

en appliquant le corollaire 146, il vient :

$$-\mathbb{E}(|X|) = \mathbb{E}(-|X|) \leq \mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(|X|).$$

ce qui montre le résultat. ■

Proposition 148 Soient X et Y deux variables aléatoires. On suppose que $|X| \leq Y$ et $Y \in \mathcal{L}_d^1(\Omega, \mathcal{B}, P)$. Alors $X \in \mathcal{L}_d^1(\Omega, \mathcal{B}, P)$ et on a :

$$|\mathbb{E}(X)| \leq \mathbb{E}(Y).$$

Preuve. Soient $Z = (X, Y)$ et π_1, π_2 les fonctions sur $\mathbb{R}^2$ définies par :

$$\pi_1(x, y) = x \text{ et } \pi_2(x, y) = y, \text{ pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

La variable $Y = \pi_2(Z) \in \mathcal{L}_d^1(\Omega, \mathcal{B}, P)$, d'après le théorème de transfert, on en déduit que la famille $(\pi_2(z)P(Z=z))_{z \in Z(\Omega)}$ est sommable et on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= \sum_{z \in Z(\Omega)} \pi_2(z)P(Z=z) \\ &= \sum_{(x,y) \in Z(\Omega)} \pi_2(x, y)P(Z=(x, y)) = \sum_{(x,y) \in Z(\Omega)} yP(Z=(x, y)). \end{aligned}$$

D'autre part, pour tout $(x, y) \in Z(\Omega)$ il existe $\omega \in \Omega$ tel que $X(\omega) = x$ et $Y(\omega) = y$, donc

$$|x| = |X|(\omega) \leq Y(\omega) = y.$$

On obtient

$$|x|P(Z=(x, y)) \leq yP(Z=(x, y)).$$

la sommabilité de la famille $(yP(Z = (x, y)))_{(x, y) \in Z(\Omega)}$ entraîne donc la sommabilité de la famille

$$(xP(Z = (x, y)))_{(x, y) \in Z(\Omega)} = (\pi_1(z)P(Z = z))_{z \in Z(\Omega)}.$$

Ce qui montre que la variable aléatoire $\pi_1(Z) = X$ admet une espérance finie. Comme $|X| \leq Y$, il vient $|\mathbb{E}(X)| \leq \mathbb{E}(|X|) \leq \mathbb{E}(Y)$. ■

Remarque : Si X est une variable aléatoire bornée, c'est-à-dire, il existe un réel M tel que $|X| \leq M$ alors $X \in \mathcal{L}_d^1(\Omega, \mathcal{B}, P)$. En particulier, pour tout variable aléatoire réelle X , les variables aléatoires $\cos(X)$, $\frac{1}{X^2 + 1}$, e^{-X^2} sont intégrables.

Le résultat suivant permet de déterminer l'espérance du produit de deux variables aléatoires.

Théorème 149 Soient X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes sur $(\Omega, \mathcal{B}, P)$. La variable aléatoire $XY \in \mathcal{L}_d^1(\Omega, \mathcal{B}, P)$ si, et seulement si, la famille

$$(xyP(X = x, Y = y))_{(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)}$$

est sommable et dans ce cas on a :

$$\boxed{\mathbb{E}(XY) = \sum_{(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} xyP(X = x, Y = y).}$$

Preuve. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = xy$. Alors la variable XY s'écrit $XY = f(Z)$ où $Z = (X, Y)$. D'après le théorème de transfert, $XY \in \mathcal{L}_d^1(\Omega, \mathcal{B}, P)$ si, et seulement si, la famille $(f(z)P(Z = z))_{z \in Z(\Omega)}$ est sommable. Par suite la variable $XY \in \mathcal{L}_d^1(\Omega, \mathcal{B}, P)$ si, et seulement si, la famille

$$(f(x, y)P(Z = (x, y)))_{(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} = (xyP(X = x, Y = y))_{(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)}$$

est sommable. Dans ce cas, on a :

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(f(Z)) = \sum_{(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} xyP(X = x, Y = y).$$

Ce qui montre le résultat. ■

Corollaire 150 Si X et Y sont deux variables aléatoires *indépendantes* d'espérances finies, alors XY est d'espérance finie et on a :

$$\boxed{\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).}$$

Preuve. Il résulte par hypothèse que les familles $(xP(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ et $(yP(Y = y))_{y \in Y(\Omega)}$ sont sommables et du fait que

$$xyP(X = x, Y = y) = xP(X = x)yP(Y = y),$$

que la famille $(xyP(X = x, Y = y))_{(x,y) \in X(\Omega), Y(\Omega)}$ est sommable et que :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(XY) &= \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} xyP(X = x)P(Y = y) \\ &= \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} xyP(X = x)P(Y = y) \\ &= \left(\sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x) \right) \left(\sum_{y \in Y(\Omega)} yP(Y = y) \right) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \end{aligned}$$

Ce qui montre le résultat. ■

Noter que la réciproque : " $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ implique X et Y sont indépendantes" est fausse en général. Comme exemple, si X est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $\{-1, 0, 1\}$, les variables aléatoires X et X^2 ne sont pas indépendantes, puisque

$$\frac{1}{9} = P(X^2 = 0)P(X = 1) \neq P(X = 1, X^2 = 0).$$

Un calcul simple montre que $\mathbb{E}(XX^2) = \mathbb{E}(X^3) = 0 = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(X^2)$.

4.5 L'espace $\mathcal{L}_d^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$

4.5.1 Définitions et structures

Soit X une variable aléatoire discrète réelle sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ et $k \in \mathbb{N}^*$.

Définition 151 On dit que X admet un moment d'ordre k , si la variable aléatoire X^k admet une espérance finie, ce qui est équivalent à la sommabilité de la famille $(x^kP(X = x))_{x \in X(\Omega)}$. On appelle, dans ce cas, le **moment d'ordre k de X** le réel

$$\mathbb{E}(X^k) = \sum_{x \in X(\Omega)} x^k P(X = x).$$

Une variable aléatoire X admet un moment d'ordre $k \in \mathbb{N}^*$ si, et seulement si, la variable aléatoire $X^k \in \mathcal{L}_d^1(\Omega, \mathcal{B}, P)$.

On s'intéresse, essentiellement à l'ensemble des variables aléatoires admettant un moment d'ordre 2 que l'on note $\mathcal{L}_d^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$. La proposition suivante montre l'inclusion : $\mathcal{L}_d^2(\Omega, \mathcal{B}, P) \subseteq \mathcal{L}_d^1(\Omega, \mathcal{B}, P)$.

Proposition 152 *Soit X une variable aléatoire réelle admettant un moment d'ordre 2, alors X admet une espérance finie.*

Preuve. Il suffit de remarquer que $|X| \leq \frac{1}{2}(X^2 + 1)$. Comme par hypothèse $\frac{1}{2}(X^2 + 1) \in \mathcal{L}_d^1(\Omega, \mathcal{B}, P)$, la proposition 148 permet de conclure. ■

Exemple. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ dont la loi est donnée par $P(X = n) = \frac{1}{\zeta(3)n^3}$. Alors $X \in \mathcal{L}_d^1(\Omega, \mathcal{B}, P)$ puisque la série de terme général $nP(X = n)$ converge et $\mathbb{E}(X) = \frac{\zeta(2)}{\zeta(3)}$, par contre, X n'admet pas un moment d'ordre 2.

Exemple. Soit X une variable aléatoire qui admet un moment d'ordre $p \in \mathbb{N}^*$, alors X admet un moment d'ordre k pour tout $1 \leq k \leq p$. En effet, soit $1 \leq k \leq p$. Pour tout réel x tel que $|x| \geq 1$ on a $|x|^k \leq |x|^p$. Par suite l'inégalité $|x|^k \leq |x|^p + 1$ est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par conséquent, on obtient l'inégalité

$$|X|^k \leq |X|^p + 1,$$

Comme, la variable aléatoire $|X|^p + 1$ admet une espérance finie, vu la proposition 148, on en déduit que la variable $|X|^k$ admet une espérance finie.

Proposition 153 *Si X, Y sont deux variables aléatoires réelles admettant chacune un moment d'ordre 2, alors XY est d'espérance finie.*

Preuve. Comme : $|XY| \leq \frac{1}{2}(X^2 + Y^2)$ et $\frac{1}{2}(X^2 + Y^2) \in \mathcal{L}_d^1(\Omega, \mathcal{B}, P)$, on en déduit que $XY \in \mathcal{L}_d^1(\Omega, \mathcal{B}, P)$. ■

Proposition 154 *L'ensemble $\mathcal{L}_d^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. De plus l'application*

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{L}_d^2(\Omega, \mathcal{B}, P) \times \mathcal{L}_d^2(\Omega, \mathcal{B}, P) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (X, Y) &\mapsto \mathbb{E}(XY) \end{aligned}$$

est une forme bilinéaire symétrique positive.

Preuve. Il suffit de montrer que $\mathcal{L}_d^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^\Omega$. Soient $X, Y \in \mathcal{L}_d^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$, α et $\beta \in \mathbb{R}$. On écrit :

$$(\alpha X + \beta Y)^2 = \alpha^2 X^2 + \beta^2 Y^2 + 2\alpha\beta XY.$$

D'après la proposition précédente, X^2, Y^2 et $XY \in \mathcal{L}_d^1(\Omega, \mathcal{B}, P)$, donc par linéarité, on en déduit que $(\alpha X + \beta Y)^2 \in \mathcal{L}_d^1(\Omega, \mathcal{B}, P)$, soit

$$\alpha X + \beta Y \in \mathcal{L}_d^1(\Omega, \mathcal{B}, P).$$

La proposition 153 montre que φ est bien définie. La bilinéarité de φ résulte de la linéarité de l'espérance. De plus on a : $\varphi(X, X) = \mathbb{E}(X^2) \geq 0$ pour tout $X \in \mathcal{L}_d^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$. ■

Remarque : Soit $X \in \mathcal{L}_d^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$. On a : $\varphi(X, X) = \mathbb{E}(X^2) = 0$ équivaut à $X^2 = 0$ presque sûrement, c'est-à-dire $P(X^2 = 0) = 1$. Comme de plus on a $(X = 0) = (X^2 = 0)$, on obtient $P(X = 0) = 1$, soit $X = 0$ presque sûrement. On a donc l'équivalence :

$$\boxed{\mathbb{E}(X^2) = 0 \Leftrightarrow X = 0 \text{ presque sûrement.}}$$

Proposition 155 (Inégalité de Cauchy-Schwarz). Si X et Y admettent chacune un moment d'ordre 2 alors XY est d'espérance finie et on a :

$$\boxed{|\mathbb{E}(XY)| \leq \sqrt{\mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)}}. \quad (4.16)$$

Preuve. D'après la proposition 153, la variable aléatoire XY est d'espérance finie. Pour montrer l'inégalité (4.16), on distingue les cas où $\mathbb{E}(Y^2) = 0$ et $\mathbb{E}(Y^2) > 0$.

Si $\mathbb{E}(Y^2) = 0$ alors $Y = 0$ presque sûrement. Comme $(Y = 0) \subseteq (XY = 0)$, et $P(Y = 0) = 1$, on en déduit que $XY = 0$ presque sûrement et l'inégalité (4.16) est vérifiée.

Si $\mathbb{E}(Y^2) > 0$ alors par positivité et linéarité de l'espérance on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$0 \leq \mathbb{E}((X + tY)^2) = \mathbb{E}(X^2) + 2t\mathbb{E}(XY) + t^2\mathbb{E}(Y^2).$$

Donc, le discriminant de la fonction trinôme

$$t \rightarrow \mathbb{E}(X^2) + 2t\mathbb{E}(XY) + t^2\mathbb{E}(Y^2)$$

est négatif, ce qui donne l'inégalité (4.16). ■

Cas d'égalité : Soient X, Y deux variables aléatoires admettant un moment d'ordre 2 telles que $\mathbb{E}(XY)^2 = \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)$. Supposons que Y n'est

pas nulle (presque sûrement). Alors le discriminant de la fonction trinôme $t \mapsto \mathbb{E}((X + tY)^2)$ est nul. Ce qui est équivalente à l'existence d'un réel α tel que $\mathbb{E}((X + \alpha Y)^2) = 0$. Cela signifie qu'il existe un réel $\alpha \in \mathbb{R}$, tel que $X + \alpha Y = 0$ presque sûrement.

On vérifie, que si $Y = 0$ presque sûrement ou $X + \alpha Y = 0$ presque sûrement ($\alpha \in \mathbb{R}$) alors on a $\mathbb{E}(XY)^2 = \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)$.

En conclusion, l'inégalité de Cauchy-Schwarz est une égalité si, et seulement si, $Y = 0$ presque sûrement ou il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $X + \alpha Y = 0$ presque sûrement.

4.5.2 Variance

Définition 156 On appelle *variance* d'une variable aléatoire réelle X admettant un moment d'ordre 2, le nombre positif,

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2].$$

Pour tout variable aléatoire $X \in \mathcal{L}_d^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$ on écrit,

$$\mathbb{V}(X) = \varphi(X - \mathbb{E}(X), X - \mathbb{E}(X)),$$

où φ est la forme bilinéaire symétrique positive définie dans la proposition 154. La variance représente, donc l'écart quadratique moyen de X à son espérance $\mathbb{E}(X)$. La distance de X à son espérance $\mathbb{E}(X)$ est, plutôt la racine de la variance appelée **l'écart type** de X .

Définition 157 Si X est une variable aléatoire réelle admettant un moment d'ordre 2, l'écart type de X est le réel positif,

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}.$$

Définition 158 Soit X une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{B}, P)$.

1. Si $\mathbb{E}(X) = 0$, on dit que X est une variable centrée.
2. Si X admet un moment d'ordre 2 et est telle que $\mathbb{E}(X) = 0$ et $\sigma(X) = 1$, on dit que X est une variable centrée réduite.

Remarque 159 Soit X une variable aléatoire réelle admettant un moment d'ordre 2. Alors $\mathbb{V}(X) = 0$ si, et seulement si, X est constante presque sûrement. En effet : $\mathbb{V}(X) = 0$, signifie que

$$\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = 0,$$

ce qui est équivalent à $X = \mathbb{E}(X)$ presque sûrement.

Dans la plupart des cas, on utilise la formule suivante pour calculer la variance d'une variable aléatoire.

Proposition 160 (Formule de Koenig-Huygens). *Soit X une variable aléatoire discrète réelle admettant un moment d'ordre 2 alors*

$$\boxed{\mathbb{V} = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2.} \quad (4.17)$$

Preuve. On écrit :

$$(X - \mathbb{E}(X))^2 = X^2 - 2\mathbb{E}(X)X + \mathbb{E}(X)^2.$$

Par linéarité de l'espérance, on obtient :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(X)^2 + \mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2.$$

Ce qui montre la formule de Koenig-Huygens. ■

Variance de lois usuelles : Soit X une variable aléatoire.

1. Si X est constante, alors $\mathbb{V}(X) = 0$.
2. Si $X \sim \beta(p)$, $p \in]0, 1[$ alors $\mathbb{V}(X) = p(1 - p)$.

En effet un calcul simple donne, $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X^2) = p$.

3. Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, $p \in]0, 1[$, alors $\mathbb{V}(X) = np(1 - p)$.

En effet : on a $\mathbb{E}(X) = np$ et

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^2) &= \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= (1-p)^n \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} \left(\frac{p}{1-p}\right)^k. \end{aligned}$$

Or, en dérivant par rapport à x l'identité du binôme :

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k,$$

on obtient : $n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} x^{k-1}$. En multipliant l'égalité par x et en dérivant par rapport à x , on en déduit que

$$n(1+x)^{n-2}(1+nx) = \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} x^{k-1},$$

ce qui donne,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) &= (1-p)^n n \left(1 + \frac{p}{1-p}\right)^{n-1} \left(\frac{p}{1-p} + n \frac{p}{1-p}\right) \\ &= np + n(n-1)p^2,\end{aligned}$$

par suite,

$$\mathbb{V}(X) = np + n(n-1)p^2 - n^2p^2 = np(1-p).$$

4. Si $X \sim \mathcal{G}(p)$, $p \in]0, 1[$, alors $\mathbb{V}(X) = \frac{1-p}{p^2}$.

En effet, on a $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$. D'autre part,

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 p (1-p)^{n-1} = p \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 (1-p)^{n-1}.$$

Or, pour tout $x \in]-1, 1[$, $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}$. Donc

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{x}{(1-x)^2} \right] = \frac{1+x}{(1-x)^3} = \frac{d}{dx} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^{n-1},$$

par suite $\mathbb{E}(X^2) = \frac{2-p}{p^2}$ et $\mathbb{V}(X) = \frac{1-p}{p^2}$.

5. Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, où $\lambda > 0$, alors $\mathbb{V}(X) = \lambda$.

En utilisant l'égalité :

$$\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X),$$

et en appliquant le théorème de transfert, il vient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) &= \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)P(X=n) + \lambda \\ &= e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) \frac{\lambda^n}{n!} + \lambda \\ &= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} + \lambda = \lambda^2 + \lambda.\end{aligned}$$

Donc

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

Proposition 161 *Soit X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2, alors pour tous réels α, β on a*

$$\boxed{\mathbb{V}(\alpha X + \beta) = \alpha^2 \mathbb{V}(X).}$$

Preuve. Comme $X \in \mathcal{L}_d^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$, $\alpha X + \beta \in \mathcal{L}_d^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$. Par linéarité de l'espérance, on écrit :

$$\mathbb{E}((\alpha X + \beta)^2) = \alpha^2 \mathbb{E}(X^2) + 2\alpha\beta \mathbb{E}(X) + \beta^2$$

et

$$\mathbb{E}(\alpha X + \beta)^2 = (\alpha \mathbb{E}(X) + \beta)^2.$$

Par la formule (4.17), on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(\alpha X + \beta) &= \alpha^2 \mathbb{E}(X^2) + 2\alpha\beta \mathbb{E}(X) + \beta^2 - (\alpha \mathbb{E}(X) + \beta)^2 \\ &= \alpha^2 (\mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2) = \alpha^2 \mathbb{V}(X). \end{aligned}$$

Ce qui montre le résultat. ■

Application : Soit X une variable aléatoire qui admet un moment d'ordre 2, alors la variable aléatoire

$$X^* = \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$$

est une variable aléatoire centrée et réduite. En effet, par linéarité de l'espérance on a

$$\mathbb{E}(X^*) = \frac{1}{\sigma(X)} (\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)) = 0$$

et

$$\mathbb{V}(X^*) = \mathbb{V}\left(\frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}\right) = \frac{1}{\sigma(X)^2} \mathbb{V}(X) = 1.$$

La variable aléatoire X^* est appelée **variable aléatoire centrée réduite** de (ou associé à) X .

4.5.3 Covariance

Définitions

Définition 162 Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes réelles sur $(\Omega, \mathcal{B}, P)$. On appelle **covariance** de X et de Y , le nombre, s'il existe :

$$\boxed{\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))].}$$

Proposition 163 (Formule de Koenig-Huygens). Pour toutes variables aléatoires X et Y admettant chacune un moment d'ordre 2, $\text{Cov}(X, Y)$ existe et on a :

$$\boxed{\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).} \quad (4.18)$$

Preuve. Si $X, Y \in \mathcal{L}_d^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$, alors $X - \mathbb{E}(X)$ et $Y - \mathbb{E}(Y) \in \mathcal{L}_d^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$. Par suite $(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))$ admet une espérance finie, (cf. proposition 153). En utilisant la linéarité de la fonction espérance, on obtient la formule (4.18). ■

Corollaire 164 Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes admettant chacune un moment d'ordre 2. Si X et Y sont indépendantes alors

$$\text{Cov}(X, Y) = 0.$$

Preuve. C'est une conséquence du corollaire 150. ■

Attention : La réciproque de ce résultat est fausse en général, comme nous le montre l'exemple suivant : Soit X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $\{-1, 0, 1\}$ et $Y = |X|$. On a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \frac{1}{3}((-1) + 0 + 1) = 0, \\ \mathbb{E}(Y) &= 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned} (XY = 1) &= (X = 1) \cap (|X| = 1) = (X = 1) \text{ et} \\ (XY = -1) &= (X = -1), \end{aligned}$$

on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(XY) &= 0 \times P(XY = 0) + 1 \times P(XY = 1) + (-1)P(XY = -1) \\ &= 0 + 1 \times P(X = 1) + (-1) \cdot P(X = -1) = 0. \end{aligned}$$

D'où, $\text{Cov}(XY) = 0$. Il est simple de voir que X et Y ne sont pas indépendantes puisque $P(X = 1, Y = 0) = 0 \neq P(X = 1)P(Y = 0) = \frac{1}{9}$.

Deux variables aléatoires discrètes X et Y possédant une covariance vérifiant $\text{Cov}(X, Y) = 0$ sont dites **non corrélées**.

Exemple 165 *Deux variables aléatoires discrètes qui suivent une loi de Bernoulli sont indépendantes si, et seulement si, elles sont non corrélées. En effet : le sens direct est une conséquence du corollaire précédent. Montrons la réciproque. Soient X, Y deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ avec X et Y suivant chacune une loi de Bernoulli. On a :*

$$\mathbb{E}(X) = P(X = 1) \text{ et } \mathbb{E}(Y) = P(Y = 1).$$

Comme $XY(\Omega) = \{0, 1\}$,

$$\mathbb{E}(XY) = 1 \times P((XY = 1)) = P((X = 1) \cap (Y = 1)).$$

Le fait que $\text{Cov}(X, Y) = 0$ entraîne que :

$$P((X = 1) \cap (Y = 1)) - P(X = 1)P(Y = 1) = 0,$$

ce qui montre que les événements $(X = 1)$ et $(Y = 1)$ sont indépendantes. La proposition 85 montre, que les couples d'événements suivants

$$((X = 0), (Y = 1)), ((X = 1), (Y = 0)) \text{ et } ((X = 0), (Y = 1))$$

sont indépendants. D'où, pour tous $i, j \in \{0, 1\}$, on a :

$$P((X = i) \cap (Y = j)) = P(X = i)P(Y = j).$$

Ce qui montre l'indépendance des variables aléatoires X et Y .

Exemple 166 (Calcul de la covariance) : On considère une suite de lancers indépendants d'une pièce de monnaie dont la probabilité d'obtenir pile est $p \in]0, 1[$. Le théorème 138 assure l'existence d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ modélisant cette épreuve. On note X la longueur de la première série de résultats obtenus ($X = k$ si les k premiers lancers donnent le même résultat et le $(k+1)$ -ième lancer donne un résultat différent) et Y la longueur de la seconde série. On veut chercher la covariance de X et Y .

On a $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$. En notant S_i l'événement «obtenir pile au cours du i -ième lancer», on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} P(X = n) &= P((S_1 \cap S_2 \cap \dots \cap S_n) \cap \overline{(S_{n+1})}) \\ &\quad + P((\overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap \dots \cap \overline{S_n}) \cap (S_{n+1})), \end{aligned}$$

donc $P(X = n) = p^n(1 - p) + (1 - p)^n p$. D'autre part,

$$\begin{aligned} P(X = +\infty) &= P\left(\bigcap_{i=1}^{+\infty} S_i\right) + P\left(\bigcap_{i=1}^{+\infty} \overline{S_i}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} p^n + \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - p)^n = 0. \end{aligned}$$

Soit $m \in \mathbb{N}^*$, en utilisant la formule (4.8) on obtient :

$$P(Y = m) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X = m, Y = n).$$

Or, pour tout $m, n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} P(X = n, Y = m) &= \\ &P((S_1 \cap S_2 \cap \dots \cap S_n) \cap \overline{(S_{n+1})} \cap (\overline{S_{n+2}} \cap \overline{S_{n+3}} \cap \dots \cap \overline{S_{n+m}}) \cap S_{n+m+1}) \\ &+ P((\overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap \dots \cap \overline{S_n}) \cap S_{n+1} \cap (S_{n+2} \cap S_{n+3} \cap \dots \cap S_{n+m}) \cap \overline{S_{n+m+1}}) \\ &= p^{n+1}(1 - p)^m + (1 - p)^{n+1}p^m \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} P(Y = m) &= \sum_{n=1}^{+\infty} p^{n+1}(1 - p)^m + (1 - p)^{n+1}p^m \\ &= (1 - p)^{m-1}p^2 + p^{m-1}(1 - p)^2 \end{aligned}$$

On vérifie que $\sum_{m=1}^{+\infty} P(Y = m) = 1$ donc, $P(Y = +\infty) = 0$. Par suite

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \sum_{n=1}^{+\infty} nP(X = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} n(p^n(1 - p) + (1 - p)^n p) \\ &= p(1 - p)\left(\sum_{n=1}^{+\infty} np^{n-1}\right) + \sum_{n=1}^{+\infty} n(1 - p)^{n-1}p \\ &= \frac{p}{1 - p} + \frac{1 - p}{p}. \end{aligned}$$

De même, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= \sum_{m=1}^{+\infty} mP(Y = m) = \sum_{m=1}^{+\infty} m((1 - p)^{m-1}p^2 + p^{m-1}(1 - p)^2) \\ &= \frac{p^2}{(1 - (1 - p))^2} + \frac{(1 - p)^2}{(1 - p)^2} = 2. \end{aligned}$$

Remarquons au passage que la moyenne de la longueur de la deuxième série est 2 (indépendant de p) et que la moyenne de la longueur de la première série est supérieure à 2. D'autre part,

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(XY) &= \sum_{(n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2} nmP(X=n, Y=m) \\
 &= \sum_{(n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2} nm(p^{n+1}(1-p)^m + (1-p)^{n+1}p^m) \\
 &= \sum_{(n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2} np^{n+1}m(1-p)^m + \sum_{(n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2} n(1-p)^{n+1}mp^m \\
 &= \left(\sum_{n=1}^{+\infty} np^{n+1}\right)\left(\sum_{m=1}^{+\infty} m(1-p)^m\right) + \left(\sum_{n=1}^{+\infty} n(1-p)^{n+1}\right)\left(\sum_{m=1}^{+\infty} mp^m\right) \\
 &= \frac{p^2}{(1-p)^2} \frac{1-p}{(1-(1-p)^2)} + \frac{(1-p)^2}{(1-(1-p)^2)} \frac{p}{(1-p)^2} \\
 &= \frac{1}{1-p} + \frac{1}{p}.
 \end{aligned}$$

Finalement,

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \frac{(2p-1)^2}{p(p-1)}$$

Donc X et Y sont non corrélées si, et seulement si, $p = \frac{1}{2}$.

La proposition 163 permet de définir l'application :

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Cov} : \mathcal{L}_d^2(\Omega, \mathcal{B}, P) \times \mathcal{L}_d^2(\Omega, \mathcal{B}, P) & \rightarrow & \mathbb{R} \\
 (X, Y) & \mapsto & \text{Cov}(X, Y)
 \end{array}$$

Proposition 167

1. L'application Cov est une forme bilinéaire symétrique positive sur l'espace $\mathcal{L}_d^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$, et on a

$$\boxed{\text{Cov}(X, X) = \mathbb{V}(X).}$$

2. Soit $X \in \mathcal{L}_d^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$. Alors, $\text{Cov}(X, X) = 0$ si, et seulement si, X est constante presque sûrement.

3. Pour tous $X, Y \in \mathcal{L}_d^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$,

$$|\text{Cov}(X, Y)| \leq \sigma(X)\sigma(Y). \quad (4.19)$$

Preuve. Les deux premiers points résultent de la formule (4.18). Pour démontrer l'inégalité (4.19) on distingue les cas $\sigma(Y) = 0$ et $\sigma(Y) > 0$. Si $\sigma(Y) = 0$: Y est constante presque sûrement, $\text{Cov}(X, Y) = 0$ et l'inégalité est vérifiée. Si $\sigma(Y) > 0$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$0 \leq \text{Cov}(X - tY, X - tY) = \mathbb{V}(X) + t^2\mathbb{V}(Y) - 2t\text{Cov}(X, Y).$$

En prenant $t = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\mathbb{V}(Y)}$, on obtient : $0 \leq \mathbb{V}(X) - \frac{(\text{Cov}(X, Y))^2}{\mathbb{V}(Y)}$, ce qui donne l'inégalité recherchée. ■

Application 168 Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$. Alors, on a l'inégalité :

$$|P(A)P(B) - P(A \cap B)| \leq \frac{1}{4}. \quad (4.20)$$

En effet, en remarquant que,

$$\mathbb{E}(\mathbb{I}_A) = P(A), \mathbb{E}(\mathbb{I}_B) = P(B) \text{ et } \mathbb{E}(\mathbb{I}_A \cdot \mathbb{I}_B) = \mathbb{E}(\mathbb{I}_{A \cap B}) = P(A \cap B),$$

il vient :

$$|P(A)P(B) - P(A \cap B)| = |\text{Cov}(\mathbb{I}_A, \mathbb{I}_B)|.$$

D'autre part, en utilisant l'inégalité $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$ pour tout réel $x \in [0, 1]$, on obtient :

$$\begin{aligned} |\text{Cov}(\mathbb{I}_A, \mathbb{I}_B)| &\leq \sigma(\mathbb{I}_A)\sigma(\mathbb{I}_B) \\ &= (P(A)(1-P(A)))^{\frac{1}{2}}(P(B)(1-P(B)))^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

4.5.4 Variance de la somme

En utilisant les propriétés de la fonction covariance, on peut exprimer la variance d'une somme de variables aléatoires dans $\mathcal{L}_d^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$.

Proposition 169 Soient $X_1, X_2, \dots, X_n$ n variables aléatoires discrètes réelles, admettant un moment d'ordre 2 alors

$$\mathbb{V}(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = \sum_{i=1}^n \mathbb{V}(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{Cov}(X_i, X_j). \quad (4.21)$$

Preuve. Par bilinéarité de l'application covariance, il vient

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X_1 + X_2 + \dots + X_n) &= \text{Cov}\left(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \text{Cov}(X_i, X_j) \\ &= \sum_{i=1}^n \text{Cov}(X_i, X_i) + \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} \text{Cov}(X_i, X_j).\end{aligned}$$

La formule (4.21) s'en déduit en tenant compte du fait que

$$\text{Cov}(X_i, X_i) = \mathbb{V}(X_i) \text{ et } \text{Cov}(X_i, X_j) = \text{Cov}(X_j, X_i) \text{ pour tous } i, j.$$

Corollaire 170 Soient $X_1, X_2, \dots, X_n$ n variables aléatoires discrètes réelles, admettant un moment d'ordre 2, deux à deux indépendantes. Alors on a :

$$\mathbb{V}(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = \sum_{i=1}^n \mathbb{V}(X_i).$$

Preuve. Cela résulte de la formule (4.21) et le fait que $\text{Cov}(X_i, X_j) = 0$ pour tout $i \neq j \in \{1, 2, \dots, n\}$. ■

4.6 Fonctions génératrices

On introduit les fonctions génératrices pour les variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. Ces fonctions permettent de simplifier les calculs qu'on peut avoir à faire sur les lois, les espérances, les variances...

Définition 171 Soit X une variable aléatoire discrète sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$, à valeurs dans $\mathbb{N}$. La fonction génératrice G_X de la variable X est la fonction somme de la série entière

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n) t^n$$

dont on note R le rayon de convergence.

Remarquons, que par le théorème de transfert, on a pour toute variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$,

$$G_X(t) = \mathbb{E}(t^X).$$

En utilisant les propriétés classiques des séries entières, on a :

Proposition 172 *Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.*

1. *La série entière définissant G_X est de rayon de convergence supérieur ou égal à 1.*
2. *La fonction G_X est continue sur $[-1, 1]$ et indéfiniment dérivable sur $] -1, 1[$.*
3. *La fonction génératrice G_X détermine entièrement la loi de X . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :*

$$P(X = n) = \frac{G_X^{(n)}(0)}{n!}.$$

Preuve. Pour tout $t \in [-1, 1]$, on a $|P(X = n)t^n| \leq P(X = n)$ et la série $\sum P(X = n)$ converge. Ce qui montre la convergence normale de la série $\sum P(X = n)t^n$ sur $[-1, 1]$. On en déduit, que $R \geq 1$ et que G_X est continue sur $[-1, 1]$. La fonction G_X est de classe C^∞ sur $] -R, R[$, en particulier elle est C^∞ sur $] -1, 1[$. De plus les coefficients de la série entière définissant G_X sont données par $P(X = n) = \frac{G_X^{(n)}(0)}{n!}$. ■

Remarques :

1. Deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ suivent la même loi si, et seulement si, elles ont même fonction génératrice.
2. Si X est une variable finie alors G_X est une fonction polynômiale et $R = +\infty$.

La proposition qui suit donne la relation entre le comportement de la fonction génératrice en 1 et l'existence de l'espérance et la variance de la variable aléatoire associée.

Proposition 173 *Soit X une variable aléatoire à valeur dans $\mathbb{N}$.*

1. *X admet une espérance finie si, et seulement si, la fonction G_X est dérivable à gauche en 1 et dans ce cas, on a :*

$$\mathbb{E}(X) = G'_X(1).$$

2. *X admet un moment d'ordre 2 si, et seulement si, la fonction G_X est deux fois dérivable à gauche en 1 et dans ce cas, on a :*

$$\mathbb{E}(X(X - 1)) = G''_X(1).$$

On commence par montrer le lemme suivant :

Lemme 174 Soit $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ une série entière telle que $a_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et la série $\sum a_n$ converge. Alors f est dérivable à gauche en 1 si, et seulement si, la série $\sum n a_n$ converge, et dans ce cas on a $f'(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n$.

Preuve. Remarquons d'abord que le rayon de convergence de la série définissant f est supérieur ou égal à 1. On a pour tout $t \in [0, 1[$,

$$\frac{1}{t-1}(f(t) - f(1)) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (1 + t + t^2 + \dots + t^{n-1}). \quad (4.22)$$

Supposons que f est dérivable à gauche en 1. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{n=1}^N n a_n = \lim_{t \rightarrow 1} \sum_{n=1}^N a_n (1 + t + t^2 + \dots + t^{n-1}) \leq \lim_{t \rightarrow 1} \frac{1}{t-1} (f(t) - f(1)) = f'(1).$$

On en déduit que la série $\sum n a_n$ converge, puisqu'elle est à termes positifs, et que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n \leq f'(1). \quad (4.23)$$

Inversement, supposons que la série $\sum n a_n$ converge. L'égalité (4.22) montre que la fonction $g : t \mapsto \frac{f(t) - f(1)}{t-1}$ est croissante. Puisque $g(t) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n$, pour tout $t \in [0, 1[$, on conclut que g admet une limite finie à gauche en 1, donc f est dérivable à gauche en 1 et on a :

$$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{f(t) - f(1)}{t-1} = f'(1) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n \quad (4.24)$$

Les inégalités (4.23) et (4.24) montrent l'égalité : $f'(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n$. ■

On démontre maintenant la proposition 173.

Preuve.

1. D'après le lemme précédent, la fonction G_X est dérivable à gauche en 1 si, et seulement si, la série $\sum n P(X = n)$ converge, c'est-à-dire, X admet une espérance finie. Dans ce cas on a

$$G'_X(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} n P(X = n) = \mathbb{E}(X).$$

2. Si la fonction G_X est deux fois dérivable à gauche en 1, alors, en utilisant le premier point, la fonction G_X est dérivable sur $[0, 1]$ et

$$G'_X(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} nP(X=n)t^{n-1} \text{ pour tout } t \in [0, 1].$$

D'après le lemme 174 à l'intention de la fonction G'_X qui est dérivable à gauche en 1, la série $\sum n(n-1)P(X=n)$ converge et par suite la série $\sum n^2P(X=n)$ converge. Ce qui montre que X admet un moment d'ordre 2.

Inversement, supposons que la série $\sum n^2P(X=n)$ converge, donc les séries $\sum nP(X=n)$ et $\sum n(n-1)P(X=n)$ convergent. En appliquant le lemme 174, les fonctions G_X et G'_X sont dérivables à gauche en 1 et on a

$$G''_X(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)P(X=n) = \mathbb{E}(X(X-1)).$$

Ce qui achève la démonstration. ■

Remarque : Si le rayon de convergence de la série entière définissant G_X est $R > 1$, alors G_X est indéfiniment dérivable en 1, par suite X admet un moment d'ordre k , pour tout $k \geq 1$, et on a :

$$G_X^{(k)}(1) = \mathbb{E}(X(X-1)\dots(X-k+1)).$$

Corollaire 175 Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que G_X est deux fois dérivable à gauche en 1, alors on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= G'_X(1), \quad \mathbb{E}(X^2) = G'_X(1) + G''_X(1) \\ \mathbb{V}(X) &= G'_X(1) + G''_X(1) - (G'_X(1))^2. \end{aligned}$$

Fonctions génératrices des lois usuelles : Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{B}, P)$.

1. Si $X \sim \beta(p)$, où $p \in]0, 1[$. Alors

$$G_X(t) = pt + (1-p),$$

$$\mathbb{E}(X) = p, \quad \mathbb{V}(X) = p(1-p).$$

En effet :

$$G_X(t) = (1-p)t^0 + pt = pt + (1-p),$$

par suite

$$\mathbb{E}(X) = G'_X(1) = p, \quad \mathbb{E}(X^2) = G''_X(1) = 0$$

donc $\mathbb{V}(X) = p^2 - p = p(p-1)$.

2. Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, où $p \in]0, 1[$. Alors

$$G_X(t) = (1 - p + pt)^n,$$

$$\mathbb{E}(X) = np, \quad \mathbb{V}(X) = np(1 - p).$$

En effet,

$$\begin{aligned} G_X(t) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} t^k \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (pt)^k ((1-p))^{n-k} = (1 - p + pt)^n \end{aligned}$$

Donc $G'_X(1) = np = \mathbb{E}(X)$, et

$$\mathbb{E}(X^2) = G''_X(1) + G'_X(1) \text{ et } \mathbb{V}(X) = np$$

3. Si $X \sim \mathcal{G}(p)$, $p \in]0, 1[$. Alors

$$G_X(t) = \frac{pt}{1 - t(1-p)},$$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}, \quad \mathbb{V}(X) = \frac{(1-p)}{p^2}$$

En effet,

$$\begin{aligned} G_X(t) &= \sum_{n=1}^{+\infty} p(1-p)^{n-1} t^n = pt \sum_{n=1}^{+\infty} ((1-p)t)^{n-1} \\ &= \frac{pt}{1 - t(1-p)}. \end{aligned}$$

Donc $\mathbb{E}(X) = G'_X(1) = \frac{1}{p}$ et

$$\mathbb{E}(X^2) = G''_X(1) + G'_X(1) = \frac{1}{p} + \frac{2(1-p)}{p}.$$

puis

$$\mathbb{V}(X) = \frac{1}{p} + \frac{2(1-p)}{p} - \left(\frac{1}{p}\right)^2 = \frac{(1-p)}{p^2}.$$

4. Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $\lambda > 0$. Alors

$$G_X(t) = e^{\lambda(t-1)},$$

$$\mathbb{E}(X) = \lambda, \mathbb{V}(X) = \lambda.$$

En effet,

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} t^n = e^{-\lambda} e^{\lambda t} = e^{\lambda(t-1)},$$

Par suite $\mathbb{E}(X) = G'_X(1) = \lambda$, puis

$$\mathbb{V}(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

Théorème 176 Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes, à valeurs dans $\mathbb{N}$. Si X et Y sont indépendantes alors pour tout réel t tel que $G_X(t)$ et $G_Y(t)$ sont définies on a :

$$G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t).$$

Preuve. Soit $t \in \mathbb{R}$ tel que $G_X(t)$ et $G_Y(t)$ sont définies. Les variables aléatoires t^X et t^Y admettent donc, chacune, une espérance finie, la proposition 129 assure que t^X et t^Y sont indépendantes. D'après le corollaire 64, la variable aléatoire $t^X t^Y = t^{X+Y}$ admet une espérance finie et on a :

$$\mathbb{E}(t^{X+Y}) = \mathbb{E}(t^X)\mathbb{E}(t^Y) = G_X(t)G_Y(t).$$

Donc $G_{X+Y}(t)$ est bien définie et $G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t)$. ■

Remarque 177 A l'aide du théorème précédent on peut prouver la stabilité des lois de Poisson et des lois binomiales.

1. Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes indépendantes telles que $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ alors $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$. En effet, les fonctions G_X et G_Y sont définies sur $\mathbb{R}$ et

$$G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}, G_Y(t) = e^{\mu(t-1)} \text{ pour tout } t \in \mathbb{R},$$

par indépendance on a :

$$G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t) = e^{(\lambda+\mu)(t-1)} \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}$$

Comme la fonction génératrice détermine la loi de la variable, on en déduit que

$$X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$$

2. Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes indépendantes telles que $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(m, p)$

$$X + Y \sim \mathcal{B}(n + m, p)$$

En effet,

$$\begin{aligned} G_{X+Y}(t) &= G_X(t)G_Y(t) = (1 - p + pt)^n(1 - p + pt)^m \\ &= (1 - p + pt)^{n+m} \end{aligned}$$

Par suite, $X + Y \sim \mathcal{B}(n + m, p)$

Corollaire 178 Soient $X_1, X_2, \dots, X_n$ des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendantes et $S = X_1 + X_2 + \dots + X_n$. Alors, pour tout réel t tel que $G_{X_i}(t)$ existe pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, on a : $G_S(t)$ existe et

$$G_S(t) = \prod_{i=1}^n G_{X_i}(t)$$

Preuve. On montre le résultat par récurrence sur n . Le cas $n = 2$ est déjà traité. On suppose que le résultat est vrai dans le cas de n variables aléatoires indépendantes. Considérons $(n + 1)$ variables aléatoires indépendantes $X_1, X_2, \dots, X_{n+1}$. Les variables aléatoires

$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ et X_{n+1} sont indépendantes (cf. proposition 134). Donc, pour tout réel t tel que $G_{X_i}(t)$ existe, on a :

$$G_{S_n}(t)G_{X_{n+1}}(t) = G_{S_n+X_{n+1}}(t)$$

Par hypothèse de récurrence, $G_{S_n}(t) = \prod_{i=1}^n G_{X_i}(t)$. Donc

$$G_{X_1+X_2+\dots+X_{n+1}}(t) = G_{S_n+X_{n+1}}(t) = G_{S_n}(t)G_{X_{n+1}}(t) = \prod_{i=1}^{n+1} G_{X_i}(t)$$

Ce qui montre le résultat. ■

Remarque 179 La somme de n variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$, suit la loi binomiale de paramètre (n, p) . En effet, on se donne n variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$ de même loi de Bernoulli $\beta(p)$. Pour tout $1 \leq i \leq n$, $G_{X_i}(t) = 1 - p + pt$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Donc

$$G_{X_1+X_2+\dots+X_n}(t) = \prod_{i=1}^n G_{X_i}(t) = (1 - p + pt)^n,$$

ce qui montre que $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ suit la loi binomiale de paramètre (n, p) .

De même on montre que la somme $S = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ de n variables aléatoires indépendantes $X_1, X_2, \dots, X_n$ dont chaque X_i suit la loi de Poisson de paramètre λ_i , suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)$

4.7 Inégalités et approximations

Théorème 180 (Inégalité de Markov). Soit X une variable aléatoire discrète positive d'espérance finie. Alors, pour tout réel $a > 0$ on a :

$$P(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}$$

Preuve. Soit A l'événement $(X \geq a)$. On a : $\mathbb{E}(\mathbb{I}_A) = P(A) = P(X \geq a)$. On montre l'inégalité :

$$\mathbb{I}_A \leq \frac{X}{a}. \quad (4.25)$$

En effet : soit $\omega \in \Omega$, si $\omega \notin A$ alors $\mathbb{I}_A(\omega) = 0 \leq \frac{X(\omega)}{a}$ et si $\omega \in A$ alors

$$X(\omega) \geq a \text{ et par suite } \mathbb{I}_A(\omega) = 1 \leq \frac{X(\omega)}{a}.$$

En appliquant la fonction espérance à l'inégalité (4.25), on obtient :

$$P(X \geq a) = \mathbb{E}(\mathbb{I}_A) \leq \mathbb{E}\left(\frac{X}{a}\right) = \frac{\mathbb{E}(X)}{a}.$$

Ce qui montre l'inégalité. ■

Exemple : Soit X une variable aléatoire telle que $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ où $\lambda > 0$. Par application de l'inégalité de Markov, on obtient :

$$P(X \geq 2\lambda) \leq \frac{1}{2} \quad (4.26)$$

Une conséquence de l'inégalité de Markov est l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

Théorème 181 (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev) : Soit X une variable aléatoire qui admet un moment d'ordre 2. Pour tout réel $t > 0$,

$$P(|X - \mathbb{E}(X)| \geq t) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{t^2}$$

Preuve. On a l'égalité des événements suivante :

$$(|X - \mathbb{E}(X)| \geq t) = ((X - \mathbb{E}(X))^2 \geq t^2).$$

Il suffit maintenant d'appliquer l'inégalité de Markov à la variable aléatoire $(X - \mathbb{E}(X))^2$ et $a = t^2$. Il vient :

$$P(|X - \mathbb{E}(X)| \geq t) = P((X - \mathbb{E}(X))^2 \geq t^2) \leq \frac{\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)}{t^2} = \frac{\mathbb{V}(X)}{t^2}.$$

Ce qui montre l'inégalité. ■

Exemple : Soit X une variable aléatoire telle que $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ où $\lambda > 0$. Alors,

$$P(X \geq 2\lambda) = P(X - \lambda \geq \lambda) \leq P(|X - \lambda| \geq \lambda) = P(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \lambda),$$

et par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev on trouve donc :

$$P(X \geq 2\lambda) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda}. \quad (4.27)$$

En comparant les inégalités (4.26) et (4.27), on en déduit que l'inégalité (4.27) est plus précise pour $\lambda > 2$.

Exemple : Si on suppose que le nombre d'erreurs de calculs dans un examen de mathématique suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(10)$ alors la probabilité d'avoir plus que 20 erreurs est inférieure ou égale à $\frac{1}{10}$.

Exemple : On jette 3336 fois un dé. On cherche à minorer la probabilité que le nombre d'apparitions du nombre 6 soit compris strictement entre 506 et 606. Notons X le nombre d'apparitions du 6. La variable X suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}(3336, \frac{1}{6})$. On cherche à minorer la quantité

$$P(506 < X < 606) = \sum_{k=507}^{605} \binom{3336}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{3336-k}$$

On ne peut pas dans la pratique calculer cette quantité, on a alors recours à l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. On a :

$$\mathbb{E}(X) = 556 \text{ et } \mathbb{V}(X) = \frac{1390}{3}.$$

Comme, on a :

$$\begin{aligned}(506 < X < 606) &= (506 - 556 < X - 556 < 606 - 556) \\ &= (-50 < X - 556 < 50),\end{aligned}$$

on en déduit que :

$$\begin{aligned}P(506 < X < 606) &= P(|X - 556| < 50) = 1 - P(|X - 556| \geq 50) \\ &\geq 1 - \frac{\mathbb{V}(X)}{50^2} = 1 - \frac{1390}{3 \times 50^2} = 0,81467\end{aligned}$$

Théorème 182 (loi faible des grands nombres) : Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires discrètes sur le même espace probabilisé deux à deux indépendantes de même loi, admettant un moment d'ordre 2. On pose $m = \mathbb{E}(X_1)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|\frac{S_n}{n} - m| \geq \varepsilon) = 0$$

Plus précisément, on a :

$$P(|\frac{S_n}{n} - m| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{V}(X_1)}{n\varepsilon^2}$$

On dit que la suite de variables aléatoires $(\frac{S_n}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire constante m .

Preuve. La variable $\frac{S_n}{n} \in \mathcal{L}_d^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$ et par indépendance des variables $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, on a :

$$\mathbb{E}(\frac{S_n}{n}) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k) = m,$$

et

$$\mathbb{V}(\frac{S_n}{n}) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \mathbb{V}(X_k) = \frac{\mathbb{V}(X_1)}{n}.$$

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, entraîne :

$$P(|\frac{S_n}{n} - m| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{V}(X_1)}{n\varepsilon^2}$$

Ce qui achève la démonstration. ■

Remarques.

1. La loi forte des grands nombres, assure que si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires discrètes sur le même espace, mutuellement indépendantes, de même loi, d'espérance finie m , alors la suite de fonctions $\frac{S_n}{n}$ converge presque sûrement vers m , c'est-à-dire, il existe un événement A tel que $P(A) = 0$ et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n(\omega)}{n} = m \text{ pour tout } \omega \in \Omega \setminus A,$$

On donne une preuve de ce résultat, sous une hypothèse supplémentaire, en exercice (cf. exercice 34).

2. La loi forte des grands nombres est la formulation rigoureuse des faits suivants : si on fait des épreuves répétées indépendantes et nombreuses, la moyenne des résultats observés est proche de l'espérance. Par exemple, si on lance un grand nombre de fois une pièce de monnaie équilibrée, il y aura en moyenne 50% de faces.

On termine ce chapitre par une preuve probabiliste du théorème d'approximation de Weierstrass :

Théorème 183 *Toute fonction continue sur un segment $[a, b]$ y est limite uniforme d'une suite de polynômes.*

On traite, d'abord, le cas où $[a, b] = [0, 1]$. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On fixe $\varepsilon > 0$ et $x \in [0, 1]$ et on considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables de Bernoulli de paramètre x , indépendantes, sur le même espace probabilisé. On pose $Y_n = \frac{S_n}{n}$ avec

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n.$$

Cherchons $\mathbb{V}(Y_n)$. La variable S_n est la somme de variables aléatoires indépendantes de même paramètre x donc suit la loi binomiale de paramètre (n, x) (voir exemple 136). Donc,

$$\mathbb{E}(Y_n) = \frac{\mathbb{E}(S_n)}{n} = x,$$

et par indépendance des variables X_n , $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient :

$$\mathbb{V}(Y_n) = \frac{1}{n^2} \mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \mathbb{V}(X_i) = \frac{1}{n} x(1-x).$$

D'autre part, comme f continue sur le compact $[0, 1]$ il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\text{pour tous } t, t' \in [0, 1] \text{ et } |t - t'| < \alpha \text{ on a } |f(t) - f(t')| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pour tout $t \in [0, 1]$, on dispose de l'inégalité :

$$|f(t) - f(x)| \leq \frac{2\|f\|_\infty}{\alpha^2}(t - x)^2 + \frac{\varepsilon}{2}. \quad (4.28)$$

En effet, Si $|t - x| < \alpha$ alors $|f(t) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ et si $|t - x| \geq \alpha$ alors

$$|f(t) - f(x)| \leq 2\|f\|_\infty \leq \frac{2\|f\|_\infty}{\alpha^2}(t - x)^2.$$

Comme $Y_n(\Omega) \subseteq [0, 1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient :

$$|f(Y_n) - f(x)| \leq \frac{2\|f\|_\infty}{\alpha^2}(Y_n - x)^2 + \frac{\varepsilon}{2}.$$

La variable aléatoire Y_n est finie. Il en est donc de même de variables $f(Y_n)$ et $(Y_n - x)^2$ et par suite elles possèdent une espérance. En appliquant la proposition 148, on obtient :

$$|\mathbb{E}(f(Y_n)) - f(x)| \leq \frac{2\|f\|_\infty}{\alpha^2} \frac{x(1-x)}{n} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{2\|f\|_\infty}{\alpha^2} \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on a : $\frac{2\|f\|_\infty}{\alpha^2 n} < \frac{\varepsilon}{2}$. Par suite, pour tout $n \geq N$ on a

$$|\mathbb{E}(f(Y_n) - f(x))| < \varepsilon \text{ pour tout } x \in [0, 1]. \quad (4.29)$$

D'autre part, en appliquant le théorème de transfert, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(f(Y_n)) &= \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) P(Y_n = \frac{k}{n}) \\ &= \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} := B_n(f)(x). \end{aligned}$$

Finalement, l'égalité (4.29) s'écrit :

$$\text{pour tous } n \geq N \text{ et } x \in [0, 1], \quad |B_n(f)(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Ce qui montre que la suite de polynômes $(B_n(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.

Si f est une fonction continue sur un segment $[a, b]$, en considérant la bijection ϕ de $[0, 1]$ dans $[a, b]$ définie par

$$\phi : t \mapsto a + t(b - a),$$

on se ramène au cas de segment $[0, 1]$. En effet, la fonction $g = f \circ \phi^{-1}$ est continue sur $[0, 1]$. Donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction polynômiale P tel que $|g(x) - P(x)| < \varepsilon$ pour tout $x \in [0, 1]$. Par suite, pour tout $t \in [a, b]$, $|f(t) - P(\phi(t))| < \varepsilon$ et la fonction $Q = P \circ \phi$ est polynômiale. Ce qui montre que f est la limite uniforme d'une suite de polynômes.

Pour finir :

1. Pour trouver la loi de probabilité d'une variable aléatoire X :
 - On commence par chercher $X(\Omega)$.
 - Pour chaque $x \in X(\Omega)$ on calcule $P(X = x) = P(X^{-1}(\{x\}))$.
 - On vérifie que $\sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x) = 1$.
 - On peut calculer la loi de probabilité de X en l'interprétant comme la loi marginale d'un couple (X, Y) et en utilisant la formule (4.7).
2. Pour calculer l'espérance, la variance d'une variable X :
 - On utilise la formule de l'espérance.
 - On exprime X comme l'image d'une autre variable aléatoire et on applique la formule de transfert.
 - On exprime X comme somme, produit de variables aléatoires. On utilise alors la linéarité de l'espérance.
 - On utilise la fonction génératrice.

4.8 Exercices

Exercice 1 : Ali affirme qu'il va obtenir au moins un six en lançant six dés. Mehrez affirme qu'il obtiendra au moins deux six en jetant 12 dés. Samir affirme qu'il va obtenir au moins trois six en jetant 18 dés. Lequel des trois a les meilleures chances de porter à bien sa promesse ?

Exercice 2 : On lance une pièce de monnaie $2n$ fois. Quelle est la probabilité p_n pour qu'on obtienne le même nombre de face et de pile. Montrer que

$$p_n \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

Exercice 3 : (TPE 2016). X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes et à valeurs dans $\mathbb{N}$. Elles suivent la loi géométrique de paramètre p où $0 < p < 1$. On considère les variables U et V définies par $U = \sup(X, Y)$ et $V = \inf(X, Y)$.

1. Déterminer la loi du couple (U, V) .
2. Expliciter les lois marginales de U et de V .
3. U et V sont-elles indépendantes ?
4. On introduit la variable aléatoire $S = U + V$. Déterminer sa loi. Possède-t-elle une espérance ?

Exercice 4 : (ENSAM 2016). Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. On pose $q = 1 - p$ et $Y = |X_1 - X_2|$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que $P(X_1 - X_2 = n) = \frac{pq^n}{1+q}$ et déduire la loi de Y .
2. Calculer l'espérance et la variance de Y .

Exercice 5 : (Extrait sujet CCP 2016).

1. Démontrer que la famille $(\frac{i+j}{2^{i+j}})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable et calculer sa somme.
2. Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que la loi conjointe du couple (X, Y) vérifie :

$$\text{Pour tout } (i, j) \in \mathbb{N}^2, P(X = i, Y = j) = \frac{i+j}{2^{i+j+3}}.$$

- (a) Vérifier que la relation ci-dessus définit bien une loi conjointe.
- (b) Démontrer que les variables aléatoires X et Y suivent une même loi.
- (c) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 6 : (Extrait sujet CCP 2016).

On rappelle que la suite définie par

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*,$$

converge vers un réel γ . On pose, pour tout entier naturel non nul n ,

$$\psi(n) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \gamma.$$

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n . On effectue un premier tirage d'une boule de l'urne et on adopte le protocole suivant : si on a tiré la boule numéro k , on la remet alors dans l'urne avec k nouvelles boules toutes numérotées k . On effectue ensuite un deuxième tirage d'une boule. On note X (respectivement Y) la variable aléatoire égale au numéro de la boule choisie au premier tirage (respectivement au deuxième tirage).

1. Déterminer la loi de la variable aléatoire X ainsi que son espérance $\mathbb{E}(X)$.
2. Déterminer la loi de la variable aléatoire Y et vérifier que pour tout entier naturel non nul k ,

$$P(Y = k) = \frac{1}{n}(\psi(2n + 1) - \psi(n + 1) + \frac{k}{k + n}).$$

3. Calculer l'espérance $\mathbb{E}(Y)$.

Exercice 7 : Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la loi est donnée par :

$$P((X = i) \cap (Y = j)) = \frac{e^{-1}}{2^{i+1}j!}$$

1. Déterminer les lois de X et de Y .
2. Prouver que $1 + X$ suit une loi géométrique et en déduire l'espérance et la variance de X .
3. Déterminer l'espérance et la variance de Y . Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 8 : (Mines-Ponts 2017). Soit $\lambda > 0$. Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la loi conjointe est donnée par :

$$P(X = n, Y = m) = \frac{1}{\lambda} \binom{n+m}{n} \left(\frac{\lambda}{2\lambda+1}\right)^{n+m+1} \quad (n, m) \in \mathbb{N}^2.$$

1. Soit $p \in \mathbb{N}$. Développer la fonction $t \mapsto \frac{1}{(1-t)^{p+1}}$.

2. Calculer pour tout $(s, t) \in [-1, 1]$, $F(s, t) = \mathbb{E}(s^X t^Y)$.
3. En déduire la fonction génératrice de X , sa loi, son espérance et sa variance.
4. Calculer $\text{Cov}(X, Y)$.

Exercice 9 : (Mines-Ponts 2017). Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent une même loi géométrique.

1. Trouver la loi de $U = \frac{X}{Y}$.
2. Calculer l'espérance $\mathbb{E}(U)$.
3. Montrer que $\mathbb{E}(U) > 1$.

Exercice 10 : On considère une pièce telle que la probabilité d'obtenir pile est $p \in]0, 1[$. On lance indéfiniment la pièce et on note T la variable égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir, pour la première fois, la séquence PF .

1. Calculer les probabilités $P(T = 2)$, $P(T = 3)$ et $P(T = 4)$.
2. Justifier que pour tout $n \geq 2$ on a :

$$P(T = n) = qP(T = n - 1) + p^{n-1}q,$$

avec $q = 1 - p$.

3. En déduire la loi de T . Justifier que T admet une espérance et la calculer.

Exercice 11 : On considère deux variables X et Y telles que

$$X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}^* \text{ et } \forall (i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2,$$

$$P(X = i, Y = j) = p^{i+1}(1-p)^j + (1-p)^{i+1}p^j.$$

1. Donner les lois de X et de Y .
2. Montrer que X et Y admettent des espérances et expliciter $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(Y)$.
3. Justifier que la variable $X(X-1)$ admet une espérance et la calculer.
4. En déduire $\mathbb{V}(X)$. Procéder de même avec Y .
5. Si $p \neq \frac{1}{2}$, montrer que X et Y sont dépendantes.
6. Montrer que X et Y sont indépendantes lorsque $p = \frac{1}{2}$.

Exercice 12 : Dans un magasin, le nombre de clients présents un certain jour suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Chaque client a la probabilité p d'acheter un produit A et on suppose que les différents achats sont indépendants. On note X la variable aléatoire égale au nombre de clients fréquentant le magasin et Y la variable aléatoire égale au nombre de clients qui achètent le produit A .

1. Déterminer la loi de Y sachant $(X = n)$.
2. Déterminer la loi de Y , son espérance et sa variance.
3. On note Z la variable aléatoire égale au nombre de clients qui n'achètent pas le produit A . Quelle est la loi de Z ?
4. Montrer que Y et Z sont indépendantes.
5. Calculer $\text{Cov}(X, Y)$
6. Pour $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on note $S(k, x) = \sum_{j=0}^k \frac{x^j}{j!}$.
Soit $T = \max(Y, Z)$. Exprimer $P(T \leq k)$ en fonction de λ , $S(k, \lambda p)$ et $S(k, \lambda(1 - p))$.

Exercice 13 : Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes

1. On suppose que X et Y suivent les deux la loi géométrique de paramètre $0 < p < 1$.
 - (a) Déterminer la probabilité des événements suivants
 $P(X = Y)$, $P(X > Y)$ et $P(X \geq rY)$ avec r un entier fixé.
 - (b) Quelle est la probabilité pour que la matrice $A = \begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$ soit diagonalisable ?
 - (c) Déterminer la loi de $Z = X + Y$.
2. On suppose maintenant que $X \sim \mathcal{G}(p)$ et $Y \sim \mathcal{G}(p')$. Montrer que $T = \min(X, Y)$ suit une loi géométrique.
3. On suppose que X et Y suivent des lois de Poisson de paramètres λ et μ . Reconnaître la loi de X sachant $X + Y = n$.

Exercice 14 : On considère une expérience aléatoire ayant la probabilité p de réussir. On répète l'expérience indépendamment jusqu'à l'obtention de m succès et on note X le nombre d'essais nécessaires à l'obtention de ces m succès.

1. Reconnaître la loi de X lorsque $m = 1$.
2. Déterminer la loi de X dans le cas général $m \in \mathbb{N}^*$.
3. Exprimer le développement en série entière de la fonction définie par : $t \mapsto \frac{1}{(1-t)^{m+1}}$.
4. Déterminer la fonction génératrice de X et en déduire son espérance.

Exercice 15 : On lance une pièce de monnaie (la probabilité d'obtenir pile étant $p \in]0, 1[$) jusqu'à l'obtention du premier pile. Soit N la variable aléatoire représentant le nombre de lancers nécessaires. Si $N = n$, on relance ensuite n fois la pièce et on appelle X la variable aléatoire représentant le nombre de piles obtenues.

1. Déterminer la loi de N , de (N, X) , puis la loi de X .
2. Montrer que X a la même loi que le produit de deux variables indépendantes Y et Z telles que Y suit une loi de Bernoulli et Z une loi géométrique de même paramètre.
3. En déduire l'espérance et la variance de X .

Exercice 16 : (Mines-Ponts 2016). Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi de Poisson de paramètre λ .

1. Etant donné $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la loi de $S_n := \sum_{k=1}^n X_k$ ainsi que sa fonction génératrice.
2. Calculer l'espérance et la variance de $T_n = \frac{S_n - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}$.
3. Pour $x > 0$, calculer l'espérance de x^{T_n} ainsi que sa limite quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 17 : (Mines-Ponts 2016). On fixe $\alpha > 0$. Une salle contient une infinité de tables pouvant chacune accueillir une infinité de personnes. Les personnes y arrivent une par une et s'installent à une table. La $(n+1)$ -ième personne a une probabilité $\frac{n}{n+\alpha}$ de s'installer à la même table que la n -ième et une probabilité $\frac{\alpha}{n+\alpha}$ de s'installer à une table encore inoccupée. On note A_n la variable donnant le nombre de tables occupées à l'issue de l'installation de la n -ième personne. Dans la suite on pose $p_{n,k} = P(A_n = k)$

1. Calculer $p_{n+1,1}$ et trouver une relation entre $p_{n+1,k}$, $p_{n,k}$ et $p_{n,k-1}$.

2. Exprimer A_n comme une somme de variables aléatoires suivant chacune une loi de Bernoulli.
3. Calculer l'espérance et la variance de A_n .
4. Par comparaison avec une intégrale, trouver un équivalent de $\mathbb{E}(A_n)$ lorsque n tend vers ∞ .

Exercice 18 : (Polytechnique 2016). On lance deux dés non équilibrés, et on note Z la variable aléatoire donnant la somme des nombres obtenus sur chaque dé. Montrer que Z ne suit pas la loi uniforme sur $\{2, 3, \dots, 12\}$.

Exercice 19 : On considère une suite $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires discrètes, indépendantes telles que

$$P(Z_n = 1 + a) = P(Z_n = 1 - a) = \frac{1}{2}, \text{ avec } 0 < a < 1$$

On pose $Y_k = \ln(Z_k)$, et l'on définit pour tout entier naturel non nul n la variable :

$$S_n = \frac{Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n}{n}$$

On note $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $X_0 = 1$ et $X_n = Z_n X_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que pour tout $n > 0$, on a $\mathbb{E}(X_n) = 1$.
2. Calculer la limite de $\mathbb{V}(X_n)$ quand n tend vers l'infini.
3. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $P(S_n > -\alpha)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
4. En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, $P(X_n > \varepsilon)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 20 : (Taux de panne). Soit $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ un espace probabilisé, X une variable aléatoire discrète, définies sur cet espace probabilisé, a valeurs dans $\mathbb{N}^*$, et vérifiant :

$$P(X \geq n) \neq 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^* \quad (4.30)$$

On appelle taux de panne associé à X la suite réelle $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$x_n = P(X = n \mid X \geq n)$$

1. (a) Montrer que l'application $n \rightarrow \frac{1}{n(n+1)}$ définit une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^*$.

- (b) Soit T une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ définie par $P(T = n) = \frac{1}{n(n+1)}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que T vérifie (4.30), calculer le taux de panne $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ associé à T et vérifier que $0 \leq x_n < 1$ et que la série $\sum x_n$ diverge.
2. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ vérifiant (4.30). Montrer que $P(X \geq n) = \prod_{k=1}^{n-1} (1 - x_k)$ pour tout $n \geq 2$. Exprimer $P(X = n)$ en fonction des x_k .
3. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ le taux de panne associé à une variable aléatoire X . Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq x_n < 1$ et que la série de terme général x_n diverge.
4. Réciproquement, soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que $0 \leq x_n < 1$ et que la série de terme général x_n diverge, Montrer qu'il existe une variable aléatoire dont le taux de panne est la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
5. Montrer que la variable X suit une loi géométrique si, et seulement si, son taux de panne est constant.

Exercice 21 :

1. Soit T une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Montrer que T admet une espérance finie si, et seulement si, la série $\sum_k P(T > k)$ converge et que dans ce cas $\mathbb{E}(T) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(T > k)$.
2. Soit $n > 1$ un entier. Deux joueurs A et B utilisent un dé à n faces (numérotées de 1 à n) pour jouer au jeu suivant : A lance le dé, obtient le résultat X , et verse 3 dinars au joueur B. B lance alors le dé jusqu'à ce qu'il obtient une valeur supérieure ou égale à X (la partie s'arrête alors), à chaque lancer, il donne 1 dinar à A. On note Y la somme versée au cours de la partie par le joueur B.
- (a) Pour $1 \leq k \leq n$, déterminer la loi de Y sachant $X = k$.
- (b) Déterminer en fonction de n une expression de $\mathbb{E}(Y)$ de même qu'un équivalent lorsque $n \rightarrow \infty$.
- (c) Selon la valeur de n , à quel joueur le jeu est-il favorable ?

Exercice 22 : (Fonction caractéristique). Pour toute variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$, on définit sa fonction caractéristique ϕ_X par :

$$\begin{aligned} \phi_X : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{C} \\ t &\mapsto \mathbb{E}(\cos tX) + i\mathbb{E}(\sin tX) \end{aligned}$$

1. Calculer la fonction ϕ_X si X suit une loi binomiale, puis une loi de Poisson.
2. Montrer que ϕ_X est continue sur $\mathbb{R}$ et périodique.
3. Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que $\phi_X = \phi_Y$. Montrer que X et Y ont la même loi (Indication : on pourra considérer les intégrales $I_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi_X(t) e^{-ikt} dt$ pour tout entier k).
4. Si X admet une espérance finie montrer que ϕ_X est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $\phi'_X(0)$.
5. Calculer la fonction caractéristique d'une variable aléatoire $Z = Y + 1$ où Y est de loi géométrique de paramètre p .
6. Soit ρ un réel dans $]0, 1[$ et A une variable aléatoire telle que :

$$\phi_A(t) = \frac{1}{1 + \rho - \rho e^{it}}$$

Calculer $\mathbb{E}(A)$. Identifier la loi de A .

Exercice 23 : Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ et mutuellement indépendantes. On suppose de plus que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n suit la loi de Poisson de paramètre 1. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ et S_n^* la variable centrée réduite de S_n .

1. Montrer que $P(S_n^* \leq 0) = \frac{1}{n!} \int_n^{+\infty} e^{-t} t^n dt$.
2. Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P(S_n^* \leq 0) - P(S_{n+1}^* \leq 0) = \int_n^{n+1} e^{-t} \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} dt - e^{-n} \frac{n^{n+1}}{(n+1)!}.$$

3. En déduire que la suite $(P(S_n^* \leq 0))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante qui converge vers une limite $\ell \in [0, 1[$.
4. Soit t un réel strictement positif. Montrer que la variable $t^{S_n^*}$ admet une espérance finie. On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : t \longrightarrow \mathbb{E}(t^{S_n^*})$.
5. Montrer que la suite des fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers une fonction que l'on déterminera.

Exercice 24 : (Extrait sujet Centrale 2016 PSI).

Soit $p \in]0, 1[$. Soient $X_1, X_2, \dots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ et suivant une même loi de Bernoulli de paramètre p .

1. Calculer la probabilité que $X_1, X_2, \dots, X_n$ soient égales.
2. Quelle est la loi de $S = X_1 + \dots + X_n$? On attend une démonstration du résultat annoncé.
3. Soient i et j dans $\{1, 2, \dots, n\}$. Donner la loi de la variable aléatoire $X_{i,j} = X_i \times X_j$.
4. Si $\omega \in \Omega$, on introduit la matrice colonne

$$U(\omega) = \begin{pmatrix} X_1(\omega) \\ X_2(\omega) \\ \vdots \\ X_n(\omega) \end{pmatrix}$$

et la matrice $M(\omega) = U(\omega)^t(U(\omega))$. L'application

$$M : \begin{cases} \Omega \rightarrow M_n(\mathbb{R}) \\ \omega \mapsto M(\omega) \end{cases}$$

est ainsi une variable aléatoire.

- (a) Si $\omega \in \Omega$, justifier que $M(\omega)$ est une matrice dont tous les coefficients sont dans $\{0, 1\}$.
 - (b) Si $\omega \in \Omega$, justifier que $\text{tr}(M(\omega)) \in \{0, 1, \dots, n\}$, que $M(\omega)$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et que $\text{rg}(M(\omega)) \leq 1$.
 - (c) Si $\omega \in \Omega$, justifier que $M(\omega)$ est une matrice de projection orthogonale si et seulement si, $S(\omega) \in \{0, 1\}$.
5. Donner la loi, l'espérance et la variance de variables aléatoires $\text{tr}(M)$ et $\text{rg}(M)$.
 6. Exprimer M^k en fonction de S et M . Quelle est la probabilité pour que la suite de matrices $(M^k)_{k \in \mathbb{N}}$ soit convergente ? Montrer que, dans ce cas, la limite est une matrice de projection.
 7. Quelle est la probabilité que M admette deux valeurs propres distinctes ?

Exercice 25 : (Inégalité de Kolmogorov). Soient $X_1, X_2, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes centrées et $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$. On suppose que $V(S_k) > 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et on pose

$$\sigma_k = \sigma(S_k) = \sqrt{V(S_k)}.$$

On se propose de démontrer l'inégalité de Kolmogorov : Pour tout $t > 0$,

$$P(|S_k| < t\sigma_n, \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}) \geq 1 - \frac{1}{t^2}. \quad (4.31)$$

On fixe un réel $t > 0$.

1. Démontrer l'inégalité (4.31) si $n = 1$. Dans la suite de l'exercice on suppose que $n > 1$. On pose, pour tout $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, les événements :

$$B_j = \{\omega \in \Omega : |S_j(\omega)| \geq t\sigma_n \text{ et } |S_k(\omega)| < t\sigma_n \text{ pour } 1 \leq k \leq j-1\},$$

et

$$A = \{\omega : \exists k \in \{1, 2, \dots, n\} \text{ tel que } |S_k(\omega)| \geq t\sigma_n\}.$$

On considère les variables aléatoires $Y_j = \mathbb{I}_{B_j}$, $1 \leq j \leq n$.

2. Montrer que

$$Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n = \mathbb{I}_A.$$

3. Montrer que $\sum_{k=1}^n \mathbb{E}(Y_k S_n^2) \leq \sigma_n^2$.
4. On pose $U_k = S_n - S_k$. En remarquant que U_k et $Y_k S_k$ sont indépendantes, Montrer que

$$\mathbb{E}(Y_k S_n^2) \geq \mathbb{E}(Y_k S_k^2).$$

5. Montrer que $Y_k S_k^2 \geq t^2 \sigma_n^2 Y_k$ puis l'inégalité (4.31).

Exercice 26 : (Extrait du sujet Mines-Ponts 2016).

Soit J la matrice de $M_n(\mathbb{C})$ définie par

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdot & 0 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire par $J_{i,j} = 1$ si $j - i = 1$ ou $i - j = n - 1$, et $J_{i,j} = 0$ sinon.

1. Calculer les valeurs propres réelles et complexes de J , et en déduire que J est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.
2. Déterminer une base de $\mathbb{C}^n$ de vecteurs propres de J .

Dans la suite n désigne un entier naturel impair > 3 . Pour tout entier $m \in \mathbb{N}$, on note X_m une variable aléatoire à valeurs dans $\{0, 1, \dots, n-1\}$ telle que

- $X_0 = 0$ avec probabilité 1,
- Si $X_m = k$, alors ou bien $X_{m+1} = k - 1$ modulo n , ou bien $X_{m+1} = k + 1$ modulo n , ceci avec équiprobabilité.

On note

$$U_m = \begin{pmatrix} P(X_m = 0) \\ P(X_m = 1) \\ \vdots \\ P(X_m = n-1) \end{pmatrix}.$$

3. Déterminer U_0 et une matrice A de $M_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a $U_{m+1} = AU_m$. On exprimera A à l'aide de la matrice J .
4. Déterminer les valeurs propres de la matrice A et un vecteur propre de $\mathbb{R}^n$ unitaire associé à la valeur propre de module maximal.
5. En déduire la limite de U_m lorsque $m \rightarrow +\infty$.

Exercice 27 : (Inégalités dans $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{B}, P)$).

1. Inégalité de Holder : Soit p et q des réels strictement positifs tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Montrer que si X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes, alors :

$$\mathbb{E}(|XY|) \leq \mathbb{E}(|X|^p)^{\frac{1}{p}} \mathbb{E}(|Y|^q)^{\frac{1}{q}}.$$

On commencera par montrer l'inégalité :

$$ab \leq \frac{1}{p} a^{\frac{1}{p}} + \frac{1}{q} b^{\frac{1}{q}} \text{ pour tout } (a, b) \in \mathbb{R}_+^2.$$

2. Inégalité de Jensen :

- (a) Soient X une variable aléatoire et $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. On suppose que les variables X et $\varphi(X)$ sont intégrables. Montrer que $\mathbb{E}(\varphi(X)) \geq \varphi(\mathbb{E}(X))$.

- (b) Application : Soit X une variable aléatoire admettant une espérance finie et $a \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\max(\mathbb{E}(X), a) \leq \mathbb{E}(\max(X, a))$$

- (c) Application : Soit $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ tel que $\sum_{k=1}^n x_k = 1$.
Montrer que

$$-\sum_{k=1}^n x_k \ln(x_k) \leq \ln(n).$$

Exercice 28 : (Espérance conditionnelle). Soit X une variable aléatoire discrète réelle sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ et B un événement tel que $P(B) > 0$. On dit que X admet une espérance conditionnée par l'événement B si X admet une espérance finie lorsque la probabilité est la probabilité P_B . On convient d'appeler espérance de X conditionnée par B et de noter $\mathbb{E}(X | B)$ le réel $\mathbb{E}(X | B) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x | B)$.

1. Montrer que si $P(B) > 0$ alors $\mathbb{E}(\mathbb{I}_A | B) = P(A | B)$, pour tout $A \in \mathcal{B}$.
2. On lance un dé trois fois de suite. Quelle est l'espérance de la somme des numéros obtenus sachant que le premier dé donne 1.
3. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson. Quelle est l'espérance de X conditionnée par l'événement « X est pair».
4. Montrer que pour tout événement B non négligeable et pour tout variable aléatoire X , on a : $\mathbb{E}(X | B) = \frac{\mathbb{E}(\mathbb{I}_B X)}{P(B)}$.
5. On considère dans la suite une variable aléatoire d'espérance finie Y . Définissons l'espérance conditionnelle de Y sachant X comme la **variable aléatoire** notée par $\mathbb{E}(Y | X)$ définie par :

$$\mathbb{E}(Y | X)(\omega) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{I}_{X^{-1}(\{x\})}(\omega) \mathbb{E}(Y | X = x).$$

C'est-à-dire $\mathbb{E}(Y | X)$ est la variable aléatoire réelle qui prend les valeurs $\mathbb{E}(Y | X = x)$, $x \in X(\Omega)$, avec les probabilités $P(X = x)$.

- (a) Exemple : Soient Y, Z deux variables aléatoires telles que $Y \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Z \sim \mathcal{P}(\mu)$ et $X = Y + Z$. Montrer que $\mathbb{E}(Y | X) = \frac{\lambda X}{\lambda + \mu}$.
- (b) Montrer que $\mathbb{E}(\mathbb{E}(Y | X)) = \mathbb{E}(Y)$.

Exercice 29 : Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1. Montrer que la série $\sum_k P(X = k)e^{sk}$ est convergente pour tout réel s . Calculer sa somme $\phi(s)$. Montrer que $\phi(s) = \mathbb{E}(e^{sX})$.
2. Soient $X_1, X_2, \dots, X_n$ n variables aléatoires indépendantes de même loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Calculer la loi de la variable aléatoire $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$. Dédurre que $\mathbb{E}(e^{sS_n}) = \phi^n(s)$.
3. Soient f une fonction croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que la série $\sum_n P(X = n)f(n)$ converge.

(a) Montrer que la série $\sum_n P(X = n)|f(n)|$ converge. Montrer que $\mathbb{E}(f(X))$ est bien définie.

(b) Montrer que si de plus f est positive, alors pour tout $M > 0$, on a

$$\mathbb{E}(f(X)) \geq f(M)P(X > M).$$

(c) En déduire que pour $s > 0$ et $a > 0$, S_n étant la variable aléatoire introduite à la 2ème question, on a :

$$P(S_n > na) \leq \phi^n(s)e^{-nsa}.$$

(d) En déduire que pour $a > \lambda$, on a :

$$P(S_n > na) \leq e^{-nH(a)}.$$

$$\text{où } H(a) = \max_{t \in \mathbb{R}} (at - \lambda(e^t - 1))$$

4. Par analogie montrer que si f est décroissante sur $\mathbb{R}$ alors pour tout $M > 0$ on a :

$$\mathbb{E}(f(X)) \geq f(M)P(X < M).$$

5. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \lambda\right| > \varepsilon\right) \leq e^{-nH(\lambda+\varepsilon)} + e^{-nH(\lambda-\varepsilon)}.$$

6. En déduire la loi faible des grands nombres pour un échantillon d'un loi de Poisson.

Exercice 30 : Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, telle que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $p_n = P(X = n) > 0$.

1. Montrer que X suit une loi de Poisson si, et seulement si la suite de terme général $n \frac{p_n}{p_{n-1}}$ est constante.
2. Application. Pour $0 < T < T'$, notons X, Y et Z les variables aléatoires égales au nombres des appels reçus par un standard téléphonique dans les intervalles de temps $[0, T], [T, T']$ et $[0, T']$ respectivement. On suppose que X et Y sont indépendantes et que la loi de X sachant $Z = n$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p = \frac{T}{T'})$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

(a) Montrer que pour tout $(k, m) \in \mathbb{N}^2$,

$$\frac{P(X = k)P(Y = m)}{P(Z = k + m)} = \binom{k + m}{k} p^k (1 - p)^m.$$

(b) En déduire que X suit une loi de Poisson.

Exercice 31 : Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1. Montrer que $P(X \geq 2\lambda) \leq \frac{1}{\lambda}$.
2. Inégalité de Cantelli : Soient U une variable aléatoire qui admet un moment d'ordre 2 et $a > 0$.

(a) Montrer que pour tout $x \geq 0$,

$$P(U - \mathbb{E}(U) \geq a) \leq P((U - \mathbb{E}(U) + x)^2 \geq (a + x)^2).$$

(b) En déduire l'inégalité de Cantelli :

$$P(U - \mathbb{E}(U) \geq a) \leq \frac{\mathbb{V}(U)}{\mathbb{V}(U) + a^2}.$$

3. Déduire que $P(X \geq 2\lambda) \leq \frac{1}{\lambda + 1}$.
- 4.

(a) Montrer que pour tout $a > 0$ et $t > 1$, $P(X \geq a) \leq \frac{G_X(t)}{t^a}$.

(b) Déduire que $P(X \geq 2\lambda) \leq (\frac{e}{4})^\lambda$.

Exercice 32 : (Convergence en probabilité)

- On dit qu’une suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires converge en probabilité vers une variable T , si pour tout $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|T_n - T| > \varepsilon) = 0.$$

On admet que si une suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires converge en probabilité, alors la limite de cette suite est une variable aléatoire presque sûrement unique. Plus précisément, si l’on a T_n converge en probabilité vers T et T' , alors $P(T = T') = 1$.

- On dit qu’une suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires discrètes converge en moyenne vers une variable U , si pour tout entier naturel n , la variable aléatoire $|U_n - U|$ possède une espérance et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(|U_n - U|) = 0$$

1. Dans cette question, on considère une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ et une variable aléatoire X , elle aussi définie sur cet espace probabilisé. Montrer que, si la suite (X_n) converge en moyenne vers X , alors elle converge en probabilité vers X .

On se propose, dans la suite, d’étudier un exemple montrant que la réciproque de cette propriété est fausse. Pour ce faire, on considère une suite $(Z_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$, indépendantes, et suivant toutes la loi de Poisson de paramètre λ (avec $\lambda > 1$). Pour tout entier naturel n non nul, on pose $Y_n = \prod_{k=1}^n Z_k$.

2.

- (a) Pour tout entier naturel n non nul déterminer $P(Y_n \neq 0)$.
- (b) En déduire que la suite (Y_n) converge en probabilité vers la variable certaine égale à 0.

3. Supposons que la suite (Y_n) converge en moyenne vers une variable aléatoire Y .

- (a) Montrer que $Y = 0$ presque sûrement.
- (b) Calculer l’espérance de Y_n .

4. Conclure.

Exercice 33 : (Formule de Wald) : Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ et N des variables aléatoires réelles discrètes sur un même espace probabilisé, à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendantes. On suppose que les variables X_n , $n \in \mathbb{N}$ sont équidistribuées (de même loi), et on pose :

$$S_N = X_1 + X_2 + \dots + X_N, \text{ avec } S_N = 0 \text{ si } N = 0,$$

$$(\text{c'est-à-dire } S_N(\omega) = \sum_{k=1}^{N(\omega)} X_k(\omega), \text{ pour tout } \omega \in \Omega).$$

1. Montrer que S_N est une variable aléatoire.
2. Montrer que $G_{S_N} = G_N \circ G_{X_1}$.
3. En déduire que si X_1 et N sont d'espérances finies, on a la formule de Wald :

$$\mathbb{E}(S_N) = \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(X_1)$$

4. Exemple : Déterminer la loi et l'espérance de S_N , lorsque les X_n suivent la loi de Bernoulli de paramètre p et N la loi de Poisson de paramètre λ .

Exercice 34 : (La loi forte de grands nombres).

Soient $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$. On suppose de plus que X_1 admet un moment d'ordre 4 et on note $a = \mathbb{E}(X_1^4)$. On pose $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Le but de cet exercice est de démontrer que la suite des variables aléatoires $(\frac{S_n}{n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge presque sûrement vers la constante $\mu = \mathbb{E}(X_1)$, c'est-à-dire $P(B) = 1$ où

$$B = \{\omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n(\omega)}{n} = \mu\}.$$

1. Montrer qu'on peut se ramener au cas où $\mu = 0$.
On suppose dans la suite que $\mu = 0$.
2. Montrer que chaque X_i , $i \in \mathbb{N}^*$ admet un moment d'ordre 2. On note $v = \mathbb{V}(X_1)$.
3. Montrer que $\mathbb{E}(S_n^4) = na + n(n-1)v$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
4. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que la série $\sum P(|\frac{S_n}{n}| \geq \varepsilon)$ converge.
5. Vérifier que $B = \bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} B_k$ où

$$B_k = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{p \geq n} (|\frac{S_p}{p}| \leq \frac{1}{k}) \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}^*.$$

6. En utilisant le lemme de Borel-Cantelli (cf. Exercice 18 chap 3), conclure.

Exercice 35 : (Série de variables aléatoires)

Soit $(U_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$. On dit que la série $\sum_{i \geq 1} U_i$ converge (respectivement diverge) presque sûrement si la série $\sum_{i \geq 1} U_i(\omega)$ converge (respectivement diverge) pour tout $\omega \in \Omega \setminus A$ avec $A \in \mathcal{B}$ et $P(A) = 0$.

1. Soit $(U_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires positives indépendantes. On suppose qu'il existe $\sigma, \varepsilon > 0$ tels que

$$P((U_i \geq \sigma)) \geq \varepsilon, \text{ pour tout } i \in \mathbb{N}^*.$$

(a) Montrer que $P(\bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{i=n}^{+\infty} (U_i \geq \sigma)) = 1$.

(b) Dédurre que la série $\sum_{i \geq 1} U_i$ diverge presque sûrement.

2. Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.

- (a) Montrer que si A et B sont des événements de $\mathcal{B}$, alors

$$|P(A) - P(B)| \leq P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B).$$

- (b) En déduire que, pour tout $t \in [-1, 1]$,

$$|G_X(t) - G_Y(t)| \leq 2P(X \neq Y).$$

3. Soit $(U_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que la série des $P(U_i \neq 0)$ soit convergente.

- (a) Soit $Z_n = \{\omega \in \Omega : \text{il existe } i \in n, U_i(\omega) \neq 0\}$. Montrer que (Z_n) est une suite décroissante d'événements et que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_n) = 0.$$

- (b) En déduire que l'ensemble $\{i \in \mathbb{N}^* : U_i \neq 0\}$ est presque sûrement fini.

- (c) On pose $S_n = \sum_{i=1}^n U_i$ et $S = \sum_{i=1}^{\infty} U_i$. Justifier que S est définie presque sûrement. Montrer que G_{S_n} converge uniformément vers G_S sur $[-1, 1]$.
4. Soit $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels positifs ou nuls. On suppose que la série $\sum \lambda_i$ est convergente, et on note $\lambda = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i$. Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que, pour tout i , X_i suive une loi de Poisson de paramètre λ_i . On convient que, si $\lambda_i = 0$, X_i est la variable aléatoire nulle.
- (a) Montrer que la série $\sum P(X_i \neq 0)$ est convergente.
- (b) Montrer que la série $\sum_{i \geq 1} X_i$ est presque sûrement convergente et que sa somme (définie presque sûrement) suit une loi de Poisson de paramètre λ .

Exercice 36 : (Formule de Taylor). Soit f une fonction continue et bornée sur $]0, +\infty[$. On fixe $a > 0$ et on considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Poisson de paramètre $h > 0$.

On pose, pour $n \geq 2$, $S_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$.

1. Montrer que

$$\mathbb{E}(f(a + S_n)) = e^{-nh} \sum_{k=0}^{+\infty} f(a + \frac{k}{n}) \frac{(nh)^k}{k!}.$$

2. Soit $\mu > 0$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|S_n - h| \geq \mu) = 0$.
3. On fixe $\varepsilon > 0$. En utilisant la continuité de la fonction :
 $y \rightarrow f(a + y)$ au point h , montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|f(a + S_n) - f(a + h)| \geq \varepsilon) = 0.$$

4. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$A_n = \left\{ \frac{k}{n} : k \in \mathbb{N} \text{ tel que } \left| f(a + \frac{k}{n}) - f(a + h) \right| \geq \varepsilon \right\} \text{ et}$$

$$B_n = \left\{ \frac{k}{n} : k \in \mathbb{N} \text{ tel que } \left| f(a + \frac{k}{n}) - f(a + h) \right| < \varepsilon \right\}.$$

Montrer que :

$$|\mathbb{E}(f(a + S_n)) - f(a + h)| \leq 2 \|f\|_{\infty} P(S_n \in A_n) + \varepsilon.$$

5. Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(f(a + S_n)) = f(a + h)$ et déduire la formule :

$$f(a + h) = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-nh} \sum_{k=0}^{+\infty} f(a + \frac{k}{n}) \frac{(nh)^k}{n!}.$$

4.9 Solution des exercices

Exercice 1 : Soit X_n la variable aléatoire indiquant le nombre de six obtenu lorsqu'on lance n dés. alors X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, \frac{1}{6})$.

– La probabilité d'obtenir au moins un six lorsque $n = 6$ est :

$$P(X_6 \geq 1) = 1 - P(X_6 = 0) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6 = 0.6651$$

– La probabilité d'obtenir au moins deux six lorsque $n = 12$ est :

$$\begin{aligned} P(X_{12} \geq 2) &= 1 - P(X_{12} = 0) - P(X_{12} = 1) \\ &= 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{12} - 12 \times \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{11} = 0.61867 \end{aligned}$$

– La probabilité d'obtenir au moins trois six lorsque $n = 18$ est :

$$\begin{aligned} P(X_{18} \geq 3) &= 1 - P(X_{18} = 0) - P(X_{18} = 1) - P(X_{18} = 2) \\ &= 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{18} - 18 \times \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{17} - \binom{18}{2} \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \left(\frac{5}{6}\right)^{16} \\ &= 0.59735 \end{aligned}$$

Conclusion : Ali a plus de chance de porter à bien sa promesse.

Exercice 2 : Si X désigne le nombre de pile obtenus, alors X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(2n, \frac{1}{2})$. Par suite :

$$p_n = P(X = n) = \binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n}} = \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{2n}}.$$

En utilisant la formule de Stirling, $n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$ on en déduit que

$$p_n \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

Exercice 3 :

1. On a : $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$, donc $U(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $V(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
Soit $(n, m) \in \mathbb{N}^{*2}$.
 - Si $n < m$ alors l'événement $(U = n, V = m)$ est impossible et donc $P(U = n, V = m) = 0$.
 - Si $n > m$ alors on a :

$$(U = n, V = m) = (X = m, Y = n) \cup (X = n, Y = m),$$

par indépendance, on obtient :

$$\begin{aligned} P(U = n, V = m) &= 2p(1-p)^{m-1}p(1-p)^{n-1} \\ &= 2p^2(1-p)^{n+m-2}. \end{aligned}$$

- Si $n = m$ alors, $(U = n, V = m) = (X = n, Y = n)$, donc

$$\begin{aligned} P(U = n, V = n) &= p(1-p)^{n-1}p(1-p)^{n-1} \\ &= p^2(1-p)^{2n-2}. \end{aligned}$$

2. En utilisant les formules (4.7) et (4.8), il vient :
 - $P(U = 1) = P(X = 1)P(Y = 1) = p^2$.
 - Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} P(U = m) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P(U = m, V = n) = \sum_{n=1}^m P(U = m, V = n) \\ &= p^2(1-p)^{2m-2} + \sum_{n=1}^{m-1} 2p^2(1-p)^{n+m-2} \\ &= (p^2 - 2p)(1-p)^{2m-2} + 2p(1-p)^{m-1}. \end{aligned}$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} P(V = n) &= \sum_{m=1}^{+\infty} P(U = m, V = n) = \sum_{m=n}^{+\infty} P(U = m, V = n) \\ &= p^2(1-p)^{2n-2} + \sum_{m=n+1}^{+\infty} 2p^2(1-p)^{n+m-2} \\ &= p(1-p)^{2n-2}(2-p). \end{aligned}$$

3. On a : $P(U = 1, V = 2) = 0$ et

$$P(U = 1)P(V = 2) = p(1-p)^2(2-p)$$

Donc U et V ne sont pas indépendantes.

4. On a : $S = \max(X, Y) + \min(X, Y) = X + Y$. On en déduit que $S(\Omega) = \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ et que pour tout $n \geq 2$ on a :

$$\begin{aligned} P(S = n) &= \sum_{k=1}^{n-1} P(X = k, Y = n - k) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} P(X = k)P(Y = n - k) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} p^2(1-p)^{k-1}(1-p)^{n-k-1} \\ &= p^2 \sum_{k=1}^{n-1} (1-p)^{n-2} = (n-1)p^2(1-p)^{n-2}. \end{aligned}$$

La série de terme général $n(n-1)p^2(1-p)^{n-2}$ est convergente, puisque $|1-p| < 1$. Par suite S admet une espérance finie et on a :

$$\mathbb{E}(S) = p^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)(1-p)^{n-2} = \frac{2}{p}.$$

Exercice 4 :

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, on écrit :

$$\begin{aligned} P(X_1 - X_2 = n) &= \sum_{k=1}^n P(X_2 = k, X_1 = n + k) \\ &= \sum_{k=1}^n p^2 q^{2n+k-1} = \frac{pq^n}{1+q}. \end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$(Y = n) = (X_1 - X_2 = n) \cup (X_2 - X_1 = n)$$

Si $n \in \mathbb{N}^*$ alors

$$P(Y = n) = P(X_1 - X_2 = n) + P(X_2 - X_1 = n) = 2 \frac{pq^n}{1+q}$$

et

$$P(Y = 0) = P(X_1 - X_2 = 0) = \frac{p}{1+q}.$$

2. La série $\sum nq^n$ est convergente, puisque $|q| < 1$, donc Y admet une espérance finie et on a

$$\mathbb{E}(Y) = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} n \frac{pq^n}{1+q} = \frac{2q}{(q+1)^2}.$$

Comme $Y^2 = (X_1 - X_2)^2$ et $X_1 - X_2$ admet un moment d'ordre 2, on en déduit que Y admet un moment d'ordre 2. Par linéarité de l'espérance et l'indépendance des variables X_1 et X_2 on obtient $\mathbb{E}(Y^2) = 2V(X_1) = \frac{q}{p^2}$. Il vient :

$$V(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2 = \frac{q}{p^2} - \frac{4q^2}{(q+1)^4}.$$

Exercice 5 :

1. On vérifie par le théorème de Fubini la sommabilité de la famille de réels positifs $(u_{i,j} = \frac{i+j}{2^{i+j}})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$. En effet, pour tout $i \in \mathbb{N}$, la série $\sum_j \frac{i+j}{2^{i+j}}$ étant convergente et

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{i+j}{2^{i+j}} &= \frac{i}{2^i} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{2^j} + \frac{1}{2^i} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{j}{2^j} \\ &= 2\left(\frac{i}{2^i} + \frac{1}{2^i}\right). \end{aligned}$$

Où on a utilisé les formules suivantes :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}, \text{ pour tout } x \in]-1, 1[$$

La série $\sum_i \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{i+j}{2^{i+j}}\right) = \sum_i 2\left(\frac{i}{2^i} + \frac{1}{2^i}\right)$ est clairement convergente.

Ce qui montre que la famille $(\frac{i+j}{2^{i+j}})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable et

$$\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} \frac{i+j}{2^{i+j}} = \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{i+j}{2^{i+j}}\right) = \sum_{i=0}^{+\infty} 2\left(\frac{i}{2^i} + \frac{1}{2^i}\right) = 8.$$

2.

- (a) D'après la question précédente, la famille $(\frac{i+j}{2^{i+j+3}})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable et de somme égale à 1. Ce qui montre qu'on définit bien une loi de couple.
- (b) On calcul les lois marginales. Pour tout $i \in \mathbb{N}$,

$$P(X = i) = \sum_{j=0}^{+\infty} P(X = i, X = j) = \frac{1}{8} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{i+j}{2^{i+j}} = \frac{i+1}{2^{i+2}}.$$

De même, pour tout $j \in \mathbb{N}$, $P(X = j) = \frac{j+1}{2^{j+2}}$. Par suite X et Y suivent la même loi.

- (c) On a :

$$P(X = 0)P(Y = 0) = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \neq 0 = P(X = 0, Y = 0),$$

donc X et Y ne sont pas indépendantes.

Exercice 6 :

1. La variable aléatoire X suit la loi uniforme $\mathcal{U}(\{1, 2, \dots, n\})$ donc

$$\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2}.$$

2. On a $Y(\Omega) = \{1, 2, \dots, n\}$. Soit $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, en appliquant la formule des probabilités totales, il vient :

$$\begin{aligned} P(Y = k) &= \sum_{i=1}^n P(Y = k \mid X = i)P(X = i) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n P(Y = k \mid X = i). \end{aligned}$$

Or,

$$P(Y = k \mid X = i) = \begin{cases} \frac{1}{n+i} & \text{si } i \neq k \\ \frac{k+1}{n+k} & \text{si } i = k \end{cases},$$

donc

$$\begin{aligned} P(Y = k) &= \frac{1}{n} \left(\frac{k+1}{n+k} + \sum_{i=1, i \neq k}^n \frac{1}{n+i} \right) \\ &= \frac{1}{n} \left(\frac{k}{n+k} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{n+i} \right) = \frac{1}{n} \left(\frac{k}{n+k} + \sum_{i=n+1}^{2n} \frac{1}{i} \right). \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\sum_{i=n+1}^{2n} \frac{1}{i} = \sum_{i=1}^{2n} \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} = \psi(2n+1) - \psi(n+1), \quad (4.32)$$

finalemt, on obtient

$$P(Y = k) = \frac{1}{n} \left(\frac{k}{n+k} + \psi(2n+1) - \psi(n+1) \right).$$

3. On écrit :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= \sum_{k=1}^n k P(Y = k) \\ &= \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n+k} + n(\psi(2n+1) - \psi(n+1)) \right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{(n+k)} + (\psi(2n+1) - \psi(n+1)). \end{aligned}$$

Or, en utilisant l'identité (4.32), on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n+k} &= \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{(k-n)^2}{k} \\ &= \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{n^2}{k} - \sum_{k=n+1}^{2n} 2n + \sum_{k=n+1}^{2n} k \\ &= n^2(\psi(2n+1) - \psi(n+1)) - 2n^2 + n \frac{2n + (n+1)}{2} \\ &= n^2(\psi(2n+1) - \psi(n+1)) - \frac{1}{2}n(n-1) \end{aligned}$$

Par suite

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= n(\psi(2n+1) - \psi(n+1)) - \frac{1}{2}(n-1) \\ &\quad + (\psi(2n+1) - \psi(n+1)) \\ &= -\frac{1}{2}(n-1) + (n+1)(\psi(2n+1) - \psi(n+1)).\end{aligned}$$

Exercice 7 :

1. La loi de la variable X est donnée par :

$$\begin{aligned}P(X=i) &= \sum_{j=0}^{+\infty} P((X=i) \cap (Y=j)) \\ &= \frac{e^{-1}}{2^{i+1}} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} = \frac{1}{2^{i+1}}, \text{ pour tout } i \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

De même la loi de Y est donnée par :

$$\begin{aligned}P(Y=j) &= \sum_{i=0}^{+\infty} P((X=i) \cap (Y=j)) \\ &= \frac{e^{-1}}{j!} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{i+1}} = \frac{e^{-1}}{j!}, \text{ pour tout } j \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

2. On a $(1+X)(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour tout $i \in \mathbb{N}^*$,

$$P(1+X=i) = P(X=i-1) = \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1},$$

ce qui montre que $1+X \sim \mathcal{G}(\frac{1}{2})$. On en déduit que

$$\mathbb{E}(1+X) = 1 + \mathbb{E}(X) = 2,$$

donc $\mathbb{E}(X) = 1$, et $\mathbb{V}(1+X) = \mathbb{V}(X) = \frac{1-\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = 2$.

3. La série $\sum jP(Y=j) = \sum j \frac{e^{-1}}{j!}$ est convergente, donc Y admet une espérance finie et $\mathbb{E}(Y) = e^{-1} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{j}{j!} = 1$. De plus la série

$\sum j^2 P(Y = j) = \sum j^2 \frac{e^{-1}}{j!}$ est convergente (par application de la règle de D'Alembert), par suite Y admet un moment d'ordre 2 et on a :

$$\mathbb{E}(Y^2) = e^{-1} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{n!} = 2.$$

Donc $\mathbb{V}(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2 = 1$.

On a pour tous $i, j \in \mathbb{N}$,

$$P(X = i)P(Y = j) = \frac{1}{2^{i+1}} \frac{e^{-1}}{j!} = P(X = i, Y = j),$$

donc les deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

Exercice 8 :

1. En exploitant le développement de $(1+t)^\alpha$, on obtient, pour tout $t \in]-1, 1[$: $\frac{1}{(1-t)^{p+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{p} t^n$.
2. Fixons $(s, t) \in [-1, 1]$ et notons $\mu = \frac{\lambda}{2\lambda+1}$. D'après le théorème de transfert, la variable $Z = s^X t^Y$ admet une espérance finie, si, et seulement si, la famille $(s^n t^m P(X = n, Y = m))_{(n,m) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série $\sum_m \binom{n+m}{n} (|t|\mu)^m$ converge, puisque $|t\mu| < 1$. Donc la série $\sum_m |s|^n |t|^m P(X = n, Y = m)$ converge et en utilisant la première question, on a :

$$\sum_{m=0}^{+\infty} |s|^n |t|^m P(X = n, Y = m) = |s|^n \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\mu}{1 - |t|\mu} \right)^{n+1},$$

On vérifie que $1 - |t|\mu < \mu$, donc $\left| s \frac{\mu}{1 - |t|\mu} \right| < 1$, par suite la série de terme général $(|s|^n \frac{1}{\lambda} (\frac{\mu}{1 - |t|\mu})^{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ converge. On en déduit, par application du théorème de Fubini que la variable aléatoire

$s^X t^Y$ admet une espérance finie et que :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(s^X t^Y) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} s^n t^m P(X=n, Y=m) \\ &= \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{s^n \mu^{n+1}}{(1-t\mu)^{n+1}} \\ &= \frac{1}{\lambda} \frac{\mu}{1-t\mu} \frac{1}{1-s \frac{\mu}{1-t\mu}} \\ &= \frac{1}{1+2\lambda-s\lambda-t\lambda}.\end{aligned}$$

3. Pour $t=1$, on a :

$$F(s, 1) = \mathbb{E}(s^X) = G_X(s) = \frac{1}{1+\lambda-s\lambda}.$$

En développant la fonction G_X en série entière, il vient :

$$G_X(s) = \frac{1}{1+\lambda} \frac{1}{1-s \frac{\lambda}{1+\lambda}} = \frac{1}{1+\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\lambda}{1+\lambda}\right)^n s^n.$$

On en déduit que la loi de X est donnée par :

$$P(X=n) = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\lambda}{1+\lambda}\right)^{n+1} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Le rayon de convergence de la série définissant la fonction génératrice est égale à $\frac{1+\lambda}{\lambda} > 1$, vu la proposition 173, X admet une espérance et une variance finies et on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= G'_X(1) = \lambda. \\ \mathbb{V}(X) &= G'_X(1) + G''_X(1) - (G'_X(1))^2 \\ &= \lambda + 2\lambda^2 - \lambda^2 = \lambda^2.\end{aligned}$$

Remarquons que, le même calcul montre que Y a la même loi que la variable X .

4. Pour calculer $\text{Cov}(X, Y)$ il suffit de calculer $\mathbb{E}(XY)$. La fonction F est différentiable sur un voisinage de $[-1, 1]$ et on a :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial s \partial t}(s, t) = 2 \frac{\lambda^2}{(2\lambda - t\lambda - \lambda s + 1)^3}.$$

D'autre part, par la formule de transfert, on écrit :

$$F(s, t) = \sum_{(n, m) \in \mathbb{N}^2} t^n s^m P(X = n, Y = m).$$

En utilisant deux fois le théorème de dérivation sous le signe somme, on montre que :

$$\frac{\partial F}{\partial s}(s, t) = \sum_{(n, m) \in \mathbb{N}^2} n m t^{n-1} s^{m-1} P(X = n, Y = m)$$

Pour $(s, t) \neq (0, 0)$, on obtient :

$$\frac{\partial F}{\partial s}(s, t) = \frac{1}{ts} \mathbb{E}(XY s^X t^Y)$$

En évaluant en $t = s = 1$, il vient :

$$\mathbb{E}(XY) = \frac{\partial F}{\partial s}(1, 1) = 2\lambda^2.$$

Par suite $\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \lambda^2$.

Exercice 9 :

1. On a $U(\Omega) = \mathbb{Q}_+^*$. Soit $r \in \mathbb{Q}_+^*$, en écrivant $r = \frac{a}{b}$ où $a, b \in \mathbb{N}^*$ avec $\text{pgc}(a, b) = 1$, il vient :

$$(U = r) = \bigcup_{k=1}^{+\infty} (X = ka, Y = kb).$$

Par indépendance,

$$\begin{aligned} P(U = r) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = ka, Y = kb) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = ka)P(Y = kb) \\ &= p^2 \sum_{k=1}^{+\infty} (1-p)^{k(a+b)} = \frac{p^2(1-p)^{a+b}}{1-(1-p)^{a+b}}. \end{aligned}$$

2. Comme les variables X et $\frac{1}{Y}$ sont indépendantes,

$$\mathbb{E}(U) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}\left(\frac{1}{Y}\right).$$

D'autre part

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} \text{ et } \mathbb{E}\left(\frac{1}{Y}\right) = p \frac{\ln p}{p-1},$$

(voir exemple 2 de la page 150), par suite $\mathbb{E}(U) = \frac{\ln p}{p-1}$.

3. Par concavité de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$, on a : $\ln(1+x) < x$ pour tout $x \neq 0$ et $x > -1$. Comme $p \neq 1$, il vient : $\ln(p) < p-1$ et donc $\mathbb{E}(U) > 1$.

Exercice 10 :

- On pose $q = 1 - p$
 - L'événement $(T = 2)$ est réalisé si, et seulement si, on obtient (PF) . Par indépendance des lancers, on a : $P(T = 2) = pq$.
 - L'événement $(T = 3)$ est réalisé si, et seulement si, on obtient (PPF) ou (FPF) . Donc $P(T = 3) = p^2q + pq^2 = pq$.
- Soit A et B les événements définis par A «obtenir pile au premier lancer» et B «obtenir face au premier lancer». Par la formule des probabilités totales, on a :

$$P(T = n) = P(T = n \mid A)P(A) + P(T = n \mid B)P(B)$$

Or, sachant qu'on obtient pile au premier lancer, l'événement $(T = n)$ est réalisé si et seulement si, les $(n-2)$ lancers donnent pile et on obtient face au n ième lancer. Donc $P(T = n \mid A) = p^{n-2}q$. De même, sachant qu'on obtient face au premier lancer l'événement $(T = n)$ est réalisé si et seulement si, la séquence PF apparaît après $(n-1)$ lancers. Alors, $P(T = n \mid B) = P(T = n-1)$.

Par suite

$$P(T = n) = qP(T = n-1) + p^{n-1}q.$$

- Posons pour tout $n \geq 2$, $u_n = \frac{1}{p^{n-1}q}P(T = n)$. La suite $(u_n)_{n \geq 2}$ vérifie : $u_n = \frac{q}{p}u_{n-1} + 1$. On distingue deux cas :

- Si $p = q$, soit $p = \frac{1}{2}$. La suite $(u_n)_{n \geq 2}$ est arithmétique de raison 1. Donc

$$\begin{aligned} u_n &= u_2 + (n - 2) = \frac{1}{pq}P(T = 2) + (n - 2) \\ &= 4 \times \frac{1}{4} + (n - 2) = n - 1. \end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$P(T = n) = (n - 1)\left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ pour tout } n \geq 2.$$

La série $\sum n(n - 1)\left(\frac{1}{2}\right)^n$ converge, par conséquent, T admet une espérance finie. En utilisant les dérivées de la série géométrique, on obtient :

$$\mathbb{E}(T) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n - 1)\left(\frac{1}{2}\right)^n = 4.$$

- Si $p \neq \frac{1}{2}$. La suite $(u_n)_{n \geq 2}$ est arithmético-géométrique. Le réel $x = \frac{p}{p - q}$ est l'unique solution de l'équation : $x = \frac{q}{p}x + 1$. On vérifie que la suite $(u_n - x)_{n \geq 2}$ est géométrique de raison $\frac{q}{p}$. Par suite, $u_n - x = \left(\frac{q}{p}\right)^{n-2}(u_2 - x)$, ce qui donne :

$$u_n = \left(\frac{q}{p}\right)^{n-2}\left(1 - \frac{p}{p - q}\right) + \frac{p}{p - q},$$

On en déduit que :

$$P(T = n) = p^{n-1}q\left(\left(\frac{q}{p}\right)^{n-2}\left(1 - \frac{p}{p - q}\right) + \frac{p}{p - q}\right) = \frac{p^n q - p q^n}{p - q}.$$

La série $\sum nP(T = n) = \frac{pq}{p - q}(\sum np^{n-1} - \sum nq^{n-1})$ converge, car $p, q \in]0, 1[$, on en déduit que T admet une espérance finie et

$$\mathbb{E}(T) = \frac{pq}{p - q}\left(\sum_{n=2}^{+\infty} np^{n-1} - \sum_{n=2}^{+\infty} nq^{n-1}\right) = -pq \frac{p + q - 2}{(q - 1)^2 (p - 1)^2}.$$

Exercice 11 :

1. En appliquant les formules (4.7) et (4.8), on obtient pour tout entier $i \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
 P(X = i) &= \sum_{j=1}^{+\infty} P(X = i, Y = j) \\
 &= \sum_{j=1}^{+\infty} (p^{i+1}(1-p)^j + (1-p)^{i+1}p^j) \\
 &= p^{i+1} \sum_{j=1}^{+\infty} (1-p)^j + (1-p)^{i+1} \sum_{j=1}^{+\infty} p^j \\
 &= p(1-p)(p^{i-1} + (1-p)^{i-1}).
 \end{aligned}$$

De même, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\begin{aligned}
 P(Y = j) &= \sum_{i=1}^{+\infty} P(X = i, Y = j) \\
 &= \sum_{i=1}^{+\infty} (p^{i+1}(1-p)^j + (1-p)^{i+1}p^j) \\
 &= p(1-p)^j \sum_{i=1}^{+\infty} p^i + p^j(1-p) \sum_{i=1}^{+\infty} (1-p)^i \\
 &= p^2(1-p)^{j-1} + (1-p)^2 p^{j-1}.
 \end{aligned}$$

2. La série $\sum iP(X = i) = p(1-p)(\sum ip^{i-1} + \sum i(1-p)^{i-1})$ converge donc X admet une espérance finie et on a :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(X) &= \sum_{i=1}^{+\infty} iP(X = i) = p(1-p) \left(\sum_{i=1}^{+\infty} ip^{i-1} + \sum_{i=1}^{+\infty} i(1-p)^{i-1} \right) \\
 &= p(1-p) \left(\frac{1}{(p-1)^2} + \frac{1}{p^2} \right)
 \end{aligned}$$

De même, on démontre que Y admet une espérance finie et

$$\mathbb{E}(Y) = p^2 \sum_{j=1}^{+\infty} j(1-p)^{j-1} + (1-p)^2 \sum_{j=1}^{+\infty} jp^{j-1} = 2.$$

3. Le rayon de convergence de la série entière $\sum n(n-1)x^n$ est égal à 1 et on a : $\sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)x^n = -2\frac{x^2}{(x-1)^3}$. Par suite la série de terme général

$$n(n-1)P(X=n) = p(1-p)(n(n-1)p^{n-1} + n(n-1)(1-p)^{n-1})$$

converge.

Ce qui montre que la variable $X(X-1)$ admet une espérance finie et on a :

$$\mathbb{E}(X(X-1)) = \frac{2p^2}{(1-p)^2} + \frac{2(1-p)^2}{p^2}.$$

4. Un calcul simple, donne :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)^2 \\ &= \frac{-2p^4 + 4p^3 + p^2 - 3p + 1}{p^2(p-1)^2}.\end{aligned}$$

5. On a :

$$P(X=1, Y=1) = p^2(1-p) + (1-p)^2p = p(1-p),$$

et

$$P(X=1)P(Y=1) = 2p(1-p)(p^2 + (1-p)^2)$$

On a égalité si et seulement si, $2p(1-p)(p^2 + (1-p)^2) = p(1-p)$.

Comme $p \in]0, 1[$ alors $p = \frac{1}{2}$ ce qui est exclu. Donc les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.

6. Si $p = \frac{1}{2}$, on vérifie facilement que X et Y sont indépendantes.

Exercice 12 :

1. La variable X suit la loi $\mathcal{P}(\lambda)$. La loi de Y sachant $(X=n)$ suit la loi binomiale de paramètres n et p . Pour tout $m \in \{0, 1, \dots, n\}$, la probabilité que m clients achètent le produit sachant qu'il y a n clients est

$$P(Y=m \mid X=n) = \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m}$$

2. On a $Y(\Omega) = \mathbb{N}$. Soit $i \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
 P(Y = i) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(Y = i \mid X = n)P(X = n) \\
 &= \sum_{n=i}^{+\infty} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \\
 &= p^i e^{-\lambda} \sum_{n=i}^{+\infty} \frac{(1-p)^{n-i} \lambda^n}{i!(n-i)!} = \frac{(\lambda p)^i e^{-\lambda}}{i!} \sum_{n=i}^{+\infty} \frac{((1-p)\lambda)^{n-i}}{(n-i)!} \\
 &= \frac{(\lambda p)^i e^{-\lambda}}{i!} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{((1-p)\lambda)^n}{n!} = \frac{(\lambda p)^i e^{-\lambda}}{i!} e^{(1-p)\lambda} \\
 &= \frac{(\lambda p)^i e^{-p\lambda}}{i!}.
 \end{aligned}$$

Ainsi, Y suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda p)$, $\mathbb{E}(Y) = \lambda p$ et $\mathbb{V}(Y) = \lambda p$

3. Les variables Y et Z jouent des rôles symétriques, le même calcul montre que $Z \sim \mathcal{P}(\lambda(1-p))$
4. En utilisant l'égalité $X = Y + Z$, on obtient pour tous $i, j \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
 P(Y = i, Z = j) &= P(Y = i, X = i + j) \\
 &= P(Y = i \mid X = i + j)P(X = i + j) \\
 &= \binom{i+j}{j} p^i (1-p)^j e^{-\lambda} \frac{\lambda^{i+j}}{(i+j)!} = \frac{p^i (1-p)^j}{i!j!} e^{-\lambda} \lambda^{i+j}.
 \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
 P(Y = i)P(Z = j) &= \frac{(\lambda p)^i e^{-p\lambda}}{i!} \frac{(\lambda(1-p))^j e^{-(1-p)\lambda}}{j!} \\
 &= \lambda^{i+j} \frac{p^i (1-p)^j e^{-\lambda}}{i!j!}.
 \end{aligned}$$

Ainsi, Z et Y sont indépendantes.

5. En utilisant la bilinéarité de l'application covariance,

$$\begin{aligned}
 \text{Cov}(X, Y) &= \text{Cov}(Y + Z, Y) = \text{Cov}(Y, Y) + \text{Cov}(Z, Y) \\
 &= \mathbb{V}(Y) = \lambda p,
 \end{aligned}$$

car Z et Y sont indépendantes.

6. Par indépendance, on écrit :

$$\begin{aligned}
 P(T \leq k) &= P(Y \leq k, Z \leq k) = P(Y \leq k)P(Z \leq k) \\
 &= \sum_{i=0}^k P(Y = i) \sum_{i=0}^k P(Z = i) \\
 &= \sum_{i=0}^k \frac{(\lambda p)^i}{i!} e^{-\lambda p} \sum_{i=0}^k \frac{(\lambda(1-p))^i}{i!} e^{-\lambda(1-p)} \\
 &= e^{-\lambda} S(k, \lambda p) S(k, \lambda(1-p)).
 \end{aligned}$$

Exercice 13 :

1. (a)

■ Par indépendance, on obtient :

$$\begin{aligned}
 P(X = Y) &= \sum_{i=1}^{+\infty} P(X = i, Y = i) \\
 &= \sum_{i=1}^{+\infty} P(X = i)P(Y = i) \\
 &= p^2 \sum_{i=1}^{+\infty} (1-p)^{2i-2} = \frac{p^2}{1 - (1-p)^2}.
 \end{aligned}$$

■ On a : $(X > Y) = \bigcup_{i=2}^{+\infty} ((X = i) \cap (Y < i))$ donc,

$$\begin{aligned}
 P(X > Y) &= \sum_{i=2}^{+\infty} P(X = i)P(Y < i) \\
 &= \sum_{i=2}^{+\infty} p(1-p)^{i-1} (p \sum_{j=1}^{i-1} (1-p)^{j-1}) \\
 &= p^2 \sum_{i=2}^{+\infty} (1-p)^{i-1} \frac{1 - (1-p)^{i-1}}{p} \\
 &= p \left(\sum_{i=2}^{+\infty} (1-p)^{i-1} - \sum_{i=2}^{+\infty} (1-p)^{2i-2} \right) = \frac{p-1}{p-2}.
 \end{aligned}$$

Ce résultat était prévisible car X et Y étant indépendantes et de même loi, on a :

$$P(X > Y) = P(Y > X) = \frac{1 - P(X = Y)}{2} = \frac{p - 1}{p - 2}.$$

■ Comme $(X \geq rY) = \bigcup_{i=1}^{+\infty} ((Y = i) \cap (X \geq ri))$ et

$$P(X \geq ri) = p \sum_{j=ri}^{+\infty} (1-p)^{j-1} = (1-p)^{ri-1},$$

il vient :

$$\begin{aligned} P(X \geq rY) &= \sum_{i=1}^{+\infty} P(Y = i)P(X \geq ri) \\ &= p \sum_{i=1}^{+\infty} (1-p)^{i-1} (1-p)^{ri-1} \\ &= p \sum_{i=1}^{+\infty} (1-p)^{(r+1)i-2} = \frac{p(1-p)^{r-1}}{1 - (1-p)^{r+1}}. \end{aligned}$$

(b) La matrice A est diagonalisable si, et seulement si, l'événement $(X \neq Y)$ est réalisé. Donc, la probabilité cherchée est :

$$\begin{aligned} P(X \neq Y) &= 1 - P(X = Y) \\ &= 1 - \frac{p^2}{1 - (1-p)^2} = 2 \frac{p-1}{p-2}. \end{aligned}$$

(c) On a $Z(\Omega) = \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ et pour tout $k \geq 2$,

$$\begin{aligned} P(Z = k) &= P(X + Y = k) = \sum_{i=1}^{k-1} P(X = i, Y = k-i) \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} P(X = i)P(Y = k-i) \\ &= p^2 \sum_{i=1}^{k-1} (1-p)^{i-1} (1-p)^{k-i-1} \\ &= p^2 \sum_{i=1}^{k-1} (1-p)^{k-2} = (k-1)p^2(1-p)^{k-2}. \end{aligned}$$

2. Soit $T = \min(X, Y)$ alors $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$P(T \geq k) = P(X \geq k)P(Y \geq k) = (1-p)^{k-1}(1-p')^{k-1}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} P(T = k) &= P(T \geq k) - P(T \geq k+1) \\ &= (1-p)^{k-1}(1-p')^{k-1} - (1-p)^k(1-p')^k \\ &= (1 - (1-p)(1-p'))(1-p)^{k-1}(1-p')^{k-1} \\ &= q(1-q)^{k-1}, \end{aligned}$$

où $q = 1 - (1-p)(1-p')$. Par suite T suit la loi géométrique de paramètre q .

3. On a : $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$. La loi de X sachant $X + Y = n$ est donnée par la famille $(P(X = m \mid X + Y = n))_{m \in \mathbb{N}}$. Soit $m \in \mathbb{N}$, on écrit :

$$\begin{aligned} P(X = m \mid X + Y = n) &= \frac{P((X = m) \cap (X + Y = n))}{P(X + Y = n)} \\ &= \frac{P(X = m)P(Y = n - m)}{P(X + Y = n)}. \end{aligned}$$

- Si $m > n$ alors $P(X = m \mid X + Y = n) = 0$.
- Si $m \in \{0, 1, \dots, n\}$. Par indépendance des variables X et Y , la variable $X + Y$ suit la loi de Poisson de paramètre $(\lambda + \mu)$ (cf. Remarque 177). Par suite :

$$\begin{aligned} P(X = m \mid X + Y = n) &= \frac{e^{-\mu} \frac{\mu^m}{m!} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{n-m}}{(n-m)!}}{e^{-(\lambda+\mu)} \frac{(\lambda+\mu)^n}{n!}} \\ &= \binom{n}{m} \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^m \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^{n-m}. \end{aligned}$$

Ainsi, la loi de X sachant $X + Y = n$ est la loi binomiale de paramètres n et $\frac{\mu}{\lambda + \mu}$.

Exercice 14 :

1. Si $m = 1$, X désigne le temps d'attente du premier succès, donc $X \sim \mathcal{G}(p)$.

2. Le cas général : X suit la loi de Pascal de paramètre (m, p) (cf. exemple 106), donc $X(\Omega) = \{m, m+1, \dots\}$ et

$$P(X = k) = \binom{k-1}{m-1} p^m (1-p)^{k-m} \text{ pour tout entier } k \geq m$$

3. Pour tout réel $t \in]-1, 1[$, $\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n$. En dérivant m fois cette égalité précédente, on obtient :

$$\frac{m!}{(1-t)^{m+1}} = \sum_{n=m}^{+\infty} n(n-1)(n-m+1)t^{n-m}$$

par suite :

$$\frac{1}{(1-t)^{m+1}} = \sum_{n=m}^{+\infty} \binom{n}{m} t^{n-m} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+m}{m} t^n \quad (4.33)$$

On aurait pu aussi exploiter le développement en série entière de la fonction $t \mapsto (1-t)^\alpha$.

4. On écrit :

$$\begin{aligned} G_X(t) &= \sum_{n=m}^{+\infty} P(X=n)t^n = \sum_{n=m}^{+\infty} \binom{n-1}{m-1} p^m (1-p)^{n-m} t^n \\ &= t^m p^m \sum_{n=m}^{+\infty} \binom{n-1}{m-1} ((1-p)t)^{n-m} \\ &= (pt)^m \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+m-1}{m-1} ((1-p)t)^n \\ &= \frac{(pt)^m}{(1-(1-p)t)^m}. \end{aligned}$$

Comme le rayon de convergence de la série définissant la fonction génératrice est $\frac{1}{1-p} > 1$, on en déduit que X est d'espérance finie et $\mathbb{E}(X) = G'_X(1) = \frac{m}{p}$.

Exercice 15 :

1. La variable N suit la loi géométrique de paramètre p .

Soit $(n, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} P(N = n, X = k) &= P(X = k \mid N = n)P(N = n) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } k > n \\ \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} p (1-p)^{n-1} & \text{si } k \leq n \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } k > n \\ \binom{n}{k} p^{k+1} (1-p)^{2n-k-1} & \text{si } k \leq n \end{cases}. \end{aligned}$$

Par suite, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P(X = k \mid N = n)P(N = n) \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} p^{k+1} (1-p)^{2n-k-1} \\ &= p^{k+1} (1-p)^{-k-1} \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} (1-p)^{2n}. \end{aligned}$$

D'après l'égalité (4.33), on a : $\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} t^n = \frac{t^k}{(1-t)^{k+1}}$, donc

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \frac{p^{k+1} (1-p)^{-k-1}}{k!} \frac{k! (1-p)^{2k}}{(1 - (1-p)^2)^{k+1}} \\ &= \frac{(1-p)^{k-1}}{(2-p)^{k+1}} \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}^*, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P(X = 0 \mid N = n)P(N = n) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} p(1-p)^{2n-1} = \frac{1-p}{2-p}. \end{aligned}$$

2. Soient Y et Z deux variables aléatoires indépendantes, telles que Y suit une loi de Bernoulli de paramètre q et Z suit une loi géométrique de paramètre q . On a $P(YZ = 0) = P(Y = 0) = 1 - q$.

Si X et YZ ont la même loi alors $1 - q = \frac{1-p}{2-p}$, soit $q = \frac{1}{2-p}$.
 Inversement, supposons que $q = \frac{1}{2-p}$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, alors

$$\begin{aligned} P(YZ = k) &= P(Y = 1, Z = k) = P(Y = 1)P(Z = k) \\ &= qq(1-q)^{k-1} = \frac{1}{(2-p)^2} \frac{(1-p)^{k-1}}{(2-p)^{k-1}} \\ &= P(X = k). \end{aligned}$$

On voit, donc, que X et YZ ont même loi.

3. On écrit : $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(YZ) = \mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(Z) = q\frac{1}{q} = 1$ et :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}(Y^2Z^2) - 1 \\ &= \mathbb{E}(Y^2)\mathbb{E}(Z^2) - 1 \\ &= \mathbb{E}(Y)(\mathbb{V}(Z) + \mathbb{E}(Z)^2) - 1 \\ &= q\left(\frac{1-q}{q^2} + \frac{1}{q^2}\right) - 1 \\ &= 2\frac{1-q}{q} = 2\frac{\frac{1-p}{2-p}}{\frac{1}{2-p}}. \end{aligned}$$

Par suite $\mathbb{V}(X) = 2(1-p)$.

Exercice 16 :

1. Par indépendance des variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$, la variable aléatoire S_n suit la loi de Poisson de paramètre $(n\lambda)$ (cf. remarque 177). La fonction génératrice de S_n est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $G_{S_n}(t) = e^{n\lambda(t-1)}$.
2. Comme $\mathbb{E}(S_n) = \mathbb{V}(S_n) = n\lambda$, T_n est la variable centrée réduite de S_n .
3. On a : $T_n = f(S_n)$ avec $f(x) = \frac{x - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par le

théorème de transfert, il vient :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(x^{T_n}) &= \sum_{k=0}^{+\infty} x^{\frac{k-n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}} P(S_n = k) \\ &= x^{-\sqrt{n\lambda}} \sum_{k=0}^{+\infty} x^{\frac{k}{\sqrt{n\lambda}}} \frac{(n\lambda)^k}{k!} e^{-n\lambda} \\ &= x^{-\sqrt{n\lambda}} \exp(n\lambda(x^{\frac{1}{\sqrt{n\lambda}}} - 1))\end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned}n\lambda(x^{\frac{1}{\sqrt{n\lambda}}} - 1) &= n\lambda(e^{\frac{\ln(x)}{\sqrt{n\lambda}}} - 1) \\ &= n\lambda\left(\frac{1}{\sqrt{n\lambda}} \ln(x) + \frac{\ln^2(x)}{2n\lambda} + o\left(\frac{1}{n\lambda}\right)\right) \\ &= \sqrt{n\lambda} \ln(x) + \frac{\ln^2(x)}{2} + o(1),\end{aligned}$$

on obtient :

$$\mathbb{E}(x^{T_n}) = \exp(-\sqrt{n\lambda} \ln(x)) \exp(\sqrt{n\lambda} \ln(x) + \frac{\ln^2(x)}{2} + o(1)).$$

$$\text{On en déduit que } \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(x^{T_n}) = e^{\frac{\ln^2(x)}{2}}.$$

Exercice 17 :

1. La famille $((A_{n+1} = 1), (A_{n+1} > 1))$ est un système complet d'événements, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et on a, par hypothèse :

$$P(A_{n+1} = 1 \mid A_n > 1) = 0, P(A_{n+1} = 1 \mid A_n = 1) = \frac{n}{n + \alpha}.$$

En appliquant la formule des probabilités totales, il vient

$$p_{n+1,1} = P(A_{n+1} = 1) = \frac{n}{n + \alpha} P(A_n = 1) = \frac{n}{n + \alpha} p_{n,1}.$$

Comme $p_{1,1} = 1$, on obtient par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$p_{n+1,1} = \prod_{k=1}^n \frac{k}{k + \alpha} = \frac{n!}{\prod_{k=1}^n (k + \alpha)}.$$

Par la formule des probabilités totales, pour tout $k \geq 2$,

$$p_{n+1,k} = \sum_{i=1}^{+\infty} P(A_{n+1} = k \mid A_n = i)P(A_n = i).$$

Si $i \notin \{k-1, k\}$ alors $P(A_{n+1} = k \mid A_n = i) = 0$. Par suite :

$$p_{n+1,k} = \frac{\alpha}{n+\alpha} p_{n,k-1} + \frac{n}{n+\alpha} p_{n,k}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose X_n la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si la n -ième personne choisit une nouvelle table et 0 si elle choisit la table occupée par la $(n-1)$ ième personne. Alors, X_n suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{\alpha}{n+\alpha}$ et on a bien

$$A_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n.$$

3. Par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}(A_n) = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k) = \sum_{k=1}^n \frac{\alpha}{k+\alpha}.$$

Les variables $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes, on obtient :

$$\mathbb{V}(A_n) = \sum_{k=1}^n \mathbb{V}(X_k) = \sum_{k=1}^n \frac{k\alpha}{(k+\alpha)^2}.$$

4. On écrit, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\int_k^{k+1} \frac{\alpha dt}{t+\alpha} \leq \frac{\alpha}{k+\alpha} \leq \int_{k-1}^k \frac{\alpha dt}{t+\alpha},$$

en sommant ces inégalités, pour $1 \leq k \leq n$, il vient :

$$\int_1^{n+1} \frac{dt}{t+\alpha} \leq \sum_{k=1}^n \frac{\alpha}{k+\alpha} \leq \int_0^n \frac{\alpha dt}{t+\alpha}.$$

Ce qui donne

$$\alpha(\ln(n+\alpha+1) - \ln(1+\alpha)) \leq \mathbb{E}(A_n) \leq \alpha(\ln(n+\alpha) - \ln(\alpha)).$$

Donc $\mathbb{E}(A_n) \sim \alpha \ln(n)$.

Exercice 18 : Supposons que $Z \sim \mathcal{U}(\{2, \dots, 12\})$ alors, la fonction génératrice de Z s'écrit :

$$G_Z(t) = \sum_{n=2}^{12} P(Z=n)t^n = \frac{1}{11} \sum_{n=2}^{12} t^n = \frac{t^2}{11} \sum_{n=0}^{10} t^n.$$

Soit X_1 (respectivement X_2) la variable aléatoire indiquant le numéro obtenu par le premier dé (respectivement le deuxième dé). Posons, pour tout $1 \leq n \leq 6$, $p_n = P(X_1 = n)$ et $q_n = P(X_2 = n)$. Alors,

$$G_{X_1}(t) = \sum_{n=1}^6 p_n t^n = t \sum_{n=0}^5 p_{n+1} t^n \text{ et } G_{X_2}(t) = t \sum_{n=0}^5 q_{n+1} t^n.$$

Le polynôme $\frac{G_{X_1}(t)}{t}$ est de degré 5 donc il admet au moins une racine réelle. De même $\frac{G_{X_2}(t)}{t}$ admet au moins une racine réelle. Puisque l'on a : $Z = X_1 + X_2$ on obtient, par indépendance :

$$G_{X_1}(t)G_{X_2}(t) = G_Z(t) = \frac{t^2}{11} \sum_{n=0}^{10} t^n.$$

Mais le polynôme $\frac{G_{X_1}(t)G_{X_2}(t)}{t^2}$ n'admet pas de racine réelle, car

$$\frac{G_{X_1}(t)G_{X_2}(t)}{t^2} = \begin{cases} \frac{1}{11} \frac{1-t^{11}}{1-t} & \text{si } t \neq 1 \\ 1 & \text{si } t = 1 \end{cases}.$$

Contradiction.

Méthode 2 : On peut procéder autrement. Supposons que $Z \sim \mathcal{U}(\{2, \dots, 12\})$. Posons, pour tout $1 \leq i \leq 6$, p_i (respectivement q_i) la probabilité de l'événement «le premier dé amène le numéro i » (respectivement «le second dé donne i »). On obtient, par indépendance des lancers que

$$P(Z=1) = p_1 q_1 = \frac{1}{11} \text{ et } P(Z=6) = p_6 q_6 = \frac{1}{11}.$$

On obtient l'absurdité, en écrivant :

$$\frac{1}{11} = P(Z=7) \geq p_1 q_6 + p_6 q_1 = \frac{1}{11} \left(\frac{q_6}{q_1} + \frac{q_1}{q_6} \right) \geq \frac{2}{11},$$

où, on a utilisé l'inégalité arithmético-géométrique : $x + \frac{1}{x} \geq 2$, pour tout $x > 0$.

Exercice 19 :

1. Pour tout entier $n \geq 1$, on a $X_n = Z_n Z_1 X_0 = \prod_{i=1}^n Z_i$. Par indépendance des variables $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, on en déduit que :

$$\mathbb{E}(X_n) = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}(Z_i) = \mathbb{E}(Z_1)^n$$

Or,

$$\mathbb{E}(Z_1) = (1+a)P(Z_1 = 1+a) + (1-a)P(Z_1 = 1-a) = 1$$

Donc, $\mathbb{E}(X_n) = 1$.

2. On a :

$$\mathbb{V}(X_n) = \mathbb{E}(X_n^2) - \mathbb{E}(X_n)^2 = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}(Z_i^2) - 1 = \mathbb{E}(Z_1^2)^n - 1$$

D'autre part

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z_1^2) &= (1+a)^2 P(Z_1 = 1+a) + (1-a)^2 P(Z_1 = 1-a) \\ &= 1 + a^2 \end{aligned}$$

Par suite $\mathbb{V}(X_n) = (1+a^2)^n - 1$. Donc, $\mathbb{V}(X_n)$ tend vers $+\infty$, puisque $1+a^2 > 1$.

3. Les variables Y_k , $k \in \mathbb{N}^*$ sont finies donc elles admettent des moments d'ordre 2. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{E}(Y_k) = \frac{1}{2}(\ln(1+a) + \ln(1-a)) = \ln \sqrt{1-a^2}$$

La loi faible des grands nombres montre que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$P(|S_n - \ln \sqrt{1-a^2}| > \varepsilon) \rightarrow 0,$$

or,

$$0 \leq P(S_n > \varepsilon + \ln \sqrt{1-a^2}) \leq P(|S_n - \ln \sqrt{1-a^2}| > \varepsilon),$$

donc la suite $(P(S_n > \varepsilon + \ln \sqrt{1-a^2}))_{n \in \mathbb{N}^*}$ tend vers 0. Il suffit, donc de choisir ε tel que $\ln \sqrt{1-a^2} + \varepsilon < 0$ et $\alpha = -(\ln \sqrt{1-a^2} + \varepsilon)$.

4. On écrit :

$$\ln(X_n) = \sum_{k=1}^{n-1} \ln(Z_k) = \sum_{k=1}^{n-1} Y_k = nS_n$$

Comme $P(S_n > -\alpha)$ tend vers 0,

$$P\left(\frac{\ln(X_n)}{n} > -\alpha\right) = P(X_n > e^{-n\alpha}) \text{ tend vers 0.}$$

Soit $\varepsilon > 0$, il existe un rang n_0 tel que $e^{-n\alpha} < \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$.
Pour $n \geq n_0$ on a :

$$0 \leq P(X_n > \varepsilon) \leq P(X_n > e^{-n\alpha}) \text{ tend vers 0.}$$

Exercice 20 :

1. (a) La série $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ converge et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

Donc, la suite $\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définit bien une loi de probabilité.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P(T \geq n) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{n} \neq 0.$$

Le taux de panne de la variable T est la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{P((X = n) \cap (X \geq n))}{P(X \geq n)} = \frac{P(X = n)}{P(X \geq n)} \\ &= \frac{\frac{1}{n(n+1)}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

2. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{P((X = n) \cap (X \geq n))}{P(X \geq n)} = \frac{P(X = n)}{P(X \geq n)} \\ &= \frac{P(X \geq n) - P(X \geq n + 1)}{P(X \geq n)}, \end{aligned}$$

ce qui donne la relation :

$$P(X \geq n + 1) = P(X \geq n)(1 - x_n).$$

On en déduit, par récurrence, que :

$$P(X \geq n) = P(X \geq 1) \prod_{k=1}^{n-1} (1 - x_k) = \prod_{k=1}^{n-1} (1 - x_k), \quad (4.34)$$

car $P(X \geq 1) = 1$. On obtient enfin :

$$P(X = n) = P(X \geq n) - P(X \geq n + 1) \quad (4.35)$$

$$= \prod_{k=1}^{n-1} (1 - x_k) - \prod_{k=1}^n (1 - x_k) = x_n \prod_{k=1}^{n-1} (1 - x_k) \text{ si } n \geq 2. \quad (4.36)$$

et $P(X = 1) = x_1$.

3. On a $x_n \in [0, 1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. S'il existe un entier n tel que $x_n = 1$ alors on obtient, d'après l'égalité (4.34), $P(X \geq n + 1) = 0$ qui contredit l'hypothèse de l'exercice. Montrons la divergence de la série $\sum x_k$. On suppose que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, sinon le résultat est évident. Comme

$$\ln(P(X \geq n + 1)) = \sum_{k=1}^n \ln(1 - x_k),$$

et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(P(X \geq n + 1)) = -\infty$, car $P(X \geq n + 1)$ tend vers 0, on en déduit que la série $\sum \ln(1 - x_k)$ diverge. Or, $\ln(1 - x_k) \sim -x_k$, donc la série $\sum x_k$ diverge.

4. Soit X la variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ définie par : $P(X = 1) = x_1$ et pour tout $n \geq 2$,

$$P(X = n) = x_n \prod_{k=1}^{n-1} (1 - x_k) = \prod_{k=1}^n (1 - x_k) - \prod_{k=1}^{n-1} (1 - x_k). \quad (4.37)$$

Montrons que la relation (4.37) définit bien la loi de la variable aléatoire. Il suffit de montrer que $\sum P(X = n)$ converge et que $\sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n) = 1$. La série $\sum P(X = n)$ est télescopique, donc il suffit de montrer la convergence de la suite $\alpha_n = \prod_{k=1}^n (1 - x_k)$. Or,

$$\ln(\alpha_n) = \sum_{k=1}^n \ln(1 - x_k) \text{ tend vers } -\infty,$$

car, si la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne tend pas vers 0, alors la suite de terme général $\ln(1 - x_n)$ ne tend pas vers 0 et la série diverge grossièrement et si la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tend vers 0 la série $\sum \ln(1 - x_k)$ a la même nature que celle de $\sum x_k$, donc diverge. Par suite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 0$, la série $\sum P(X = n)$ converge. D'autre part :

$$\begin{aligned} x_1 + \sum_{n=2}^{+\infty} P(X = n) &= x_1 + \sum_{n=2}^{+\infty} (\alpha_{n-1} - \alpha_n) \\ &= x_1 + \alpha_1 = x_1 + (1 - x_1) = 1. \end{aligned}$$

Donc, la relation (4.37) définit bien la loi de la variable aléatoire X . Reste à montrer que $P(X \geq n) \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. on a :

$$P(X \geq 1) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X = k) = 1$$

et pour tout entier $n \geq 2$, on a :

$$P(X \geq n) = 1 - \sum_{k=1}^{n-1} P(X = k) > 1 - \sum_{k=1}^{\infty} P(X = k) = 0$$

Enfin, on a :

$$\begin{aligned} P(X = n \mid X \geq n) &= \frac{P(X = n)}{P(X \geq n)} = \frac{x_n \prod_{k=1}^{n-1} (1 - x_k)}{1 - P(X \leq n-1)} \\ &= \frac{x_n \prod_{k=1}^{n-1} (1 - x_k)}{\prod_{k=1}^{n-1} (1 - x_k)} = x_n. \end{aligned}$$

Par suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est le taux de panne de la variable X .

5. Si X suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$ alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(X \geq n) = (1 - p)^{n-1} \neq 0$ et $x_n = \frac{P(X = n)}{P(X \geq n)} = p$. Inversement, supposons que le taux de panne $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de la variable X est constant et égale à $p \in [0, 1[$. D'après la formule (4.35) on a :

$$P(X = n) = x_n \prod_{k=1}^{n-1} (1 - x_k) = p(1 - p)^{n-1}.$$

Comme, de plus, $\sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n) = 1$ alors $p \in]0, 1[$, donc X suit la loi géométrique de paramètre p .

Exercice 21 :

1. Le résultat est déjà démontré (voir la remarque 140). On donne ici une autre preuve. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n kP(T = k) &= \sum_{k=1}^n k(P(T > k-1) - P(T > k)) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)P(T > k) - \sum_{k=0}^n kP(T > k) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} P(T > k) - nP(T > n). \end{aligned}$$

– Si T est d'espérance finie. Comme

$$0 \leq nP(T > n) = \sum_{k=n+1}^{\infty} nP(T = k) \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} kP(T = k),$$

et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} kP(T = k) = 0$ puisque la série $\sum kP(T = k)$ converge, on en déduit que la série $\sum P(T > k)$ converge. On obtient, par passage à la limite :

$$\mathbb{E}(T) = \sum_{k=1}^{+\infty} kP(T = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(T > k).$$

- Si T n'admet pas une espérance finie. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^{n-1} P(T > k) \geq \sum_{k=1}^n kP(T = k)$ et la série $\sum kP(T = k)$, on en déduit la divergence de la série $\sum P(T > k)$.

2.

- (a) On a $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Soit $1 \leq k \leq n$, la loi de Y sachant $(X = k)$ est le temps d'attente du premier succès où la probabilité de succès est $\frac{n-k+1}{n}$. Donc la loi de Y sachant $(X = k)$ est la loi géométrique de paramètre $p = \frac{n-k+1}{n}$.

- (b) Par la formule des probabilités totales, on a : Or,

$$P(Y > i | X = k) = (1 - p)^i = (1 - \frac{n-k+1}{n})^i = (\frac{k-1}{n})^i$$

On trouve : $P(Y > i) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\frac{k-1}{n})^i$. On en déduit, d'après la première question, que :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= \sum_{i=0}^{+\infty} P(Y > i) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^n (\frac{k-1}{n})^i \right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=0}^{+\infty} (\frac{k-1}{n})^i \right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 - \frac{k-1}{n}} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n-k+1} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n-k+1} \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \sim \ln(n). \end{aligned}$$

- (c) Le jeu est favorable pour le joueur A si $\mathbb{E}(Y) > 3$ c'est-à-dire $\sum_{j=1}^n \frac{1}{j} > 3$, on trouve que $n \geq 11$.

Exercice 22 : Soit X une variable aléatoire. Les variables aléatoires $\cos(tX)$ et $\sin(tX)$ sont bornées pour tout $t \in \mathbb{R}$, donc elles admettent une espérance finie. Par la formule de transfert, on a :

$$\phi_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\cos(tn) + i \sin(tn)) P(X = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{itn} P(X = n).$$

1. - Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$,

$$\begin{aligned} \phi_X(t) &= \sum_{k=0}^{+\infty} e^{itk} P(X = k) = \sum_{k=0}^n e^{itk} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= (p(e^{it} - 1) + 1)^n. \end{aligned}$$

– Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$,

$$\begin{aligned}\phi_X(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} e^{itn} P(X=n) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{itn} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(e^{it}\lambda)^n}{n!} = e^{-\lambda} \exp(e^{it}\lambda) = e^{-\lambda} e^{\lambda \cos t} e^{i\lambda \sin t} \\ &= e^{(\lambda-1) \cos t} e^{i\lambda \sin t} .\end{aligned}$$

2. La fonction $t \mapsto e^{itn} P(X=n)$ est continue sur $\mathbb{R}$. L'égalité

$$|e^{itn} P(X=n)| = P(X=n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N},$$

montre la convergence normale par conséquent uniforme de la série des fonctions $\sum e^{itn} P(X=n)$. D'après le théorème de continuité des fonctions définies par des séries, la fonction ϕ_X est continue sur $\mathbb{R}$. Il est simple de voir que $\phi_X(t+2\pi) = \phi_X(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

3. Soit $k \in \mathbb{N}$. On écrit :

$$\begin{aligned}I_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi_X(t) e^{-ikt} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{itn} P(X=n) e^{-ikt} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n) e^{i(n-k)t} dt.\end{aligned}$$

La série $\sum P(X=n) e^{i(n-k)t}$ converge uniformément sur $[-\pi, \pi]$, par permutation des deux signes somme et intégrale on obtient :

$$I_k = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-k)t} dt$$

Or ,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-k)t} dt = \delta_{n,k} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq k \\ 1 & \text{si } n = k \end{cases} ,$$

ainsi

$$I_k = P(X=k)$$

Par suite, $\phi_X = \phi_Y$ entraîne

$$I_k = P(X=k) = P(Y=k) \text{ pour tout } k \in \mathbb{N},$$

ce qui montre que X et Y suivent la même loi.

4. Pour tout entier n , posons g_n la fonction : $g_n(t) = e^{itn}P(X = n)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. La fonction g_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et

$$g'_n(t) = ine^{itn}P(X = n).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$|g'_n(t)| = nP(X = n)$$

et la série $\sum nP(X = n)$ converge, puisque X admet une espérance finie. Par suite la série des fonctions $\sum g'_n$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}$. Par le théorème de dérivation sous le signe somme, la fonction ϕ_X est de classe C^1 et

$$\phi'_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} ine^{itn}P(X = n).$$

On a bien $\phi'_X(0) = i \sum_{n=0}^{+\infty} nP(X = n) = i\mathbb{E}(X)$.

5. On écrit :

$$\begin{aligned} \phi_Z(t) &= \sum_{n=2}^{+\infty} e^{itn}P(Z = n) = \sum_{n=2}^{+\infty} e^{itn}P(Y = n-1) \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} e^{itn}p(1-p)^{n-2} = pe^{2it} \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{it}(1-p))^n \\ &= \frac{pe^{2it}}{1 - e^{it}(1-p)}, \end{aligned}$$

puisque $|e^{it}(1-p)| = 1-p \in]0, 1[$.

6. Comme $1 + \rho > |e^{it}\rho|$, ϕ_A est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, par suite $\mathbb{E}(A) = -i\phi'_A(0) = \rho$. D'autre part on a :

$$\begin{aligned} \phi_A(t) &= \frac{1}{1 + \rho - \rho e^{it}} = \frac{1}{1 + \rho} \frac{1}{1 - \frac{\rho e^{it}}{1 + \rho}} \\ &= \frac{1}{1 + \rho} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\rho}{1 + \rho}\right)^n e^{int}. \end{aligned}$$

Soit X la variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la loi est donnée par :

$$P(X = n) = \frac{1}{1 + \rho} \left(\frac{\rho}{1 + \rho}\right)^n.$$

La loi de X est bien définie car :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1+\rho} \left(\frac{\rho}{1+\rho}\right)^n = 1$$

Donc

$$\phi_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1+\rho} \left(\frac{\rho}{1+\rho}\right)^n e^{int} = \phi_A(t)$$

Par suite A suit la même loi que X , c'est-à-dire,

$$P(A = n) = \frac{1}{1+\rho} \left(\frac{\rho}{1+\rho}\right)^n = \frac{1}{1+\rho} \left(1 - \frac{1}{1+\rho}\right)^n$$

Il est simple de voir que la variable $A + 1$ suit la loi $\mathcal{G}\left(\frac{1}{1+\rho}\right)$

Exercice 23 :

1. On fixe $n \in \mathbb{N}^*$. Les variables $X_i, 1 \leq i \leq n$ sont indépendantes donc S_n suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(n)$ (cf. remarque 177). Il s'ensuit que $\mathbb{E}(S_n) = \mathbb{V}(S_n) = n$, par suite $S_n^* = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}$ est la variable centrée réduite de S_n . Donc

$$P(S_n^* \leq 0) = P(S_n \leq n) = \sum_{k=0}^n P(S_n = k) = \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} e^{-n}.$$

D'autre part, posons pour tout $x \geq 0$, $I_n(x) = \int_x^{+\infty} \frac{t^n e^{-t}}{n!} dt$. Une intégration par parties donne :

$$I_n(x) = \frac{x^n e^{-x}}{n!} + I_{n-1}(x). \quad (4.38)$$

Par récurrence, on montre que $I_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k e^{-x}}{k!}$. Ce qui donne :

$$P(S_n^* \leq 0) = I_n(n) = \int_n^{+\infty} \frac{t^n e^{-t}}{n!} dt.$$

On pourra aussi démontrer cette identité en utilisant la formule de Taylor avec reste intégral appliquée à la fonction exp. En effet, on écrit :

$$e^n = \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} + \frac{1}{n!} \int_0^n t^n e^{-t} dt,$$

puis en utilisant l'égalité classique

$$\frac{1}{n!} \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = \frac{\Gamma(n+1)}{n!} = n!,$$

on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} e^{-n} &= 1 - \frac{1}{n!} \int_0^n t^n e^{-t} dt \\ &= \frac{1}{n!} \left(\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt - \int_0^n t^n e^{-t} dt \right) \\ &= \frac{1}{n!} \int_n^{+\infty} t^n e^{-t} dt. \end{aligned}$$

2. Nous conservons les notations de la première question on écrit :

$$P(S_n^* \leq 0) - P(S_{n+1}^* \leq 0) = I_n(n) - I_{n+1}(n+1).$$

Or $I_{n+1}(n+1) = I_{n+1}(n) - \int_n^{n+1} \frac{t^{n+1} e^{-t}}{(n+1)!} dt$. En utilisant l'égalité (4.38), il vient :

$$\begin{aligned} P(S_n^* \leq 0) - P(S_{n+1}^* \leq 0) &= I_n(n) - I_{n+1}(n) + \int_n^{n+1} \frac{t^{n+1} e^{-t}}{(n+1)!} dt \\ &= -\frac{n^{n+1}}{(n+1)!} e^{-n} + \int_n^{n+1} \frac{t^{n+1} e^{-t}}{(n+1)!} dt. \end{aligned}$$

3. La fonction $t \mapsto \frac{t^{n+1} e^{-t}}{(n+1)!}$ est croissante sur $[0, n+1]$, par suite pour tout $t \in [n, n+1]$, on a :

$$\frac{t^{n+1} e^{-t}}{(n+1)!} \geq \frac{n^{n+1}}{(n+1)!} e^{-n}$$

en intégrant les deux membres de l'inégalité entre n et $n+1$, on obtient :

$$\int_n^{n+1} \frac{t^{n+1} e^{-t}}{(n+1)!} dt \geq \frac{n^{n+1}}{(n+1)!} e^{-n}.$$

Donc $P(S_n^* \leq 0) - P(S_{n+1}^* \leq 0) \geq 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par conséquent la suite $(P(S_n^* \leq 0))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante, Par suite convergente, puisqu'elle est minorée.

4. Soit $t \in \mathbb{R}_*^+$. On a :

$$t^{S_n^*} = t^{-\sqrt{n}} \cdot (t^{\frac{1}{\sqrt{n}}})^{S_n}.$$

La variable S_n suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(n)$, donc sa série génératrice est définie sur $\mathbb{R}$ et on a, pour tout $x > 0$:

$$G_{S_n}(x) = \mathbb{E}(x^{S_n}) = \exp(n(x - 1)).$$

On en déduit, par linéarité de l'espérance, que $t^{S_n^*}$ admet une espérance finie.

5. Pour tout réel $t > 0$ on a :

$$\begin{aligned} f_n(t) &= \mathbb{E}(t^{S_n^*}) = \frac{1}{t^{\sqrt{n}}} \mathbb{E}((t^{\frac{1}{\sqrt{n}}})^{S_n}) = \frac{1}{t^{\sqrt{n}}} G_{S_n}(t^{\frac{1}{\sqrt{n}}}) \\ &= \frac{\exp(n(t^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1))}{t^{\sqrt{n}}}. \end{aligned}$$

Lorsque n tend vers $+\infty$, on écrit :

$$t^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1 = \exp\left(\frac{\ln(t)}{\sqrt{n}}\right) - 1 = \frac{\ln(t)}{\sqrt{n}} + \frac{\ln^2(t)}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

par suite

$$\begin{aligned} \exp(n(t^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1)) &= t^{\frac{1}{\sqrt{n}}} \exp\left(\frac{\ln^2(t)}{2}\right) \exp(o(1)) \\ &\sim t^{\frac{1}{\sqrt{n}}} \exp\left(\frac{\ln^2(t)}{2}\right). \end{aligned}$$

Donc $f_n(t) \sim \exp\left(\frac{\ln^2(t)}{2}\right)$. Ce qui montre que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers la fonction $t \mapsto \exp\left(\frac{\ln^2(t)}{2}\right)$.

Exercice 24 :

1. On a :

$$\begin{aligned} (X_1 = X_2 = \dots = X_n) \\ = (X_1 = 1, X_2 = 1, \dots, X_n = 1) \cup (X_1 = 0, X_2 = 0, \dots, X_n = 0), \end{aligned}$$

donc,

$$\begin{aligned} P(X_1 = X_2 = \dots = X_n) &= \\ P(X_1 = 1, X_2 = 1, \dots, X_n = 1) &+ P(X_1 = 0, X_2 = 0, \dots, X_n = 0), \end{aligned}$$

car les deux événements sont incompatibles. Par indépendance des variables $X_i, 1 \leq i \leq n$, on obtient :

$$P(X_1 = X_2 = \dots = X_n) = p^n + (1-p)^n.$$

2. La variable aléatoire $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ suit la loi binomiale de paramètre (n, p) (voir remarque 179 ou exemple 136).
3. Soient $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$.
 - Si $i = j$, alors $X_{i,i} = X_i^2 = X_i$ suit la loi de Bernoulli de paramètre p .
 - Si $i \neq j$, la variable $X_{i,j} = X_i X_j$ est à valeurs dans $\{0, 1\}$ et

$$\begin{aligned} P(X_{i,j} = 1) &= P(X_i = 1, X_j = 1) = P(X_i = 1)P(X_j = 1) = p^2 \\ P(X_{i,j} = 0) &= 1 - p^2. \end{aligned}$$

Ainsi, $X_{i,j}$ suit la loi de Bernoulli de paramètre p^2

4.

- (a) Si on note $M(\omega) = (m_{i,j}(\omega))_{1 \leq i,j \leq n}$ alors

$$m_{i,j}(\omega) = X_i(\omega)X_j(\omega) \in \{0, 1\}$$

- (b) On a :

$$\text{tr}(M(\omega)) = \sum_{k=1}^n m_{k,k}(\omega) \in \{0, 1, 2, \dots, n\},$$

puisque, $m_{k,k} \in \{0, 1\}$ pour tout $1 \leq k \leq n$. La matrice $M(\omega)$ est symétrique réelle donc diagonalisable.

Les vecteurs colonnes de la matrice $M(\omega)$ sont proportionnelles au vecteur $U(\omega)$, donc $\text{rg}(M(\omega)) \leq 1$.

Remarque : On a :

$$M(\omega)^2 = U(\omega)^t U(\omega) U(\omega)^t U(\omega) \quad (4.39)$$

$$= {}^t U(\omega) U(\omega) M(\omega) = \text{tr}(M(\omega)) M(\omega). \quad (4.40)$$

Deux cas se présentent :

- Si $\text{tr}(M(\omega)) \neq 0$ alors le polynôme $X^2 - \text{tr}(M(\omega))X$ est scindé à racines simples qui annule $M(\omega)$, donc $M(\omega)$ est diagonalisable et $\text{rg}(M(\omega)) = 1$.
- Si $\text{tr}(M(\omega)) = 0$, alors ${}^t U(\omega) U(\omega) = 0$ par suite $U(\omega) = 0$ et $M(\omega)$ est la matrice nulle donc diagonalisable.

(c) On a :

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(M(\omega)) &= X_1(\omega)^2 + \dots + X_n(\omega)^2 \\ &= X_1(\omega) + X_2(\omega) + \dots + X_n(\omega) = S(\omega).\end{aligned}$$

- Si $S(\omega) = 0$ alors $M(\omega) = 0$, par suite $M(\omega)$ représente la projection orthogonale sur le sous-espace nul $\{0\}$.
- Si $S(\omega) = 1$ alors d'après (4.39), $M(\omega)$ est la matrice d'un projecteur si et seulement si, $S(\omega) = 1$ et dans ce cas, comme de plus $M(\omega)$ est symétrique alors $M(\omega)$ représente la projection orthogonale sur $\operatorname{Im} M(\omega) = \mathbb{R}U(\omega)$.

Inversement, si $M(\omega)$ est la matrice d'une projection, alors $\operatorname{tr}(M(\omega)) = \operatorname{rg}(M(\omega)) \leq 1$. Comme $\operatorname{tr}(M(\omega))$ est un entier, donc $\operatorname{tr}(M(\omega)) \in \{0, 1\}$.

5. On a $\operatorname{tr} M = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2 = S$. Donc $\operatorname{tr} M$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$,

$$\mathbb{E}(\operatorname{tr}(M)) = np, \quad \mathbb{V}(\operatorname{tr}(M)) = np(1-p).$$

On a : $\operatorname{rg} M$ est à valeurs dans $\{0, 1\}$. Comme on a $(\operatorname{rg}(M) = 0) = (\operatorname{tr} M = 0)$, donc

$$\begin{aligned}P(\operatorname{rg}(M) = 0) &= P(S = 0) = (1-p)^n \\ P(\operatorname{rg}(M) = 1) &= 1 - (1-p)^n.\end{aligned}$$

Donc, $\operatorname{rg}(M)$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $q = 1 - (1-p)^n$.

6. Si $S(\omega) = 0$ donc $\operatorname{tr} M(\omega) = 0$ alors $M(\omega) = 0$. Sinon, comme

$$M(\omega)^2 = \operatorname{tr}(M(\omega))M(\omega) = S(\omega)M(\omega),$$

on en déduit par récurrence que :

$$M(\omega)^k = \operatorname{tr}(M(\omega))M(\omega) = S(\omega)^{k-1}M(\omega) \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}^*.$$

Conclusion : Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $M^k = S^{k-1}M$.

Soit A l'événement «la suite (M^k) converge». On a $\omega \in A$ si, et seulement si, $M(\omega) = 0$ où $-1 < S(\omega) \leq 1$. Ainsi, $\omega \in A$ si, et seulement si, $\operatorname{tr}(M(\omega)) = 0$ ou $S(\omega) = 0$ ou $S(\omega) = 1$. C'est-à-dire, $A = (S = 0) \cup (S = 1)$. Par suite

$$\begin{aligned}P(A) &= P(S = 0) + P(S = 1) = (1-p)^n + np(1-p)^{n-1} \\ &= (1-p)^{n-1}(1 + (n-1)p).\end{aligned}$$

Si $S(\omega) = 0$ alors $\lim_{k \rightarrow +\infty} M^k(\omega) = 0$. Si $S(\omega) = 1$ alors

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} M^k(\omega) = M(\omega).$$

Dans les deux cas la limite est une matrice de projection orthogonale.

7. Comme $\text{rg}(M(\omega)) \leq 1$, 0 est une valeur propre de $M(\omega)$.

Si $M(\omega)$ admet deux valeurs propres distinctes alors $M(\omega) \neq 0$ donc $\text{tr}(M(\omega)) \neq 0$. Inversement si $\text{tr}(M(\omega)) \neq 0$ alors D'après (4.39) le spectre de $M(\omega)$ est inclus dans $\{0, \text{tr}(M(\omega))\}$. Si $\text{sp}(M(\omega)) = \{0\}$ alors $M(\omega) = 0$ puisque elle est diagonalisable, contradiction. Donc, $M(\omega)$ admet 0 et $\text{tr}(M(\omega))$ comme valeurs propres distinctes. Par suite $M(\omega)$ admet deux valeurs propres distinctes si, et seulement si, $\text{tr}(M(\omega)) = S(\omega) \neq 0$. La probabilité pour que M possède deux valeurs propres distinctes est donc :

$$P(S \neq 0) = 1 - P(S = 0) = 1 - (1 - p)^n.$$

Exercice 25 :

1. Si $n = 1$, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev on a :

$$\begin{aligned} P(|X_1| > t\sigma_1) &= P(|X_1 - \mathbb{E}(X_1)| > t\sigma_1) \\ &= 1 - P(|X_1 - \mathbb{E}(X_1)| \leq t\sigma_1) \geq 1 - \frac{\mathbb{V}(X_1)}{t^2\sigma_1^2} \\ &= 1 - \frac{1}{t^2}. \end{aligned}$$

2. Les ensembles B_j , $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, sont disjoints deux à deux et $A = \bigcup_{i=1}^n B_i$. En effet : il est clair que $B_j \subseteq A$ pour tout $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. D'autre part, si $\omega \in A$ alors il existe k tel que $|S_k(\omega)| \geq t\sigma_n$, donc $\omega \in B_{k_0}$ avec

$$k_0 = \min \{k : |S_k(\omega)| \geq t\sigma_n\}.$$

Par suite,

$$\mathbb{I}_A = \mathbb{I}_{\bigcup_{i=1}^n B_i} = \sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{B_i} = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n.$$

3. On écrit :

$$\sum_{k=1}^n Y_k S_n^2 = \mathbb{I}_A \cdot S_n^2 \leq S_n^2,$$

par linéarité et positivité de l'espérance, on obtient :

$$\sum_{k=1}^n \mathbb{E}(Y_k S_n^2) \leq \mathbb{E}(S_n^2) = \mathbb{E}(S_n^2) - \mathbb{E}(S_n) = \mathbb{V}(S_n) = \sigma_n^2. \quad (4.41)$$

4. La variable aléatoire U_k dépend uniquement des variables aléatoires $X_{k+1}, X_{k+2}, \dots, X_n$ et les variables Y_k et S_k ne dépendent que des variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_k$, donc U_k et $Y_k S_k$ sont indépendantes. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y_k S_n^2) &= \mathbb{E}(Y_k (U_k + S_k)^2) \\ &= \mathbb{E}(Y_k U_k^2) + \mathbb{E}(Y_k S_k^2) + 2\mathbb{E}(Y_k U_k S_k) \\ &= \mathbb{E}(Y_k U_k^2) + \mathbb{E}(Y_k S_k^2), \end{aligned}$$

car, par indépendance de variables aléatoires, on a :

$$\mathbb{E}(Y_k U_k S_k) = \mathbb{E}(Y_k S_k) \mathbb{E}(U_k),$$

et $\mathbb{E}(U_k) = \sum_{i=k+1}^n \mathbb{E}(X_i) = 0$. Comme $\mathbb{E}(Y_k U_k^2) \geq 0$ car $Y_k U_k^2 \geq 0$ on obtient :

$$\mathbb{E}(Y_k S_n^2) \geq \mathbb{E}(Y_k S_k^2) \quad (4.42)$$

5. Si $Y_k(\omega) = 1$ alors $S_k(\omega) \geq t\sigma_n$ et donc

$$Y_k(\omega) S_k^2(\omega) \geq t^2 \sigma_n^2 Y_k(\omega)$$

Si $Y_k(\omega) = 0$ l'inégalité $Y_k(\omega) S_k^2(\omega) \geq t^2 \sigma_n^2 Y_k(\omega)$ est trivialement vérifiée. En utilisant cette inégalité et les inégalités (4.42) et (4.41), on obtient :

$$\begin{aligned} P(A) &= \mathbb{E}(\mathbb{I}_A) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n Y_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(Y_i) \leq \frac{1}{t^2 \sigma_n^2} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(Y_i S_i^2) \\ &\leq \frac{1}{t^2 \sigma_n^2} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(Y_i S_n^2) \leq \frac{1}{t^2 \sigma_n^2} \sigma_n^2 = \frac{1}{t^2} \end{aligned}$$

Par suite,

$$P(|S_k| < t\sigma_n, \forall k \in \{1, 2, n\}) = P(\bar{A}) \geq 1 - \frac{1}{t^2}$$

Exercice 26 :

1. On calcule le polynôme caractéristique de J en remplaçant la colonne C_1 par $C_1 + XC_2 + \dots + X^{n-1}C_n$ et en développant selon la première colonne on obtient :

$$\chi_J(X) = \det(XI_n - J) = X^n - 1.$$

Les valeurs propres complexes de J sont les racines n -ièmes de l'unité, par suite le spectre de J est l'ensemble $\{1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}\}$ où $\omega = \exp(\frac{2i\pi}{n})$. La matrice $J \in M_n(\mathbb{R})$ et admet n valeurs propres distincts, donc J est diagonalisable.

2. Soit $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ et $X_k = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre

associé à la valeur propre ω^k . L'équation $JX_k = \omega^k X_k$ est équivalent à

$$\begin{cases} x_2 = \omega^k x_1 \\ x_3 = \omega^k x_2 \\ \vdots \\ x_n = \omega^k x_{n-1} \\ x_1 = \omega^k x_n \end{cases}$$

ainsi

$$X = x_n \begin{pmatrix} \omega^k \\ \omega^{2k} \\ \vdots \\ \omega^{(n-1)k} \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{vect}(e_k = \begin{pmatrix} \omega^k \\ \omega^{2k} \\ \vdots \\ \omega^{(n-1)k} \\ 1 \end{pmatrix})$$

Par suite $(e_0, e_1, \dots, e_{n-1})$ est une base de vecteurs propres de J .

3. Soit $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Soit $m \in \mathbb{N}$ et $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. D'après la

formule des probabilités totales, on a :

$$P(X_{m+1} = j) = \sum_{i=0}^{n-1} P(X_{m+1} = j \mid X_m = i)P(X_m = i).$$

– Si $1 \leq j \leq n-2$,

$$\begin{aligned} P(X_{m+1} = j) &= \\ &P(X_{m+1} = j \mid X_m = j-1)P(X_m = j-1) \\ &+ P(X_{m+1} = j \mid X_m = j+1)P(X_m = j+1) \\ &= \frac{1}{2}P(X_m = j-1) + \frac{1}{2}P(X_m = j+1) \end{aligned}$$

– Si $j = 0$,

$$\begin{aligned} P(X_{m+1} = 0) &= \\ &P(X_{m+1} = 0 \mid X_m = n-1)P(X_m = n-1) \\ &+ P(X_{m+1} = 0 \mid X_m = 1)P(X_m = 1) \\ &= \frac{1}{2}P(X_m = n-1) + \frac{1}{2}P(X_m = 1). \end{aligned}$$

– Si $j = n-1$,

$$\begin{aligned} P(X_{m+1} = n-1) &= \\ &P(X_{m+1} = n-1 \mid X_m = n-2)P(X_m = n-2) + \\ &P(X_{m+1} = n-1 \mid X_m = 0)P(X_m = 0) \\ &= \frac{1}{2}P(X_m = n-2) + \frac{1}{2}P(X_m = 0). \end{aligned}$$

Par suite $U_{m+1} = AU_m$, avec $A = \frac{1}{2}(J + {}^t J)$.

Comme la matrice J est orthogonale (les vecteurs colonnes forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$), ${}^t J = J^{-1}$, par suite $A = \frac{1}{2}(J + J^{-1})$.

4. La matrice J s'écrit $J = PDP^{-1}$ avec $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et

$$D = \text{diag}(1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1})$$

alors $A = P\frac{1}{2}(D + D^{-1})P^{-1}$. Par suite les valeurs propres de A sont

$$\frac{1}{2}(\omega^k + \omega^{-k}) = \text{Re}(\omega^k) = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) : 0 \leq k \leq n-1$$

La plus grande valeur propre est 1. Le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur

propre associé à la valeur propre 1. Le vecteur $v_1 = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{pmatrix}$ est

un vecteur propre unitaire associé à 1.

5. La matrice A est une matrice symétrique réelle, il existe une matrice P orthogonale, dont la première colonne est le vecteur v_1 , telle que $A = P \cdot \text{diag}(1, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}) \cdot {}^t P$, avec $\lambda_k = \cos(\frac{2k\pi}{n}) < 1$ pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$. Pour tout entier m on a :

$$A^m = P \cdot \text{diag}(1, \lambda_1^m, \dots, \lambda_{n-1}^m) \cdot {}^t P$$

avec $\lambda_k = \cos(\frac{2k\pi}{n}) < 1$. Par suite :

$$U_m = A^m U_0 = P \cdot \text{diag}(1, \lambda_1^m, \dots, \lambda_{n-1}^m) \cdot {}^t P U_0,$$

et

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \text{diag}(1, \lambda_1^m, \dots, \lambda_{n-1}^m) = \text{diag}(1, 0, 0)$$

Ainsi, $\lim_{m \rightarrow +\infty} U_m = P \cdot \text{diag}(1, 0, \dots, 0) \cdot {}^t P U_0$. Or,

$$\text{diag}(1, 0, \dots, 0) \cdot {}^t P U_0 = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}$$

Il vient,

$$P \text{diag}(1, 0, \dots, 0) \cdot {}^t P U_0 = \frac{1}{\sqrt{n}} P \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{n}} v_1 = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 27 :

1. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}_+^2$. Par concavité de la fonction $\ln$, on a :

$$\ln\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q\right) \geq \ln(a) + \ln(b).$$

On applique la fonction $\exp$ qui est croissante, obtenant l'inégalité :

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q \text{ pour tout } (a, b) \in \mathbb{R}_+^2. \quad (4.43)$$

L'inégalité (4.43) peut être aussi obtenue en étudiant, pour $b \geq 0$ fixé, la fonction $x \mapsto xb - \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}b^q$.

Pour montrer l'inégalité de Holder, on distingue deux cas.

Si $\mathbb{E}(|X|^p) = 0$ ou $\mathbb{E}(|Y|^q) = 0$, alors $|X| = 0$ ou $|Y| = 0$ presque sûrement et de même $|XY|$ donc $\mathbb{E}(|XY|) = 0$ et l'inégalité est vérifiée. Sinon, notons Z et W les variables aléatoires

$$Z = \frac{|X|}{\mathbb{E}(|X|^p)^{\frac{1}{p}}} \text{ et } W = \frac{|Y|}{\mathbb{E}(|Y|^q)^{\frac{1}{q}}}.$$

D'après l'inégalité (4.43), on écrit : $ZW \leq \frac{1}{p}Z^p + \frac{1}{q}W^q$. Par croissance et linéarité de l'espérance, on obtient :

$$\mathbb{E}(ZW) \leq \frac{1}{p}\mathbb{E}(Z^p) + \frac{1}{q}\mathbb{E}(W^q),$$

Comme $\mathbb{E}(Z^p) = \mathbb{E}(W^q) = 1$, on obtient :

$$\frac{\mathbb{E}(|XY|)}{\mathbb{E}(|X|^p)^{\frac{1}{p}}\mathbb{E}(|Y|^q)^{\frac{1}{q}}} = \mathbb{E}(ZW) \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

par suite $\mathbb{E}(|XY|) \leq \mathbb{E}(|X|^p)^{\frac{1}{p}}\mathbb{E}(|Y|^q)^{\frac{1}{q}}$.

2.

- (a) L'inégalité de Jensen se démontre facilement si la variable X est finie. En effet, si $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ et $p(X = x_i) = p_i$ pour tout $1 \leq i \leq n$ alors, par convexité de φ et le fait que $\sum_{i=1}^n p_i = 1$, on obtient :

$$\varphi(\mathbb{E}(X)) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n p_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n p_i \varphi(x_i) = \mathbb{E}(\varphi(X)).$$

Dans le cas général, Notons $m = \mathbb{E}(X)$. La convexité de φ entraîne l'existence d'une fonction affine $g(x) = \alpha x + \beta$ telle que $\varphi(m) = g(m)$ et $\varphi(x) \geq g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (on prend par exemple $g(x) = \varphi'_d(m)(x - m) + \varphi(m)$). En appliquant l'espérance à l'inégalité $\varphi(X) \geq g(X)$, on obtient :

$$\mathbb{E}(\varphi(X)) \geq \mathbb{E}(g(X)) = \alpha \mathbb{E}(X) + \beta = g(\mathbb{E}(X)) = \varphi(\mathbb{E}(X)).$$

- (b) Il suffit d'appliquer l'inégalité de Jensen, en vérifiant la convexité de la fonction $f : x \mapsto \max(x, a)$.
- (c) Considérons la variable aléatoire X à valeurs dans l'ensemble $\left\{ \frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \dots, \frac{1}{x_n} \right\}$ telle que

$$P(X = \frac{1}{x_i}) = x_i \text{ pour tout } 1 \leq i \leq n,$$

et la fonction convexe $\varphi = -\ln$. Par la formule de transfert, on a :

$$\mathbb{E}(\varphi(X)) = -\mathbb{E}(\ln(X)) = -\sum_{i=1}^n x_i \ln\left(\frac{1}{x_i}\right) = \sum_{i=1}^n x_i \ln(x_i).$$

En appliquant l'inégalité de Jensen, il vient :

$$\sum_{i=1}^n x_i \ln(x_i) = \mathbb{E}(\varphi(X)) \geq \varphi(\mathbb{E}(X)) = -\ln(n).$$

Exercice 28 :

1. Par définition de l'espérance conditionnelle, on écrit :

$$\mathbb{E}(\mathbb{I}_A \mid B) = 0 \times P(\mathbb{I}_A = 0 \mid B) + 1 \times P(\mathbb{I}_A = 1 \mid B) = P(A \mid B),$$

puisque l'événement $(\mathbb{I}_A = 1) = A$.

2. Soient B l'événement «le premier dé donne 1» et X la variable aléatoire indiquant la somme obtenue. On a

$$P(X = i \mid B) = \begin{cases} 0 & \text{si } 8 \leq i \leq 12 \\ 1/6 & \text{si } 2 \leq i \leq 7 \end{cases}$$

car, si B est réalisé, $(X = i)$ est réalisé si, et seulement si, le deuxième dé donne $i - 1$. Par suite,

$$\mathbb{E}(X \mid B) = \sum_{i=2}^7 \frac{i}{6} = \frac{9}{2}.$$

3. On écrit :

$$P(X = k \mid (X \text{ pair})) = \frac{P((X = k) \cap (X \text{ pair}))}{P(X \text{ pair})}$$

Or,

$$P(X \text{ pair}) = \sum_{i=0}^{+\infty} P(X = 2i) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(\lambda)^{2i}}{(2i)!} e^{-\lambda} = \text{ch}(\lambda) e^{-\lambda}.$$

Il vient :

$$P(X = 2k \mid (X \text{ pair})) = \frac{P(X = 2k)}{P(X \text{ pair})} = \frac{(\lambda)^{2k}}{(2k)! \text{ch}(\lambda)} \text{ et}$$

$$P(X = 2k + 1 \mid (X \text{ pair})) = 0.$$

Donc

$$\mathbb{E}(X \mid (X \text{ pair})) = \sum_{k=0}^{+\infty} 2k \cdot \frac{(\lambda)^{2k}}{(2k)! \text{ch}(\lambda)} = \frac{\lambda}{\text{ch}(\lambda)} \text{sh}(\lambda).$$

4. On a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X \mid B) &= \sum_{x \in X(\Omega)} x P(X = x \mid B) \\ &= \frac{1}{P(B)} \sum_{x \in X(\Omega)} x P((X = x) \cap B). \end{aligned}$$

Pour tout $x \in X(\Omega)$, $(X = x) \cap B = (\mathbb{I}_B X = x)$, puisque on a : $\omega \in (\mathbb{I}_B X = x)$ si et seulement si, $\mathbb{I}_B(\omega) = 1$ et $X(\omega) = x$. Comme $\mathbb{I}_B X(\Omega) = \{0\} \cup X(\Omega)$, on en déduit par la formule de transfert que :

$$\mathbb{E}(X \mid B) = \frac{1}{P(B)} \sum_{x \in \mathbb{I}_B X(\Omega)} x P(\mathbb{I}_B X = x) = \frac{E(\mathbb{I}_B X)}{P(B)}.$$

5.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$, on écrit :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(Y \mid X = n) &= \sum_{k=0}^{+\infty} k P(Y = k \mid X = n) \\
 &= \sum_{k=0}^{+\infty} k \frac{P(Y = k, X = n)}{P(X = n)} \\
 &= \sum_{k=0}^n k \frac{P(Y = k) P(Z = n - k)}{P(X = n)} \\
 &= \frac{1}{(\lambda + \mu)^n} \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} \lambda^k \mu^{n-k} = \frac{\lambda n}{\lambda + \mu}.
 \end{aligned}$$

où on a utilisé les faits que $X \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$ et la formule

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = nx(x+y)^{n-1}. \text{ On en déduit que :}$$

$$\mathbb{E}(Y \mid X) = \frac{\lambda X}{\lambda + \mu}.$$

(b) On écrit :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y \mid X)) &= \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x) \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y \mid X = x)) \\
 &= \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x) \sum_{y \in Y(\Omega)} y P(Y = y \mid X = x) \\
 &= \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} y P(X = x) P(Y = y \mid X = x) \quad (\otimes) \\
 &= \sum_{y \in Y(\Omega)} y \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x) P(Y = y \mid X = x) \\
 &= \sum_{y \in Y(\Omega)} y P(Y = y) = \mathbb{E}(Y)
 \end{aligned}$$

Pour justifier l'égalité $(\otimes)$, il suffit de montrer la sommabilité de la famille

$$(y P(X = x) P(Y = y \mid X = x))_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)}.$$

Pour tout y fixé la famille $(y P(X = x) P(Y = y \mid X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable puisque

$$|y| P(X = x) P(Y = y \mid X = x) \leq |y| P(X = x),$$

et

$$S_y = \sum_{x \in X(\Omega)} |y| P(X = x) P(Y = y/X = x) = |y| P(Y = y)$$

donc la famille $(S_y)_{y \in Y(\Omega)}$ est sommable. Ce qui montre le résultat.

Exercice 29 :

1. On a : $P(X = k)e^{sk} = \frac{(\lambda e^s)^k}{k!} e^{-\lambda}$ qui est le terme général d'une série convergente et pour tout $s \in \mathbb{R}$, $\phi(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda e^s)^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{\lambda(e^s - 1)}$.
Par la formule de transfert

$$\mathbb{E}(e^{sX}) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{sk} P(X = k) = \phi(s).$$

2. Par indépendance des variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$, la variable aléatoire S_n suit la loi de Poisson de paramètre $n\lambda$ (cf. remarque 177). Comme les variables aléatoires $e^{sX_1}, e^{sX_2}, \dots, e^{sX_n}$ sont indépendantes et suivent toutes la même loi de e^{sX} , on en déduit que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{sS_n}) &= \mathbb{E}(e^{sX_1} e^{sX_2} \dots e^{sX_n}) \\ &= \prod_{i=1}^n \mathbb{E}(e^{sX_i}) = \mathbb{E}(e^{sX})^n = \phi(s)^n. \end{aligned}$$

3.

- (a) La fonction f est croissante, donc la suite $(f(n))_{n \in \mathbb{N}}$ garde un signe constant à partir d'un certain rang, par suite, la convergence de la série $\sum f(n)P(X = n)$ entraîne celle de la série $\sum |f(n)|P(X = n)$. Par le théorème de transfert, on en déduit que la variable aléatoire $f(X)$ admet une espérance finie.
- (b) Comme $f(k) \geq f(M)$ pour tout $k > M$ et $f(k) \geq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, on obtient :

$$\begin{aligned} f(M)P(X > M) &= \sum_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ k > M}} P(X = k) f(M) \leq \sum_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ k > M}} P(X = k) f(k) \\ &\leq \sum_{k \in \mathbb{N}} P(X = k) f(k) = \mathbb{E}(f(X)) \end{aligned}$$

- (c) Soit $s > 0$. La fonction $f : x \mapsto e^{sx}$ est croissante, positive et la série $\sum f(k)P(S_n = k)$ converge. Le résultat de la question précédente, où $M = na$, entraîne

$$\mathbb{E}(e^{sS_n}) \geq P(S_n > na)f(na),$$

ce qui donne

$$\phi(s)^n \geq P(S_n > na)e^{sna}$$

D'où

$$P(S_n > na) \leq e^{-nsa}\phi(s)^n$$

- (d) Pour tout $s > 0$ on a

$$P(S_n > na) \leq e^{-nsa}e^{n\lambda(e^s-1)} = e^{-n(as-\lambda(e^s-1))}. \quad (4.44)$$

La fonction $t \mapsto at - \lambda(e^t - 1)$ admet un maximum $H(a)$ au point $t = \ln(\frac{a}{\lambda}) > 0$ car $a > \lambda$. Donc l'inégalité (4.44) s'écrit pour $s = \ln(\frac{a}{\lambda})$: $P(S_n > na) \leq e^{-nH(a)}$.

4. On suppose que f est décroissante et positive. Soit $M > 0$, donc

$$f(M)P(X < M) = \sum_{k=0}^{E(M)} f(M)P(X = k)$$

où $E(M)$ désigne la partie entière de M . La décroissance et la positivité de f montrent que :

$$\begin{aligned} f(M)P(X < M) &\leq \sum_{k=0}^{E(M)} f(k)P(X = k) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} f(k)P(X = k) \\ &= \mathbb{E}(f(X)). \end{aligned}$$

5. Soit $s < 0$. La fonction $f : x \mapsto e^{sx}$ est décroissante, positive et la série $\sum f(k)P(S_n = k)$ converge. D'après la question précédente, où $M = na$, on obtient :

$$\mathbb{E}(e^{sS_n}) \geq P(S_n < na)f(na)$$

ce qui implique que $\phi(s)^n \geq P(S_n < na)e^{sna}$. D'où

$$P(S_n < na) \leq e^{-nsa}\phi(s)^n = e^{-n(as-\lambda(e^s-1))} \quad (4.45)$$

Pour $0 < a < \lambda$. La fonction $s \mapsto as - \lambda(e^s - 1)$ admet un maximum au point $s = \ln(\frac{a}{\lambda}) < 0$. Donc pour $s = \ln(\frac{a}{\lambda})$ l'inégalité (4.45) s'écrit :

$$P(S_n < na) \leq e^{-nH(a)}$$

Soit $\varepsilon > 0$. On a :

$$\begin{aligned} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \lambda\right| > \varepsilon\right) &\leq P\left(\frac{S_n}{n} - \lambda > \varepsilon\right) + P\left(\frac{S_n}{n} - \lambda < -\varepsilon\right) \\ &\leq P(S_n > n(\lambda + \varepsilon)) + P(S_n < n(\lambda - \varepsilon)) \\ &\leq e^{-nH(\lambda + \varepsilon)} + e^{-nH(\lambda - \varepsilon)} \end{aligned}$$

6. Une étude de fonction montre que

$$H(a) = a \ln\left(\frac{a}{\lambda}\right) - \lambda\left(\frac{a}{\lambda} - 1\right) > 0, \text{ pour tout } 0 < a \neq \lambda.$$

Par suite $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \lambda\right| > \varepsilon\right)$ tend vers 0 pour tout $\varepsilon > 0$.

Exercice 30 :

1. Si X suit une loi de Poisson de paramètre λ alors :

$$n \frac{p_n}{p_{n-1}} = n \frac{\frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}}{\frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda}} = \lambda,$$

donc la suite $(n \frac{p_n}{p_{n-1}})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est constante. Inversement, supposons que la suite $(n \frac{p_n}{p_{n-1}})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est constante égale à λ . Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = \frac{\lambda}{n} p_{n-1}$. Par récurrence on obtient

$$p_n = \left(\prod_{k=1}^n \frac{\lambda}{k}\right) p_0 = \frac{\lambda^n}{n!} p_0, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

En utilisant l'égalité $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$, on en déduit que :

$$p_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = 1, \text{ donc } p_0 = e^{-\lambda}. \text{ Par suite,}$$

$$p_n = P(X = n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}.$$

2.

- (a) Remarquons que l'hypothèse implique que, $P(Z = n) \neq 0$, pour tout entier n et que $Z = X + Y$. Par indépendance de X et Y , on écrit :

$$\begin{aligned} P(X = k)P(Y = m) &= P(X = k, Y = m) \\ &= P(X = k, Z = k + m) \\ &= P(X = k \mid Z = k + m)P(Z = k + m). \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \frac{P(X = k)P(Y = m)}{P(Z = k + m)} &= P(X = k \mid Z = k + m) \\ &= \binom{k + m}{k} p^k (1 - p)^m. \end{aligned}$$

- (b) Il suffit de montrer que $(n \frac{P(X = n)}{P(X = n - 1)})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite constante. De la question 2.a, on en déduit que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $P(X = n) > 0$. Fixons $n \in \mathbb{N}^*$. En divisant les deux égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{P(X = n - 1)P(Y = 2)}{P(Z = n + 1)} &= \binom{n + 1}{n - 1} p^{n-1} (1 - p)^2 \text{ et} \\ \frac{P(X = n)P(Y = 1)}{P(Z = n + 1)} &= \binom{n + 1}{n} p^n (1 - p), \end{aligned}$$

on obtient $\frac{P(X = n)P(Y = 1)}{P(X = n - 1)P(Y = 2)} = \frac{p}{n(1 - p)}$. C'est-à-dire

$$n \frac{P(X = n)}{P(X = n - 1)} = \frac{pP(Y = 2)}{(1 - p)P(Y = 1)} = \lambda.$$

Ce qui montre le résultat.

Exercice 31 :

1. L'inégalité de Markov ne donne pas l'estimation voulue, puisque,

$$P(X \geq 2\lambda) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{4\lambda^2} = \frac{\lambda}{4\lambda^2} = \frac{1}{4\lambda}.$$

On utilise l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Comme on a $\mathbb{E}(X) = \mathbb{V}(X) = \lambda$, on en déduit que

$$P(X \geq 2\lambda) = P(X - \lambda \geq \lambda) \leq P(|X - \lambda| \geq \lambda) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda}.$$

2.

(a) Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Comme $a + x \geq 0$, alors, on écrit

$$\begin{aligned}(U - \mathbb{E}(U) \geq a) &= (U - \mathbb{E}(U) + x \geq a + x) \\ &\subseteq ((U - \mathbb{E}(U) + x)^2 \geq (a + x)^2)\end{aligned}$$

Ce qui donne l'inégalité recherchée, en appliquant l'application P .

(b) Pour tout réel positif x , la variable aléatoire positive $(U - \mathbb{E}(U) + x)^2$ admet une espérance finie, l'inégalité de Markov donc s'applique et on obtient :

$$\begin{aligned}P(U - \mathbb{E}(U) \geq a) &\leq P((U - \mathbb{E}(U) + x)^2 \geq (a + x)^2) \\ &\leq \frac{\mathbb{E}((U - \mathbb{E}(U) + x)^2)}{(a + x)^2} = \frac{\mathbb{V}(U) + x^2}{(a + x)^2}.\end{aligned}$$

Cette inégalité est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}^+$. Il suffit, maintenant, de choisir $x \geq 0$ vérifiant $\frac{\mathbb{V}(U) + x^2}{(a + x)^2} = \frac{\mathbb{V}(U)}{a^2 + \mathbb{V}(U)}$, cette équation admet $\frac{\mathbb{V}(U)}{a}$ comme solution positive.

3. On applique l'inégalité de Cantelli à la variable X , il vient :

$$P(X \geq 2\lambda) = P(X - \lambda \geq \lambda) \leq \frac{\mathbb{V}(U)}{\lambda^2 + \mathbb{V}(U)} = \frac{1}{\lambda + 1}.$$

4.

(a) Remarquons, d'abord, que $G_X(t) = \mathbb{E}(t^X)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. D'autre part, pour tout $t > 1$, on a

$$\begin{aligned}(X \geq a) &\subseteq (\ln(t)X \geq \ln(t)a) \\ &= (\exp(\ln(t)X) \geq \exp(\ln(t)a) = (t^X \geq t^a).\end{aligned}$$

Par l'inégalité de Markov, il vient :

$$P(X \geq a) \leq P(t^X \geq t^a) \leq \frac{\mathbb{E}(t^X)}{t^a} = \frac{G_X(t)}{t^a}.$$

(b) Comme $G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$, donc $G_X(2) = e^\lambda$. En appliquant l'inégalité précédente avec $t = 2$, on obtient :

$$P(X \geq 2\lambda) \leq \frac{G_X(2)}{2^{2\lambda}} = \frac{e^\lambda}{4^\lambda} = \left(\frac{e}{4}\right)^\lambda.$$

Exercice 32 :

1. Supposons que la suite (X_n) converge en moyenne vers X . Fixons $\varepsilon > 0$. La variable aléatoire $|X_n - X|$ est à valeurs positives et possède une espérance. L'inégalité de Markov s'applique :

$$P(|X_n - X| > \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}(|X_n - X|)}{\varepsilon}.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(|X_n - X|) = 0$, on en déduit que,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0.$$

Ce qui montre la convergence en probabilité de la suite (X_n) vers X .

2.

- (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $Y_n(\omega) = 0$ si, et seulement si, il existe $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ tel que $Z_k(\omega) = 0$. Alors

$$(Y_n = 0) = \bigcup_{k=1}^n (Z_k = 0) \text{ et } (Y_n \neq 0) = \bigcap_{k=1}^n (Z_k \neq 0),$$

donc

$$P(Y_n \neq 0) = P\left(\bigcap_{k=1}^n (Z_k \neq 0)\right)$$

Par indépendance il vient :

$$\begin{aligned} P(Y_n \neq 0) &= \prod_{k=1}^n P(Z_k \neq 0) = \prod_{k=1}^n (1 - P(Z_k = 0)) \\ &= (1 - e^{-\lambda})^n. \end{aligned}$$

- (b) Soit $\varepsilon > 0$. Il faut montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|Y_n| > \varepsilon) = 0$. La variable Y_n est positive car les variables $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ prennent des valeurs positives ou nulles, donc

$$P(|Y_n| > \varepsilon) = P(Y_n > \varepsilon) \leq P(Y_n \neq 0) = (1 - e^{-\lambda})^n$$

Comme $0 \leq 1 - e^{-\lambda} < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - e^{-\lambda})^n = 0$, ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|Y_n| > \varepsilon) = 0$. La suite (Y_n) converge en probabilité vers la variable certaine 0.

3.

- (a) Si Y_n converge en moyenne vers Y , alors elle converge vers Y en probabilité, d'après la première question. Par unicité de la limite presque sûrement, $Y = 0$ presque sûrement.
- (b) Par indépendance des variables aléatoires $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$,

$$\mathbb{E}(Y_n) = \prod_{k=1}^n \mathbb{E}(Z_k) = \lambda^n$$

Par croissance de l'espérance, il vient :

$$\mathbb{E}(|Y_n|) \geq \mathbb{E}(Y_n) = \lambda^n,$$

Comme $\lambda > 1$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(|Y_n - Y|) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(|Y_n|) = +\infty.$$

Ce qui est absurde car, par hypothèse, la suite $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en moyenne vers Y .

4. La suite $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en probabilité sans converger en moyenne.

Exercice 33 :

1. On a $S_N(\Omega) \subseteq \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$(S_N = k) = \bigcup_{n=0}^{+\infty} (N = n) \cap (X_1 + X_2 + \dots + X_n = k).$$

Donc, l'ensemble $(S_N = k)$ est un événement puisqu'il est réunion dénombrable d'événements. Ainsi S_N est une variable aléatoire.

2. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, la somme des n variables aléatoires indépendantes (avec $S_0 = 0$).

Alors, $G_{S_n}(t) = \prod_{i=1}^n G_{X_i}(t) = (G_{X_1}(t))^n$ pour tout $t \in [-1, 1]$.

Soit $t \in [-1, 1]$. On a $G_{S_N}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} t^k P(S_N = k)$. Par indépen-

dance de variables aléatoires, on écrit :

$$\begin{aligned} P(S_N = k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P((N = n) \cap (X_1 + X_2 + \dots + X_n = k)) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(N = n) P(X_1 + X_2 + \dots + X_n = k) \end{aligned}$$

On trouve :

$$P(S_N = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(N = n) P(S_n = k). \quad (4.46)$$

Par suite,

$$\begin{aligned} G_{S_N}(t) &= \sum_{k=0}^{+\infty} t^k \sum_{n=0}^{+\infty} P(N = n) P(S_n = k) \\ &\stackrel{\otimes}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} P(N = n) \sum_{k=0}^{+\infty} t^k P(S_n = k) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(N = n) G_{S_n}(t) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(N = n) (G_{X_1}(t))^n = G_N(G_{X_1}(t)). \end{aligned}$$

Pour justifier $(\otimes)$, on montre que la série double

$$(P(N = n) t^k P(S_n = k))_{(n,k) \in \mathbb{N}^2}$$

est sommable. Pour n fixé, la série de terme général

$$(P(N = n) |t|^k P(S_n = k))_{k \in \mathbb{N}}$$

est convergente et

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{+\infty} P(N = n) |t|^k P(S_n = k) \\ &\leq P(N = n) \sum_{k=0}^{+\infty} P(S_n = k) = P(N = n). \end{aligned}$$

Comme la série $\sum_{n \geq 0} P(N = n)$ est convergente alors la série

$\sum_{n \geq 0} (\sum_{k=0}^{+\infty} P(N = n) |t|^k P(S_n = k))$ converge, ce qui montre la sommabilité de la famille $(P(N = n)t^k P(S_n = k))_{(n,k) \in \mathbb{N}^2}$.

3. Le fait que N et X_1 ont une espérance finie implique que les fonctions G_{X_1} et G_N sont dérivables sur $[0, 1]$ (voir proposition 173). Comme $G_{X_1}(t) \in [0, 1]$ pour tout $t \in [0, 1]$, on en déduit que G_N est dérivable en 1, donc G_N admet une espérance finie. On écrit :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S_N) &= G'_{S_N}(1) = G'_{X_1}(t) G'_N(G_{X_1}(1)) \\ &= \mathbb{E}(X_1) \mathbb{E}(N),\end{aligned}$$

car, $G_{X_1}(1) = 1$.

4. D'après la formule de Wald,

$$\mathbb{E}(S_N) = \mathbb{E}(X_1) \mathbb{E}(N) = p\lambda$$

Soit $k \in \mathbb{N}$, en utilisant l'égalité (4.46), on obtient :

$$P(S_N = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(N = n) P(S_n = k)$$

avec $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, S_n est la somme de n variables indépendantes qui suivent la loi de Bernoulli de paramètre p , donc S_n suit la loi binomiale de paramètre (n, p) (cf. remarque 179). Par suite

$$\begin{aligned}P(S_N = k) &= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^k}{k!}\end{aligned}$$

On retrouve ainsi $\mathbb{E}(S_N) = \lambda p$, puisque S_N suit la loi de Poisson de paramètre λp

Exercice 34 :

1. Comme $0 \leq X_i^2 \leq X_i^4 + 1$ et la variable $X_i^4 + 1$ admet une espérance finie, on en déduit que X_i admet un moment d'ordre 2.

2. En développant S_n^4 et en utilisant de la linéarité de l'espérance, il vient :

$$\mathbb{E}(S_n^4) = \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=1}^n \mathbb{E}(X_{i_1} X_{i_2} X_{i_3} X_{i_4}).$$

Par indépendance, pour tous entiers distincts $i, j, k, l \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{E}(X_i X_j^3) = \mathbb{E}(X_i) \mathbb{E}(X_j^3) = 0 \text{ et } \mathbb{E}(X_i X_j X_k X_l) = 0.$$

Par suite

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S_n^4) &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i^4) + \sum_{\substack{(i,j) \in \{1,2,\dots,n\}^2 \\ i \neq j}} \mathbb{E}(X_i^2 X_j^2) \\ &= n \mathbb{E}(X_1^4) + 2 \binom{n}{2} \mathbb{E}(X_1^2) = na + n(n-1)v. \end{aligned}$$

3. En appliquant l'inégalité de Markov, on obtient :

$$\begin{aligned} P\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geq \varepsilon\right) &= P(|S_n| \geq n\varepsilon) = P(S_n^4 \geq n^4 \varepsilon^4) \\ &\leq \frac{\mathbb{E}(S_n^4)}{n^4} = \frac{na + n(n-1)v}{n^4} = O\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Ce qui montre que la série $\sum P(|\frac{S_n}{n}| \geq \varepsilon)$ converge.

4. On a : $\omega \in B$ si et seulement, si pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ il existe un rang n tel que $|\frac{S_p}{p}| < \frac{1}{k}$ pour tout $p \geq n$, ce qui est équivalent à dire que $\omega \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{p \geq n} (|\frac{S_p}{p}| < \frac{1}{k})$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Donc $\omega \in B$ si, et seulement si, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\omega \in B_k$.
5. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la série $\sum P(|\frac{S_n}{n}| \geq \frac{1}{k})$ converge, par le lemme de Borel-Cantelli, on en déduit que :

$$P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{p \geq n} (|\frac{S_p}{p}| \geq \frac{1}{k})\right) = P(\overline{B_k}) = 0.$$

D'où $P(B_k) = 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. La suite d'événements $(B_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante, par suite

$$P(B) = P\left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} B_k\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} P(B_k) = 1.$$

Ce qui montre la convergence presque partout de la suite $(\frac{S_n}{n})$ vers 0.

Remarques : Le résultat est vrai si on ne suppose pas que X_1^4 est intégrable, mais sa preuve sous l'hypothèse X_1 intégrable nécessite des résultats de la théorie de l'intégration.

Exercice 35 :

1. (a) Par hypothèse, la série de terme général $(P(U_n \geq \sigma))_{n \in \mathbb{N}^*}$ diverge, en on déduit par application du lemme de Borel-Cantelli (cf. exercice 18 du chapitre 3) que $P(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i \geq n} (U_i \geq \sigma)) = 1$.
- (b) Soit $\omega \in A$, alors il existe une sous suite $(U_{n_k}(\omega))$ tel que $U_{n_k}(\omega) \geq \sigma$. Par suite la série $\sum U_n(\omega)$ diverge grossièrement. On en déduit que la série $\sum U_n$ diverge sur $\Omega \setminus A$, c'est-à-dire la série diverge presque sûrement.
- 2.

- (a) On démontre, d'abord, que $|\mathbb{I}_A - \mathbb{I}_B| \leq \mathbb{I}_{A \cap \bar{B}} + \mathbb{I}_{\bar{A} \cap B}$. En effet, clairement on a l'inégalité $\mathbb{I}_A \leq \mathbb{I}_B + \mathbb{I}_{\bar{A} \cap B}$ donc $\mathbb{I}_A - \mathbb{I}_B \leq \mathbb{I}_{\bar{A} \cap B}$ de même on montre $\mathbb{I}_B - \mathbb{I}_A \leq \mathbb{I}_{A \cap \bar{B}}$ ce qui donne l'inégalité recherchée. En appliquant la fonction espérance à cette inégalité, on obtient :

$$\begin{aligned} |P(A) - P(B)| &= |E(\mathbb{I}_A - \mathbb{I}_B)| \leq E(|\mathbb{I}_A - \mathbb{I}_B|) \\ &\leq E(\mathbb{I}_{A \cap \bar{B}} + \mathbb{I}_{\bar{A} \cap B}) = P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B). \end{aligned}$$

On pourra aussi montrer directement l'inégalité, on démontrant les inégalités :

$$P(A) - P(B) \leq P(A \cap \bar{B}) \text{ et } P(B) - P(A) \leq P(\bar{A} \cap B).$$

- (b) En appliquant l'inégalité précédente, on obtient pour tout entier n :

$$\begin{aligned} |P(X = n) - P(Y = n)| \\ \leq P(X = n, Y \neq n) + P(X \neq n, Y = n). \end{aligned}$$

Comme on a l'égalité :

$$(X \neq Y) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (X = n, Y \neq n) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (X \neq n, Y = n),$$

on en déduit par σ -additivité de l'application probabilité que les séries $\sum P(X = n, Y \neq n)$ et $\sum P(X \neq n, Y = n)$ convergent et on a :

$$P(X \neq Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n, Y \neq n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X \neq n, Y = n).$$

Compte tenu de l'inégalité précédente, on en déduit que la série $\sum |P(X = n) - P(Y = n)|$ est convergente et que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |P(X = n) - P(Y = n)| \leq 2P(X \neq Y).$$

Pour tout réel $t \in [-1, 1]$, on écrit

$$\begin{aligned} |G_X(t) - G_Y(t)| &\leq \sum_{n=0}^{+\infty} |P(X = n) - P(Y = n)| |t|^n \\ &\leq \sum_{n=0}^{+\infty} |P(X = n) - P(Y = n)| \leq 2P(X \neq Y). \end{aligned}$$

3.

- (a) On écrit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Z_n = \bigcup_{i=n}^{+\infty} (U_i \neq 0)$, ce qui montre que Z_n est un événement pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est clairement décroissante. D'autre part comme

$$P(Z_n) \leq \sum_{i=n}^{+\infty} P(U_i \neq 0)$$

et la série $\sum P(U_i \neq 0)$ converge, on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(Z_n) = 0.$$

- (b) D'après la question précédente, on a :

$$P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} Z_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(Z_n) = 0,$$

par le théorème de continuité décroissante. Soit A l'événement

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{i=n}^{+\infty} (U_i \neq 0) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} Z_n \text{ qui décrit la propriété «une infinité}$$

des événements $(U_i \neq 0)$ sont réalisés». On a, donc, $P(\bar{A}) = 1$, c'est-à-dire que l'événement «un nombre fini des événements $(U_i \neq 0)$ sont réalisés» est presque certain.

- (c) Si $\omega \in \bar{A}$ alors l'ensemble $\{i \in \mathbb{N} : U_i(\omega) \neq 0\}$ est fini, donc la série $\sum U_i(\omega)$ converge. Par suite la série $\sum U_i$ converge simplement sur $\Omega \setminus A$ avec $P(A) = 0$. D'après la question 1.a, on a :

$$|G_{S_n}(t) - G_S(t)| \leq 2P(S_n \neq S) \text{ pour tout } t \in [-1, 1].$$

Il suffit, pour montrer la convergence uniforme, de montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(S_n \neq S) = 0$. Remarquons que si $\omega \in \bar{A}$ alors il existe un entier $n \in \mathbb{N}$, telle que $U_i(\omega) = 0$ pour tout $n \geq i$ et donc $S_n(\omega) = S(\omega)$. C'est-à-dire $\bar{A} \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (S_n = S)$. La suite d'événements $((S_n = S))_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, puisque $S_n \leq S_{n+1} \leq S$, en appliquant le théorème de continuité croissante que :

$$P(\bar{A}) = 1 = P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (S_n = S)\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(S_n = S).$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(S_n \neq S) = 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} P(S_n = S) = 0.$$

4.

- (a) Comme

$$0 \leq P(X_i \neq 0) = 1 - P(X_i = 0) = 1 - e^{-\lambda_i} \leq \lambda_i$$

et la série $\sum \lambda_i$ converge, on en déduit la convergence de la série $\sum P(X_i \neq 0)$.

- (b) D'après la question 2.C, la série $\sum X_i$ converge presque sûrement vers $X = \sum_{i=1}^{+\infty} X_i$. Notons, $X_n = \sum_{i=1}^n X_i$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par indépendances, on écrit, pour tout $t \in [-1, 1]$:

$$G_{X_n}(t) = \prod_{i=1}^n G_{X_i}(t) = \prod_{i=1}^n e^{\lambda_i(t-1)} = \exp\left((t-1) \sum_{i=1}^n \lambda_i\right).$$

On sait que la suite G_{X_n} converge vers G_X uniformément, donc simplement, sur $[-1, 1]$, par suite :

$$G_X(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \exp((t-1) \sum_{i=1}^n \lambda_i) = e^{(t-1)\lambda}.$$

On en déduit que X suit la loi de Poisson de paramètre λ .

Exercice 36 :

1. On a :

$$(a + S_n)(\Omega) = \left\{ a + \frac{k}{n} : k \in \mathbb{N} \right\}$$

Par la formule de transfert,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(f(a + S_n)) &= \sum_{k=0}^{+\infty} f(a + \frac{k}{n}) P(a + S_n = a + \frac{k}{n}) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} f(a + \frac{k}{n}) P(S_n = \frac{k}{n}) \end{aligned}$$

Or

$$P(S_n = \frac{k}{n}) = P(X_1 + X_2 + \dots + X_n = k) = e^{-nh} \frac{(nh)^k}{k!}$$

car, $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ suit la loi de Poisson de paramètre nh (cf. remarque 177). Donc

$$\mathbb{E}(f(a + S_n)) = e^{-nh} \sum_{k=0}^{+\infty} f(a + \frac{k}{n}) \frac{(nh)^k}{k!} \quad (4.47)$$

2. Les variables X_n sont indépendantes et de même loi, possédant une espérance h et une variance. D'après la loi faible des grands nombres, on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|S_n - h| \geq \mu) = 0$$

3. Par continuité de la fonction $y \mapsto f(a + y)$ au point h , il existe $\mu > 0$ tel que si $|y - h| < \mu$ on a $|f(a + y) - f(a + h)| < \varepsilon$. Par suite, pour tout $y \geq 0$, on a :

$$|f(a + y) - f(a + h)| \geq \varepsilon \text{ implique } |y - h| \geq \mu$$

Donc,

$$|f(a + S_n) - f(a + h)| \geq \varepsilon \text{ implique } |S_n - h| \geq \mu$$

Ainsi on a l'inclusion :

$$(|f(a + S_n) - f(a + h)| \geq \varepsilon) \subseteq (|S_n - h| \geq \mu),$$

ce qui montre que

$$0 \leq P(|f(a + S_n) - f(a + h)| \geq \varepsilon) \leq P(|S_n - h| \geq \mu).$$

Par passage à la limite, on obtient

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|f(a + S_n) - f(a + h)| \geq \varepsilon) = 0$$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} & |\mathbb{E}(f(a + S_n) - f(a + h))| \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} (f(a + \frac{k}{n}) - f(a + h)) P(S_n = \frac{k}{n}) \\ &\leq \sum_{k=0}^{+\infty} \left| f(a + \frac{k}{n}) - f(a + h) \right| P(S_n = \frac{k}{n}). \end{aligned}$$

Posons,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{\frac{k}{n} \in A_n} \left| f(a + \frac{k}{n}) - f(a + h) \right| P(S_n = \frac{k}{n}) \text{ et} \\ T_n &= \sum_{\frac{k}{n} \in B_n} \left| f(a + \frac{k}{n}) - f(a + h) \right| P(S_n = \frac{k}{n}). \end{aligned}$$

On a, donc : $|\mathbb{E}(f(a + S_n) - f(a + h))| \leq S_n + T_n$. Comme, on a :

$$\begin{aligned} S_n &\leq 2 \|f\|_{\infty} \sum_{\frac{k}{n} \in A_n} P(S_n = \frac{k}{n}) = 2 \|f\|_{\infty} P(S_n \in A_n) \text{ et} \\ T_n &\leq \varepsilon \sum_{\frac{k}{n} \in B_n} P(S_n = \frac{k}{n}) \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

on obtient :

$$|\mathbb{E}(f(a + S_n) - f(a + h))| \leq 2 \|f\|_\infty P(S_n \in A_n) + \varepsilon.$$

5. Comme $P(S_n \in A_n) = P(|f(a + S_n) - f(a + h)| \geq \varepsilon)$ tend vers 0 à l'infinie, on en déduit qu'il existe un rang n_0 tel que pour $n \geq n_0$ on a : $2 \|f\|_\infty P(S_n \in A_n) < \varepsilon$. Donc, pour $n \geq n_0$,

$$|\mathbb{E}(f(a + S_n) - f(a + h))| < 2\varepsilon.$$

Le réel ε est choisi arbitraire, on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(f(a + S_n)) = f(a + h).$$

En utilisant l'égalité (4.47), on obtient :

$$\begin{aligned} f(a + h) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(f(a + S_n)) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-nh} \sum_{k=0}^{+\infty} f\left(a + \frac{k}{n}\right) \frac{(nh)^k}{k!}. \end{aligned}$$

Chapitre 5

Sujets de révisions

Sujet 1 : loi hypergéométrique

Dans un jeu, il y a n numéros (de 1 à n) dont p numéros gagnants choisis à l'avance et connus du seul meneur de jeu. On suppose $n \in \mathbb{N}^*$, $p \leq \frac{n}{3}$. Dans la première phase du jeu, le joueur tire au hasard, successivement et sans remise, p numéros différents. Le meneur dévoile alors p numéros perdants parmi les $n - p$ numéros qui n'ont pas été tirés. Dans la deuxième phase du jeu, le joueur a le choix entre deux stratégies.

- Stratégie A : il garde les p numéros qu'il a tirés.
- Stratégie B : il échange les p numéros qu'il a tirés contre p nouveaux numéros tirés au hasard, successivement et sans remise, parmi les $n - 2p$ numéros qui n'ont été ni tirés, ni dévoilés durant la première phase.

Le but de ce problème est de déterminer laquelle des deux stratégies permet d'espérer obtenir le plus de numéros gagnants.

A Étude de la stratégie A :

On note X la variable aléatoire égale au nombre de numéros gagnants parmi les p numéros tirés dans la première phase.

1. Quelle est la loi de X .
2. En déduire la formule de Van der Monde : $\sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \binom{n-p}{p-k} = \binom{n}{p}$.
3. Montrer que X est la somme de p variables aléatoires suivent tous une même loi de Bernoulli.

4. Calculer l'espérance de X est déduire la formule :

$$\sum_{k=0}^p k \binom{p}{k} \binom{n-p}{p-k} = \frac{p^2}{n} \binom{n}{p}.$$

B Étude de la stratégie B :

Pour $1 \leq i \leq p$, on note Z_i la variable aléatoire égale à 1 si le i -ème numéro tiré dans la deuxième phase est gagnant, 0 sinon. On note Z la variable aléatoire égale au nombre de numéros gagnants parmi les p numéros tirés dans la deuxième phase.

1. Soient $0 \leq k \leq p$ et $1 \leq i \leq p$, calculer la probabilité conditionnelle : $P(Z_i = 1 \mid X = k)$.
2. Pour $1 \leq i \leq p$ démontrer que :

$$P(Z_i = 1) = \frac{1}{(n-2p) \binom{n}{p}} \sum_{k=0}^p (p-k) \binom{p}{k} \binom{n-p}{n-k}.$$

3. Montrer que $Z = \sum_{i=1}^p Z_i$, puis calculer $\mathbb{E}(Z)$.
4. Des stratégies A et B, laquelle est préférable ? *On pourra comparer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(Z)$, qui correspondent au nombre moyen de numéros gagnants dans chaque stratégie.*

Sujet 2 : convergence presque sûre.

L'objectif de ce problème est d'étudier la convergence presque sûre de variables aléatoires.

Partie A. Distance entre lois de variables aléatoires

L'objet de cette partie est d'étudier l'approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson. Toutes les variables aléatoires considérées sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ et sont à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $p_k = \mathbb{P}(X = k)$ et $q_k = \mathbb{P}(Y = k)$. On définit la distance entre X et Y par :

$$d(X, Y) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} |p_k - q_k|.$$

1. Montrer que $d(X, Y)$ est bien définie. Que dire des variables aléatoires X et Y quand $d(X, Y) = 0$?
2. Soit A une partie de $\mathbb{N}$. Montrer que

$$|\mathbb{P}(x \in A) - \mathbb{P}(Y \in A)| \leq d(X, Y).$$

On pourra remarquer que

$$|\mathbb{P}(x \in A) - \mathbb{P}(Y \in A)| = |\mathbb{P}(x \in \bar{A}) - \mathbb{P}(Y \in \bar{A})|.$$

3. Exemple : Soit $p \in]0, 1[$. On suppose que X est une variable suivant la loi de Bernoulli de paramètre p et Y une variable suivant la loi de Poisson de paramètre p . Calculer $d(X, Y)$ et montrer que $d(X, Y) \leq p^2$. (On pourra démontrer d'abord que $e^x \geq 1 + x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$).
4. Démontrer la formule : $d(X, Y) = 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \min(p_k, q_k)$.
5. En déduire que : $d(X, Y) \leq \mathbb{P}(X \neq Y)$.
6. Vérifier que pour tout $x \in [0, 1]$, le réel $f(x) = 1 - (1 - x)e^x \in [0, 1]$.
Soit $U_1, \dots, U_n, Y_1, \dots, Y_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes. On suppose que, pour $1 \leq i \leq n$, U_i suit la loi de Bernoulli de paramètre $f(\frac{\lambda}{n})$ et Y_i suit la loi de Poisson de paramètre $\frac{\lambda}{n}$ (avec $0 < \lambda < n$). On pose, $Y = \sum_{i=1}^n Y_i$.
7. Montrer que Y suit une loi de Poisson.
Enfin, pour $0 \leq i \leq n$, on considère la variable de Bernoulli X_i telle que $X_i = 0$ si $U_i = Y_i = 0$ et $X_i = 1$ sinon.
- 8.

(a) Déterminer pour tout i , la loi de X_i . En déduire la loi de $X = \sum_{i=1}^n X_i$.

(b) Montrer que $\mathbb{P}(X_i \neq Y_i) = \frac{\lambda}{n}(1 - e^{-\frac{\lambda}{n}})$ et déduire que

$$\mathbb{P}(X_i \neq Y_i) \leq \frac{\lambda^2}{n^2}.$$

(c) Montrer l'inclusion : $(X \neq Y) \subseteq \bigcup_{i=1}^n (X_i \neq Y_i)$.

(d) En déduire l'inégalité de Le Cam : $d(X, Y) \leq \frac{\lambda^2}{n}$.

Partie B. Convergence presque sûrement

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles et X une variable aléatoire réelle définies sur $(\Omega, \mathcal{B}, P)$. On pose :

$$B = \{\omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow +\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}.$$

On dit que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge presque sûrement vers X si $P(B) = 1$.

Soit pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $C_k = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{p \geq n} (|X_p - X| \leq \frac{1}{k})$.

1. Montrer que $\omega \in B$ si, et seulement si, $\omega \in C_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
2. En déduire que $P(B) = \lim_{k \rightarrow +\infty} P(C_k)$.
3. On suppose que pour tout $\varepsilon > 0$, $P(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{p \geq n} (|X_p - X| > \varepsilon)) = 0$. Montrer que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge presque sûrement vers X .
4. Montrer que si la série de terme général $P(|X_n - X| > \varepsilon)$ converge alors la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge presque sûrement vers X .

Partie C. Transformée de Laplace

Soit X une variable aléatoire discrète définie sur $(\Omega, \mathcal{B}, P)$. On suppose qu'il existe un intervalle $]\alpha, \beta[$ contenant 0 tel que la variable aléatoire e^{tX} admet une espérance finie, pour tout $t \in]\alpha, \beta[$. La transformée de Laplace de X est la fonction L_X définie par $L_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX})$ pour tout $t \in]\alpha, \beta[$.

1. Soient $k \in \mathbb{N}^*$, $[a, b] \subseteq]\alpha, \beta[$ et $\delta > 0$ tels que $[a - \delta, b + \delta] \subseteq]\alpha, \beta[$.
 - (a) Montrer qu'il existe un réel $C_1 > 0$ tel que pour tous réels $u \geq 0$ et $t \in [a, b]$, on a : $u^k e^{tu} \leq C_1 e^{(b+\delta)u}$.
 - (b) Montrer qu'il existe un réel $C > 0$ tel que pour tous réels u et $t \in [a, b]$, on a : $|u|^k e^{tu} \leq C(e^{(b+\delta)u} + e^{(a-\delta)u})$.
2. En déduire que $X^k e^{tX}$ admet une espérance finie pour tout $t \in]\alpha, \beta[$.
3. On pose $X(\Omega) = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Montrer que L_X est de classe C^∞ sur $]\alpha, \beta[$ et que

$$L_X^{(k)}(t) = \mathbb{E}(X^k e^{tX}) \text{ pour tout } t \in]\alpha, \beta[.$$

4. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$, X possède un moment d'ordre k .
On note m l'espérance de X .
5. On pose, pour tout $t \in]\alpha, \beta[$, $\Psi(t) = \ln(L_X(t))$.
Calculer $\Psi(t)$ et montrer que $\Psi'(t)$ est croissante sur $]\alpha, \beta[$. On note l_1 et l_2 la limite de Ψ' (finie ou infinie) en α et β respectivement.

6. Soit $c \in]l_1, l_2[$. On pose $f_c(t) = ct - \Psi(t)$ pour tout $t \in]\alpha, \beta[$. Etudier les variations de f_c sur $] \alpha, \beta[$. On note $g(c)$ le maximum de f_c .
7. Justifier que $m \in]l_1, l_2[$. Montrer que :

$$\begin{cases} g(c) = \max_{t \in]\alpha, 0[} (ct - \Psi(t)) & \text{si } c < m \\ g(c) = \max_{t \in]0, \beta[} (ct - \Psi(t)) & \text{si } c > m \end{cases}.$$

8. On considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes suivant la même loi que X . On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

(a) Soit $c \in]l_1, m[$ et $t \in]\alpha, 0[$. Montrer que

$$\left(\frac{S_n}{n} \leq c\right) = (e^{t \cdot S_n} \geq e^{ntc}),$$

et déduire que $P\left(\frac{S_n}{n} \leq c\right) \leq e^{-n(ct - \psi(t))}$.

(b) Montrer que $P\left(\frac{S_n}{n} \leq c\right) \leq e^{-ng(c)}$.

(c) Si $c \in]m, l_2[$. Montrer de même que $P\left(\frac{S_n}{n} \geq c\right) \leq e^{-ng(c)}$.

(d) En déduire que pour $\varepsilon > 0$ assez petit, on a :

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) \leq 2e^{-n \cdot h},$$

avec $h = \min(g(m + \varepsilon), g(m - \varepsilon))$.

9. En utilisant le résultat de la partie B, montrer que la suite $\left(\frac{S_n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge presque sûrement vers m .

Sujet 3 : extrait du sujet centrale 2016 MP

Le problème étudie quelques propriétés des variables aléatoires réelles finies de la forme $\sum_{k=1}^n a_k X_k$, où les a_k sont des réels et les X_k sont de variables aléatoires mutuellement indépendantes à valeurs dans $\{1, -1\}$. La première partie établit des résultats sur des intégrales, utilisés dans les parties suivantes.

À partir de la deuxième partie, on suppose donnée une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$, à valeurs dans $\{1, -1\}$ et vérifiant, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$P(X_k = 1) = P(X_k = -1) = \frac{1}{2}.$$

I. Suites et intégrales**I.A – Étude d’une intégrale à paramètre :**

Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} e^{-xt} dt$.

I.A.1) Montrer que f est définie et continue sur $[0, +\infty[$ et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$.

I.A.2) Déterminer les limites de f et f' en $+\infty$.

I.A.3) Exprimer f'' sur $]0, +\infty[$ à l’aide de fonctions usuelles et en déduire que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \ln(x) - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1)$.

I.A.4) Montrer que

$$\begin{cases} f(x) = x \ln(x) - \frac{1}{2} x \ln(x^2 + 1) - \arctan(x) + \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = \frac{\pi}{2} \end{cases}.$$

I.A.5) Montrer pour tout $s \in \mathbb{R}$, $|s| = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(st)}{t^2} dt$.

I.B – Étude d’une suite d’intégrales :

Dans cette section, on étudie la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$u_n = \int_0^{+\infty} \frac{1 - (\cos t)^n}{t^2} dt \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

I.B.1) Justifier l’existence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et préciser la monotonie de la sous-suite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$.

I.B.2) Montrer que $u_1 = u_2 = \frac{\pi}{2}$.

I.C – Calcul d’un équivalent de u_n :

I.C.1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{2}} v_n \text{ avec } v_n = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos^n(\sqrt{\frac{2u}{n}})}{u\sqrt{u}} du.$$

I.C.2) Montrer que pour tout $(n, u) \in \mathbb{N}^* \times]0, 1]$,

$$\left| 1 - \cos^n\left(\sqrt{\frac{2u}{n}}\right) \right| \leq u$$

I.C.3) Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ admet une limite finie l vérifiant :

$$l = \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-u}}{u\sqrt{u}} du$$

I.C.4) On admet la relation $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du = \sqrt{\pi}$. Conclure que

$$u_n \sim \frac{\sqrt{n\pi}}{\sqrt{2}}.$$

II Autour du pile ou face

Dans cette partie, comme il est indiqué dans le préambule, on considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes, à valeurs dans $\{1, -1\}$ et telles que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$P(X_k = 1) = P(X_k = -1) = \frac{1}{2}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$.

L'espérance d'une variable aléatoire réelle finie Z est notée $\mathbb{E}(Z)$ et sa variance $\mathbb{V}(Z)$.

II.A – Étude de $\mathbb{E}(|S_n|)$

II.A.1) Déterminer l'espérance et la variance de S_n .

II.A.2) Soient S et T deux variables aléatoires réelles finies indépendantes définies sur $(\Omega, \mathcal{B}, P)$. On suppose que T et $-T$ ont même loi.

Montrer que $\mathbb{E}(\cos(S + T)) = \mathbb{E}(\cos(S))\mathbb{E}(\cos(T))$.

II.A.3) On considère la fonction φ_n de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel t , $\varphi_n(t) = \mathbb{E}(\cos(S_n t))$. Montrer que $\varphi_n(t) = (\cos t)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}$.

II.A.4) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}(|S_n|) = \frac{2}{\pi} u_n$. On utilisera l'expression intégrale de la valeur absolue obtenue à la question I.A.5.

II.A.5) Dédurre de la question précédente que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n+1} = u_{2n+2}$.

II.B – Étude de $\frac{S_n}{n}$

On se propose de démontrer que la suite $(\frac{S_n}{n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge presque sûrement vers 0, c'est-à-dire qu'il existe un événement négligeable

$Z \in \mathcal{B}$ tel que $\frac{S_n(\omega)}{n} \longrightarrow 0$ quand $n \mapsto +\infty$ pour tout $\omega \in \Omega \setminus Z$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $U_n = (\frac{S_n}{n})^4$ et

$$Z_n = \left\{ \omega \in \Omega : \text{il existe } k \geq n \text{ tel que } U_k(\omega) \geq \frac{1}{\sqrt{k}} \right\}.$$

II.B.1) Montrer que $\mathbb{E}(S_n^4) = 3n^2 - 2n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

II.B.2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(U_n \geq \frac{1}{\sqrt{n}}) \leq \frac{3}{n\sqrt{n}}$.

II.B.3) Montrer que $Z_n \in \mathcal{B}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et que

$$\lim_{n \mapsto +\infty} P(Z_n) = 0.$$

II.B.4) En considérant $Z = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} Z_n$, montrer que $(\frac{S_n}{n})$ converge presque sûrement vers 0.

III D'autres sommes aléatoires

On conserve la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de la partie précédente et on considère de plus une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de réels positifs ou nuls. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$T_n = \sum_{k=1}^n a_k X_k.$$

III.A – Étude de $E(|T_n|)$

III.A.1) Montrer que la suite $(\mathbb{E}(|T_n|))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

III.A.2) Montrer que si la série $\sum a_n^2$ est convergente, alors la suite $(\mathbb{E}(|T_n|))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.

III.A.3) On suppose que $a_1 \geq a_2 + a_3 + \dots + a_n$. Montrer que $\mathbb{E}(|T_n|) = \mathbb{E}(|T_1|) = a_1$.

III.B – Application à une suite d'intégrales

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $J_n = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t) \cos(\frac{t}{3}) \dots \cos(\frac{t}{2n-1})}{t^2} dt$.

III.B.1) Montrer que $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite bien définie et qu'elle est croissante et convergente. On posera $a_k = \frac{1}{2k-1}$ et on exprimera l'espérance de $|T_n|$ avec la méthode de la question II.A.4.

III.B.2) Montrer que $J_n = \frac{2}{\pi}$ pour tout $1 \leq n \leq 7$ et que $(J_n)_{n \geq 7}$ est strictement croissante.

Sujet 4 : extrait du sujet Mines-Ponts 2015

Soit n un entier strictement positif. On identifie $\mathbb{R}^n$ à l'espace $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ des vecteurs colonnes à n coordonnées réelles. Pour tout $x = {}^t(x_1, \dots, x_n)$ dans $\mathbb{R}^n$, on note :

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{1 \leq i \leq n} x_i^2}.$$

La sphère unité de $\mathbb{R}^n$ est notée $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n ; \|x\| = 1\}$. On identifie une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé et on note $\sigma(M)$ l'ensemble de ses valeurs propres réelles.

A. Norme d'opérateur d'une matrice

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que S^{n-1} est un compact de $\mathbb{R}^n$ et en déduire l'existence de

$$\|M\|_{op} = \max\{\|Mx\| ; x \in S^{n-1}\}.$$

2. Montrer que l'application qui à $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associe $\|M\|_{op}$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que pour tous x et y dans $\mathbb{R}^n$, on a l'inégalité

$$\|Mx - My\| \leq \|M\|_{op} \|x - y\|.$$

3. Si M est symétrique, établir l'égalité $\|M\|_{op} = \max\{|\lambda| ; \lambda \in \sigma(M)\}$. On pourra commencer par le cas où M est diagonale.
On note J_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

4. Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de J_n en précisant la dimension des sous espaces propres. En déduire la valeur de $\|J_n\|_{op}$.
Soit $M = (M_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

5. Démontrer l'inégalité $\|M\|_{op} \geq \max\{|M_{i,j}| : 1 \leq i, j \leq n\}$.

6. Etablir que : $\|M\|_{op} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{i,j}^2}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur le rang de M pour que cette inégalité soit une égalité.
On note Σ_n l'ensemble des matrices $M = (M_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $|M_{i,j}| \leq 1$ pour tous $i, j \in [[1, n]]$.

7. Montrer que pour tout $M \in \Sigma_n$, $\|M\|_{op} \leq n$. Caractériser et dénombrer les matrices M de Σ_n pour lesquelles $\|M\|_{op} = n$.

B. Variables aléatoires sous-gaussiennes

Dans toute la suite du problème, toutes les variables aléatoires considérées sont réelles et discrètes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$. Soit $\alpha > 0$, on dit qu'une variable aléatoire X est α -sous gaussienne si :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{E}(\exp(tX)) \leq \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2}\right).$$

On rappelle la notation $\text{ch}(t) = \frac{\exp(t) + \exp(-t)}{2}$.

8. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\text{ch}(t) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$. On pourra au préalable établir le développement de la fonction ch en série entière sur $\mathbb{R}$.
9. Soit $t \in \mathbb{R}$. Démontrer que si $x \in [-1, 1]$, on a l'inégalité de convexité :

$$\exp(tx) \leq \frac{1+x}{2} \exp(t) + \frac{1-x}{2} \exp(-t).$$

10. Soit X une variable aléatoire réelle bornée par 1 et centrée. Montrer que X est 1-sous gaussienne. En déduire que si X est bornée par $\alpha > 0$ et centrée, alors elle est α -sous gaussienne.
11. Soient $X_1, X_2, \dots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes et α -sous gaussiennes, et $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ des nombres réels tels que $\sum_{i=1}^n \mu_i^2 = 1$. Montrer que la variable aléatoire $\sum_{i=1}^n \mu_i X_i$ est aussi α -sous gaussienne.
12. Soit X une variable aléatoire α -sous gaussienne et $\lambda > 0$. Montrer que pour tout $t > 0$: $P(X \geq \lambda) \leq \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2} - t\lambda\right)$. En déduire que : $P(|X| \geq \lambda) \leq \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2\alpha^2}\right)$.
Dans la suite du problème, on admet qu'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ est d'espérance finie si et seulement si, la série $\sum P(X \geq k)$ converge et que dans ce cas : $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq k)$ (cf remarque 140).
13. Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, montrer que X est d'espérance finie si, et seulement si, la série de terme général $P(X \geq k)$

converge et que dans ce cas :

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq k) \leq \mathbb{E}(X) \leq 1 + \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq k)$$

On pourra pour cela considérer la partie entière $[X]$.

Pour tout $s \in]1, +\infty[$, on note $\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s}$.

14. Soit X une variable aléatoire α -sous gaussienne et $\beta > 0$. Montrer que pour tout entier $k > 0$: $P(\exp(\frac{\beta^2 X^2}{2}) \geq k) \leq 2k^{-\eta}$, où l'on a posé $\eta = \alpha^{-2}\beta^{-2}$. En déduire que si $\alpha\beta < 1$, la variable aléatoire $\exp(\frac{\beta^2 X^2}{2})$ est d'espérance finie majorée par $1 + 2\zeta(\eta)$. En particulier, en prenant $\alpha\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et en utilisant l'inégalité $1 + 2\zeta(2) \leq 5$ (que l'on ne demande pas de justifier), on obtient immédiatement, et on l'admet, que si X est une variable aléatoire α -sous gaussienne, on a l'inégalité d'Orlicz : $\mathbb{E}(\exp(\frac{X^2}{4\alpha^2})) \leq 5$.

D. Norme d'une matrice aléatoire

On fixe un nombre réel $\alpha > 0$ et on pose $\gamma = \frac{1}{4\alpha^2}$. Soit n un entier strictement positif. On définit une famille de variables aléatoires réelles $M_{i,j}^{(n)}$ indexées par $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, mutuellement indépendantes et α -sous gaussiennes. On note $M^{(n)}$ la matrice aléatoire $(M_{i,j}^{(n)})_{1 \leq i, j \leq n}$. Si $x \in S^{n-1}$, on note $y = M^{(n)}x$ qui est ainsi un vecteur aléatoire dont les composantes $y_1, \dots, y_n$ sont des variables aléatoires réelles.

15. Montrer que pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, la variable aléatoire y_i est α -sous gaussienne.

En déduire que $\mathbb{E}(\exp(\gamma \|y\|^2)) \leq 5^n$ et que pour tout réel $r > 0$:

$$P(\|y\| \geq r\sqrt{n}) \leq (5e^{-r^2})^n.$$

16. On admet l'existence d'une partie finie Λ_n de S^{n-1} , de cardinal majoré par 5^n et telle que :

$$S^{n-1} \subseteq \bigcup_{a \in \Lambda_n} B(a, \frac{1}{2}).$$

Soit Λ_n une telle partie de S^{n-1} . Pour tout réel $r > 0$, montrer que $\|M^{(n)}\|_{op} \geq 2r\sqrt{n}$ implique l'existence d'un $a \in \Lambda_n$ tel que :

$$\|M^{(n)}a\| \geq r\sqrt{n}.$$

En déduire que $P(\|M^{(n)}\|_{op} \geq 2r\sqrt{n}) \leq (25e^{-\gamma r^2})^n$.

Correction du sujet 1

- A.** 1. On a : $X(\Omega) = \{0, 1, \dots, p\}$. Soit $0 \leq k \leq p$. l'événement $(X = k)$ est réalisé si, et seulement si, on obtient k numéros parmi les p numéros gagnants et $p - k$ numéros parmi les $n - p$ numéros non gagnants. On a $\binom{p}{k}$ réalisations possibles, chacune est réalisée avec une probabilité égale à $\frac{A_p^k A_{n-p}^{p-k}}{A_n^p}$, avec $A_n^m = n.(n-1)..(n-m+1)$ qui est le nombre d'arrangements de m objets parmi n objets. Soit après simplifications des arrangements en combinaisons :

$$P(X = k) = \binom{p}{k} \frac{A_p^k A_{n-p}^{p-k}}{A_n^p} = \frac{\binom{p}{k} \binom{n-p}{p-k}}{\binom{n}{p}}.$$

Remarque : On dit que la variable X suit la loi hypergéométrique de paramètres n, p et $\frac{p}{n}$.

2. Il suffit d'utiliser la relation $\sum_{k=0}^p P(X = k) = 1$.
3. Pour tout $1 \leq i \leq p$, on pose X_i la variable aléatoire que vaut 1 si la boule numéro i est gagnant et 0 sinon. Chaque X_i suit la loi de Bernoulli $\beta(\frac{p}{n})$ et $X = X_1 + X_2 + \dots + X_p$.
4. Par linéarité de l'espérance, on obtient

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^p \mathbb{E}(X_i) = \sum_{i=1}^p \frac{p}{n} = \frac{p^2}{n}.$$

En écrivant la relation $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^p kP(X = k) = \frac{p^2}{n}$, on obtient la formule recherchée.

- B** 1. Si l'événement $(X = k)$ est réalisé alors l'événement $(Z_i = 1)$ est réalisé si, et seulement si, la boule i est tirée parmi les $p - k$. Par suite

$$P(Z_i = 1 \mid X = k) = \frac{p - k}{n - 2p}.$$

2. En utilisant les résultats obtenues dans la question A.2, il vient :

$$\begin{aligned}
 P(Z_i = 1) &= \sum_{k=0}^n P(Z_i = 1 \mid X = k)P(X = k) \\
 &= \sum_{k=0}^n \frac{p-k}{n-2p} \frac{\binom{p}{k} \binom{n-p}{p-k}}{\binom{n}{p}} \\
 &= \frac{1}{(n-2p) \binom{n}{p}} \sum_{k=0}^n (p-k) \binom{p}{k} \binom{n-p}{p-k} \\
 &= \frac{p}{(n-2p) \binom{n}{p}} \binom{n}{p} - \frac{1}{(n-2p) \binom{n}{p}} \frac{p^2}{n} \binom{n}{p} = \frac{p(n-p)}{n(n-2p)}.
 \end{aligned}$$

Clairement, $Z = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_p$. D'autre part

$$\mathbb{E}(Z_i) = P(Z_i = 1) = \frac{p(n-p)}{n(n-2p)}$$

Ce qui donne $\mathbb{E}(Z) = \frac{p^2(n-p)}{n(n-2p)}$.

3. On a :

$$\mathbb{E}(Z) - \mathbb{E}(X) = \frac{p^2}{n} \left(\frac{n-p}{n-2p} - 1 \right) = \frac{p^2}{n} \frac{p}{n-2p} \geq 0.$$

Par suite la stratégie B est la meilleure.

Correction du sujet 2

Partie A :

1. La série de terme général $(p_k + q_k)$ converge. Comme de plus on a $|p_k - q_k| \leq p_k + q_k$, on en déduit que la série $\sum |p_k - q_k|$ converge, par suite $d(X, Y)$ est bien définie. On a $d(X, Y) = 0$ si, et seulement si, $P(X = k) = P(Y = k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, donc si, et seulement si, X et Y suivent la même loi.

2. Soit $A \subseteq \mathbb{N}$. On écrit :

$$\begin{aligned} |P(X \in A) - P(Y \in A)| &= |1 - P(X \in \bar{A}) - 1 + P(Y \in \bar{A})| \\ &= |P(X \in \bar{A}) - P(Y \in \bar{A})|, \end{aligned}$$

par suite

$$\begin{aligned} 2|P(X \in A) - P(Y \in A)| &= |P(X \in A) - P(Y \in A)| + |P(X \in \bar{A}) - P(Y \in \bar{A})| \\ &= \left| \sum_{k \in A} p_k - q_k \right| + \left| \sum_{k \in \bar{A}} p_k - q_k \right| \\ &\leq \sum_{k \in A} |p_k - q_k| + \sum_{k \in \bar{A}} |p_k - q_k| = \sum_{k \in \mathbb{N}} |p_k - q_k| = 2d(X, Y). \end{aligned}$$

3. Comme $X \sim \beta(p)$ et $Y \sim \mathcal{P}(p)$, on obtient :

$$\begin{aligned} 2d(X, Y) &= |P(X = 0) - P(Y = 0)| + |P(X = 1) - P(Y = 1)| \\ &= |1 - p - e^{-p}| + |p - pe^{-p}| \\ &= e^{-p} + p - 1 + p - pe^{-p} = (1 - p)e^{-p}. \end{aligned}$$

4. Pour tout entier k , on écrit :

$$\min(p_k, q_k) = \frac{p_k + q_k + |p_k - q_k|}{2},$$

Par suite :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{+\infty} \min(p_k, q_k) &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} p_k + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} p_k + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} |p_k - q_k| \\ &= 1 + d(X, Y). \end{aligned}$$

5. On a :

$$\begin{aligned} P(X = Y) &= \sum_{k=0}^{+\infty} P((X = k) \cap (Y = k)) \\ &\leq \sum_{k=0}^{+\infty} \min(P(X = k), P(Y = k)) = \sum_{k=0}^{+\infty} \min(p_k, q_k). \end{aligned}$$

Donc,

$$P(X \neq Y) = 1 - P(X = Y) \geq 1 - \sum_{k=0}^{+\infty} \min(p_k, q_k) = d(X, Y).$$

6. Pour tout réel $x \in [0, 1]$, $1 - x \leq e^{-x}$, donc $0 \leq (1 - x) \cdot e^x \leq 1$. Par suite $f(x) \in [0, 1]$ pour tout $x \in [0, 1]$.
7. La variable Y est la somme de n variables aléatoires indépendantes qui ont la même loi de Poisson de paramètre $\frac{\lambda}{n}$. Donc la fonction génératrice G_Y de Y s'écrit :

$$G_Y(t) = \prod_{i=1}^n G_{Y_i}(t) = \prod_{i=1}^n e^{\frac{\lambda}{n}(t-1)} = e^{\lambda(t-1)}.$$

Ce qui montre que $Y \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

8.

- (a) On a : $X_i(\Omega) = \{0, 1\}$ et

$$\begin{aligned} P(X_i = 0) &= P(U_i = 0, Y_i = 0) = P(X_i = 0)P(Y_i = 0) \\ &= (1 - f(\frac{\lambda}{n}))e^{-\frac{\lambda}{n}} = (1 - \frac{\lambda}{n})e^{\frac{\lambda}{n}}e^{-\frac{\lambda}{n}} = (1 - \frac{\lambda}{n}). \end{aligned}$$

Donc, $P(X_i = 1) = \frac{\lambda}{n}$. Par suite, $X_i \sim \beta(\frac{\lambda}{n})$.

Chaque X_i est une fonction en U_i et Y_i , comme, de plus, les variables U_i et Y_i sont indépendantes, on en déduit par la proposition 134 que les variables $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes. La variable aléatoire X , somme de variables indépendantes qui ont même loi de Bernoulli, suit alors la loi binomiale $\mathcal{B}(n, \frac{\lambda}{n})$ (voir la remarque 179).

- (b) On a : $(X_i = Y_i) = (X_i = 0, Y_i = 0) \cup (X_i = 1, Y_i = 1)$. Or, $(X_i = 0, Y_i = 0) = (X_i = 0)$ car, clairement, on a :

$$(X_i = 0, Y_i = 0) \subseteq (X_i = 0)$$

et si $X_i(\omega) = 0$ alors $Y_i(\omega) = 0$, donc

$$(X_i = 0) \subseteq (X_i = 0, Y_i = 0).$$

De même on a : $(X_i = 1, Y_i = 1) = (Y_i = 1)$. Il vient :

$$\begin{aligned} P(X_i = Y_i) &= P(X_i = 0) + P(Y_i = 1) \\ &= 1 - \frac{\lambda}{n} + \frac{\lambda}{n}e^{-\frac{\lambda}{n}}. \end{aligned}$$

D'où

$$P(X_i \neq Y_i) = 1 - P(X_i = Y_i) = \frac{\lambda}{n} (1 - e^{-\frac{\lambda}{n}}).$$

Comme $1 - e^{-\frac{\lambda}{n}} \leq \frac{\lambda}{n}$, on en déduit que $P(X_i \neq Y_i) \leq (\frac{\lambda}{n})^2$.

(c) Soit $\omega \in \Omega$ tel que $X_i(\omega) = Y_i(\omega)$ pour tout $1 \leq i \leq n$, alors $X(\omega) = Y(\omega)$. Donc

$$\bigcap_{i=1}^n (X_i = Y_i) \subseteq (X = Y).$$

Par passage au complémentaire, on obtient le résultat désiré.

(d) D'après la question 5, on a :

$$\begin{aligned} d(X, Y) &\leq P(X \neq Y) \leq P\left(\bigcup_{i=1}^n (X_i \neq Y_i)\right) \leq \sum_{i=1}^n P(X_i \neq Y_i) \\ &\leq n \left(\frac{\lambda}{n}\right)^2 = \frac{\lambda^2}{n}. \end{aligned}$$

Partie B 1. On a $\omega \in B$ si et seulement, si pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ il existe un rang n tel que $|X_p(\omega) - X(\omega)| < \frac{1}{k}$ pour tout $p \geq n$, ce qui est équivalent à : pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe un entier p tel que $\omega \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{p \geq n} (|X_p - X| < \frac{1}{k})$. Donc $\omega \in B$ si, et seulement si, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\omega \in C_k$.

2. La suite d'événements $(C_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante, par le théorème de continuité décroissante (théorème 72), on a :

$$P(B) = P\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} C_k\right) = \lim_{k \rightarrow +\infty} P(C_k).$$

3. Par hypothèse, on a :

$$P(C_k) = 1 - P(\overline{C_k}) = 1 - P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{p \geq n} \left| |X_p - X| \geq \frac{1}{k} \right| \right) = 1 - 0 = 1,$$

donc $P(B) = 1$, ainsi, la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge presque sûrement vers X .

4. Soit $\varepsilon > 0$. En utilisant le lemme de Borel-Cantelli (cf. exercice 18, chapitre 3), on en déduit que

$$P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{p \geq n} (|X_p - X| > \varepsilon)\right) = 0,$$

puisque, la série $\sum P(|X_p - X| > \varepsilon)$ converge. Il résulte, d'après la question 3 que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge presque sûrement vers X ,

Partie C : 1. (a) Pour tout $t \in [a, b]$ et $u \geq 0$, on a :

$$u^k e^{tu} = u^k e^{-\delta u} e^{(t+\delta)u} \leq u^k e^{-\delta u} e^{(b+\delta)u}.$$

Comme la fonction $u \mapsto u^k e^{-\delta u}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et tend vers 0 quand u tend vers plus l'infini, on en déduit qu'elle est bornée. Donc, il existe un réel C_1 tel que $u^k e^{tu} \leq C_1 e^{(b+\delta)u}$ pour tout $t \in [a, b]$.

- (b) Si $u \leq 0$, alors il existe une constante C_2 telle que

$$(-u)^k e^{tu} \leq C_2 e^{(a+\delta)u}.$$

En effet :

$$(-u)^k e^{tu} = (-u)^k e^{\delta u} e^{(t-\delta)u} \leq u^k e^{\delta u} e^{(a-\delta)u},$$

De même la fonction $u \mapsto (-u)^k e^{\delta u}$ est continue sur $\mathbb{R}^-$ et tend vers 0 quand u tend vers moins l'infini, on en déduit qu'elle est bornée par un réel C_2 . Donc, $(-u)^k e^{tu} \leq C_2 e^{(a-\delta)u}$. Par suite pour tout $u \in \mathbb{R}$, on a

$$|u|^k e^{tu} \leq C_1 e^{(b+\delta)u} + C_2 e^{(a-\delta)u} \leq C(e^{(b+\delta)u} + e^{(a-\delta)u}),$$

où $C = \max(C_1, C_2)$.

2. Soit $\alpha < t < \beta$. Il existe un segment $[a, b] \subseteq]\alpha, \beta[$ et $t \in [a, b]$. Soit $\delta > 0$ tel que $]a - \delta, b + \delta[\subseteq]\alpha, \beta[$. Comme pour tout réel x ,

$$|x|^k e^{tx} \leq C(e^{(b+\delta)x} + e^{(a-\delta)x}),$$

on obtient donc l'inégalité suivante :

$$|X|^k e^{tX} \leq C(e^{(b+\delta)X} + e^{(a-\delta)X}).$$

Par hypothèse, les variables $e^{(b+\delta)X}$ et $e^{(a-\delta)X}$ sont intégrables, donc la variable $|X|^k e^{tX}$ admet une espérance finie.

3. On a :

$$L_X(t) = \sum_{x \in X(\Omega)} e^{tx} P(X = x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{tx_n} P(X = x_n).$$

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(t) = e^{tx_n} P(X = x_n)$. Chaque f_n est de classe C^∞ et pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a :

$$f_n^{(k)}(t) = x_n^k e^{tx_n} P(X = x_n).$$

Soit $[a, b] \subseteq]\alpha, \beta[$. Il résulte de la question 1 qu'il existe C tel que, pour tout $t \in [a, b]$ on a :

$$|x_n|^k e^{tx_n} P(X = x_n) \leq C(e^{(b+\delta)x_n} P(X = x_n) + e^{(a-\delta)x_n} P(X = x_n)),$$

et les séries $\sum e^{(b+\delta)x_n} P(X = x_n)$, $\sum e^{(a-\delta)x_n} P(X = x_n)$ convergent par hypothèse. On en déduit que la série $\sum f_n^{(k)}$ converge uniformément sur $[a, b]$, pour tout $k \in \mathbb{N}$. Ce qui montre que la fonction L_X est C^∞ sur $] \alpha, \beta[$, et

$$L_X^{(k)}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n^k e^{tx_n} P(X = x_n) = \mathbb{E}(X^k e^{tX}),$$

par le théorème de transfert.

4. Comme $0 \in]\alpha, \beta[$, on a $L_X(0) = \mathbb{E}(X^k)$. Ainsi X admet un moment d'ordre k , pour tout $k \in \mathbb{N}$.
5. On a, pour tout $t \in]\alpha, \beta[$:

$$\psi'(t) = \frac{L_X'(t)}{L_X(t)} \text{ et } \psi''(t) = \frac{L_X''(t)L_X(t) - L_X'(t)^2}{L_X(t)^2}.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient :

$$\begin{aligned} L_X'(t)^2 &= \mathbb{E}(X e^{tX})^2 \leq \mathbb{E}(X^2 e^{tX}) \mathbb{E}(e^{tX}) \\ &= L_X''(t) L_X(t). \end{aligned}$$

Ce que montre que ψ' est croissante sur $] \alpha, \beta[$. Donc, ψ' admet des limites en α et β et que

$$\psi'([\alpha, \beta[) = \left[\lim_{t \rightarrow \alpha} \psi'(t), \lim_{t \rightarrow \beta} \psi'(t) \right[=]l_1, l_2[.$$

6. Pour tout $t \in]\alpha, \beta[$, $f'_c(t) = c - \psi'(t)$. En utilisant la croissance de ψ' on en déduit que f_c est croissante sur $]\alpha, \nu]$ et décroissante sur $]\nu, \beta[$ où $\nu = \psi'^{-1}(c)$. Par suite, $\max_{t \in]\alpha, \beta[} f_c(t) = g(c)$ existe.
7. D'abord, on a : $m = \mathbb{E}(X) = \psi'(0) \in]l_1, l_2[$.
- Si $c < m$ donc $c < \psi'(0)$, par suite $\nu = \psi'^{-1}(c) < 0$. Le maximum de f_c sur $]\alpha, 0[$ est atteint en ν , c'est aussi le maximum de f_c sur $]\alpha, \beta[$. Donc $g(c) = \max_{t \in]\alpha, 0[} f_c(t)$.
 - Si $c > m$ donc $c > \psi'(0)$, alors $\nu > 0$. Le maximum de f_c sur $]\alpha, \beta[$ est le maximum de f_c sur $]0, \beta[$, donc $g(c) = \max_{t \in]0, \beta[} f_c(t)$.
- 8.
- (a) Pour tout $t \in]\alpha, 0[$, on a :

$$\left(\frac{S_n}{n} \leq c\right) = (tS_n \geq tnc) = (e^{tS_n} \geq e^{ntc}).$$

En appliquant l'inégalité de Markov, il vient :

$$P\left(\frac{S_n}{n} \leq c\right) = P(e^{tS_n} \geq e^{ntc}) \leq \mathbb{E}(e^{tS_n})e^{-ntc}. \quad (5.1)$$

D'autre part, on a :

$$e^{tS_n} = e^{t \sum_{k=1}^n X_k} = \prod_{k=1}^n e^{tX_k},$$

comme les variables e^{tX_k} , $1 \leq k \leq n$, sont indépendantes, on obtient :

$$\mathbb{E}(e^{tS_n}) = \prod_{k=1}^n \mathbb{E}(e^{tX_k}) = (\mathbb{E}(e^{tX}))^n = L_X(t)^n = e^{n\psi(t)}.$$

En utilisant l'inégalité (5.1) on trouve :

$$P\left(\frac{S_n}{n} \leq c\right) \leq e^{-n(ct - \psi(t))}. \quad (5.2)$$

- (b) En prenant $t = \nu$ dans l'inégalité (5.2), on obtient

$$P\left(\frac{S_n}{n} \leq c\right) \leq e^{-ng(c)}.$$

(c) Si $c > m$. Pour tout $t \in]0, \beta[$, on montre de même que :

$$P\left(\frac{S_n}{n} \geq c\right) \leq \mathbb{E}(e^{tS_n})e^{-ntc} = e^{-n(ct-\psi(t))},$$

et en prenant $t = \nu$, on obtient

$$P\left(\frac{S_n}{n} \geq c\right) \leq e^{-ng(c)}$$

9. Pour $\varepsilon > 0$, tel que $\alpha < m - \varepsilon < m + \varepsilon < \beta$, on a :

$$\begin{aligned} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) &= P\left(\frac{S_n}{n} \geq \varepsilon + m\right) + P\left(\frac{S_n}{n} \leq m - \varepsilon\right) \\ &\leq e^{-ng(m+\varepsilon)} + e^{-ng(m-\varepsilon)} \leq e^{-n \min(g(m+\varepsilon), g(m-\varepsilon))}. \end{aligned}$$

10. La série de terme général $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right)$ converge pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit. En utilisant la question B.4, on en déduit que la suite $(\frac{S_n}{n})$ converge presque sûrement vers m .

Correction du sujet 3

I Suites et intégrales

I.A

I.A.1.

– Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$,

$$\left| \frac{1 - \cos(t)}{t^2} e^{-xt} \right| \leq \frac{1 - \cos(t)}{t^2}. \quad (5.3)$$

Or, la fonction $t \mapsto \frac{1 - \cos(t)}{t^2}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$, en effet :
au voisinage de 0, $\frac{1 - \cos(t)}{t^2} \underset{0}{\sim} \frac{1}{2}$ et la fonction $t \mapsto \frac{1}{2}$ est intégrable sur $]0, 1]$. Si $t \in [1, +\infty[$, alors

$$0 \leq \frac{1 - \cos(t)}{t^2} \leq \frac{2}{t^2}$$

et la fonction $t \mapsto \frac{2}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$. L'inégalité (5.3) montre que f est bien définie sur $\mathbb{R}^+$.

- Soit $g : (t, x) \mapsto \frac{1 - \cos(t)}{t^2} e^{-xt}$ définie sur $]0, +\infty[\times \mathbb{R}^+$. La fonction $x \mapsto g(x, t)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et on a

$$|g(t, x)| \leq \frac{1 - \cos(t)}{t^2} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^+. \quad (5.4)$$

D'après le théorème de continuité sous le signe intégral, f est continue sur $\mathbb{R}^+$.

- La fonction g admet des dérivées partielles par rapport à la variable x d'ordre inférieur ou égal à 2, et on a :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(t, x) = -\frac{1 - \cos(t)}{t} e^{-xt} \text{ et } \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, x) = (1 - \cos(t)) e^{-xt}.$$

Soit $[a, b] \subseteq]0, +\infty[$. On a pour tout $x \in [a, b]$

$$\left| \frac{\partial g}{\partial x}(t, x) \right| \leq \frac{1 - \cos(t)}{t} e^{-at}$$

et

$$\left| \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, x) \right| \leq (1 - \cos(t)) e^{-at}.$$

Les fonctions $t \mapsto \frac{1 - \cos(t)}{t} e^{-at}$ et $t \mapsto (1 - \cos(t)) e^{-at}$ sont intégrables sur $]0, +\infty[$, en effet :

- La fonction $\frac{1 - \cos(t)}{t} e^{-at} \underset{0}{\sim} \frac{t}{2}$ qui est intégrable sur $]0, 1]$ et

$$\left| \frac{1 - \cos(t)}{t} e^{-at} \right| \leq \frac{2}{t} e^{-at} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

- $t \mapsto (1 - \cos(t)) e^{-at}$ est continue sur $[0, 1]$ et

$$(1 - \cos(t)) e^{-at} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

Comme de plus, les fonctions $x \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(t, x)$ et $x \mapsto \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, x)$ sont continues sur $]0, +\infty[$, on en déduit par le théorème de dérivabilité sous le signe intégral que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$ et que

$$f''(x) = \int_0^{+\infty} (1 - \cos(t)) e^{-xt} dt \text{ pour tout } x \in]0, +\infty[.$$

I.A.2. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que $x_n \mapsto +\infty$.

- On a : $\lim_{n \rightarrow \infty} g(t, x_n) = 0$. D'autre part, la suite x_n est positive à partir d'un certain rang, donc d'après l'inégalité (5.3) on a :

$$|g(t, x_n)| \leq \frac{1 - \cos(t)}{t^2} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

et la fonction $t \mapsto \frac{1 - \cos(t)}{t^2}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$. Par le théorème de convergence dominée, on a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = 0$.

Par suite

$$\lim_{x \mapsto +\infty} f(x) = 0,$$

par caractérisation séquentielle de limite.

- De même, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial g}{\partial x}(t, x_n) = 0$. Il existe un entier n_0 tel que $x_n \geq 1$ pour tout $n \geq n_0$. Par suite, on a

$$\frac{\partial g}{\partial x}(t, x_n) \leq \frac{1 - \cos(t)}{t} e^{-t}, \text{ pour tout } n \geq n_0,$$

et la fonction $t \mapsto \frac{1 - \cos(t)}{t} e^{-t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$. Par le théorème de convergence dominée, on obtient $\lim_{n \rightarrow \infty} f'(x_n) = 0$, soit

$$\lim_{x \mapsto +\infty} f'(x) = 0.$$

I.A.3. Pour tout $x > 0$, on a :

$$\begin{aligned} f''(x) &= \int_0^{+\infty} (1 - \cos(t)) e^{-xt} dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-xt} - \operatorname{Re} \left(\int_0^{+\infty} e^{(i-x)t} dt \right) \\ &= \frac{1}{x} + \operatorname{Re} \left(\frac{1}{i-x} \right) = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2 + 1}. \end{aligned}$$

Donc, pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = \ln(x) - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + cst.$$

Comme, de plus, $\lim_{x \mapsto +\infty} f'(x) = 0$ et

$$\lim_{x \mapsto +\infty} \left(\ln(x) - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) \right) = \lim_{x \mapsto +\infty} \ln \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) = 0,$$

on en déduit que

$$f'(x) = \ln(x) - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) \text{ pour tout } x > 0.$$

I.A.4. En intégrant par parties, on obtient

$$\begin{aligned} \int \ln(x^2 + 1) dx &= 2 \arctan x - 2x + x \ln(x^2 + 1) \text{ et} \\ \int \ln(x) dx &= x \ln x - x. \end{aligned}$$

Par suite il existe une constante C telle que pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} f(x) &= x \ln x - x - \frac{1}{2} (2 \arctan x - 2x + x \ln(x^2 + 1)) + C \\ &= x \ln x - \frac{1}{2} x \ln(x^2 + 1) - \arctan x + C. \end{aligned}$$

Comme, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ et

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x - \frac{1}{2} x \ln(x^2 + 1) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x - \frac{1}{2} x \ln(x^2) - \frac{1}{2} x \ln(1 + \frac{1}{x^2}) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2} x (\frac{1}{x^2} + o(\frac{1}{x^2})) = 0, \end{aligned}$$

on en déduit que

$$C = \frac{\pi}{2}.$$

Donc, pour tout $x > 0$,

$$f(x) = x \ln x - \frac{1}{2} x \ln(x^2 + 1) - \arctan x + \frac{\pi}{2}.$$

Par continuité de f en 0, on a :

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{\pi}{2}.$$

I.A.5. Remarquons que la fonction $s \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(st)}{t^2} dt$ est définie sur $\mathbb{R}$ et paire. Soit $s > 0$. Par changement de variable linéaire, $u = st$ on obtient :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(st)}{t^2} dt = s \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(u)}{u^2} du = s f(0) = \frac{\pi}{2} s.$$

Donc

$$s = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(st)}{t^2} dt \text{ pour tout } s > 0.$$

Par parité on a donc,

$$|s| = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(st)}{t^2} dt \text{ pour tout } s \neq 0.$$

L'égalité est trivialement vraie pour $s = 0$.

I.B Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$u_n = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos^n(t)}{t^2} dt.$$

I.B.1

– Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{1 - \cos^n(t)}{t^2} = \frac{(1 - \cos(t))(1 + \cos(t) + \dots + \cos^{n-1}(t))}{t^2} \underset{0}{\sim} \frac{n}{2}.$$

Ce qui montre l'intégrabilité de $t \mapsto \frac{1 - \cos^n(t)}{t^2}$ au voisinage de 0. Au voisinage de $+\infty$ on a

$$\left| \frac{1 - \cos^n(t)}{t^2} \right| \leq \frac{2}{t^2},$$

donc la fonction $t \mapsto \frac{1 - \cos^n(t)}{t^2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$. Donc, u_n est bien définie pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

– On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1 - \cos^{2n}(t)}{t^2} \leq \frac{1 - \cos^{2(n+1)}(t)}{t^2} \text{ pour tout } t > 0.$$

En intégrant l'inégalité précédente, on obtient :

$$u_{2n} \leq u_{2(n+1)} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Donc, la sous-suite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

I.B.2 On a $u_1 = f(0) = \frac{\pi}{2}$. D'autre part, en utilisant l'égalité de la question I.A.5., on obtient :

$$\begin{aligned} u_2 &= \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos^2(t)}{t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \frac{1 + \cos(2t)}{2}}{t^2} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(2t)}{t^2} dt = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

I.C.

I.C.1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par le changement de variable $u = \frac{n}{2}t^2$, on obtient :

$$\begin{aligned} u_n &= \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos^n(t)}{t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos^n(\sqrt{\frac{2u}{n}})}{\frac{2u}{n}} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{nu}} du \\ &= \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{2}} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos^n(\sqrt{\frac{2u}{n}})}{u\sqrt{u}} du = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{2}} v_n. \end{aligned}$$

I.C.2 Pour tout $x \in]0, 1]$, la série $\sum \frac{(-1)^{k+1}}{(2k)!} x^{2k}$ vérifie le critère spécial des séries alternées. Donc, pour tout $x \in]0, 1]$,

$$1 - \cos(x) = \frac{x^2}{2} + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k)!} x^{2k} \leq \frac{x^2}{2},$$

puisque, $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k)!} x^{2k} \leq 0$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $u \in]0, 1]$, on a :

$$\begin{aligned} &\left| 1 - \cos^n\left(\sqrt{\frac{2u}{n}}\right) \right| \\ &= (1 - \cos(\sqrt{\frac{2u}{n}}))(1 + \cos(\sqrt{\frac{2u}{n}}) + \dots + \cos^{n-1}(\sqrt{\frac{2u}{n}})) \\ &\leq \frac{2u}{2n} \cdot n = u. \end{aligned}$$

I.C.3 On pose $h_n(u) = \frac{1 - \cos^n(\sqrt{\frac{2u}{n}})}{u\sqrt{u}}$ pour tout $(n, u) \in \mathbb{N}^* \times]0, +\infty[$.

On a :

$$\begin{aligned}\cos^n\left(\sqrt{\frac{2u}{n}}\right) &= \exp\left(n \ln \cos \sqrt{\frac{2u}{n}}\right) \text{ et} \\ n \ln\left(\cos \sqrt{\frac{2u}{n}}\right) &= n \ln\left(1 - \frac{u}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = -u + o(1),\end{aligned}$$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln\left(\cos \sqrt{\frac{2u}{n}}\right) = -u$, et par suite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos^n\left(\sqrt{\frac{2u}{n}}\right) = e^{-u}$.

La suite h_n converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers la fonction :

$u \mapsto \frac{1 - e^{-u}}{u\sqrt{u}}$ qui est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$. D'autre part, d'après la question précédente, on a la majoration suivante :

$$h_n(u) \leq \varphi(u) = \begin{cases} \frac{u}{u\sqrt{u}} = \sqrt{u} & \text{si } 0 < u \leq 1 \\ \frac{2}{u\sqrt{u}} & \text{si } 1 \leq u \end{cases},$$

et la fonction φ est, clairement, intégrable sur $]0, +\infty[$. En appliquant le théorème de convergence dominée, il vient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos^n\left(\sqrt{\frac{2u}{n}}\right)}{u\sqrt{u}} du = \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-u}}{u\sqrt{u}} du$$

I.C.4. Posons, pour tous réels $\alpha, A > 0$, $I_{\alpha,A} = \int_{\alpha}^A \frac{1 - e^{-u}}{u^{\frac{3}{2}}} du$. Par une intégration par parties, il vient

$$I_{\alpha,A} = \frac{1}{\sqrt{A}} (2e^{-A} - 2) - \frac{1}{\sqrt{\alpha}} (2e^{-\alpha} - 2) - \int_{\alpha}^A \left(-\frac{2}{\sqrt{u}} e^{-u}\right) du,$$

lorsque $\alpha \mapsto 0$ et $A \mapsto +\infty$, on obtient :

$$l = \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-u}}{u^{\frac{3}{2}}} du = 2 \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du = 2\sqrt{\pi}.$$

Par conséquent, $u_n = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{2}} v_n \sim \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{2}} \times 2\sqrt{\pi} = \frac{\sqrt{n\pi}}{\sqrt{2}}$.

II. Autour du pile ou face

II.A II.A.1. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}(X_k) = 0$ et $\mathbb{V}(X_k) = 1$. Par suite

$$\mathbb{E}(S_n) = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k) = 0$$

et par indépendance des variables aléatoires,

$$\mathbb{V}(S_n) = \sum_{k=1}^n \mathbb{V}(X_k) = n.$$

II.A.2. On écrit :

$$\cos(S + T) = \cos(S) \cos(T) - \sin(S) \sin(T).$$

Les variables aléatoires $\cos(S)$, $\cos(T)$ sont indépendantes, de même que les variables $\sin(S)$ et $\sin(T)$. Donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\cos(S) \cos(T)) &= \mathbb{E}(\cos(S)) \mathbb{E}(\cos(T)) \text{ et} \\ \mathbb{E}(\sin(S) \sin(T)) &= \mathbb{E}(\sin(S)) \mathbb{E}(\sin(T)). \end{aligned}$$

d'autre part, $\sin(T)$ et $\sin(-T) = -\sin(T)$ suivent la même loi, donc

$$\mathbb{E}(\sin(T)) = \mathbb{E}(-\sin(T)) = -\mathbb{E}(\sin(T)),$$

par suite, $\mathbb{E}(\sin(T)) = 0$. Par conséquent, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\cos(S + T)) &= \mathbb{E}(\cos(S) \cos(T)) + \mathbb{E}(\sin(S) \sin(T)) \\ &= \mathbb{E}(\cos(S)) \mathbb{E}(\cos(T)) + \mathbb{E}(\sin(S)) \mathbb{E}(\sin(T)) \\ &= \mathbb{E}(\cos(S)) \mathbb{E}(\cos(T)). \end{aligned}$$

II.A.3. Soit $t \in \mathbb{R}$. Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{E}(\cos(tX_k)) = \frac{1}{2} \cos(-t) + \frac{1}{2} \cos(t) = \cos(t).$$

Par indépendance de la famille $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ et en tenant compte du fait que tX_k et $-tX_k$ ont la même loi, on en déduit d'après (II.A.2) que

$$\varphi_n(t) = \mathbb{E}(\cos(tS_n)) = \mathbb{E}(\cos(tS_{n-1} + tX_{n+1})) = \cos(t) \varphi_{n-1}(t),$$

pour tout $n \geq 2$. Ce qui montre que

$$\varphi_n(t) = (\cos(t))^{n-1} \varphi_1(t) = \cos^n(t).$$

II.A.4. D'après (I.A.5) on a

$$|S_n| = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(tS_n)}{t^2} dt,$$

donc, pour tout entier n on a

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(|S_n|) &= \frac{2}{\pi} \mathbb{E} \left(\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(tS_n)}{t^2} dt \right) \\
 &\stackrel{(*)}{=} \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \mathbb{E} \left(\frac{1 - \cos(tS_n)}{t^2} \right) dt \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \mathbb{E}(\cos(tS_n))}{t^2} dt \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos^n(t)}{t^2} dt = u_n.
 \end{aligned}$$

Justification de $(*)$: Par le théorème de transfert, on a :

$$\begin{aligned}
 &\mathbb{E} \left(\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(tS_n)}{t^2} dt \right) \\
 &= \sum_{k \in S_n(\Omega)} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(tk)}{t^2} P(S_n = k) dt \\
 &= \int_0^{+\infty} \left[\sum_{k \in S_n(\Omega)} \frac{1 - \cos(tk)}{t^2} P(S_n = k) \right] dt \\
 &= \int_0^{+\infty} \mathbb{E} \left(\frac{1 - \cos(tS_n)}{t^2} \right) dt.
 \end{aligned}$$

Remarque : la permutation série et intégrale est bien justifiée puisque la somme est finie.

II.A.5. Il suffit de montrer que $\mathbb{E}(|S_{2n+1}|) = \mathbb{E}(|S_{2n+2}|)$ pour tout entier n . Or, on a $S_n(\Omega) = \{2k - n : 0 \leq k \leq n\}$ et

$$P(S_n = 2k - n) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

D'où $\mathbb{E}(|S_n|) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n |2k - n| \binom{n}{k}$, en particulier :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(|S_{2n+1}|) &= \frac{1}{2^{2n+1}} \sum_{k=0}^{2n+1} |2(k - n) - 1| \binom{2n+1}{k} \text{ et} \\
 \mathbb{E}(|S_{2n+2}|) &= \frac{1}{2^{2n+2}} \sum_{k=0}^{2n+2} |2(k - n) - 2| \binom{2n+2}{k}.
 \end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^{2n+1} |2(k-n) - 1| \binom{2n+1}{k} \\
&= \sum_{k=0}^n (2n - 2k + 1) \binom{2n+1}{k} + \sum_{k=n+1}^{2n+1} (2n - 2k + 1) \binom{2n+1}{k} \\
&= 2 \sum_{k=0}^n (2n - 2k + 1) \binom{2n+1}{k} \quad (k' = 2n + 1 - k) \\
&= 2 \sum_{k=0}^n ((2n - k + 1) \binom{2n+1}{k} - k \binom{2n+1}{k}) \\
&= 2 \sum_{k=0}^n ((2n + 1) \binom{2n}{k} - (2n + 1) \binom{2n}{k-1}) \\
&= 2 \sum_{k=0}^n ((2n + 1) (\binom{2n}{k} - \binom{2n}{k-1})) \\
&= 2(2n + 1) \binom{2n}{n}.
\end{aligned}$$

de même on obtient :

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^{2n+2} |2(k-n) - 2| \binom{2n+2}{k} \\
&= \sum_{k=0}^n (2(n-k) + 2) \binom{2n+2}{k} + \sum_{k=n+2}^{2n+2} (2(k-n) - 2) \binom{2n+2}{k} \\
&= 2 \sum_{k=0}^n (2(n-k) + 2) \binom{2n+2}{k} \quad (k' = 2n + 2 - k) \\
&= 2(2n + 2) \binom{2n+1}{n}.
\end{aligned}$$

Finalement, il vient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(|S_{2n+2}|) &= \frac{1}{2^{2n+2}} 2(2n + 2) \binom{2n+1}{n} \\
&= \frac{1}{2^{2n-1}} (n + 1) \frac{(2n+1)!}{n!(n+1)!} \\
&= \frac{1}{2^{2n-1}} (2n + 1) \binom{2n}{n} = \mathbb{E}(|S_{2n+1}|).
\end{aligned}$$

II.B

II.B.1. Par la théorème de transfert, on a :

$$\mathbb{E}(S_n^4) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n (2k - n)^4 \binom{n}{k},$$

Or, en dérivant par rapport à x l'égalité

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n, \quad (5.5)$$

on obtient,

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} x^{k-1} = n(1+x)^{n-1}, \quad (5.6)$$

d'où $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = \frac{1}{2} 2^n n$. En multipliant l'égalité (5.6) par x puis en dérivant, il vient

$$\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} x^{k-1} = (1+x)^{n-2} (n + n(n-1)(1+x)), \quad (5.7)$$

en évaluant en $x = 1$, on trouve :

$$\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} = \frac{1}{4} 2^n n (n+1).$$

De la même façon on obtient,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n k^3 \binom{n}{k} &= \frac{1}{8} 2^n n^2 (n+3) \text{ et} \\ \sum_{k=0}^n k^4 \binom{n}{k} &= \frac{1}{16} 2^n n (n+1) (n^2 + 5n - 2). \end{aligned}$$

En développant, il vient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S_n^4) &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n (2k - n)^4 \binom{n}{k} \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n (16k^4 - 32k^3n + 24k^2n^2 - 8kn^3 + n^4) \binom{n}{k} \\ &= n(3n - 2) \end{aligned}$$

II.B.2 La variable aléatoire U_n est positive et admet une espérance finie égale à

$$\mathbb{E}(U_n) = \frac{1}{n^4} \mathbb{E}(S_n) = \frac{1}{n^4} (3n^2 - 2n).$$

Par application de l'inégalité de Markov, on obtient :

$$P(U_n \geq \frac{1}{\sqrt{n}}) \leq \frac{\mathbb{E}(U_n)}{\frac{1}{\sqrt{n}}},$$

par suite,

$$P(U_n \geq \frac{1}{\sqrt{n}}) \leq \frac{\frac{1}{n^4} (3n^2 - 2n)}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{3}{n\sqrt{n}}.$$

II.B.3 Puisque $Z_n = \bigcup_{k \geq n} (U_k \geq \frac{1}{\sqrt{k}})$, réunion dénombrable d'événements, on en déduit que Z_n est un événement. On écrit :

$$0 \leq P(Z_n) \leq \sum_{k=n}^{+\infty} P(U_k \geq \frac{1}{\sqrt{k}}) \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{3}{k\sqrt{k}}.$$

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{3}{k\sqrt{k}} = 0$ comme reste d'une série convergente, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(Z_n) = 0$.

II.B.4. On a $Z = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} Z_n \in \mathcal{B}$, comme intersection dénombrable d'événements. Il est clair que la suite d'événements $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante. En utilisant la propriété de la continuité décroissante, on obtient $P(Z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(Z_n) = 0$.

D'autre part, si $\omega \in A \setminus Z$, alors il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\omega \in \overline{Z_n}$, donc $0 \leq U_k(\omega) = (\frac{S_k(\omega)}{k})^4 < \frac{1}{\sqrt{k}}$ pour tout $k \geq n$, ce qui montre que $\lim_{k \rightarrow +\infty} (\frac{S_k(\omega)}{k})^4 = 0$. Par suite

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{S_k(\omega)}{k} = 0.$$

III. D'autres sommes aléatoires

III.A.

III.A.1. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$T_n(\Omega) = \left\{ x = \sum_{k=1}^n \varepsilon_k a_k : \varepsilon_k \in \{1, -1\} \right\},$$

et $P(T_n = x) = \frac{1}{2^n}$ pour tout $x \in T_n(\Omega)$. Par la formule de transfert, on écrit :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|T_n|) &= \sum_{x \in T_n(\Omega)} |x| P(T_n = x) = \frac{1}{2^n} \sum_{x \in T_n(\Omega)} |x| \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n} \left| \sum_{k=1}^n \varepsilon_k a_k \right|. \end{aligned}$$

Pour tout $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$, on a :

$$\begin{aligned} 2 \left| \sum_{k=1}^n \varepsilon_k a_k \right| &= \left| \sum_{k=1}^n \varepsilon_k a_k + a_{n+1} + \sum_{k=1}^n \varepsilon_k a_k - a_{n+1} \right| \\ &\leq \left| \sum_{k=1}^n \varepsilon_k a_k + a_{n+1} \right| + \left| \sum_{k=1}^n \varepsilon_k a_k - a_{n+1} \right| \end{aligned}$$

En sommant cette inégalité, on obtient :

$$\begin{aligned} &\sum_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n} 2 \left| \sum_{k=1}^n \varepsilon_k a_k \right| \\ &\leq \sum_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n} \left| \sum_{k=1}^n \varepsilon_k a_k + a_{n+1} \right| \\ &\quad + \sum_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n} \left| \sum_{k=1}^n \varepsilon_k a_k - a_{n+1} \right| \\ &= \sum_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n, \varepsilon_{n+1}) \in \{-1, 1\}^n} \left| \sum_{k=1}^{n+1} \varepsilon_k a_k \right|. \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(|T_n|) &= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n} 2 \left| \sum_{k=1}^n \varepsilon_k a_k \right| \\
 &\leq \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n, \varepsilon_{n+1}) \in \{-1, 1\}^n} \left| \sum_{k=1}^{n+1} \varepsilon_k a_k \right| \\
 &= \mathbb{E}(|T_{n+1}|).
 \end{aligned}$$

III.A.2. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(|T_n|)^2 &\leq \mathbb{E}(T_n^2) = \mathbb{E}\left(\left(\sum_{k=1}^n a_k X_k\right)^2\right) \\
 &= \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(a_k^2 X_k^2) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{E}(a_i a_j X_i X_j) \\
 &= \sum_{k=1}^n a_k^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j \mathbb{E}(X_i) \mathbb{E}(X_j) \\
 &= \sum_{k=1}^n a_k^2 \leq \sum_{k=1}^{+\infty} a_k^2
 \end{aligned}$$

D'où $\mathbb{E}(|T_n|) \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{+\infty} a_k^2}$. Comme, de plus la suite $(\mathbb{E}(|T_n|))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante, on en déduit qu'elle est convergente.

III.A.3. On montre que dans ce cas, $\mathbb{E}(|T_n|) = \mathbb{E}(|T_{n-1}|)$. D'après la démonstration dans la question (III.A.1), on a $\mathbb{E}(|T_n|) = \mathbb{E}(|T_{n-1}|)$ si, et seulement si,

$$\begin{aligned}
 &\left| \sum_{k=1}^{n-1} \varepsilon_k a_k + a_n + \sum_{k=1}^{n-1} \varepsilon_k a_k - a_n \right| \\
 &= \left| \sum_{k=1}^{n-1} \varepsilon_k a_k + a_n \right| + \left| \sum_{k=1}^{n-1} \varepsilon_k a_k - a_n \right|,
 \end{aligned}$$

pour tout $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}) \in \{1, -1\}^{n-1}$. Or, si $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}) \in \{1, -1\}^{n-1}$,

on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} \varepsilon_k a_k + a_n &= a_1 + \sum_{k=2}^{n-1} \varepsilon_k a_k + a_n \\ &\geq \sum_{k=2}^{n-1} (1 + \varepsilon_k) a_k + a_n \geq 0, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} \varepsilon_k a_k - a_n &= a_1 + \sum_{k=2}^{n-1} \varepsilon_k a_k - a_n \\ &\geq \sum_{k=2}^{n-1} (1 + \varepsilon_k) a_k \geq 0, \end{aligned}$$

ce qui montre que $\mathbb{E}(|T_n|) = \mathbb{E}(|T_{n-1}|)$. Par récurrence, il vient :

$$\mathbb{E}(|T_n|) = \mathbb{E}(|T_1|) = \mathbb{E}(|a_1 X_1|) = a_1.$$

III.B. Soit

$$J_n = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t) \cos(\frac{t}{3}) \dots \cos(\frac{t}{2n-1})}{t^2} dt.$$

On a

$$|T_n| = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t T_n)}{t^2} dt,$$

donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|T_n|) &= \frac{2}{\pi} \mathbb{E} \left(\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t T_n)}{t^2} dt \right) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \mathbb{E}(\cos(t T_n))}{t^2} dt \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \mathbb{E}(\cos(\sum_{k=1}^n t a_k X_k))}{t^2} dt \end{aligned}$$

car la variable aléatoire T_n est finie. D'autre part, on démontre par récurrence que $\mathbb{E}(\cos(\sum_{k=1}^n a_k X_k)) = \prod_{k=1}^n \mathbb{E}(\cos(a_k X_k))$ pour tout $n \geq 2$. En effet, pour $n = 2$, la formule est déjà démontrée dans la question (II.A.2).

Si la formule est vraie à l'ordre n , alors

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\cos(\sum_{k=1}^{n+1} a_k X_k)) &= \mathbb{E}(\cos(\sum_{k=1}^n a_k X_k + X_{n+1})) \\ &= \mathbb{E}(\cos(\sum_{k=1}^n a_k X_k)) \mathbb{E}(\cos(X_{n+1})) \\ &= \prod_{k=1}^{n+1} \mathbb{E}(\cos(a_k X_k)).\end{aligned}$$

Par conséquent, $\mathbb{E}(|T_n|) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \prod_{k=1}^{n+1} \mathbb{E}(\cos(ta_k X_k))}{t^2} dt$.

Par la formule de transfert on a :

$$\mathbb{E}(\cos(ta_k X_k)) = \cos(ta_k) \frac{1}{2} + \cos(-ta_k) \frac{1}{2} = \cos(ta_k).$$

En posant $a_k = \frac{1}{2k-1}$ on obtient $\mathbb{E}(|T_n|) = \frac{2}{\pi} J_n$. Comme la suite $(\mathbb{E}(|T_n|))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante, on en déduit que la suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante. De plus la série $\sum a_k^2$ converge, donc la suite $(\mathbb{E}(|T_n|))_{n \in \mathbb{N}^*}$ et par suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.

III.B.3. Il suffit de vérifier que

$$a_1 = 1 \geq a_2 + a_3 + \dots + a_7 = \sum_{k=2}^7 \frac{1}{2k-1},$$

D'après (II.A.4) on a

$$J_7 = \frac{\pi}{2} \mathbb{E}(|T_7|) = \frac{\pi}{2} \mathbb{E}(|T_1|) = \frac{\pi}{2} a_1 = \frac{\pi}{2}.$$

Par croissance de $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ on a $J_k = \frac{\pi}{2}$ pour tout $k \in \{1, 2, \dots, 7\}$.

Correction du sujet 4

Partie A.

1. L'ensemble S^{n-1} est un compact, puisqu'il est fermé borné de $\mathbb{R}^n$. D'autre part, l'application $X \mapsto \|MX\|$ est continue sur $\mathbb{R}^n$, comme composée de deux applications continues, donc bornée sur le compact S^{n-1} , donc

$$\|M\|_{op} = \max\{\|MX\| : X \in S^{n-1}\}$$

existe dans $\mathbb{R}$.

2. On a :

- $\|M\|_{op} \in \mathbb{R}^+$ pour tout $M \in M_n(\mathbb{R})$.
- Si $\|M\|_{op} = 0$ alors $MX = 0$ pour tout $X \in S^{n-1}$. Ainsi, pour tout vecteur non nul $X \in \mathbb{R}^n$, $MX = \|X\| M \cdot \frac{X}{\|X\|} = 0$, par suite $M = 0$.
- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}\|\lambda M\|_{op} &= \max \{ \|\lambda MX\| : X \in S^{n-1} \} \\ &= \max \{ |\lambda| \|MX\| : X \in S^{n-1} \} \\ &= |\lambda| \max \{ \|MX\| : X \in S^{n-1} \} = |\lambda| \|M\|_{op}.\end{aligned}$$

- Soient $M, N \in M_n(\mathbb{R})$. Pour tout $X \in S^{n-1}$.

$$\|(M + N)X\| \leq \|MX\| + \|NX\| \leq \|M\|_{op} + \|N\|_{op}.$$

Donc

$$\|M + N\|_{op} = \max \{ \|(M + N)X\| : X \in S \} \leq \|M\|_{op} + \|N\|_{op}.$$

Ainsi, l'application $M \mapsto \|M\|_{op}$ est une norme sur $M_n(\mathbb{R})$.

Pour tout vecteur non nul $X \in \mathbb{R}^{n-1}$, on a :

$$\|MX\| = \|X\| \left\| M \frac{X}{\|X\|} \right\| \leq \|M\|_{op} \|X\|,$$

cette inégalité reste vraie lorsque $X = 0$. Donc pour tous $X, Y \in \mathbb{R}^n$,

$$\|MX - MY\| = \|M(X - Y)\| \leq \|M\|_{op} \|X - Y\|.$$

3. Si $M = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$. Pour tout $X = {}^t(x_1, x_2, \dots, x_n) \in S^{n-1}$ on a :

$$MX = {}^t(\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \dots, \lambda_n x_n)$$

et

$$\|MX\|^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 x_i^2 \leq \max_{1 \leq i \leq n} (\lambda_i^2) \sum_{i=1}^n x_i^2 = \max_{1 \leq i \leq n} (\lambda_i^2) = \lambda_{i_0}^2.$$

Par suite $\|M\|_{op} \leq |\lambda_{i_0}|$. D'autre part, le vecteur

$$X_0 = e_{i_0} = {}^t(0, \dots, \overset{i_0}{1}, 0, \dots, 0) \in S^{n-1}$$

vérifié $\|MX_0\| = |\lambda_{i_0}| \leq \|M\|_{op}$. On en déduit que :

$$\|M\|_{op} = |\lambda_{i_0}| = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|.$$

Dans le cas où M est symétrique réelle. Il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ telles que $M = PD^tP$. Pour tout vecteur $X \in S^{n-1}$,

$$\|MX\| = \|PD^tPX\| = \|D^tPX\| \leq \|D\|_{op} \|^tPX\| = \|D\|_{op}.$$

Par suite $\|M\|_{op} \leq \|D\|_{op}$. De même, on démontre que $\|D\|_{op} \leq \|M\|_{op}$. Par suite

$$\|M\|_{op} = \|D\|_{op} = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i| = \max \{|\lambda| : \lambda \in \sigma(M)\}.$$

4. Comme $\text{rg}(J_n) = 1$, on en déduit que 0 est une valeur propre de multiplicité au moins $(n - 1)$. La somme des valeurs propres est égale à $\text{tr}(J_n) = n$, donc l'autre valeur propre est n . On en déduit que : $\sigma(J_n) = \{0, n\}$, $\dim \ker(J_n) = n - 1$ et $\dim \ker(J_n - nI_n) = 1$. D'après la question 3, $\|J_n\|_{op} = n$.
5. Pour tous $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, on a

$$M_{i,j} = \langle Me_i, e_j \rangle \leq \|Me_i\| \|e_j\| \leq \|M\|_{op}$$

Ainsi, $|M_{i,j}| \leq \|M\|_{op}$ pour tous $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Donc

$$\|M\|_{op} \geq \max \{|M_{i,j}| : 1 \leq i, j \leq n\}.$$

6. Pour tout $X \in S^{n-1}$, on écrit :

$$\begin{aligned} \|MX\|^2 &= {}^t(MX).MX = {}^tX.{}^tMMX = \langle {}^tMMX, X \rangle \\ &\leq \|{}^tMMX\| \|X\| \leq \|{}^tMM\|_{op} = \max \{\lambda \in \sigma({}^tMM)\} := \mu. \end{aligned}$$

car tMM est symétrique réelle et ses valeurs propres sont positives (si $\lambda \in \sigma({}^tMM)$ alors il existe un vecteur $X \in S^{n-1}$ tel que ${}^tMMX = \lambda X$, donc ${}^tX{}^tMMX = \lambda \|X\|^2 = \|MX\|^2$, il s'ensuit que $\lambda \geq 0$). D'autre part, on a : $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{i,j}^2 = \text{tr}({}^tMM) = \sum_{\lambda \in \sigma({}^tMM)} \lambda$. Par suite,

$$\|MX\|^2 \leq \mu \leq \sum_{\lambda \in \sigma({}^tMM)} \lambda = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{i,j}^2.$$

Ceci pour tout $X \in S^{n-1}$, donc $\|M\|_{op} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{i,j}^2}$. On a égalité si, et seulement si, $\mu = \sum_{\lambda \in \sigma({}^tMM)} \lambda$ donc tMM admet 0 comme valeur propre de multiplicité au moins $(n-1)$ si et seulement si, $\text{rg}({}^tMM) \leq 1$. Comme, $\ker(M) = \ker({}^tMM)$ car, si ${}^tMMX = 0$ alors $\|MX\|^2 = {}^tX{}^tMMX = 0$ et donc $MX = 0$, on en déduit qu'on a égalité si, et seulement si, $\text{rg}(M) \leq 1$.

7. D'après la question précédente, on a :

$$\|M\|_{op} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{i,j}^2} \leq \sqrt{n^2} = n.$$

Soit $M \in \Sigma_n$ et $\|M\|_{op} = n$, donc $\|M\|_{op} = n \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{i,j}^2} \leq n$, et donc $\text{rg}(M) \leq 1$. Comme $\|M\|_{op} \neq 0$ donc $\text{rg}(M) = 1$. Les fait que $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{i,j}^2 = n^2$ et $M_{i,j}^2 \leq 1$ pour tous $1 \leq i, j \leq n$ entraîne que $M_{i,j}^2 = 1$, donc $M_{i,j} \in \{-1, 1\}$. Inversement, si $\text{rg}(M) = 1$ et $M_{i,j} \in \{-1, 1\}$, $1 \leq i, j \leq n$ alors $M \in \Sigma_n$ et $\|M\|_{op} = n$. Pour construire une telle matrice, il suffit de construire la première colonne C_1 , on a 2^n choix. Chaque C_i , $2 \leq i \leq n$ s'écrit $C_i = C_1$ ou $-C_1$. Donc pour chaque choix de C_1 on a 2^{n-1} matrices. Par suite le nombre des matrices $M \in \Sigma_n$ et $\|M\|_{op} = n$ est $2^n \cdot 2^{n-1} = 2^{2n-1}$.

B. Variables aléatoires sous-gaussiennes

8. Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\text{ch}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} \text{ et } \exp\left(\frac{t^2}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{2^n n!}.$$

On montre par récurrence que $(2n)! \geq 2^n n!$. Cette inégalité est évidente pour $n = 0$. Supposons $(2n)! \geq 2^n n!$ alors

$$(2n+2)! = (2n+1)(2n+2)(2n)! \geq 2(n+1)2^n n! = 2^{n+1}(n+1)!$$

ce qui montre que pour tous $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, $\frac{t^{2n}}{(2n)!} \leq \frac{t^{2n}}{2^n n!}$, par suite

$$\text{ch}(t) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\right) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

9. Soit $x \in [-1, 1]$. On a $\frac{1+x}{2} \geq 0$, $\frac{1-x}{2} \geq 0$ et $\frac{1+x}{2} + \frac{1-x}{2} = 1$. Par convexité de la fonction $\exp$ on a :

$$\exp(tx) = \exp\left(\frac{1+x}{2}t + \frac{1-x}{2}(-t)\right) \leq \frac{1+x}{2}\exp(t) + \frac{1-x}{2}\exp(-t).$$

- On suppose que X est à valeur dans $[-1, 1]$ et $\mathbb{E}(X) = 0$. D'après la question 9, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\exp(tX) \leq \exp(t)\frac{1+X}{2} + \exp(-t)\frac{1-X}{2}.$$

La variable X est bornée donc $\exp(tX)$ est bornée, donc elle admet une espérance finie. La croissance et la linéarité de l'espérance entraînent,

$$\mathbb{E}(\exp(tX)) \leq \exp(t)\frac{1+\mathbb{E}(X)}{2} + \exp(-t)\frac{1-\mathbb{E}(X)}{2} = \exp(t) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\right).$$

Donc X est 1-sous gaussienne.

- On suppose que X est à valeurs dans $[-\alpha, \alpha]$ et $\mathbb{E}(X) = 0$. La variable $\frac{X}{\alpha}$ est centrée et à valeurs dans $[-1, 1]$, ainsi $\frac{X}{\alpha}$ est 1-sous gaussienne.

C'est-à-dire, $\mathbb{E}(\exp(t\frac{X}{\alpha})) \leq \exp(\frac{t^2}{2})$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Donc

$$\mathbb{E}(\exp(tX)) \leq \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2}\right).$$

Donc X est α -sous gaussienne.

10. Les variables aléatoires $\exp(\mu_i X_i)$, $1 \leq i \leq n$, sont indépendantes, donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\exp(t \sum_{i=1}^n \mu_i X_i)) &= \mathbb{E}(\prod_{i=1}^n \exp(t\mu_i X_i)) = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}(\exp(t\mu_i X_i)) \\ &\leq \prod_{i=1}^n \exp\left(\frac{\mu_i^2 \alpha^2 t^2}{2}\right) = \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2} \sum_{i=1}^n \mu_i^2\right) \\ &= \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2}\right). \end{aligned}$$

Ce qui montre que $\sum_{i=1}^n \mu_i X_i$ est α -sous gaussienne.

11. On a : $(X \geq \lambda) = (\exp(tX) \geq \exp(t\lambda))$. D'autre part, comme X est α -sous gaussienne, alors $\exp(tX)$ admet une espérance finie. L'inégalité de Markov, entraîne :

$$\begin{aligned} P(X \geq \lambda) &= P(\exp(tX) \geq \exp(t\lambda)) \leq \frac{\mathbb{E}(\exp(tX))}{\exp(t\lambda)} \\ &\leq \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2}\right) \exp(-t\lambda) = \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2} - t\lambda\right). \end{aligned}$$

D'autre part on a $P(|X| \geq \lambda) = P(X \geq \lambda) + P(-X \geq \lambda)$. La variable $-X$ est α -sous gaussienne, puisque,

$$\mathbb{E}(\exp(t(-X))) = \mathbb{E}(\exp(-tX)) \leq \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2}\right).$$

Donc $P(-X \geq \lambda) \leq \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2} - t\lambda\right)$ pour tout $t > 0$. Par suite, pour tout $t > 0$ on a : $P(|X| \geq \lambda) \leq 2 \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2} - t\lambda\right)$. En choisissant $t > 0$ tel que $\frac{\alpha^2 t^2}{2} - t\lambda = -\frac{\lambda^2}{2\alpha^2}$ ($t = \frac{\lambda}{\alpha^2} > 0$), il vient

$$P(|X| \geq \lambda) \leq 2 \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2\alpha^2}\right).$$

12. Remarquons d'abord que $0 \leq [X] \leq X \leq [X] + 1$. Donc X admet une espérance finie si et seulement si, $[X]$ admet une espérance finie si et seulement si, la série $\sum P([X] \geq k)$ converge. D'autre part, comme k est un entier, l'événement $([X] \geq k)$ est exactement l'événement $(X \geq k)$. Donc X admet une espérance finie si et seulement si, $\sum P(X \geq k)$ converge et par croissance de l'espérance on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}([X]) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P([X] \geq k) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geq k) \\ &\leq \mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}([X]) + 1 = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geq k) + 1. \end{aligned}$$

13. On a

$$\left(\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right) \geq k\right) = \left(X^2 \geq \frac{2 \ln(k)}{\beta^2}\right) = \left(|X| \geq \frac{\sqrt{2 \ln(k)}}{\beta}\right).$$

D'après la question 12, on a :

$$\begin{aligned} P(\exp(\frac{\beta^2 X^2}{2}) \geq k) &\leq 2 \exp(-\frac{\frac{2 \ln(k)}{\beta^2}}{2\alpha^2}) \\ &= \exp(-\alpha^{-2} \beta^{-2} \ln(k)) = 2k^{-\alpha^{-2} \beta^{-2}}. \end{aligned}$$

Si $\alpha\beta < 1$, alors $\eta = \frac{1}{\alpha^2 \beta^2} < 1$ et la série $\sum \frac{1}{k^\eta}$ converge. Donc, la série $\sum P(\exp(\frac{\beta^2 X^2}{2}) \geq k)$ converge. D'après la question précédente, la variable $\exp(\frac{\beta^2 X^2}{2})$ admet une espérance finie et on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\exp(\frac{\beta^2 X^2}{2})) &\leq 1 + \sum_{k=1}^n P(\exp(\frac{\beta^2 X^2}{2}) \geq k) \\ &\leq 1 + 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\eta} = 1 + 2\zeta(\eta). \end{aligned}$$

D. Norme d'une matrice aléatoire

14. Soit $1 \leq i \leq n$, on a : $y_i = \sum_{j=1}^n x_j M_{i,j}^{(n)}$. Les variables aléatoires $M_{i,j}^{(n)}$ sont indépendantes, pour tout $1 \leq j \leq n$ et $\sum_{j=1}^n x_j^2 = 1$. D'après la question 11, la variable y_i est α -sous gaussiennes.

Chaque y_i est une fonction des variables $M_{i,j}^{(n)}, 1 \leq j \leq n$, donc les variables $y_i, 1 \leq i \leq n$ sont indépendantes. En utilisant l'inégalité d'Orlicz, il vient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\exp(\gamma \|y\|^2)) &= \mathbb{E}(\exp(\gamma \sum_{i=1}^n y_i^2)) = \mathbb{E}(\prod_{i=1}^n \exp(\gamma y_i^2)) \\ &= \prod_{i=1}^n \mathbb{E}(\exp(\frac{y_i^2}{4\alpha^2})) \leq 5^n, \end{aligned}$$

Soit $r > 0$. Par l'inégalité de Markov, on a :

$$\begin{aligned} P(\|y\| \geq r\sqrt{n}) &= P(\exp(\gamma \|y\|^2) \geq \exp(\gamma r^2 n)) \leq \frac{\mathbb{E}(\exp(\gamma \|y\|^2))}{\exp(\gamma r^2 n)} \\ &\leq (5 \exp(-\gamma r^2))^n. \end{aligned}$$

15. Il existe un vecteur $b \in S^{n-1}$ tel que $\|M^{(n)}\|_{op} = \|M^{(n)}b\|$. D'autre part, comme $S^{n-1} \subseteq \bigcup_{a \in \Lambda} B(a, \frac{1}{2})$, il existe $a \in \Lambda$ tel que $\|b - a\| \leq \frac{1}{2}$. On écrit :

$$\begin{aligned}
 \|M^{(n)}a\| &= \|M^{(n)}a - M^{(n)}b + M^{(n)}b\| \\
 &\geq \|M^{(n)}b\| - \|M^{(n)}a - M^{(n)}b\| \\
 &\geq \|M^{(n)}\|_{op} - \|M^{(n)}\|_{op} \|b - a\| \\
 &\geq \frac{1}{2} \|M^{(n)}\|_{op} \geq r\sqrt{n}.
 \end{aligned}$$

Donc : $(\|M^{(n)}\|_{op} \geq 2r\sqrt{n}) \subseteq \bigcup_{a \in \Lambda_n} (\|M^{(n)}a\| \geq r\sqrt{n})$. Par conséquent :

$$\begin{aligned}
 P(\|M^{(n)}\|_{op} \geq 2r\sqrt{n}) &\leq \sum_{a \in \Lambda_n} P(\|y_a\| \geq r\sqrt{n}) \leq \text{card}(\Lambda_n)(5 \exp(-\gamma r^2))^n \\
 &\leq 5^n (5 \exp(-\gamma r^2))^n = (25 \exp(-\gamma r^2))^n.
 \end{aligned}$$

Bibliographie

- [1] D. Foata, A. Fuchs : *Calcul des probabilités Cours, exercices et problèmes corrigés*, Seconde édition, Dunod, Paris 1998.
- [2] W. Feller : *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, third edition, 1967
- [3] A. M. Yaglom and I. M. Yaglom : *Challenging Mathematical Problems with Elementary Solutions*, Volume I, Dover Publications, INC. 1987
- [4] T. Cacoullos : *Exercices in Probability*, Springer. 1987.
- [5] C. Deschamps, *Cours de Probabilité* (Polycopié).
- [6] R. Geoffery, Grimmett, R. Stirzaker : *One Thousand Exercises in Probability*, Oxford University Press, 2001.
- [7] F. Boron, A. Haworth : *Collection of problems in probability theory*, Noordhoff International Publishing, Leyden, 1963.
- [8] M. Capinski, T. Zastawniak : *Probability Through Problems*, Springer, 2002.
- [9] Mathematics Magazine : *Problems* Vol. 87, No. 4 (October 2014), pp. 292-298.
- [10] P. Gorroochurn : *Classic Problems of Probability*, John Wiley & Sons, Inc, 2012.
- [11] L. D. Meshalkin : *Exercise Manual in Probability Theory*, Moscow University Press, Moscow, 1973.
- [12] A. N. Shiryaev : *Problems in Probability*, Springer, 2012.

Index

- Algébrique, 5
- Covariance, 163
- Dénombrable, 1
- Espérance, 146
 - Conditionnelle, 192
- Espace
 - probabilisé, 64
 - probabilisable, 61
- Événement, 60
 - certain, 60
 - contraire, 60
 - impossible, 61
 - incompatibles, 62
 - indépendants, 80
 - négligeable, 71
 - presque certain, 71
 - système complet, 63
- Eventualité, 59
- Expérience aléatoire, 59
- Famille
 - d'événements mutuellement indépendants, 82
 - sommable, 15
- Fonction
 - caractéristique, 187
 - de Möbius, 39
 - génératrice, 168
 - zêta de Riemann, 23
- Formule
 - de Bayes, 79
 - de Koenig-Huygens, 160, 163
 - de Poincaré, 67, 152
 - de Taylor, 198
 - de Wald, 196
 - des probabilités composées, 75
 - des probabilités totales, 76
- Inégalité
 - de Bienaymé-Tchebychev, 175
 - de Cantelli, 194
 - de Cauchy-Schwarz, 158
 - de Holder, 191
 - de Jensen, 191
 - de Kolmogorov, 190
 - de Markov, 175
- Indicateur d'Euler, 83
- Lemme
 - de Borel-Cantelli, 91
 - de Cantor, 8
- Loi
 - binomiale, 124
 - conditionnelle, 136
 - conjointe, 132
 - de Bernouilli, 124
 - de Pascal, 68, 127
 - de Poisson, 129
 - de probabilité, 119
 - des événements rares, 130
 - faible des grands nombres, 177
 - hypergéométrique, 261

- forte des grands nombres, 178
 - géométrique, 125
 - marginales, 135
 - uniforme, 123
- Modélisation, 67
- Moment, 156
- Probabilité, 64
- conditionnelle, 73
 - uniforme, 69
- Produit de Cauchy, 35
- Propriété
- de continuité croissante, 70
 - de continuité décroissante, 70
- Sommation par paquets, 20, 30
- Suite
- doubles, 19
 - exhaustive, 5
- Théorème
- de Fubini, 23, 33
 - de Mertens, 40
 - de transfert, 149
 - de Weierstrass, 178
- Transcendant, 8
- Tribu, 61
- engendré par une partie, 62
- Univers, 59
- Variable aléatoire
- centrée réduite, 122, 159
 - intégrable, 146
 - presque sûrement constante, 123
 - réelle, 118
- Variables aléatoires
- couple de (), 130
 - identiquement distribuées, 146
 - indépendantes, 139
 - mutuellement indépendantes, 141
- Variance, 159

Probabilités discrètes MP-MP*

Cours, exercices corrigés, extraits des sujets de concours

Cet ouvrage couvre la nouveauté du programme 2014 : Dénombrabilité, Familles sommables, Espaces probabilisés et Variables aléatoires discrètes.

Le cours est clair et concis, et contient plusieurs applications sous forme de petits exercices, de sorte que l'étudiant puisse y trouver une source d'apprentissage adapté à son niveau.

Au-delà de l'apprentissage du cours et de l'entraînement avec des exercices d'applications, il est important que les candidats se mettent dans l'ambiance authentique de concours en travaillant les exercices qui ont été posés ces trois dernières années, à l'X, Centrales, Mines-Ponts, etc. À la fin de chaque chapitre, le lecteur trouvera une série d'exercices, dont la plupart sont issus des épreuves orales des grands concours.

L'ouvrage contient 79 exercices et 3 extraits de sujets de concours avec une correction détaillée.

Ce livre s'adresse naturellement aux élèves des classes préparatoires MP et MP*, mais il sera également utile aux candidats à l'agrégation qui y trouveront de nombreux développements pour leur oral.

Jamel Jaber, agrégé et docteur en Mathématiques. Actuellement il est professeur de la classe MP à l'IPEST et ESPRIT Prépa.*

