Collection MÉTHODES & ANNALES

Nouvelle édition

David Augier
Christophe More

2e année

Physique
MP MP* - PT PT*

- Le cours en questions
- Les erreurs à éviter
- Les savoir-faire clefs
- Les conseils méthodologiques
- Les exercices et problèmes avec leurs corrigés détaillés

Éditions TEC & DOC

Lavoisier

Le système international d'unités (S.I.)

7 unités fondamentales + 2 unités « dites supplémentaires »

Grandeur	Nom de l'unité	Symbole
Longueur	mètre	m
Masse	kilogramme	kg
Temps	seconde	s
Intensité de courant	ampère	A
Température	kelvin	K
Intensité lumineuse	candela	cd
Quantité de matière	mole	mol
Angle plan	radian	rad
Angle solide (d'espace)	stéradian	sr

Les unités dérivées

Grandeur	Expression	Unité et symbole
Longueur L	L	m
Aire	$S = L^2$	m^2
Volume	$V = L^3$	m^3
Temps T	T	s
Vitesse	$v = L/T$	$m \cdot s^{-1}$
Accélération	$a = v/T = L/T^2$	$m \cdot s^{-2}$
Fréquence	$f = 1/T$	s^{-1} ou Hz (hertz)
Pulsation	$2\pi/T$	$rad \cdot s^{-1}$
Masse	M	kg
Masse volumique	$\mu = M/V = M/L^3$	$kg \cdot m^{-3}$
Force	$F = M \cdot a = M \cdot L/T^2$	$kg \cdot m \cdot s^{-2}$ ou N (newton)
Travail, énergie	$W = F \cdot L = M \cdot L^2/T^2$	$kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}$ ou J (joule)
Puissance	$P = W/T = M \cdot L^2/T^3$	$kg \cdot m^2 \cdot s^{-3}$ ou W (watt)
Pression	$p = F/S = M \cdot L/T^2 \cdot L^2$	$kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-2}$ ou Pa (pascal)
Intensité de courant	I	A
Charge	$q = I \cdot T$	$A \cdot s$ ou C (coulomb)
Tension	$U = P/I$	$kg \cdot m^2 \cdot s^{-3} \cdot A^{-1}$ ou V (volt)
Champ électrique	$E = F/q$	$kg \cdot m \cdot s^{-3} \cdot A^{-1}$ ou $V \cdot m^{-1}$
Résistance	$R = U/I$	$kg \cdot m^2 \cdot s^{-3} \cdot A^{-2}$ ou Ω (ohm)
Conductance	$G = 1/R$	Ω^{-1} ou S (siemens)
Capacité	$C = q/U$	$kg^{-1} \cdot m^{-2} \cdot s^4 \cdot A^2$ ou F (farad)
Champ magnétique	$B = F/q \cdot v$	$kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-1}$ ou T (tesla)
Inductance	$U = L\, dI/dT$	$kg \cdot m^2 \cdot s^{-2} \cdot A^{-2}$ ou H (henry)
Température	θ	K
Chaleur = énergie	Q	$Kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}$ ou J (joule)
Capacité thermique	$C = dQ/d\theta$	$J \cdot K^{-1}$
Capacité thermique molaire	$C_m = C/n$	$J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}$
Capacité thermique massique	$c = C_m/M$	$J \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}$
Entropie	$dS = dQ/\theta$	$J \cdot K^{-1}$

Collection MÉTHODES & ANNALES

Physique

2e année

MP MP* - PT PT*

Nouvelle édition

© LAVOISIER, 2009
ISBN : 978-2-7430-1147-5 (nouvelle edition)
ISSN : 1952-5281

Toute reproduction ou représentation intégrale ou partielle, par quelque procédé que ce soit, des pages publiées dans le présent ouvrage, faite sans l'autorisation de l'éditeur ou du Centre Français d'exploitation du droit de copie (20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris), est illicite et constitue une contrefaçon. Seules sont autorisées, d'une part, les reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective, et, d'autre part, les analyses et courtes citations justifiées par le caractère scientifique ou d'information de l'œuvre dans laquelle elles sont incorporées (loi du 1er juillet 1992-art. L 122-4 et L 122-5 et Code pénal art. 425).

Collection MÉTHODES & ANNALES

Physique

2e année

MP MP* - PT PT*

Nouvelle édition

David AUGIER
*Professeur en MP**
au lycée Pothier
(Orléans)

Christophe MORE
*Professeur en MP**
au lycée Condorcet
(Paris)

Editions TEC & DOC
11, rue Lavoisier
75008 Paris

Pour vous accompagner en prépa ou en université :

Collection MÉTHODES & ANNALES

Un ouvrage par matière et par année comprenant :

Une partie Méthodes
- Le cours en questions
- Les savoir-faire clefs

Une partie Annales
- Pour maîtriser les bases
- Pour approfondir

Physique

- *M&A Physique 1re année PCSI* par P. Grécias et J.-P. Migeon.
- *M&A Physique 1re année MPSI - PTSI* par P. Grécias et J.-P. Migeon.
- *M&A Physique 1re année BCPST-VETO* par P. Grécias et J.-P. Migeon.
- *M&A Physique 2e année PC PC** par S. Olivier.
- *M&A Physique 2e année MP MP* - PT PT** par D. Augier et C. More.
- *M&A Physique 2e année PSI PSI** par D. Augier et C. More.
- *M&A Physique 2e année BCPST-VETO* par J. Charlemagne et P. Grécias.

Chimie

- *M&A Chimie 1re année PCSI* par P. Grécias et V. Tejedor.
- *M&A Chimie 1re année MPSI - PTSI* par P. Grécias et V. Tejedor.
- *M&A Chimie 1re année BCPST-VETO* par P. Grécias et V. Tejedor.
- *M&A Chimie 2e année PC PC** par P. Grécias et V. Tejedor.
- *M&A Chimie 2e année MP MP* - PT PT** par P. Grécias et V. Tejedor.
- *M&A Chimie 2e année PSI PSI** par P. Grécias et V. Tejedor.
- *M&A Chimie 2e année BCPST-VETO* par P. Grécias et V. Tejedor.

Mathématiques

- *M&A Mathématiques 1re année PCSI - PTSI* par C. Bièche, A. Borel, R. Chmura, P. Guerini, H. Guillaumie, M. Hochart, C. Schreiber, G. Sciuto, M. Wigneron et J.-C. Martin.
- *M&A Mathématiques 1re année MPSI* par R. Adad, C. Bièche, A. Borel, R. Chmura, P. Guerini, H. Guillaumie, M. Hochart, C. Schreiber, G. Sciuto, M. Wigneron et J.-C. Martin.
- *M&A Mathématiques 2e année PC PC* - PT PT** par S. Added, C. Bièche, A. Borel, R. Chmura, S. Damour, H. Guillaumie, D. Lepelletier, F. Pélanchon, G. Sciuto et J.-C. Martin.
- *M&A Mathématiques et informatique 2e année MP MP** par R. Adad, A. Borel, S. Damour, P. Guerini, H. Guillaumie, M. Hochart, F. Pélanchon et J.-C. Martin.
- *M&A Mathématiques 2e année PSI PSI** par S. Added, L. Blanc-Centi, S. Damour, H. Guillaumie, F. Pelanchon, O. Rivière, L. Verschueren et J.-C. Martin.

Avant-propos

Amis étudiants

■ ***La collection Méthodes & Annales*** se donne comme objectif de répondre à vos besoins en mathématiques, physique ou chimie, pour toute CPGE, *par une approche novatrice*.

Réduire le fossé ressenti entre :
« suivre un cours » et « passer une épreuve de concours ».

• *Vous avez du mal à apprendre le cours ? Vous ne voyez pas l'essentiel ?*

La rubrique *Méthodes « le cours en questions »* vous précise les outils d'aide à l'apprentissage et à la compréhension en profondeur du cours. Elle n'a néanmoins pas vocation à se substituer à un ouvrage de cours traditionnel.

Sous forme de questions ponctuelles, cette partie vous permet de *mémoriser des points fondamentaux*.

• *Vous avez du mal à passer du cours aux exercices ? Vous avez besoin que l'on vous guide ?*

La rubrique *Méthodes « les savoir-faire clefs »* structure les connaissances essentielles autour de quelques démarches fondamentales.

Sous forme d'exercices soigneusement sélectionnés, cette partie vous permet d'*acquérir des réflexes méthodologiques essentiels*.

• *Vous souhaitez faire des « annales » pour préparer efficacement une colle, un DS, un concours ?*

La rubrique *Annales « pour maîtriser les bases »* vous permet de vous entraîner sur des exercices et problèmes de concours très classiques, en utilisant les repères acquis précédemment.

Sous forme d'extraits récents (des écrits ou des oraux), cette partie propose des solutions totalement rédigées qui viennent *asseoir définitivement vos connaissances*.

• *Vous souhaitez optimiser vos chances aux concours et consolider votre formation ?*

La rubrique *Annales « pour approfondir »* vous propose d'accéder à un plus haut niveau, ou de vous confronter simplement à des situations nouvelles.

Sous forme de textes de concours (des écrits ou des oraux) plus pointus ou plus abrupts, cette partie nécessite souvent plus de réflexion, et *développe vos facultés d'adaptation ultérieures*.

© Lavoisier – La photocopie non autorisée est un délit

■ ***Cet ouvrage est un guide de travail complet*** qui doit vous accompagner *tout au long de votre année de prépa*.

De l'apprentissage à l'autonomie

• *Cet ouvrage n'est pas conçu comme un simple ouvrage d'exercices et problèmes corrigés.*

Son but n'est pas seulement d'apprendre telle résolution mais d'*apprendre à apprendre*. D'où l'idée de montrer par chapitre que quelques savoir-faire clefs permettent de résoudre tous les problèmes. Tous les corrigés sont agrémentés de nombreuses aides ponctuelles du type Conseils méthodo-logiques, Erreurs à éviter, Éléments à mémoriser, Techniques de calculs...

Fournir des annales abordables à tout moment de l'année

• *Cet ouvrage n'est pas conçu comme un ouvrage brut d'annales.*

Son but n'est pas d'aligner simplement tous les problèmes d'une filière. En général, ces sujets portent sur l'ensemble du programme de 1re et 2e années et ne sont faisables qu'une fois le cours achevé. Là, les sujets sont découpés, ce qui permet *l'apprentissage selon l'avancement de votre cours*.

En fin d'ouvrage, un dernier chapitre donne des annales dans leur intégralité : Fenêtre sur les concours actuels. C'est désormais l'occasion de mettre en oeuvre *de façon autonome* tous vos acquis sur des sujets actuels de votre filière.

• *Vous trouverez dans M&A Physique 2e année MP*, MP-PT*, PT* les thèmes suivants : Mécanique, Électronique, Électromagnétisme, Physique des ondes, Optique, Électromagnétisme en régime quasi stationnaire, Thermodynamique, *couvrant la totalité du programme*.

En conclusion, nous souhaitons vous remercier pour avoir choisi ce livre, et nous espérons qu'il vous apportera toute l'aide efficace souhaitée

Il reste sans doute de nombreuses imperfections et nous vous serions reconnaissants de nous faire part de vos critiques et suggestions.

Les auteurs
David Augier et Christophe More

Notations

La nature des textes insérés en marge ou décrochement est précisée par l'un des quatre logos suivants :

⇨ : résultat important (à mémoriser) ou remarque importante.

: conseil méthodologique ou commentaire sur le contenu d'un exercice.

: erreur à éviter.

: rappel concernant les techniques de calcul.

Table des matières

Avant-propos 5

MÉCANIQUE

Chapitre 1 – Mécanique des systèmes matériels 9
Chapitre 2 – Mécanique du solide 47
Chapitre 3 – Actions de contact 79

ÉLECTRONIQUE

Chapitre 4 – Filtres linéaires et analyse de Fourier 109

ÉLECTROMAGNÉTISME

Chapitre 5 – Électrostatique 141
Chapitre 6 – Magnétostatique 177
Chapitre 7 – Autour des équations de Maxwell 213

PHYSIQUE DES ONDES

Chapitre 8 – Ondes électromagnétiques dans le vide 243
Chapitre 9 – Ondes dans les milieux 279

OPTIQUE

Chapitre 10 – Interférences optiques 313
Chapitre 11 – Interféromètre de Michelson 349
Chapitre 12 – Diffraction des ondes 383

ÉLECTROMAGNÉTISME EN RÉGIME QUASI STATIONNAIRE

Chapitre 13 – Induction électromagnétique 417

THERMODYNAMIQUE

Chapitre 14 – Transferts thermiques 457
Chapitre 15 – Dispositifs industriels comportant un écoulement 491

BILAN

Chapitre 16 – Problèmes corrigés 527
Chapitre 17 – Fenêtre sur les concours actuels 555
Index 593

Mécanique des systèmes matériels

Méthodes

Le cours en questions

1 ▬ Système de forces

1.1 Proposer un exemple de forces réparties volumiquement, surfaciquement et ponctuellement.

• Pour un système à répartition continue de masse (un fluide par exemple) les forces de pesanteur sont réparties volumiquement.

• Les forces pressantes sont réparties surfaciquement.

• Lorsqu'une bille repose sur une table, on peut parfois assimiler la force de contact à une force appliquée en un point.

⇒ Ce modèle sera discuté plus en détails au chapitre relatif aux forces de contact.

1.2 Qu'appelle-t-on éléments de réduction du système de forces en un point ?

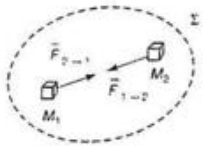
• Un système de forces est avantageusement représenté par sa résultante, somme vectorielle de toutes les forces du système :

$$\vec{R} = \int \mathrm{d}\vec{F} \quad .$$

• On peut définir le moment en un point en sommant vectoriellement le moment de toutes les forces du système.

$$\vec{\mathcal{M}}_O = \int \overrightarrow{OM} \wedge \mathrm{d}\vec{F} \quad .$$

© Larousse – La photocopie non autorisée est un délit



Actions intérieures

Figure 1

Le recensement des actions intérieures et extérieures est un préalable à toute étude. ⇐

1.3 Quelle est la distinction entre actions intérieures et extérieures et que peut-on dire du système des forces intérieures ?

• Les forces intérieures décrivent une interaction entre éléments du système (Fig. 1).

• Dans le système solaire par exemple, l'interaction Soleil-Terre est une action intérieure. En revanche, ce serait une action extérieure si l'on raisonnait sur le système Terre-Lune.

• Le système des actions intérieures à un système présente en toutes circonstances une résultante nulle et un moment nul en tout point. Cette propriété découle de l'action-réaction, troisième loi de Newton.

1.4 Comment peut-on relier les moments d'un système de forces calculés en des points différents ?

• Si l'on note $\vec{\mathcal{M}}_P$ le moment en P du système de forces, en deux points P et Q quelconques :

$$\vec{\mathcal{M}}_P = \vec{\mathcal{M}}_Q + \vec{R} \wedge \overrightarrow{QP} \quad .$$

Cette relation permet de définir un torseur des actions (cours de S.I.). ⇐

2 ▬ Centre de masse

2.1 Peut-on toujours définir le centre de masse d'un système matériel ?

• Le centre de masse est défini comme le barycentre des différents éléments constituant le système, affectés de leur masse.

Centre de masse et centre d'inertie sont synonymes ⇐

• La masse étant une grandeur positive, la masse totale M du système est toujours non nulle, ce qui permet de définir le barycentre G en toutes circonstances.

2.2 Comment relie-t-on la quantité de mouvement totale d'un système à celle de G ?

• La quantité de mouvement s'obtient par sommation vectorielle de la quantité de mouvement des différents éléments du système :

$$\vec{P} = \int \mathrm{d}m\vec{v} \quad .$$

• La définition du centre de masse permet d'écrire : $\vec{P} = M\vec{v}_G$.

2.3 Quelle est la loi de mouvement du centre de masse d'un système fermé dans un référentiel galiléen ?

• La loi de la résultante cinétique permet d'écrire :

$$\vec{R} = \frac{d(M\vec{v}_G)}{dt} = M\vec{a}_G .$$

• Le centre de masse a donc un mouvement de point matériel auquel on aurait affecté toute la masse du système et qui subirait la résultante des forces.

• Si le référentiel d'étude n'est pas galiléen, prendre en compte les forces d'inertie.

3 ▬ Pesanteur uniforme

3.1 Comment s'exprime la résultante du champ de pesanteur uniforme ?

• Puisque $\vec{g}$ est uniforme, le calcul de la résultante s'écrit :

$$\vec{\mathcal{P}} = \int dm\vec{g} = M\vec{g} .$$

• C'est le poids du système.

⇒ Cette propriété est établie dans un exercice du savoir-faire.

3.2 Où peut-on considérer que s'applique le poids dans un champ de pesanteur uniforme ?

• Le moment des forces de pesanteur, calculé en tout point O s'écrit :

$$\vec{\mathcal{M}}_O = \overrightarrow{OG} \wedge M\vec{g} .$$

• On peut donc considérer les forces de pesanteur uniforme réduites à $\vec{\mathcal{P}} = M\vec{g}$ appliqué en G.

⇒ Le centre de gravité est confondu avec le centre de masse.

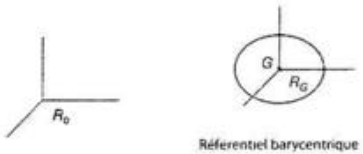
4 ▬ Référentiel barycentrique

4.1 Comment définit-on le référentiel barycentrique R_G ?

• L'origine du référentiel barycentrique est le centre de masse G du système.

• Les directions des axes de R_G sont fixes dans le référentiel galiléen d'étude R_0. Le référentiel barycentrique est donc en translation par rapport à R_0 (Fig. 2).

⇒ Les dénominations référentiel barycentrique ou référentiel du centre de masse sont synonymes.



Référentiel barycentrique Figure 2

© Lavoisier – La photocopie non autorisée est un délit

4.2 Le référentiel barycentrique peut-il être galiléen ?

• Comme le référentiel d'étude R_0 est galiléen, le référentiel barycentrique, qui est défini en translation, aura cette propriété lorsque son origine G sera elle-même animée d'un mouvement de translation rectiligne et uniforme.

• Ce n'est donc possible que lorsque la résultante des forces appliquées au système est nulle.

• On retiendra ainsi la propriété suivante : le référentiel barycentrique d'un système isolé est galiléen.

4.3 Quelle est la quantité de mouvement d'un système dans son référentiel barycentrique ?

• La vitesse de G étant par définition nulle dans R_G,

$$\vec{P}^* = \vec{0} .$$

On note avec * les grandeurs définies dans R_G.

5 ▬ Loi du moment cinétique

5.1 Comment évolue le moment cinétique en un point fixe O d'un système matériel fermé ?

Le moment cinétique en O se note $\vec{\sigma}_O$ ou $\vec{L}_O$.

• Dans un référentiel d'étude galiléen, le moment cinétique $\vec{\sigma}_O$ évolue en fonction du moment des forces en ce point :

$$\frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_{ext})$$

Rappel de 1re année :

$$d\vec{F}_{ie} = -dm\vec{a}_e$$

et

$$d\vec{F}_{ic} = -dm\vec{a}_c = -2dm\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r$$

• Si le référentiel d'étude n'est pas galiléen, on doit prendre en compte les moments des forces d'inertie :
- force d'inertie d'entraînement ;
- force d'inertie de Coriolis.

5.2 Comment lie-t-on le moment cinétique dans R_O à celui dans R_G ?

• Cette relation fait l'objet d'un théorème de König. En notant $\vec{\sigma}^*$ le moment cinétique du système dans R_G (moment cinétique propre), on peut écrire :

$$\vec{\sigma}_O = \vec{\sigma}^* + \overrightarrow{OG} \wedge M\vec{v}_G .$$

Moment cinétique propre et moment cinétique barycentrique sont synonymes : ils désignent $\vec{\sigma}^*$.

• Le moment cinétique du système apparaît ainsi comme la somme du moment cinétique propre et du moment cinétique de G considéré comme point matériel.

5.3 Rappeler la loi du moment cinétique dans R_G. Quel est le rôle des forces d'inertie dans le cas où R_G n'est pas galiléen ?

• La dérivée du moment cinétique barycentrique est égale à chaque instant au moment en G des forces extérieures appliquées au système :

$$\frac{d\vec{\sigma}^*}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_G(\vec{F}_{ext}) \ .$$

⇒ Puisque R_G est en translation par rapport au référentiel d'étude, dériver temporellement dans l'un ou l'autre référentiel revient au même.

• Ce théorème est d'autant plus intéressant qu'il ne nécessite pas de prise en compte des moments de forces d'inertie, alors même que le référentiel n'est pas nécessairement galiléen comme rappelé ci-dessus.

⇒ Il n'y a pas d'incohérence avec la règle générale : en effet, le moment en G des forces d'inertie est nul.

6 ▬ Puissance et énergie en mécanique

6.1 Comment se définissent la puissance d'un système de forces et l'énergie cinétique d'un système matériel discret ? Rappeler le théorème de König correspondant.

• Très naturellement, ces grandeurs s'obtiennent en additionnant les contributions de chaque point matériel P_i.

• Ainsi, on écrira :

$$E_c = \sum_i \left(\frac{1}{2} m_i V_i^2\right) \quad \text{et} \quad \mathcal{P} = \sum_i (\vec{F}_i \cdot \vec{V}_i) \ .$$

• En notant E_c^* l'énergie cinétique propre (dans R_G) :

$$E_c = E_c^* + \frac{1}{2} M v_G^2$$

6.2 Qu'en est-il de la distinction entre forces intérieures et extérieures ?

• Ce point est très important : en effet, bien que les résultante et moment des forces intérieures soient nuls, ce n'est pas le cas en général de leur puissance.

• On doit donc évaluer : $\mathcal{P} = \mathcal{P}_{int} + \mathcal{P}_{ext}$.

⇒ La mécanique du solide permettra ultérieurement de rencontrer un cas de nullité de la puissance $\mathcal{P}_{int}$.

6.3 Quelle écriture peut-on donner du théorème de la puissance cinétique pour un système de points matériels ?

• Dans un référentiel galiléen, la dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique est égale à la puissance totale des actions, c'est-à-dire la somme de la puissance des actions intérieures et extérieures.

$$\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}_{int} + \mathcal{P}_{ext} \ .$$

© Lavoisier – La photocopie non autorisée est un délit

Le cas du référentiel du centre de masse est particulier car la puissance des forces d'inertie y est toujours nulle.

• Dans le cas d'un référentiel non galiléen, il faut prendre en compte la puissance des forces d'inertie d'entraînement ; en effet, la puissance des forces d'inertie de Coriolis est toujours nulle ($-2m_i\vec{\Omega} \wedge \vec{V}_r$ est orthogonal à $\vec{V}_r$).

6.4 Dans le cas de forces conservatives, quelles relations permettent de définir les énergies potentielles extérieure et d'interactions intérieures, à partir des puissances $\mathcal{P}_{int}$ et $\mathcal{P}_{ext}$? Comment se définit alors l'énergie mécanique ?

• Dans le cas où toutes les forces sont conservatives, on peut mettre les puissances intérieure et extérieure sous la forme de dérivée temporelle de fonctions des seules positions des points du système :

$$\mathcal{P}_{int} = -\frac{dE_{pint}}{dt} \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_{ext} = -\frac{dE_{pext}}{dt}$$

Il peut advenir que l'une de ces énergies potentielles seulement soit définie, l'autre terme incluant des forces non conservatives.

On appelle E_{pint} énergie potentielle d'interaction et E_{pext} énergie potentielle des actions extérieures.

• Lorsque toutes les forces qui interviennent dans l'évolution du système de points matériels sont conservatives, le théorème de la puissance cinétique dans un référentiel galiléen peut se mettre sous la forme :

En thermodynamique, la conservation de l'énergie apparaît dans le premier principe, qui fait appel à l'énergie interne. L'énergie potentielle d'interaction est alors intégrée dans cette fonction d'état.

$$\frac{d(E_c + E_{pint} + E_{pext})}{dt} = 0$$

La grandeur $E_m = E_c + E_{pint} + E_{pext}$ est appelée énergie mécanique du système.

Les savoir-faire clefs

Conseils méthodologiques

1 ▬ Savoir utiliser conjointement les principes.

Deux singes de même masse M sont au sol et tiennent les deux extrémités d'une corde, qui fait le tour d'une poulie de masse négligeable (Fig. 3). Un des singes, noté A, entreprend de grimper à la corde, l'autre B se contente de se tenir à un même point de la corde.

On désire savoir si l'un des singes peut arriver avant l'autre au sommet et, pour ce faire, déterminer une relation entre les accélérations $\ddot{z}_A$ et $\ddot{z}_B$, sachant qu'on ne dispose pas de loi indiquant comment se répartit l'effort du singe A.

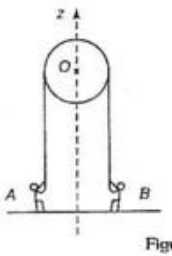


Figure 3

a) On distingue 3 systèmes :

P : correspondant à la poulie de centre O, pour laquelle les forces appliquées sont les tensions des fils $\vec{T}_A$ et $\vec{T}_B$ (Fig. 4) et des actions de liaison dont on supposera le moment nul en O.

REMARQUE – L'examen des actions pour ce type de liaison sera précisé dans le chapitre correspondant.

A : singe A soumis à son poids et à la tension du fil $\vec{T}'_A$.

B : singe B soumis à son poids et à la tension du fil $\vec{T}'_B$.

Justifier, en considérant que la masse linéique de la corde est nulle, que les tensions définies ci-dessus vérifient :

$$\vec{T}'_A = -\vec{T}_A \quad \text{et} \quad \vec{T}'_B = -\vec{T}_B$$

b) Appliquer la loi de la résultante cinétique pour les systèmes A et B et en déduire deux relations vérifiées respectivement par $\ddot{z}_A$ et $\ddot{z}_B$.

c) Appliquer la loi du moment cinétique en O pour le système P. La loi de la résultante cinétique aurait-elle donné un renseignement utile dans le cas présent ?

d) Utiliser les équations des questions précédentes pour répondre à la question : « Un singe arrive-t-il avant l'autre au sommet ? »

e) Une autre approche consiste à considérer le système formé par la réunion $P \cup A \cup B$ des 3 systèmes précédents. Quelle loi cinétique est-il intéressant d'utiliser ? Permet-elle de répondre à la question ?

1.a) Considérer un système de masse nulle formé par chaque portion de corde, exprimer sa quantité de mouvement et conclure.

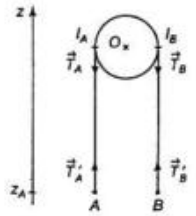


Figure 4

1.b) et c) Ne pas oublier que les lois de la résultante et du moment cinétiques ne font intervenir que les forces extérieures au système considéré.

1.d) Une fois éliminées les tensions entre les différentes équations, on obtient une relation entre les accélérations. Intégrer celle-ci.

1.e) Examiner quelles sont les actions extérieures à ce système et exploiter le renseignement sur la liaison en O.

1.a) Chaque portion de corde entre la poulie et le singe A ou B est un système de masse nulle, donc de quantité de mouvement nulle. La dérivée par rapport au temps de ce vecteur nul est également nulle, donc la loi de la résultante cinétique prévoit que la somme des forces extérieures appliquées à chaque portion de corde est nulle. Puisque le poids est également nul, il ne reste que :

$$\vec{T}'_A + \vec{T}_A = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{T}'_B + \vec{T}_B = \vec{0}$$

b) Le singe A étant soumis à son poids $M\vec{g} = -Mg\,\vec{u}_z$, la loi de la résultante cinétique s'écrit :

$$M\ddot{z}_A = -Mg + T'_A$$

La même relation écrite pour le singe B donne bien entendu :

$$M\ddot{z}_B = -Mg + T'_B$$

La loi du moment cinétique n'aurait apporté aucun renseignement dans cette description où chaque singe est décrit comme un point matériel.

c) La masse de la poulie est nulle, si bien que la quantité de mouvement, donc le moment cinétique, de chacun de ses éléments est nulle. Le moment cinétique de P étant la somme vectorielle du moment cinétique de ses éléments,

$$\vec{L}_O(P) = \vec{0}$$

Erreur à éviter
T' est une valeur algébrique : il importe d'être attentif aux signes dans ce genre de problème.

Un point est sans degré de liberté de rotation.

Le moment cinétique se note $\vec{\sigma}$ ou $\vec{L}$.

© Lavoisier – La photocopie non autorisée est un délit

On déduit de la loi du moment cinétique que la somme des moments des forces de tension $\vec{T}_A$ et $\vec{T}_B$ est nulle : $\vec{OI}_A \wedge \vec{T}_A + \vec{OI}_B \wedge \vec{T}_B = \vec{0}$.

Compte tenu des orientations : $\vec{OI}_A = -\vec{OI}_B$ et $\vec{T}_A$ et $\vec{T}_B$ verticales, on peut déduire que :

$$\boxed{\vec{T}_A = \vec{T}_B}.$$

On dit parfois, dans le cours de S.I., que la poulie de masse nulle transmet intégralement les efforts.

La loi de la résultante cinétique appliquée à la poulie n'aurait pas donné d'information pertinente ici, puisqu'elle aurait fait intervenir la résultante des forces exercées par l'axe de la poulie, ce qui représente une nouvelle inconnue.

d) On déduit de l'égalité $\vec{T}_A = \vec{T}_B$ la même relation entre $\vec{T}'_A$ et $\vec{T}'_B$. Ainsi, puisque les poids des singes sont identiques, on peut affirmer que leurs accélérations le sont également :

$$\boxed{\ddot{z}_A = \ddot{z}_B}.$$

Puisque les vitesses initiales sont supposées identiques, on en déduit que les singes s'élèvent à la même vitesse : ils parviennent simultanément en haut !

Dans ce modèle où la masse de la poulie est négligée, et dans lequel on a supposé qu'aucun frottement n'intervenait sur l'axe de la poulie, tous les efforts fournis par le singe A profitent également à B : tous deux s'élèvent avec la même vitesse.

e) Pour le nouveau système, les actions extérieures sont constituées :

- des poids des singes ;
- de l'action de l'axe sur la poulie ;
- du poids de la poulie, qui est négligé.

Notamment, les tensions $\vec{T}_A$, $\vec{T}'_A$, $\vec{T}_B$ et $\vec{T}'_B$ sont des actions intérieures, qu'il ne faut plus comptabiliser dans la résultante et le moment des forces extérieures. La loi du moment cinétique en O permet d'annuler le rôle de l'action de l'axe sur la poulie et ainsi, en notant $\vec{L}_O$ le moment cinétique du système,

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{OA} \wedge M\vec{g} + \vec{OB} \wedge M\vec{g}$$

Chacun des moments de poids peut s'écrire $\vec{OA} \wedge M\vec{g} = \vec{OI}_A \wedge M\vec{g}$ et $\vec{OB} \wedge M\vec{g} = \vec{OI}_B \wedge M\vec{g}$; puisque $\vec{OI}_A = -\vec{OI}_B$, la somme des moments des poids est nulle.

On en déduit la constance de $\vec{L}_O$. Or ce vecteur est nul à l'instant initial, où le système est immobile :

$$\boxed{\vec{L}_O = \vec{0}}.$$

$\vec{L}_O$ désigne ici le moment cinétique de $P \cup A \cup B$ au point O.

Il ne reste qu'à exprimer ce moment cinétique qui n'est autre que celui des deux singes, car la masse des éléments de la poulie est nulle :

$$\vec{L}_O = \vec{OA} \wedge M\dot{z}_A\vec{u}_z + \vec{OB} \wedge M\dot{z}_B\vec{u}_z$$

On déduit de la même manière que ci-dessus, dans le cas des moments des tensions, l'égalité des vitesses :

$$\boxed{\dot{z}_A = \dot{z}_B}.$$

On peut donc répondre à la question posée : A et B arrivent simultanément en haut dans cette situation très simplifiée.

REMARQUE – On retient qu'il est généralement possible d'obtenir une même relation en considérant différents systèmes. Ici, la loi des actions réciproques, qui a été nécessaire dans la question **a)** pour relier les lois obtenues dans chacun des sous-systèmes, n'est plus intervenue explicitement dans la question **e)**. C'est bien entendu par le fait que seules les actions extérieures sont prises en compte dans les lois fondamentales que l'on obtient une compensation des tensions intérieures.

2 ▬ Systèmes équivalents : cas de la pesanteur.

Conseils méthodologiques

On considère un système composé de N points matériels A_i de masse m_i dans un champ de pesanteur uniforme défini par l'accélération $\vec{g}$. On se propose d'établir que le système de forces correspondant aux N poids $m_i\vec{g}$, appliquées aux différents points, est équivalent au système de force ne comprenant que le poids du système complet, appliqué en G (Fig. 5).

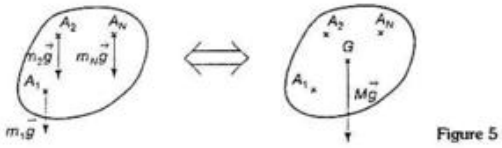


Figure 5

On rappelle que deux systèmes de forces équivalents ont même résultante et même moment en tout point.

a) Définir la masse totale M du système et montrer que les deux systèmes de forces ont même résultante.

b) Rappeler la définition du centre de masse G et exprimer le moment en G du système des N poids appliqués aux différents A_i. Obtient-on le même résultat pour le poids $M\vec{g}$ appliqué en G ?

c) Peut-on affirmer que les deux systèmes de forces ont même moment en tout point ?

d) Qu'en est-il de l'énergie potentielle de pesanteur ? Peut-on encore utiliser l'équivalence ?

2.a) et b) Exploiter les relations de définition et effectuer une factorisation mettant à profit le fait que l'accélération de la pesanteur est uniforme.

2.c) Lier le moment en tout point au moment en G.

2.d) Passer par l'intermédiaire de la puissance des forces de pesanteur, lorsque le système est en mouvement.

2.a) La masse s'ajoute scalairement :

$$M = \sum_{i=1}^{N} m_i$$

En sommant vectoriellement les différents poids des points matériels, on obtient la résultante des forces de pesanteur, appelée poids du système :

© Ellipses - La photocopie non autorisée est un délit

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} (m_i\vec{g}) = \left(\sum_{i=1}^{N} m_i\right)\vec{g} = M\vec{g}$$

Par exemple, l'étude de l'atmosphère d'une planète met en jeu des échelles de taille qui peuvent interdire de négliger la variation de $\vec{g}$ avec l'altitude.

Les deux systèmes de forces définis dans l'énoncé sont bien équivalents. Dans un champ de pesanteur non uniforme, il faudrait se garder d'utiliser l'équivalence.

b) G est le barycentre des différents points, affectés de leur masse : ainsi, en exprimant $M\overrightarrow{OG}$ on montre que :

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$$

Le moment en G des forces de pesanteur s'écrit, d'après la définition :

$$\sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{GA_i} \wedge m_i\vec{g}$$

On peut mettre $\vec{g}$ en facteur et écrire :

$$\sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{GA_i} \wedge m_i\vec{g} = \left(\sum_{i=1}^{N} m_i\overrightarrow{GA_i}\right) \wedge \vec{g}$$

On reconnaît alors la quantité $\sum_{i=1}^{N} m_i\overrightarrow{GA_i}$ qui a été montrée comme nulle précédemment. Le moment en G des forces de pesanteur uniforme est nul. Puisque le système constitué d'une unique force appliquée en G vérifie également cette propriété, on peut affirmer que les deux systèmes ont même moment en G.

c) Il a été rappelé dans le cours en questions, que le moment en un point P d'un système de forces quelconque est lié au moment en Q par la relation générale :

$$\vec{\mathcal{M}}_P = \vec{\mathcal{M}}_Q + \vec{R} \wedge \overrightarrow{QP}$$

Il suffit de montrer l'égalité de la résultante et du moment en un point, pour affirmer l'égalité du moment en tout point.

où $\vec{R}$ est la résultante des forces. Ici, on peut écrire la même relation en exploitant le point G et en notant $\vec{P}$ la résultante : pour les deux systèmes de forces,

$$\boxed{\vec{\mathcal{M}}_O(poids) = \overrightarrow{OG} \wedge \vec{P}}.$$

d) Imaginons une variation de l'état du système, correspondant à une mise en mouvement de chacun de ses points A_i à la vitesse $\vec{V}_i$. La puissance des forces de pesanteur s'écrit :

$$\mathcal{P} = \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{g} \cdot \vec{V}_i$$

On peut là encore mettre $\vec{g}$ en facteur, en profitant de son caractère uniforme, pour obtenir :

$$\mathcal{P} = \left(\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{V}_i\right) \cdot \vec{g}$$

Mais, G étant le centre de masse du système, on a par ailleurs :

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{V}_i = M\vec{V}(G).$$

Il s'agit de la quantité de mouvement.

On obtient ainsi la puissance écrite sous la forme :

$$\mathcal{P} = M\vec{V}(G) \cdot \vec{g} = M\vec{g} \cdot \vec{V}(G)$$

Cette dernière écriture correspond à la puissance du système de forces représenté par le poids appliqué en G. L'équivalence des deux systèmes est valable aussi pour la puissance.

Puisqu'énergie potentielle et puissance sont reliées par l'équation ne faisant intervenir qu'une dérivée temporelle $\mathcal{P} = -\dfrac{dE_p}{dt}$, l'équivalence est également valable pour l'énergie potentielle.

$$\boxed{E_p = Mgz_G}.$$

À une constante additive près.

E_p est l'énergie potentielle de pesanteur du système, si l'axe des z est dirigé verticalement et orienté vers le haut (Fig. 6).

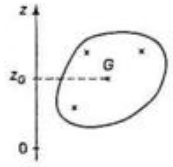


Figure 6

3 ■ Savoir utiliser les lois de conservation.

Conseils méthodologiques

Deux particules de masses m_1 et m_2 évoluent dans un puits de potentiel à une dimension, dont la forme est schématisée dans la figure 7. On note U_0 la profondeur du puits. À l'instant initial, les particules ont une énergie mécanique notée E_0, elles sont situées dans l'intervalle des abscisses où l'énergie potentielle U est nulle et se déplacent en sens contraires.

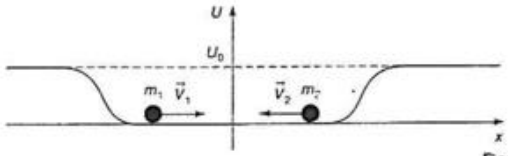


Figure 7

a) Si les deux particules n'interagissent pas, quelle condition peut-on proposer pour assurer qu'elles ne sortiront pas du puits ? Quelle est alors la nature de leur mouvement ?

b) Les deux particules peuvent interagir au fond du puits, sachant que la quantité de mouvement totale, ainsi que l'énergie cinétique totale sont alors conservées. Quelle est, en fonction du rapport des masses $r = \dfrac{m_1}{m_2}$ l'énergie mécanique des particules après leur première collision ? On exprimera pour ce faire l'énergie mécanique après collision de chaque particule sous la forme :

$$\frac{E_i}{E_0} = 1 + F_i(r)$$

où l'indice i peut prendre la valeur 1 ou 2.

3.a) Une discussion sur l'énergie permet de dégager la condition voulue.

3.b) La relation vectorielle sur la quantité de mouvement prend une forme scalaire ici ; combinée à la conservation de l'énergie, elle fournit les propriétés après l'interaction.

© Lavoisier - La photocopie non autorisée est un délit

3.c) et **d)** C'est une nouvelle fois une discussion portant sur l'énergie mécanique maximale que peut acquérir une particule.

3.e) Les énergies mécaniques obtenues après interaction prennent ici des valeurs particulières, qu'il faut utiliser.

Examiner les cas où $r = 1$, $r \ll 1$ et la transformation $r \to \dfrac{1}{r}$.

c) Si $2E_0 < U_0$, peut-on imaginer qu'une particule quitte le puits ?

d) Si $2E_0 \geqslant U_0 > E_0$, examiner les conditions permettant une éventuelle sortie d'une particule du puits, après la première collision.

e) Examiner les deux situations précédentes : $2E_0 < U_0$ et $2E_0 \geqslant U_0 > E_0$ dans le cas particulier où $r = (1+\sqrt{2})^2$.

3.a) Chaque particule possède une énergie mécanique somme de son énergie potentielle $U(x)$ et d'une énergie cinétique $\dfrac{1}{2}m_i V_i^2$ ($i = 1,2$) toujours positive ou nulle. De ce fait, la particule ne peut explorer que l'intervalle des abscisses correspondant à $U(x) < E$:

- lorsque $E \geqslant U_0$, la particule peut quitter le puits, on parle d'un état de diffusion,
- lorsque $E < U_0$, elle reste confinée : état lié.

On notera qu'une telle discussion peut être menée sans connaître la nature précise de la loi $U(x)$: seule compte la hauteur de la marche énergétique de part et d'autre du puits.

b) La conservation de la quantité de mouvement, en projection sur l'axe Ox puisque ce problème est unidimensionnel, conduit à :

$$\boxed{m_1v_1 + m_2v_2 = m_1w_1 + m_2w_2}.$$

Les vitesses v_i et w_i sont les valeurs algébriques correspondant aux composantes des vecteurs $\vec{v}_i$ et $\vec{w}_i$ sur l'axe des x.

si l'on note v_i et w_i les vitesses avant et après l'interaction.

D'autre part, la conservation de l'énergie mécanique entraîne celle de l'énergie cinétique (au fond du puits, l'énergie potentielle est nulle pour les particules avant et après l'interaction) :

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1w_1^2 + \frac{1}{2}m_2w_2^2$$

En regroupant dans cette dernière équation les termes par indice, on écrit $m_1(v_1^2 - w_1^2) = m_2(w_2^2 - v_2^2)$, c'est-à-dire :

$$m_1(v_1 - w_1)(v_1 + w_1) = m_2(w_2 - v_2)(w_2 + v_2)$$

Or, l'équation de conservation de la quantité de mouvement permet également d'écrire $m_1(v_1 - w_1) = m_2(w_2 - v_2)$, on en déduit :

$$\boxed{v_1 + w_1 = w_2 + v_2}.$$

À ce stade, on obtient un système linéaire d'équations, alors que l'équation énergétique était non linéaire. La résolution est dorénavant aisée.

L'équation de conservation de la quantité de mouvement, jointe à cette dernière équation, constituent un système linéaire dont les inconnues sont w_1 et w_2. Après résolution, il vient :

$$\boxed{w_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2}{m_1 + m_2}} \quad \text{et} \quad \boxed{w_2 = \frac{2m_1v_1 + (m_2 - m_1)v_2}{m_1 + m_2}}.$$

Or, les vitesses v_1 et v_2 ne sont pas quelconques, puisque, par hypothèse, les énergies cinétiques sont identiques. On peut donc écrire que v_2 est de

signe contraire de v_1, avec en outre $m_1 v_1^2 = m_2 v_2^2$. Ainsi, à l'aide du paramètre sans dimension r, on obtient :

$$v_2 = -\sqrt{r}\, v_1$$

En remplaçant dans les équations générales donnant les vitesses après le choc, il vient :

$$w_1 = \frac{r-1-2\sqrt{r}}{r+1} v_1 \quad \text{et} \quad w_2 = \frac{1-2\sqrt{r}-r}{1+r} v_2$$

On déduit alors la relation entre les énergies cinétiques : $\frac{E_1}{E_0} = \frac{w_1^2}{v_1^2}$ et $\frac{E_2}{E_0} = \frac{w_2^2}{v_2^2}$, qui permet de faire apparaître les fonctions F_i de l'énoncé :

$$\boxed{F_1 = -\frac{4\sqrt{r}\,(r-1)}{(r+1)^2}} \quad \text{et} \quad \boxed{F_2 = +\frac{4\sqrt{r}\,(r-1)}{(r+1)^2}}.$$

On constate naturellement que $F_2 = -F_1$, ce qui traduit la conservation de l'énergie : $E_1 + E_2 = 2E_0$.

3 cas méritent d'être examinés :

– $r = 1$: particules de même masse. Par raison de symétrie, les particules échangent leurs vitesses, les énergies cinétiques ne varient pas : $F_1 = F_2 = 0$.

– $r \ll 1$: particules de masses très différentes. $F_1(0) = -F_2(0) = 0$, dans ce cas également, les énergies cinétiques ne sont pas sensiblement modifiées.

– $r \to \frac{1}{r}$: échange de particules.

On vérifie que $F_1\left(\frac{1}{r}\right) = -F_1(r) = F_2(r)$, car il est identique de considérer la masse de la particule 1 supérieure à celle de la particule 2 ou le cas inverse : il suffit de renuméroter différemment.

c) La somme des énergies mécanique se conserve : $E_1 + E_2 = 2E_0$. Le maximum d'énergie que peut donc atteindre une particule est $2E_0$, c'est donc insuffisant pour sortir du puits. Le système reste confiné.

d) On peut imaginer qu'une particule quitte le puits si, après l'interaction, elle acquiert suffisamment d'énergie pour dépasse la valeur U_0. Avec la remarque faite précédemment, concernant l'échange des deux particules par la transformation $r \to \frac{1}{r}$, il est équivalent de raisonner sur une des 2 particules, choisissons par exemple 1. Examinons donc si E_1 peut excéder U_0, sachant que $2E_0 \geqslant U_0 > E_0$. Il faut dans ce cas que $F_1(r)$ soit supérieur à $\frac{U_0}{E_0} - 1$.

Or, le graphe de la fonction F_1 (Fig. 8) met bien en évidence des valeurs de r pour lesquelles $0 < F_1(r) \leqslant 1$. Autrement dit, pour une valeur du rapport $\frac{U_0}{E_0}$ inférieure à 2, il existe une gamme de rapport de masses r correspondant à des couples de particules dont l'une peut quitter le puits.

Erreur à éviter
L'égalité des énergies ne signifie pas l'égalité des vitesses !

Mais la vitesse de la particule légère a en revanche bien changé de signe.

On ne se pose pas ici la question de la discernabilité des particules : on suppose que les numéroter a un sens.

On prévoit que si une particule acquiert suffisamment d'énergie pour quitter le puits, celle qui reste aura une énergie inférieure à l'énergie initiale. Appliqué à un système à grand nombre de particules, ce résultat a pour conséquence un refroidissement appelé refroidissement par évaporation.

© Ellipses – La photocopie non autorisée est un délit

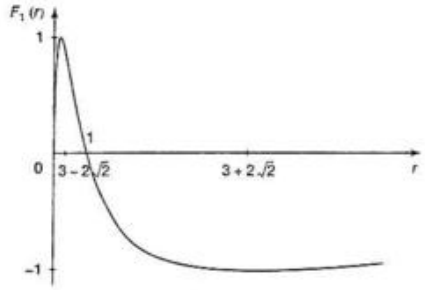


Figure 8

e) La valeur proposée pour r correspond à $F_1 = -1$, c'est donc une situation correspondant à $E_1 = 0$ et $E_2 = 2E_0$, c'est-à-dire :

– l'arrêt de la particule 1 après l'interaction,

– le doublement de l'énergie de la particule 2. Celle-ci est donc en mesure de quitter le piege si $U_0 \leqslant 2E_0$.

Dans le cas où $U_0 > 2E_0$, la particule 2 ne parvient pas à quitter le puits : elle revient donc interagir avec la particule 1. Mais par conservation de l'énergie totale, on peut affirmer qu'aucune des 2 particules ne pourra, au hasard des collisions, acquérir une énergie suffisante pour quitter le puits.

REMARQUE – Cet exercice illustre l'utilisation des lois de conservations pour résoudre des problèmes sans nécessairement avoir à utiliser les lois du mouvement. En physique des particules, c'est une situation que l'on rencontre fréquemment.

Conseils méthodologiques

4 ■ Savoir prendre en compte des forces intérieures.

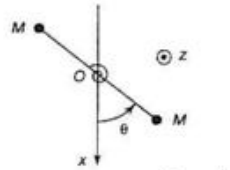


Figure 9

Un pendule est constitué d'une tige de masse négligeable le long de laquelle sont disposées deux masses ponctuelles M, à égale distance D du milieu O de la tige (Fig. 9). L'ensemble est mobile en rotation autour de l'axe vertical (Oz), c'est-à-dire dans le plan (xOy) dans les conditions suivantes :

– le repère d'espace $(Oxyz)$ est fixe dans le référentiel galiléen ;

– si l'on note θ l'angle de la tige par rapport à l'axe (Ox), un moment de forces $\vec{\mathcal{M}}_O = -\alpha\,\theta\,\vec{u}_z$ est appliqué, on parle de couple de rappel ;

– libéré sans vitesse initiale d'une position repérée par θ_0, le pendule effectue un mouvement de rotation autour de (Oz), sous l'action du seul couple de rappel jusqu'à la position $\theta = 0$;

– lors du passage par la position $\theta = 0$, un dispositif non représenté fait passer la distance des masses au centre O de la valeur D à $\frac{D}{\sqrt{2}}$. Cette modification s'effectue grâce à un mécanisme intérieur au pendule, mais de masse négligeable. On considère cette transformation suffisamment rapide pour que la position angulaire θ n'ait pas sensiblement varié alors ;

– enfin, le mouvement de rotation du pendule se poursuit jusqu'à la prochaine position d'arrêt, que l'on cherche à déterminer.

a) À un instant quelconque, exprimer le moment cinétique de chacune des masses M en fonction de M, D et $\dot\theta$. En déduire le moment cinétique $\vec\sigma = \sigma\vec u_z$ du pendule. Faire de même pour l'énergie cinétique.

b) Déterminer la vitesse angulaire $\dot\theta$ du pendule lorsqu'il atteint la position $\theta = 0$:

– grâce à la loi du moment cinétique ;

– par conservation de l'énergie mécanique, en admettant que l'énergie potentielle associée à $\vec{\mathcal{M}}_O$ s'écrit $\frac{1}{2}\alpha\theta^2$.

On posera : $\Omega = \sqrt{\dfrac{\alpha}{2MD^2}}$.

c) Au passage par la position $\theta = 0$, justifier la conservation du moment cinétique : c'est-à-dire que la variation de D s'accompagne de celle de $\dot\theta$, avec maintien de la valeur de σ.

d) Vérifier que l'énergie cinétique varie au passage par la position $\theta = 0$ et interpréter qualitativement et quantitativement ce fait.

e) Déterminer la valeur de θ lorsque le pendule s'arrête. Comment peut-on interpréter la nouvelle amplitude atteinte ?

4.a) Dans ces questions courantes au démarrage d'un exercice, il convient de revenir aux définitions qui dérivent, ici, du cours de mécanique du point matériel.

4.b) L'établissement de l'expression de l'énergie potentielle pourra être mené dans le chapitre suivant. On se contente pour l'instant d'écrire la conservation de la somme de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique.

4.c) et d) L'examen détaillé de la phase transitoire qui se produit ici n'est pas nécessaire. On distingue en effet, pour les forces intérieures, le moment qui est nul du travail qui ne l'est pas.

4.e) Moment cinétique ou énergie mécanique sont utilisables pour étudier la seconde phase des oscillations.

4.a) En coordonnées polaires dans le plan (xOy), la vitesse de chacune des masses s'écrit $\vec V = D\dot\theta\vec u_\theta$. On en déduit donc :

– le moment cinétique $D\vec u_r \wedge M\vec V = MD^2\dot\theta\vec u_z$;

– l'énergie cinétique $\frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}MD^2\dot\theta^2$.

Pour le système complet, puisque seules les masses M sont prises en compte :

– en ajoutant les moments cinétiques, on obtient :

C'est une somme vectorielle.

$$\boxed{\vec\sigma = 2MD^2\dot\theta\vec u_z}$$

– en ajoutant les énergies cinétiques :

$$\boxed{E_c = MD^2\dot\theta^2}$$

b) Les seules actions prises en compte ici ont, par hypothèse, un moment en O égal à $\vec{\mathcal{M}}_O = -\alpha\theta\vec u_z$.

Le poids de l'ensemble est exercé en O : son moment est nul.

La loi du moment cinétique appliquée en O, qui est un point fixe, s'écrit :

$$\frac{d\vec\sigma_O}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_O$$

on en déduit l'équation différentielle :

$$2MD^2\ddot\theta = -\alpha\theta$$

En posant $\Omega = \sqrt{\dfrac{\alpha}{2MD^2}}$, on obtient l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique :

© Lavoisier – La photocopie non autorisée est un délit

$$\boxed{\ddot\theta + \Omega^2\theta = 0}.$$

dont la solution générale s'écrit $\theta(t) = A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)$. À l'aide de la condition initiale, on peut écrire :

$$\theta(t) = \theta_0\cos(\Omega t)$$

L'annulation de θ est atteinte une première fois lorsque $\Omega t = \frac{\pi}{2}$ et à cet instant :

$$\dot\theta = -\Omega\theta_0$$

Il arrive que l'on ne sache pas mener cette intégration analytiquement, tout en pouvant trouver la vitesse grâce à l'approche énergétique (*cf.* l'équation du pendule).

Une méthode plus élégante, car ne nécessitant pas une intégration de l'équation différentielle utilise la notion d'énergie mécanique.

On écrit en effet que, dans ce problème conservatif, la somme de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique reste constante. La valeur est déterminée dans la position initiale, où l'énergie cinétique est nulle mais l'énergie potentielle connue :

$$E_0 = \frac{1}{2}\alpha\theta_0^2$$

Ainsi, $E_0 = MD^2\dot\theta^2 + \frac{1}{2}\alpha\theta^2$, ce qui conduit, lors du passage par la position angulaire $\theta = 0$, à la valeur de $\dot\theta$ déjà calculée. En effet,

$$\frac{1}{2}\alpha\theta_0^2 = MD^2\dot\theta^2$$

Dans un mouvement qui perdure sur plusieurs oscillations, on observe alternativement les solutions des deux signes.

On notera toutefois que cette méthode ne donne que la valeur absolue de $\dot\theta$.

c) Ici se situe la problématique centrale de l'exercice : laquelle des grandeurs moment cinétique ou énergie cinétique permet d'obtenir le renseignement ? Il faut noter que les actions qui entrent en jeu à ce stade sont intérieures au pendule : leur moment n'affecte donc pas le moment cinétique en O. On en déduit que, si l'on note t_0 l'instant de passage par la position $\theta = 0$ et t_0^-, t_0^+ des instants immédiatement antérieur ou postérieur, on peut écrire :

$$\boxed{\sigma(t_0^-) = \sigma(t_0^+)}.$$

Or, $\sigma(t_0^-) = 2MD^2\dot\theta(t_0^-)$ d'après la question **a)**, tandis que $\sigma(t_0^+) = 2M\dfrac{D^2}{2}\dot\theta(t_0^+) = MD^2\dot\theta(t_0^+)$ en tenant compte de la nouvelle valeur de la distance des masses à O.

La valeur déterminée à la question précédente est $\dot\theta(t_0^-)$, on en déduit la nouvelle valeur de la vitesse angulaire, juste après la modification de configuration :

$$\dot\theta(t_0^+) = 2\dot\theta(t_0^-) = -2\Omega\theta_0$$

Noter que ce problème est analogue à celui d'un patineur qui resserre les bras.

Il y a doublement de la vitesse angulaire dans le cas particulier d'une réduction de la valeur de D dans un facteur $\sqrt{2}$.

d) Les actions mises en jeu lors de la transformation comprennent :

– les actions intérieures permettant de déplacer les masses, on note W_{int} leur travail,

– les actions extérieures, dont le travail correspond à la diminution de l'énergie potentielle ; c'est-à-dire que $W_{ext} = 0$ ici car la position θ ne varie pas sensiblement pendant la transformation.

C'est une approximation commode suggérée dans l'énoncé.

On déduit donc du théorème de l'énergie cinétique la valeur de W_{int} :

$$W_{int} = \Delta(E_c)$$

On utilise bien entendu les expressions valables à t_0^- et t_0^+ :

$$E_c(t_0^-) = MD^2\dot{\theta}^2(t_0^-) \quad \text{et} \quad E_c(t_0^+) = \frac{MD^2}{2}\dot{\theta}^2(t_0^+).$$

La vitesse angulaire $\dot{\theta}$ est doublée, mais le carré de la distance divisé par 2, on en déduit donc que l'énergie cinétique est doublée.

Ainsi,

$$\boxed{W_{int} = MD^2\dot{\theta}^2(t_0^-) = \frac{1}{2}\alpha\theta_0^2}.$$

L'énergie mécanique dans la seconde phase du mouvement est ainsi double de celle de la première phase.

e) La loi de conservation de l'énergie mécanique, constituée de l'énergie potentielle du couple de rappel et de l'énergie cinétique, s'applique au cours de la seconde phase. On peut donc écrire, en notant θ_0' la valeur finale de l'amplitude angulaire :

$$\frac{1}{2}\alpha\theta_0'^2 = E_c(t_0^+)$$

c'est-à-dire $\frac{1}{2}\alpha\theta_0'^2 = 2E_c(t_0^-) = \alpha\theta_0^2$. Finalement, l'amplitude est multipliée par le facteur $\sqrt{2}$:

$$\boxed{\theta_0' = \sqrt{2}\,\theta_0}.$$

On retrouve ici la manifestation du doublement de l'énergie au cours de la transformation, grâce à l'apport du travail des forces intérieures : l'énergie potentielle finale est doublée.

La résolution à partir de l'équation différentielle du mouvement aurait conduit également au résultat.

Erreur à éviter

Prendre garde toutefois que la pulsation propre a changé :

$$\Omega' = \sqrt{\frac{\alpha}{MD^2}} = \sqrt{2}\,\Omega.$$

5 ■ Savoir raisonner à l'aide du référentiel barycentrique.

Conseils méthodologiques

Une molécule linéaire de CO_2 est modélisée sommairement (Fig. 10) : les trois atomes restent alignés dans une direction de vecteur unitaire $\vec{e}_x$. Au voisinage de sa configuration d'équilibre, on peut modéliser l'interaction de l'atome de carbone central (masse m_2) avec les atomes d'oxygène (masse m_1) par deux ressorts de longueur à vide r_0 et raideur k, avec $k = 1{,}42 \cdot 10^3\ \text{N} \cdot \text{m}^{-1}$ et $r_0 = 0{,}166 \cdot 10^{-9}\ \text{m}$.

© Lavoisier – La photocopie non autorisée est un délit

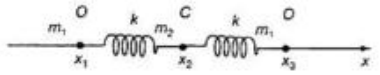


Figure 10

À l'équilibre, les deux liaisons ont même longueur et l'atome de carbone est confondu avec le centre d'inertie de la molécule. En dehors de l'équilibre, chaque atome est repéré par son déplacement relativement à sa position d'équilibre : x_1, x_2 et x_3.

5.a) Ici, c'est le centre de masse G qu'il faut définir, car c'est l'origine à partir de laquelle tout s'étudie. Il faut également préciser les axes.

5.b) N'est-ce pas une relation de barycentre ?

5.c) À ce stade, il s'agit de faire intervenir les forces subies par les différentes particules.

a) Définir le référentiel barycentrique B de la molécule. Justifier que ce référentiel est galiléen. On raisonne dorénavant dans ce référentiel.

b) Justifier la relation : $m_1(x_1 + x_3) + m_2x_2 = 0$.

c) Montrer que les x_i vérifient un système de la forme :

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + ax_1 + bx_3 = 0 \\ \ddot{x}_3 + ax_3 + bx_1 = 0 \end{cases}$$

et exprimer a et b en fonction de k, m_1 et m_2.

5.d) On peut, en régime harmonique, convertir le système d'équations différentielles en un système algébrique. Les propriétés des systèmes linéaires et homogènes sont à connaître.

d) On recherche des solutions harmoniques du système. Dans ce cas, on peut associer aux grandeurs $x_i(t)$ $(i = 1,2,3)$ les grandeurs complexes $\underline{x}_i(t) = \underline{A}_i \exp(j\omega t)$.

Déterminer littéralement puis numériquement les deux seules valeurs positives de la pulsation ω correspondant à des amplitudes $\underline{A}_i$ non toutes nulles.

On donne : $m_1 = 2{,}66 \cdot 10^{-26}\,\text{kg}$ et $m_2 = 1{,}99 \cdot 10^{-26}\,\text{kg}$.

5.e) Chercher des mouvements dans lesquels l'une ou l'autre des pulsations n'intervient pas.

e) À quel mouvement simple correspond chacune de ces deux pulsations ?

Les indices (1) et (3) ne sont utilisés que pour distinguer les deux atomes d'oxygène.

5.a) B a son origine en G, barycentre des atomes pondérés par leurs masses : $(O_{(1)}, m_1)$, (C, m_2) et $(O_{(3)}, m_1)$.

Les axes sont en translation dans le référentiel d'étude ; ici l'axe (Gx) est privilégié.

b) L'abscisse de G est nulle dans B, par définition. Or, la notion de barycentre impose :

$$\vec{0} = (2m_1 + m_2)\overrightarrow{GG} = m_1\overrightarrow{GO}_{(1)} + m_2\overrightarrow{GC} + m_1\overrightarrow{GO}_{(3)}$$

À l'équilibre, on écrit :

$$\vec{0} = m_1\overrightarrow{GO}_{1\,eq} + m_2\overrightarrow{GC}_{eq} + m_1\overrightarrow{GO}_{3\,eq}$$

Par différence de ces 2 équations, on déduit, en projection sur (Gx), la relation attendue :

$$\boxed{m_1(x_1 + x_3) + m_2x_2 = 0}.$$

Relation écrite en projection sur (Gx).

c) L'atome d'oxygène d'abscisse x_1 subit la force due à la liaison qu'il forme avec l'atome de carbone : $m_1\ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_2)$.

On peut de même obtenir $m_1\ddot{x}_3 = -k(x_3 - x_2)$. En remplaçant x_2 par l'expression obtenue à l'aide de la question précédente, on obtient dans le premier cas :

$$m_1\ddot{x}_1 = -kx_1 - k\frac{m_1}{m_2}(x_1 + x_3)$$

En faisant de même avec la seconde équation, on peut écrire :

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \dfrac{k}{m_1}\left(1 + \dfrac{m_1}{m_2}\right)x_1 + \dfrac{k}{m_2}x_3 = 0 \\ \ddot{x}_3 + \dfrac{k}{m_2}x_1 + \dfrac{k}{m_1}\left(1 + \dfrac{m_1}{m_2}\right)x_3 = 0 \end{cases}$$

On obtient ainsi $a = \dfrac{k}{m_1}\left(1 + \dfrac{m_1}{m_2}\right)$ et $b = \dfrac{k}{m_2}$ avec les notations de l'énoncé.

d) En régime harmonique de pulsation ω, $\ddot{x}_i = -\omega^2 x_i$, donc on aboutit au système algébrique :

La recherche de ces solutions harmoniques est justifiée par la linéarité du système.

$$\begin{cases} \underline{A}_1(a - \omega^2) + \underline{A}_3 b = 0 \\ \underline{A}_1 b + \underline{A}_3(a - \omega^2) = 0 \end{cases}$$

Ce système de Cramer n'a de solutions non nulles que si son déterminant est nul :

$$\begin{vmatrix} a - \omega^2 & b \\ b & a - \omega^2 \end{vmatrix} = (a - \omega^2)^2 - b^2 = 0$$

Cette condition devient $(a - b - \omega^2)(a + b - \omega^2) = 0$, soit :

$$\omega^2 = a \pm b$$

Deux pulsations positives sont obtenues :

Il s'agit des modes propres du système couplé.

$$\boxed{\omega_I = \sqrt{\frac{k}{m_1}}} \quad \text{et} \quad \boxed{\omega_{II} = \sqrt{\frac{k}{m_1} + 2\frac{k}{m_2}}}.$$

Numériquement, $\omega_I = 2{,}31 \cdot 10^{14}\ \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et $\omega_{II} = 4{,}43 \cdot 10^{14}\ \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

Ces deux pulsations correspondent à un rayonnement infrarouge.

e) Deux modes simples peuvent être proposés :

Mode I : un premier mouvement simple correspond à l'atome de carbone immobile en G et les deux atomes d'oxygène qui oscillent symétriquement par rapport à lui : $x_1 = -x_3$ (Fig. 11). Il y a alors découplage de chacun des mouvements, qui devient une oscillation d'une masse m_1 accrochée à un ressort de raideur k. C'est bien la pulsation $\omega_S = \omega_I = \sqrt{\dfrac{k}{m_1}}$ qui répond à cette configuration.

Fixe

Figure 11

© Lavoisier – La photocopie non autorisée est un délit

Mode II : si à chaque instant $x_1 = x_3$ et $x_2 = -\dfrac{2m_1}{m_2}x_1$, alors seul le mode II existe. L'atome de carbone vibre en opposition de phase avec les deux atomes d'oxygène, ceux-ci étant animés de mouvements identiques. On fait ainsi disparaître le mode précédent et on obtient ω_{II}.

REMARQUE – On retient de cet exercice que l'étude des mouvements dans le référentiel barycentrique a permis de mettre en évidence les mouvements relatifs, qui sont attachés à une signification physique. Ici, ce sont les pulsations trouvées qui pourront être révélées par spectroscopie.

Annales

Pour maîtriser les bases

1. Pendule inversé — D'après Oral CCP

Un pendule est constitué d'un point matériel de masse m placé à l'extrémité A d'une tige de masse négligeable, dont l'autre extrémité B est fixée sur un support (Fig. 12). L'ensemble, rigide, est mobile en rotation autour de l'axe $\Delta = Bx$, perpendiculaire à la tige ; on note θ l'angle entre la tige et l'axe vertical Bz. On admet que l'action subie par la tige en B présente un moment des forces $\vec{\mathcal{M}}_B = -k\theta\vec{u}_x$. Hormis la liaison en B, le pendule est soumis au poids de la masse ponctuelle en A, on note L la longueur AB.

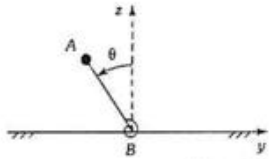


Figure 12

a) Exprimer, à partir de la définition, le moment cinétique du pendule en B, ainsi que son énergie cinétique, lors d'un mouvement de rotation à vitesse angulaire $\dot{\theta}$.

b) Écrire la loi du moment cinétique en B, en considérant le référentiel lié au support comme étant galiléen.

c) Exprimer la puissance du poids. Aucune cause de dissipation n'existant ici, déduire une expression de la puissance des autres actions. Montrer qu'il est possible de définir une énergie potentielle $E_p(\theta)$ fonction de la seule variable angulaire.

d) Exploiter le résultat précédent pour déterminer les éventuelles positions d'équilibre.

e) Discuter leur stabilité et commenter le résultat.

Conseils méthodologiques. a) : Cette résolution ne nécessite pas de connaissance *a priori* de la mécanique du solide : il convient en fait de rester très proche des définitions. **b)** : Appliquer le théorème au point fixe B, en considérant comme système le pendule (tige + masse m). **c)** : Pour la puissance du poids, exercé en A, appliquer la définition ; puis déduire de la loi du moment cinétique précédente une équation de la forme $\frac{dE_m}{dt} = 0$, le complément à E_c figurant dans E_m est l'énergie potentielle cherchée. La détermination des positions d'équilibre nécessite un examen des variations de E_p avec la variable θ. **e)** : Distinguer maximum et minimum d'énergie potentielle.

a) La tige ayant une masse négligée, moment cinétique et énergie cinétique du système se restreignent à ceux de la masse en A. Pour le mouvement circulaire autour de B, la vitesse s'écrit $\vec{v}(A) = L\dot{\theta}\vec{u}_\theta$. À partir de la définition, $\vec{L}_B = \overrightarrow{BA} \wedge m\vec{v}(A)$, soit :

$$\vec{L}_B = mL^2\dot{\theta}\,\vec{u}_x$$

De même, l'énergie cinétique définie comme $E_c = \frac{1}{2}mv^2(A)$ prend la forme : $\boxed{E_c = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2}$

© Lavoisier - La photocopie non autorisée est un délit

b) La dérivée par rapport au temps du moment cinétique s'écrit :

$$\frac{d\vec{L}_B}{dt} = mL^2\ddot{\theta}\vec{u}_x$$

tandis que le moment du poids $\overrightarrow{BA} \wedge m\vec{g}$ et de l'action en B s'écrivent :

$$\vec{\mathcal{M}}_B(\vec{F}_{ext}) = mgL\sin(\theta)\vec{u}_x - k\theta\vec{u}_x$$

Dans le référentiel galiléen, il n'y a pas lieu de considérer de forces d'inertie, donc :

$$mL^2\ddot{\theta}\vec{u}_x = mgL\sin(\theta)\vec{u}_x - k\theta\vec{u}_x$$

Il est judicieux de poser $\omega^2 = \frac{k}{mL^2}$ pour aboutir à l'équation différentielle en θ suivante :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \omega^2\theta = \frac{g}{L}\sin(\theta)}.$$

c) Par définition, la puissance du poids s'écrit $\mathcal{P}_{poids} = m\vec{g} \cdot \vec{v}_A$, c'est-à-dire

$$\mathcal{P}_{poids} = mgL\dot{\theta}\sin\theta$$

Il est donc possible de retrouver l'énergie potentielle de pesanteur :

$$\mathcal{P}_{poids} = \frac{dE_p(poids)}{dt}, \text{ qui conduit, à une constante près, à :}$$

$$E_p(poids) = mgL\cos\theta$$

Pour obtenir une loi de conservation du type $\frac{d(E_c + E_p)}{dt} = 0$, à partir de l'équation issue de l'application de la loi du moment cinétique, on multiplie les deux membres de celle-ci par la vitesse angulaire $\dot{\theta}$:

$$mL^2\ddot{\theta}\dot{\theta} = mgL\sin(\theta)\dot{\theta} - k\theta\dot{\theta}$$

- le premier membre est la dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique $E_c = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2$;
- le premier terme du second membre est la puissance de la pesanteur ;
- le dernier terme est la dérivée de $E_p(liaison) = \frac{1}{2}k\theta^2$.

On déduit, conformément à la suggestion de l'énoncé, que l'énergie potentielle autre que celle du poids à prendre en compte est $\frac{1}{2}k\theta^2$. Apparaît ainsi une expression de l'énergie potentielle totale :

$$\boxed{E_p = mgL\cos\theta + \frac{1}{2}k\theta^2}.$$

d) Les positions d'équilibre sont les extrema de la fonction $E_p(\theta)$, étant entendu que les positions stables correspondent aux minima. On peut également noter que la position verticale $\theta = 0$ réalise la condition de nullité du moment des actions.

La dérivée par rapport à la position angulaire de l'énergie potentielle s'écrit :

$$\frac{dE_p}{d\theta} = -mgL\sin\theta + k\theta$$

Erreur à éviter

On ne prend en compte que les actions extérieures : les contraintes au sein de la tige ou entre la tige et la masse n interviennent pas.

Remarque

On retrouve des mouvements simples dans les cas particuliers $g = 0$ (pendule de torsion) ou $k = 0$ (pendule pesant).

Remarque

Le poids est appliqué en A, car la tige est de masse négligeable.

Remarque

On reconnaît bien entendu l'expression générale vue en mécanique du point : $E_p = mgz_G$, à une constante additive près.

Remarque

La notation $E_p(liaison)$ ne signifie ici rien d'autre que le fait, constaté, que la seule constante qui intervient est celle définissant la liaison. Au chapitre portant spécifiquement sur les liaisons, cette terminologie prendra tout son sens.

Remarque

En position verticale, le poids est dirigé selon la tige et aucun couple de torsion n'est exercé.

elle s'annule :

- pour $\theta = 0$ d'une part (position verticale) ;
- lorsque $\frac{\sin\theta}{\theta} = \frac{k}{mgL}$ d'autre part.

Le graphe de la fonction $\text{sinc}(\theta) = \frac{\sin\theta}{\theta}$ (Fig. 13) indique qu'il ne peut y avoir de solution à cette dernière équation, que si $\frac{k}{mgL} \leqslant 1$.

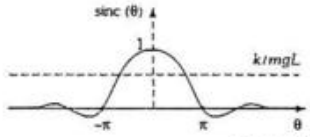


Figure 13

On aboutit ainsi à la discussion suivante :

- Si $\frac{k}{mgL} > 1$, la seule solution correspond à la position verticale : $\theta = 0$ (Fig. 14).

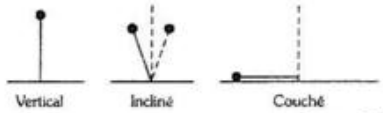


Figure 14

- Si $\frac{2}{\pi} < \frac{k}{mgL} \leqslant 1$, à la solution $\theta = 0$ s'ajoutent deux valeurs opposées, sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Ceci correspond à deux positions symétriques, en sus de la verticale. Une discussion de stabilité s'impose alors.

⇨ **Remarque**

Si $\frac{k}{mgL} = 1$, il y a confusion en $\theta = 0$ de toutes les solutions.

- Si $\frac{2}{\pi} \geqslant \frac{k}{mgL}$, aucune solution autre que la verticale ne peut annuler la dérivée de l'énergie potentielle. Toutefois, le pendule peut reposer sur le plan et d'autres forces interviennent alors (Fig. 14).

e) Dans les cas de multiples solutions, une discussion de stabilité s'impose. La détermination de la dérivée seconde de l'énergie potentielle par rapport à la variable angulaire permet de mener la discussion.

$$\frac{d^2E_p}{d\theta^2} = -mgL\cos\theta + k$$

est négative si $\cos\theta > \frac{k}{mgL}$.

⇨ **Remarque**

Une dérivée seconde positive où la dérivée s'annule indique un minimum.

Ce n'est bien entendu envisageable que dans le cas $\frac{k}{mgL} < 1$.

La position verticale $\theta = 0$ est donc stable si $\frac{k}{mgL} \geqslant 1$ et c'est la seule position d'équilibre.

Dans le cas où $\frac{k}{mgL} < 1$, la position verticale est instable, on trouve alors les deux autres positions d'équilibre stables définies ci-dessus par $\text{sinc}(\theta) = \frac{k}{mgL}$.

Toutefois, ces deux positions ne seront réellement accessibles, c'est-à-dire qu'elles correspondront à un angle d'inclinaison inférieur à $\frac{\pi}{2}$, que si $\frac{2}{\pi} < \frac{k}{mgL} < 1$. Dans le cas contraire, le pendule reposera sur le plan du support.

REMARQUE – On retiendra de cette étude que l'examen des variations de l'énergie potentielle permet de déterminer l'ensemble des positions d'équilibre. Il arrive que, lorsque plusieurs positions sont possibles, certaines devenues instables laissent la place à d'autres.

© Lavoisier - La photocopie non autorisée est un délit

2. Modes de flexion d'une molécule de CO_2 — D'après Centrale-Supelec

On étudie un type particulier de mouvement d'une molécule de dioxyde de carbone (Fig. 15), dans laquelle les liaisons CO ont une longueur fixe r_0 et forment entre elles un angle variable φ. Pour les faibles valeurs de φ, l'énergie potentielle associée à la flexion de la molécule est notée :

$$E_p = \frac{1}{2}C\varphi^2, \text{ avec } C = 7{,}70 \cdot 10^{-19}\,\text{J}$$

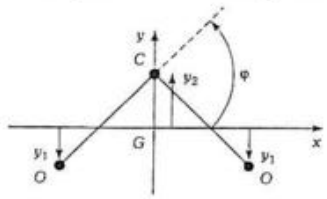


Figure 15

a) Justifier qualitativement la forme de cette énergie potentielle.

b) On envisage un mode de déplacement de faible amplitude dans lequel :

- le plan de la molécule est fixe (noté Gxy) ;
- l'atome de carbone reste sur la verticale Gy, avec un déplacement y_2 par rapport à la position d'équilibre où les trois atomes sont alignés ;
- les deux atomes d'oxygène ont le même déplacement vertical y_1 et de petits déplacements horizontaux x_1, x_3.

Montrer que, pour de petits déplacements, on a au premier ordre en φ :

$$y_2\left(1 + \frac{m_2}{2m_1}\right) = r_0\frac{\varphi}{2} \quad \text{et} \quad x_1 = x_3 = 0$$

c) Exprimer l'énergie cinétique de la molécule en fonction de $\frac{d\varphi}{dt}$, m_1, m_2 et r_0.

d) Déterminer littéralement puis numériquement la pulsation ω des petites oscillations de φ autour de 0, dans ce mode de vibration.

e) Effectuer l'application numérique, sachant que :

$m_1 = 2{,}66 \cdot 10^{-26}$ kg pour l'oxygène et $m_2 = 1{,}99 \cdot 10^{-26}$ kg pour le carbone.

Dans quel intervalle spectral trouve-t-on la raie correspondante ?

Conseils méthodologiques. a) : Exploiter les symétries de la molécule. **b)** : Utiliser des propriétés géométriques associées au fait que chaque liaison reste de longueur constante et mettre à profit la position fixe du centre de masse G. **c)** : L'énergie cinétique est une grandeur extensive : on somme donc l'énergie cinétique de chaque particule. **d)** : Utiliser l'intégrale première d'énergie pour déterminer une équation différentielle du second ordre en φ.

) Le modèle de Lewis de la molécule de CO_2 est le suivant (Fig. 16).

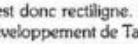


Figure 16

a géométrie prévue par la méthode VSEPR est donc rectiligne. L'expression $E_p(\varphi)$ proposée peut être vue comme un développement de Taylor, de cette nction, nécessairement paire par raison de symétrie. Puisqu'on se limite aux ibles amplitudes, on tronque le développement au premier terme non nul, en ².

⇨ **Remarque**

Il n'y a pas de terme en φ car la fonction est paire.

) Si l'on note α l'angle que font les liaisons avec l'axe des x, on peut écrire, ans le triangle OCO : $\pi = (\pi - \varphi) + 2\alpha$.

n en déduit que $\alpha = \frac{\varphi}{2}$ avec $\sin\alpha = \frac{y_2 - y_1}{r_0}$.

Aux faibles amplitudes :

$$\frac{\varphi}{2} \approx \frac{y_2 - y_1}{r_0}$$

Le centre de masse G reste fixe dans le référentiel barycentrique donc, en projection sur $\vec{u}_y$,

$$m_2 y_2 + 2m_1 y_1 = 0$$

En éliminant y_1 entre les deux équations, on obtient $m_2 y_2 + 2m_1\left(y_2 - \frac{r_0\varphi}{2}\right) = 0$, soit :

$$\boxed{y_2\left(1 + \frac{m_2}{2m_1}\right) = r_0\frac{\varphi}{2}}.$$

En outre, la longueur d'une liaison CO restant constante lors du déplacement, $(y_2 - y_1)^2 + (r_0 - x_1)^2 = r_0^2$, si bien que x_1 est de l'ordre de $\frac{(y_2 - y_1)^2}{2r_0}$.

En définitive, x_1 apparaît comme un terme en φ^2. Il en va de même pour x_3.

Remarque

Loin d'affirmer que ces termes sont nuls, on se contente de montrer que leur développement ne contient pas de terme de puissance 1 en φ.

c) L'énergie cinétique de ce système de trois points est définie comme la somme des 3 énergies cinétiques correspondantes :

$$E_c = \frac{1}{2}m_2\dot{y}_2^2 + 2\frac{1}{2}m_1\dot{y}_1^2$$

Puisque $\dot{y}_1 = -\frac{m_2}{2m_1}\dot{y}_2$, on obtient $E_c = \frac{m_2}{2}\left(1 + \frac{m_2}{2m_1}\right)\dot{y}_2^2$, donc finalement, à l'ordre le plus bas en $\dot{\varphi}$,

$$\boxed{E_c = \frac{m_2}{2}\frac{r_0^2}{4}\left(\frac{2m_1}{m_2 + 2m_1}\right)\dot{\varphi}^2}.$$

Remarque

Les termes en $\dot{x}_1^2$ et $\dot{x}_3^2$ ne sont pas pris en compte car ils interviennent à l'ordre supérieur, en $\dot{\varphi}^4$.

d) La conservation de l'énergie mécanique traduit dans ce modèle le comportement du mode vibratoire considéré. En réalité, les énergies sont quantifiées et le passage d'un niveau d'énergie à un autre met en jeu une transition quantique non envisagée ici. À partir des relations précédentes, l'écriture de :

$$\frac{d(E_p + E_c)}{dt} = 0$$

mène à l'équation différentielle :

$$C\dot{\varphi}\varphi + \frac{m_1 m_2}{m_2 + 2m_1}\frac{r_0^2}{2}\varphi\dot{\varphi} = 0$$

Après simplification par $\dot{\varphi}$, on obtient une équation différentielle d'oscillateur harmonique : $\ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0$, dont la pulsation propre est :

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{2C(m_2 + 2m_1)}{m_1 m_2 r_0^2}}}.$$

Remarque

Rétrospectivement, on se félicite d'avoir négligé les termes en x^2, qui auraient donné des expressions en φ^4.

e) Numériquement, $\omega = 8{,}79 \cdot 10^{13}\ \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$, soit une longueur d'onde de rayonnement dans le vide :

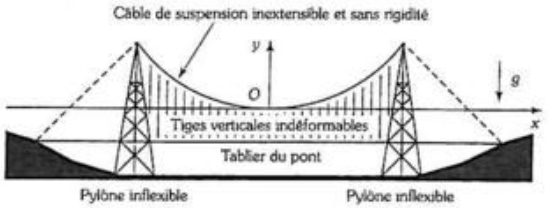
$$\lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega} = 2{,}14 \cdot 10^{-5}\ \text{m}$$

La raie spectrale correspondante appartient au domaine infrarouge.

© Lavoisier – La photocopie non autorisée est un délit

3. Équilibre d'un pont suspendu — D'après ENS

On souhaite déterminer la forme prise par le câble soutenant un pont à haubans (Fig. 17), dans un modèle simple où l'on considère que chaque élément du câble supporte la portion de tablier qui est située en dessous de lui. On néglige notamment la masse linéique du câble devant celle, notée μ, du tablier.



Pont à haubans
Figure 17

a) On définit un système élémentaire composé d'une portion de tablier, entre les abscisses x et $x + dx$ et l'élément de câble qui la soutient. Les forces appliquées à cet ensemble sont uniquement le poids du tablier et les tensions de part et d'autre de l'élément de câble. On note $\vec{T}(x)$ la tension exercée, à l'abscisse x, par la portion de câble d'abscisse supérieure à x, sur la portion d'abscisse inférieure (sur la figure, il s'agit de la tension exercée par la partie droite sur la partie gauche).

Faire une figure mentionnant ces différentes forces.

b) Par la loi de la résultante cinétique, relier ces forces et en déduire deux équations projetées sur les axes de coordonnées. Que peut- on dire de la composante horizontale T_0 de la tension ?

c) En utilisant le fait que la tension est géométriquement tangente au fil en chaque point, établir une équation différentielle dont est solution le profil $y(x)$ du câble.

d) Intégrer l'équation précédente en faisant apparaître une grandeur caractéristique δ, homogène à une longueur, formée à l'aide de T_0, μ et g. Déduire la forme du câble de l'équation $y(x)$ ainsi obtenue.

e) On lit parfois qu'un câble seul, tendu entre deux points fixes, prend la forme d'une chaînette (caténoïde). Quelle différence a conduit, ici, à une autre loi ?

Conseils méthodologiques. a) et b) : Utiliser les tensions subies par l'élément de câble et non celle que celui-ci exerce sur l'extérieur. c) : La propriété géométrique s'obtient aisément en identifiant les tangentes des angles formés avec l'horizontale. d) : Après intégration, on peut choisir une origine judicieuse pour exprimer simplement les constantes d'intégration. e) : Il faut ici esquisser l'étude du problème de la chaînette pour déceler l'origine de la différence de modélisation.

a) L'élément de câble est soumis à $\vec{T}(x + dx)$ et $-\vec{T}(x)$, d'après la loi des actions réciproques (Fig. 18). Le poids du système élémentaire considéré se résume à $\mu\, dx\, \vec{g}$, puisqu'on néglige le poids de l'élément de câble devant celui du tablier.

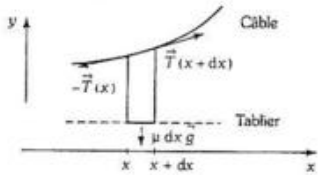


Figure 18

b) À l'équilibre, la résultante des forces appliquées est nulle :

$$\vec{T}(x+dx) - \vec{T}(x) + \mu\, dx\, \vec{g} = \vec{0}$$

En projection sur $\vec{u}_x$ cette équation devient :

$$T_x(x+dx) - T_x(x) = 0$$

dont nous déduisons la propriété T_x constante, notée T_0 par la suite.

En projection sur $\vec{u}_y$, $T_y(x+dx) - T_y(x) = \mu g\, dx$, donc :

$$\boxed{\frac{dT_y}{dx} = \mu g}$$

c) Géométriquement, on peut écrire la pente de la tangente au câble à l'abscisse x de deux manières différentes : géométriquement et en exploitant le fait que la tension est tangente au câble :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{T_y}{T_x}$$

Puisque par ailleurs $T_x(x) = T_0$, on en déduit :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{T_y}{T_0}$$

À l'aide des équations précédentes, et en éliminant $T_y(x)$, on aboutit à l'équation différentielle dont est solution le profil $y(x)$ du câble :

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\mu g}{T_0}}$$

d) En posant $\delta = \frac{T_0}{\mu g}$, quantité qui est constante sur tout le profil, on peut intégrer l'équation différentielle :

$$y(x) = \frac{x^2}{\delta} + Ax + B$$

En choisissant par exemple l'origine du repère au point le plus bas du câble, on obtient l'expression simple :

$$\boxed{y(x) = \frac{x^2}{\delta}}$$

La câble soutenant un pont prend une forme parabolique.

Remarque

δ a la dimension d'une longueur car T_0 a la dimension d'une force : $[F] = M \cdot L \cdot T^{-2}$, μ celle d'une masse linéique : $[\mu] = M \cdot L^{-1}$ et g est une accélération : $[g] = L \cdot T^{-2}$.

e) Ce résultat n'est pas celui que l'on obtient pour un câble tendu entre deux points : le profil est alors en effet une chaînette, dont l'équation est donnée par une fonction cosinus hyperbolique.

Technique de calcul

$$\mathrm{ch}(x) = \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2}$$

La raison de cette différence de résultat tient dans l'expression du poids de l'élément considéré :

- pour le pont suspendu, c'est le poids du tablier horizontal qui intervient, donc $dm = \mu\, dx$;
- dans le cas de la chaînette, la masse d'un élément de câble entre les abscisses x et $x + dx$ fait intervenir l'abscisse curviligne ds :

$$dm = \mu\, ds \quad \text{avec} \quad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

© Lavoisier - La photocopie non autorisée est un délit

Du fait de cette différence, l'équation différentielle déduite de la projection de la loi de la résultante cinétique sur $\vec{u}_y$ doit être modifiée :

$$\frac{dT_y}{dx} = \mu g \frac{ds}{dx} = \mu g \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Erreur à éviter

μ désigne ici la masse linéique du câble, non plus celle du tablier

On aboutit, après prise en compte de la propriété géométrique $\frac{dy}{dx} = \frac{T_y}{T_x}$, à l'équation différentielle du profil $y(x)$ du câble seul :

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\mu g}{T_0}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}$$

L'intégration de cette équation peut être effectuée en deux temps : en posant tout d'abord $t(x) = \frac{dy}{dx}$,

Remarque

$t(x)$ est la pente du câble.

on obtient :

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\delta}\sqrt{1 + t^2}$$

qui s'intègre en :

$$\mathrm{Argsh}(t) = \frac{x}{\delta} + K$$

K est une constante que l'on peut choisir nulle en prenant l'origine au point le plus bas du câble : $t(0) = 0$. Dans un deuxième temps, on intègre $\frac{dy}{dx} = \mathrm{sh}\left(\frac{x}{\delta}\right)$ en :

$$\boxed{y(x) = \delta\,\mathrm{ch}\left(\frac{x}{\delta}\right) - \delta}$$

Technique de calcul

La condition $y(0) = 0$ permet d'obtenir la constante d'intégration.

Ce profil est bien celui d'une chaînette.

Pour approfondir

4. Modèle de frottement — D'après E3A

On considère une particule A de masse M dans un milieu constitué d'un ensemble de molécules légères, identiques de masse $m < M$, alignées de manière ordonnée suivant l'axe x (Fig. 19). À l'instant initial, les molécules du milieu sont au repos tandis que A se déplace avec une vitesse V_0 parallèle à l'axe x. On note 1 la molécule la plus proche, 2 la suivante... Dans tout l'exercice, les vitesses de tous les corps sont dirigées selon l'axe des x (modèle unidimensionnel).

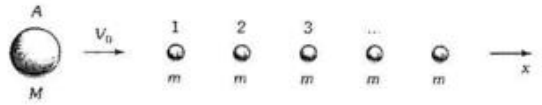


Figure 19

a) On considère dans un premier temps le système constitué de la particule A et de la particule 1 : l'ensemble formé par ces deux corps est considéré isolé, en déduire une propriété sur sa quantité de mouvement et une relation vérifiée par les vitesses V_1 de la particule A et W_1 de la particule 1 après le choc.

On ajoute l'hypothèse d'une conservation de l'énergie cinétique au cours de l'interaction. En déduire une seconde relation, puis les expressions suivantes :

$$V_1 = \frac{M-m}{M+m}V_0 \quad \text{et} \quad W_1 = \frac{2M}{M+m}V_0$$

Remarque

Les connaissances sur les chocs n'étant plus exigibles, cette question est modifiée afin de préciser les lois utiles.

Remarque

modèle de choc élastique

b) Après sa collision avec A, 1 se déplace vers la droite et entre en collision avec 2. Déterminer les vitesses de W_1' et W_2' de 1 et 2 après leur collision.

c) Démontrer que A pourra entrer en collision avec 1 une infinité de fois et montrer que la vitesse V_n de A après n collisions avec 1 s'écrit :

$$V_n = C_1 f^n(r)$$

avec $r = \frac{m}{M}$. Déterminer la fonction $f(r)$ et la constante C_1.

d) On suppose dans la suite que le milieu est caractérisé par une densité linéaire ρ de molécules. Exprimer la distance x parcourue par A dans le milieu après un grand nombre n de collisions en fonction de ρ et n. Montrer que la vitesse $V(x)$ de A à la position x peut être écrite sous la forme $V(x) = C_2 \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right)$.

Déterminer C_2 et exprimer λ en fonction de ρ et r. Quelle est l'interprétation physique de λ ?

e) Utiliser la loi fondamentale de la dynamique pour montrer que la force $F(x)$ subie par A au point x s'écrit $F(x) = -Mg(r,\rho)V^\gamma(x)$. Déterminer la fonction $g(r,\rho)$ et l'exposant γ.

Commenter le résultat obtenu.

Conseils méthodologiques. a) : Exploiter les équations scalaires en effectuant une division membre à membre. b) : Appliquer le principe précédent aux deux nouvelles particules. c) : Examiner la suite des collisions, qui conservent des caractéristiques communes, notamment dans la distribution des vitesses initiales. d) : Dans un modèle continu, il faut assimiler les grandeurs à des fonctions continues de la variable x. e) : La loi de la résultante cinétique s'impose ici, mais elle permet de déterminer la loi de force connaissant celle de la vitesse, une fois n'est pas coutume !

a) La quantité de mouvement d'un système matériel varie, dans un référentiel galiléen, sous l'effet de la résultante des forces extérieures. Ici, le système des deux particules est isolé ; il y a donc conservation de la quantité de mouvement totale :

$$MV_0 = MV_1 + mW_1$$

Par ailleurs, l'hypothèse de conservation de l'énergie cinétique permet d'écrire :

$$\frac{1}{2}MV_0^2 = \frac{1}{2}MV_1^2 + \frac{1}{2}mW_1^2$$

Remarque

Il s'agit de la projection sur $\vec{u}_x$ de l'écriture vectorielle.

En divisant membre à membre les équations :

$$\begin{cases} M(V_0 - V_1) = mW_1 \\ M(V_0^2 - V_1^2) = mW_1^2 \end{cases}$$

on déduit la relation $V_0 + V_1 = W_1$ qui, combinée avec la première équation du système, donne le résultat escompté.

© Lavoisier - La photocopie non autorisée est un délit

$$\boxed{V_1 = \frac{M-m}{M+m}V_0} \quad \text{et} \quad \boxed{W_1 = \frac{2M}{M+m}V_0}.$$

b) Le même raisonnement tenu avec 1 et 2 donne un résultat très simple, puisque les masses sont identiques :

$$W_1' = 0 \quad \text{et} \quad W_2' = W_1$$

Il y a simplement échange des vitesses.

Remarque

Le carreau à la pétanque !

c) Après le premier choc, 1 est partie plus rapidement que A, car W_1 est supérieure à V_1.

La seconde collision de A se produit lorsque A rattrape 1 qui s'est arrêtée, elle conserve une configuration identique à la première, sous réserve de modifier V_0 en V_1. On en déduit $V_2 = \frac{M-m}{M+m}V_1$ et, plus généralement la relation de récurrence :

Remarque

$2M > M - m$.

$$V_{n+1} = \frac{M-m}{M+m}V_n$$

Technique de calcul

La suite V_n converge car $\frac{M-m}{M+m} < 1$.

La suite des valeurs de ces vitesses est géométrique, de raison $\frac{M-m}{M+m} = \frac{1-r}{1+r}$.
Le terme de rang n se déduit donc par :

$$\boxed{V_n = \left(\frac{1-r}{1+r}\right)^n V_0}.$$

On obtient la forme attendue, avec $C_1 = V_0$ et $f(r) = \frac{1-r}{1+r}$.

d) La distance entre les particules dans l'état initial est $\Delta x = \frac{1}{\rho}$. Les chocs numéro 1, 2 et n ont lieu respectivement aux abscisses 0, Δx, $(n-1)\Delta x$ ... La distance parcourue après n collisions est donc comprise entre $x_n = (n-1)\Delta x$ et $n\Delta x$.
Pour une densité élevée de particules, on peut adopter une modélisation continue, en considérant Δx comme un infiniment petit et n comme très grand. On aboutit à la relation :

$$x \sim \frac{n}{\rho}$$

La loi de variation de la vitesse avec l'abscisse devient, dans cette modélisation continue :

$$V(x) \sim V_0\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{\rho x}$$

Il est possible de transformer cette relation en explicitant son caractère exponentiel :

Technique de calcul

$a^b = \exp(b \ln a)$.

$$V(x) \sim V_0 \exp\left[x\rho \ln\left(\frac{1-r}{1+r}\right)\right]$$

En posant $\rho \ln\left(\frac{1-r}{1+r}\right) = -\frac{1}{\lambda}$, on aboutit à l'expression attendue, sous réserve d'adopter $C_2 = V_0$.

Finalement, $\boxed{\lambda = \frac{1}{\rho \ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right)}}$ apparaît comme une quantité positive,

Technique de calcul

$\ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right) > 0$ car $\frac{1+r}{1-r} > 1$.

homogène à une longueur, qui représente la distance caractéristique de pénétration de la particule dans le fluide.

Il n'y a pas à proprement parler d'arrêt dans ce modèle, mais l'agitation thermique finira par avoir plus d'influence sur le mouvement de A que le résidu de vitesse, lorsque $x \gg \lambda$, notamment.

e) La vitesse décroît continûment avec la position dans le modèle adopté, on peut proposer une expression de l'accélération grâce à :

$$a = \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dV}{dx}V$$

Or la loi exponentielle écrite ci-dessus conduit à $\frac{dV}{dx} = V(x)\rho \ln\left(\frac{1-r}{1+r}\right)$. On en déduit l'expression de l'accélération :

$$a = V^2(x)\rho\ln\left(\frac{1-r}{1+r}\right) = -\frac{V^2}{\lambda}$$

Finalement, la force subie par la particule A dans ce modèle équivalent est un frottement proportionnel au carré de la vitesse :

$$\boxed{F = -M\frac{V^2}{\lambda}}.$$

L'exposant γ est égal à 2, la fonction $g(r,\rho)$ s'écrit : $\boxed{g(r,\rho) = \rho\ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right)}$.

Une telle loi de frottement est souvent utilisée pour modéliser les écoulements à vitesse élevée dans un fluide. En revanche, pour des vitesses faibles, on peut proposer une loi proportionnelle à la vitesse : on parle de frottement visqueux alors.

⇨ Remarque

Pour un frottement visqueux

$$\vec{F} = -\alpha\vec{V}$$

5. Mouvements complexes — D'après Centrale-Supelec

Deux objets ponctuels M et M' de masses respectives m et m' sont reliés entre eux par un fil sans masse et inextensible de longueur ℓ_0. On fait passer le fil autour d'une tige cylindrique fixe (Fig. 20) et l'on tient entre ses doigts M de telle sorte que le fil fasse avec la verticale un angle θ de petite valeur notée ε. À l'instant $t = 0$, on lâche l'objet M.

Durant tout le problème, le diamètre de la tige sera négligé ainsi que les effets de toutes les forces de frottement. On pose $OM = r$ et toute l'étude se fait dans le référentiel galiléen R attaché au sol. z et z' sont les cotes respectives des points M et M' ; θ est l'angle que fait $\overrightarrow{OM}$ avec la verticale. Dans l'état initial :

$$z(0) = -\ell_0,\ \dot{z}(0) = 0,\ z'(0) = 0 \text{ et } \theta(0) = \varepsilon.$$

Durant tout l'exercice, on admettra que M' effectue un mouvement vertical selon Oz et que M se déplace dans le plan fixe xOz.

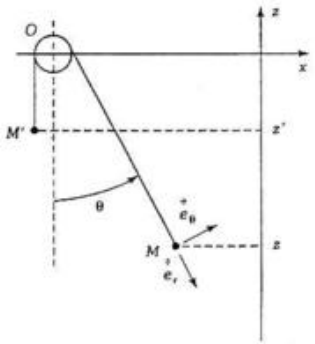


Figure 20

a) On propose de montrer que, pour $\mu = \frac{m'}{m} > 1$, le mouvement de M est borné.

Établir l'expression de l'énergie mécanique E_m du système en fonction de μ, r, $\dot{r}$, θ, $\dot{\theta}$, g, m et d'une constante E_i qui ne dépend que du choix de l'origine des énergies potentielles.

Donner l'expression de $e_0 = \frac{E_m - E_i}{m}$ et préciser son unité.

Le dispositif est conservatif. À partir de l'expression de e_0, montrer que si $\mu > 1$ le mouvement est borné, c'est-à-dire que M évolue dans une zone limitée du plan (r,θ) avec :

$$r \leqslant r_{max} = \frac{e_0}{g(\mu - 1)}.$$

© Lavoisier – La photocopie non autorisée est un délit

b) À partir du bilan des actions mécaniques s'exerçant sur M, établir les équations différentielles suivantes :

$$\begin{cases} \ddot{r} = F(r,\theta,\dot{\theta},g,\mu) \\ \ddot{\theta} = G(r,\dot{r},\theta,\dot{\theta},g) \end{cases}$$

c) On s'intéresse maintenant au cas où $\mu < 1$, c'est-à-dire $m > m'$. Dans la limite des petits angles θ, développer l'expression de $\ddot{r}$ au premier ordre en θ. En déduire l'expression de $r(t)$ grâce aux conditions initiales.

d) On pose le temps réduit $\tau = \ln\left(\frac{t}{t_0}\right)$, où t_0 est l'unité de temps. Déterminer l'équation différentielle en $\theta(\tau)$.

Montrer qu'il existe une valeur critique pour μ, séparant deux domaines où le comportement de θ diffère.

Conseils méthodologiques. a) : On ne demande pas de justifier le caractère conservatif du système : on se contente donc d'exprimer l'énergie mécanique en sommant l'énergie potentielle de pesanteur de M et M', ainsi que leurs énergies cinétiques. **b)** : On peut raisonner sur les points matériels pris séparément, mais il faut alors définir deux tensions du fil $\vec{T}$ et $\vec{T}'$. La méthode consiste ensuite à les relier. **c)** : L'approximation sur l'angle permet d'exprimer l'équation en $r(t)$ de façon autonome ; chercher un problème équivalent connu. **d)** : La même linéarisation permet d'obtenir une première équation en θ, dans laquelle il faut ensuite éliminer $\dot{r}$. L'équation du second degré en angle se prête à une classification en fonction des trois régimes possibles.

a) • À une constante additive près, l'énergie potentielle s'écrit $E_p = m'gz' + mgz + E_{p0}$, avec $z = -r\cos\theta$. En outre, le caractère inextensible du fil se traduit par $z' = -\ell_0 + r$. Finalement,

$$E_p = mg(\mu r - r\cos\theta) + E_i$$

où E_i n'a pas à être exprimée.

$$E_c = \frac{1}{2}mV_M^2 + \frac{1}{2}m'V_{M'}^2 = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}m'\dot{z}'^2.$$

Or, $\dot{z}' = \dot{r}$ d'après la relation entre r et z' rappelée précédemment, on obtient ainsi :

$$E_c = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \mu\dot{r}^2)$$

Finalement, l'énergie mécanique devient :

$$E_m = mgr(\mu - \cos\theta) + E_i + \frac{1}{2}m[(1+\mu)\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2]$$

• La quantité $e_0 = \frac{E_m - E_i}{m}$ est homogène au carré d'une vitesse en $m^2 \cdot s^{-2}$, elle s'écrit à l'aide de l'expression précédente :

$$e_0 = gr(\mu - \cos\theta) + \frac{1}{2}[(1+\mu)\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2]$$

• L'énergie cinétique étant toujours positive, e_0 reste supérieur à $gr(\mu - \cos\theta)$.

⇨ Remarque

Le terme entre crochets est positif ou nul : c'est la somme de carrés.

Puisque dans cette question $\mu > 1$ par hypothèse, r reste inférieur à $\frac{e_0}{g(\mu - \cos\theta)}$, donc à $\frac{e_0}{g(\mu - 1)}$, soit $r \leqslant r_{max}$.

Le mouvement est paradoxalement borné. En réalité, une simulation montre que pour $\mu \gg 1$, la masse M peut s'enrouler autour de la tige : la chute de M' est ainsi contrecarrée.

b) En notant $\vec{T}'$ la tension verticale du fil au niveau de M', on peut écrire :

$$m'\ddot{z}' = -m'g + \vec{T}'$$

en projection sur l'axe Oz.

De même, si $\vec{T}$ est la tension du fil exercée sur M, l'équation du mouvement s'écrit, en coordonnées polaires :

$$m[(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{u}_\theta] = \vec{T} + m\vec{g}$$

Mais la tension est radiale et d'intensité opposée à celle exercée sur M' :

$$T_r = -\vec{T}'.$$

On peut donc obtenir une équation en projection sur $\vec{u}_r$:

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -\vec{T}' + mg\cos\theta$$

et une équation sur $\vec{u}_\theta$:

$$2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = -g\sin\theta$$

En combinant l'équation du mouvement relative à M' et les deux relations projetées sur $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \ddot{r} = \dfrac{g(\cos\theta - \mu) + r\dot{\theta}^2}{1+\mu} \\ \ddot{\theta} = \dfrac{-g\sin\theta - 2\dot{r}\dot{\theta}}{r} \end{cases}$$

Ces équations non linéaires et couplées semblent inextricables : seules des approximations ou l'étude de cas particuliers peuvent permettre d'envisager une résolution analytique.

c) La limite des petits angles θ permet d'assimiler $\cos\theta$ à 1 et $\sin\theta$ à θ. En outre, partant de l'hypothèse d'une variation de l'angle de type oscillante, considérer l'amplitude des oscillations comme un infiniment petit du premier ordre conduit à faire de même pour la dérivée $\dot{\theta}$.

On obtient ainsi une expression approchée de $\ddot{r}(t)$:

$$\ddot{r} \approx \frac{g(1-\mu)}{1+\mu}$$

Le mouvement radial de M et celui de M' correspondent à une accélération constante.

Grâce aux conditions initiales, on peut intégrer et obtenir :

$$\dot{r} = \frac{g(1-\mu)}{1+\mu}t \quad \text{et} \quad \boxed{r(t) = \frac{g(1-\mu)}{2(1+\mu)}t^2}$$

d) L'approximation des petits angles sur l'équation orthoradiale donne :

$$\ddot{\theta} \approx \frac{-g\theta - 2\dot{r}\theta}{r}$$

Remarque

Une étude basée sur la nature des actions de contact au niveau de la tige permettrait de justifier ce point (*cf.* chapitre sur les actions de contact).

Remarque

Dans le problème d'origine, c est par une simulation qu'était abordée l'étude générale.

Remarque

Si $\theta = \theta_m\cos(\omega t)$, $\dot{\theta} = -\omega\theta_m\sin(\omega t)$ est d'amplitude proportionnelle à θ_m.

Remarque

Le mouvement est dit uniformément accéléré.

© Lavoisier - La photocopie non autorisée est un délit

soit, avec les résultats précédents :

$$\ddot{\theta} = \frac{-2g(1+\mu)\theta}{(1-\mu)t^2} - 4\frac{\dot{\theta}}{t}$$

En faisant intervenir le temps réduit sous la forme logarithmique : $\tau = \ln\left(\frac{t}{t_0}\right)$, on obtient :

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{d\tau}\frac{1}{t} \text{ et } \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d^2\theta}{d\tau^2}\frac{1}{t^2} - \frac{d\theta}{d\tau}\frac{1}{t^2}$$

Ce changement de variable apporte une simplification appréciable de l'équation :

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{d\tau^2} + 3\frac{d\theta}{d\tau} + 2\frac{1+\mu}{1-\mu}\theta = 0}.$$

Les différents régimes obtenus pour $\theta(\tau)$ sont fonctions du signe du discriminant Δ de l'équation caractéristique. La valeur critique pour μ correspond à l'annulation de Δ :

$$9 = 8\frac{1+\mu}{1-\mu}$$

La valeur correspondante est $\boxed{\mu_0 = \frac{1}{17}}$:

- si $\mu \leq \mu_0$, le mouvement n'est pas oscillant ;
- si $\mu_0 < \mu < 1$, l'évolution de $\theta(\tau)$ est pseudopériodique amortie.

Dans tous les cas néanmoins, on remarque que l'amplitude des variations de θ diminue au cours du temps.

Remarque

On linéarise l'équation.

Remarque

Il en va de même pour $\theta(t)$ car la fonction logarithme est monotone.

Remarque

Le terme du premier ordre est positif, signe d'un amortissement.

6. Piégeage d'un atome dans un champ inhomogène — D'après ENS

On considère un atome de masse m_0 libre de se déplacer selon l'axe Ox. Son moment cinétique est noté $\vec{L} = l \cdot \vec{n}$ et son moment magnétique $\vec{m} = m \cdot \vec{n}$, où $\vec{n}$ est un vecteur unitaire variant dans l'espace à 3 dimensions. l et m sont des constantes.

On impose un champ magnétique inhomogène $\vec{B} = B_0\vec{u}_z + xB'\vec{u}_y$ où xB' est un infiniment petit du premier ordre par rapport à B_0.

a) On envisage dans un premier temps une évolution à $x = 0$. déterminer l'équation différentielle vérifiée par $\vec{n}$ et décrire le mouvement. On notera ω_0 la pulsation correspondante.

b) On suppose maintenant qu'à chaque instant $\vec{n}$ est colinéaire à $\vec{B}$. Déterminer l'équation du mouvement et décrire la trajectoire de l'atome. À quelle condition l'équilibre en O est-il stable ? On note ω_1 la pulsation correspondante.

c) On se place dorénavant dans le cas général : à quelle condition sur ω_0 et ω_1 l'équilibre ($x = 0$ et $\vec{n} = -\vec{u}_z$) est-il stable ?

d) Interprétation qualitative : pourquoi pouvait-on s'attendre à ce que la condition $\frac{\omega_0}{\omega_1} \gg 1$ assure la stabilité de l'équilibre ?

Conseils méthodologiques. On précise, mais ce ne fut pas le cas dans l'exercice posé à l'oral, que l'énergie potentielle entre l'atome et le champ extérieur : $E_p = -\vec{m}\cdot\vec{B}$, permet d'exprimer :

- le couple de forces subies par l'atome, qui s'écrit $\vec{\Gamma} = \vec{m}\wedge\vec{B}$;
- la résultante des forces, $\vec{F} = -\vec{\nabla}(E_p) = \vec{\nabla}(\vec{m}\cdot\vec{B})$.

Le degré de liberté en translation étant figé au a), exploiter la loi du moment cinétique dans le référentiel barycentrique de l'atome. Au b), c'est au contraire la loi de la résultante cinétique qui s'avère nécessaire. La question c) nécessite d'utiliser conjointement les lois précédentes : on note une progression dans la difficulté, signe caractéristique d'un énoncé bien posé. L'étude du système à plusieurs dimensions peut passer par une écriture matricielle et une recherche des valeurs propres. d) : il faut expliquer la grande différence des pulsations caractéristiques des deux mouvements, ce qui permet d'étudier l'un en supposant l'autre inexistant à l'échelle de temps considéré, ou au contraire suffisamment rapide pour que l'on puisse moyenner son effet.

a) Les seuls degrés de liberté sont ici dus à la rotation autour de O ; on invoque la loi du moment cinétique :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\Gamma}$$

Le moment cinétique est proportionnel au moment dipolaire magnétique : $\vec{L} = \frac{I}{m}\vec{m}$, donc on obtient ainsi une équation différentielle vectorielle du premier ordre :

$$\frac{d\vec{m}}{dt} = \frac{B_0 m}{I}\vec{m}\wedge\vec{u}_z$$

En posant $\omega_0 = \frac{B_0 m}{I}$, on peut réécrire cette équation en définissant le vecteur $\vec{\Omega}_0 = -\omega_0\vec{u}_z$, sous la forme :

$$\boxed{\frac{d\vec{m}}{dt} = \vec{\Omega}_0\wedge\vec{m}}$$

On reconnaît ici une expression de même écriture que la loi de dérivation vectorielle :

$$\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{R'} + \vec{\Omega}\wedge\vec{A}\,.$$

entre deux référentiels en rotation l'un par rapport à l'autre à vitesse angulaire $\vec{\Omega}$.

Dans le cas d'un vecteur $\vec{A}$ constant dans R', la seule rotation des référentiels suffit à obtenir :

$$\boxed{\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_R = \vec{\Omega}\wedge\vec{A}}$$

On trouve donc ici que le moment magnétique, donc le vecteur $\vec{m}$, précesse autour du champ magnétique (Fig. 21).

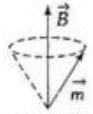


Figure 21

La vitesse angulaire de rotation est $\vec{\Omega}_0$, son sens dépend du signe de I et m.

Remarque

Cette relation est rappelée dans le cours en question du chapitre de mécanique du solide.

Remarque

Le vecteur $\vec{m}$ décrit un cône dont l'axe est dirigé par $\vec{B}$. Pour se représenter le mouvement, imaginer une toupie.

© Ellipses - La photocopie non autorisée est un délit

b) La résultante cinétique, ou quantité de mouvement de l'atome est $m_0 x\,\vec{u}_x$, tandis que la force s'écrit :

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}(-\vec{m}\cdot\vec{B}) = \pm m\frac{d|B|}{dx}\cdot\vec{u}_x$$

Le signe ± émane des deux cas possibles : $\vec{n}$ de même sens ou de sens contraire à $\vec{B}$.

Puisque $\frac{d|B|}{dx} = \frac{xB'^2}{\sqrt{B_0^2 + x^2B'^2}} = \frac{xB'^2}{B_0}$, on obtient l'équation différentielle :

$$\boxed{m_0\ddot{x} \mp m\frac{B'^2}{B_0}x = 0}$$

Deux cas sont à envisager alors :

– Si $\vec{m}$ est de même sens que $\vec{B}$, l'énergie potentielle est maximale en $x = 0$, donc la position O n'est pas stable. On observera alors une dérive et une éjection de l'atome.

– Si $\vec{m}$ et $\vec{B}$ sont de sens contraires, il s'agit bien d'un puits de potentiel. L'atome oscille sinusoïdalement autour de l'abscisse nulle. La forme harmonique obtenue, dans le développement limité aux faibles valeurs de x, permet de définir la pulsation :

$$\boxed{\omega_1 = \sqrt{\frac{mB'^2}{m_0B_0}}}$$

c) On obtient un mouvement à 4 degrés de liberté : 1 degré de translation et 3 degrés de rotation. Mais la rotation propre autour de l'axe $\vec{n}$ n'est pas décrite ici. On envisage de petits mouvements autour de l'état déduit des questions précédentes : $x = 0$ et $\vec{n}$ de sens opposé à $\vec{u}_z$.

Remarque

m et B_0 sont ici positifs.

Les coordonnées de $\vec{n}$ sont ainsi, au premier ordre dans les angles :

$$\vec{n}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma = -1\end{pmatrix}$$

Technique de calcul

La norme unité de $\vec{n}$ permet en effet de considérer γ^2 comme $1 - \alpha^2 - \beta^2$, c'est-à-dire $\gamma = -1$ au premier ordre.

Les coordonnées cartésiennes du couple $\vec{\Gamma} = \vec{m}\wedge\vec{B}$ sont par suite, toujours au premier ordre :

$$\vec{m}\wedge\vec{B}\begin{pmatrix}m(\beta B_0 + xB')\\ m(-\alpha B_0)\\ m\alpha xB'\end{pmatrix}$$

La composante selon $\vec{u}_z$ est négligée : c'est le produit de deux termes du premier ordre.

La loi du moment cinétique $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\Gamma}$ conduit alors au système d'équations suivant :

$$\begin{cases} I\alpha = m\beta B_0 + mxB' \\ I\beta = -m\alpha B_0 \end{cases} \quad (M)$$

D'autre part, l'énergie potentielle se calcule à l'aide du produit scalaire :

$$\vec{m}\cdot\vec{B} = \begin{pmatrix}m\alpha\\ m\beta\\ -m\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\ xB'\\ B_0\end{pmatrix} = m\beta B'x - mB_0$$

La loi de la résultante cinétique $m_0\ddot{x} = \dfrac{d(\vec{m}\cdot\vec{B})}{dx}$ devient donc :

$$m_0\ddot{x} = m\beta B'(R)$$

À ce stade, la résolution du système des deux équations couplées (R) et (M) peut être obtenue aisément en transformant (R) en un système de deux équations du premier ordre. On pose à cette fin $y = \dot{x}$ et on transforme (R) en $\dot{y} = \dfrac{mB'}{m_0}\beta$.

Le vecteur à 4 dimensions $\begin{pmatrix} x \\ y \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ obéit ainsi à une équation différentielle du premier ordre :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & mB'/m_0 \\ mB'/I & 0 & 0 & \omega_0 \\ 0 & 0 & -\omega_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

L'étude de la stabilité de ce système différentiel passe par l'examen de la partie réelle des valeurs propres de la matrice 4×4 :

- s'il existe une valeur propre à partie réelle positive, la solution correspondant à ce vecteur propre diverge : il y a instabilité ;
- si aucune valeur propre n'a de partie réelle positive, le système est stable.

Les valeurs propres de la matrice (M) sont obtenues par résolution de l'équation $\det(M - \lambda Id) = 0$: on obtient :

$$\lambda^4 + \omega_0^2\lambda^2 + \frac{B'^2 m^2 \omega_0}{m_0 I} = 0. \quad (V)$$

Technique de calcul

Les valeurs propres à partie réelle nulle correspondent à des modes d'oscillations sinusoïdales

Le discriminant $\Delta = \omega_0^4 - 4\dfrac{B'^2 m^2 \omega_0}{m_0 I}$ se met sous la forme :

$$\boxed{\Delta = \omega_0^2(\omega_0^2 - 4\omega_1^2)}.$$

si l'on utilise les expressions des pulsations ω_0 et ω_1 obtenues ci-dessus.

La discussion est alors la suivante :

- Si $\Delta < 0$, l'équation aux valeurs propres (V) a 2 solutions λ^2 non réelles ; donc λ admet 2 valeurs de partie réelle négative, ainsi que 2 autres de partie réelle positive. Il y a instabilité à cause de ces deux dernières.
- Si $\Delta \geqslant 0$, compte tenu du signe positif du produit des racines de l'équation aux valeurs propres (V) et du signe négatif de la somme des racines, on peut dire que les 2 valeurs de λ^2 solutions de (V) sont réelles négatives. Toutes les valeurs de λ sont donc imaginaires pures. C'est un cas de stabilité.

Finalement, la stabilité est atteinte lorsque $\Delta = \omega_0^2(\omega_0^2 - 4\omega_1^2) \geqslant 0$, c'est-à-dire pour :

$$\boxed{\omega_0 \geqslant 2\omega_1}.$$

d) Dans le cas où $\omega_0 \gg \omega_1$.

- la vitesse d'oscillations selon l'axe (Ox) est très lente devant la vitesse de précession, donc on peut considérer $\vec{B}$ vu par l'atome comme variant très lentement. On peut ainsi appliquer l'étude du **a)** et conclure à la stabilité de la précession.
- De même, l'étude des dérives selon (Ox) peut être conduite en considérant que par le jeu d'une précession très rapide, l'action de $\vec{B}$ est moyennée sur un très grand nombre de tours. Le moment magnétique $\vec{m}$ est en moyenne colinéaire à $\vec{B}$ et on peut appliquer les résultats de la question **b)** : les oscillations selon l'axe sont stables.

© Ellipses - La photocopie non autorisée est un délit

Par ce raisonnement qualitatif, valable seulement dans le cas où les deux pulsations fondamentales sont très éloignées pour que l'on puisse découpler les mouvements (méthode de l'invariant adiabatique), on peut conclure quant à la stabilité du système.

Remarque

L'étude du couplage conduite au **c)** est en revanche indispensable si les pulsations sont du même ordre.

REMARQUE – Cet exercice est très intéressant, d'autant qu'il correspond à un problème réellement utilisé en laboratoire dans le cadre du piégeage des particules neutres. Il est toutefois d'une difficulté très élevée, compte tenu des allègements de programme récents. Il a néanmoins été posé à la session 2005, ce qui rend d'autant plus méritoire la résolution donnée par certains candidats.

Mécanique du solide

Méthodes

Le cours en questions

1 ■ Cinématique

1.1 Dérivation vectorielle. Quelle est la relation entre la dérivée temporelle d'un vecteur $\vec{A}$ dans un référentiel R et la dérivée dans un référentiel R' en rotation par rapport à R à vitesse $\vec{\Omega}$?

• Si l'on note $\vec{\Omega}$ le vecteur instantané de rotation de R' par rapport à R (on peut également être plus explicite en notant $\vec{\Omega}(R'/R)$), les dérivées $\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_R$ et $\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{R'}$ vérifient :

$$\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{R'} + \vec{\Omega} \wedge \vec{A} \quad .$$

• La loi de composition des mouvements découle de cette relation : en effet, la relation entre les vitesses d'un point matériel dans les deux référentiels s'obtient en écrivant :

$$\left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right)_R + \left(\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right)_R$$

et également d'après ce qui précède :

$$\left(\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right)_{R'} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M}$$

© Lavoisier - La photocopie non autorisée est un délit

On aboutit ainsi à la loi de composition vue en première année : $\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r$ où $\vec{V}_e = \vec{V}(O') + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M}$.

1.2 Rappeler la relation entre la vitesse de deux points d'un même solide dans un même référentiel (on parle de champ cinématique ou champ des vitesses).

• Si l'on note $\vec{\Omega}$ le vecteur instantané de rotation du solide dans le référentiel d'étude, on peut écrire, pour deux points P et Q liés au solide :

$$\vec{V}(P) = \vec{V}(Q) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{QP} \quad .$$

L'utilisation des torseurs est facultative, nous y recourrons en guise de remarques.

• Cette relation est caractéristique du champ des moments d'un torseur, dont la résultante est $\vec{\Omega}$, on parle du torseur cinématique.

1.3 Axe instantané de rotation. Existe-t-il un ensemble de points du solide dont la vitesse est dirigée colinéairement à $\vec{\Omega}$?

• Les points du solide animés d'une vitesse dirigée selon $\vec{\Omega}$ sont situés sur un axe parallèle à $\vec{\Omega}$ appelé axe instantané de rotation (noté Δ dorénavant).

Le mouvement général est un vissage.

• Tous les points de cet axe ont même vitesse, notons-là $\vec{V}_{//}$. Les autres points du solide ont également une vitesse dont la projection sur la direction colinéaire à $\vec{\Omega}$ est égale à $\vec{V}_{//}$, mais ils ont en outre une composante de vitesse orthogonale à Δ.

1.4 Quelle est l'expression de la vitesse d'un point P du solide en fonction de $\vec{V}_{//}$, de $\vec{\Omega}$ et d'un point O de l'axe instantané de rotation Δ ?

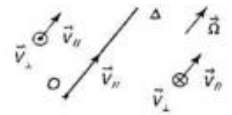


Figure 1

• Il faut ajouter à $\vec{V}_{//}$ la composante orthogonale à Δ due à la rotation à vitesse angulaire $\vec{\Omega}$ (Fig. 1). On peut donc écrire :

$$\vec{V}(P) = \vec{V}_{//} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OP} \quad .$$

2 ■ Mouvements particuliers

2.1 Translation d'un solide. Après avoir rappelé sa définition, indiquer les propriétés remarquables du champ des vitesses d'un solide en translation.

• Un solide est animé d'un mouvement de translation lorsque le vecteur $\vec{\Omega}$ est nul.

• Le champ des vitesses est alors uniforme (Fig. 2) :

$$\forall (P, Q), \quad \vec{V}(P) = \vec{V}(Q) \ .$$

• On ne peut plus définir Δ.

2.2 Mouvement de rotation autour d'un axe fixe Δ. Exprimer le champ des vitesses et rappeler l'expression du moment cinétique par rapport à l'axe, noté σ_Δ, en fonction du moment d'inertie.

• Si O est un point de l'axe Δ, sa vitesse est nulle et on peut écrire :

$$\vec{V}(P) = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OP} \ .$$

• Il est alors intéressant de considérer le moment cinétique en O : $\vec{\sigma}(O)$. En général, $\vec{\sigma}(O)$ n'est pas colinéaire à Δ, ce n'est le cas que lorsque l'axe est un des axes remarquables du solide appelés axes principaux d'inertie.

On note σ_Δ la composante selon l'axe du moment cinétique, elle est proportionnelle à Ω, la constante de proportionnalité étant appelée moment d'inertie I_Δ :

$$\sigma_\Delta = I_\Delta \Omega$$

Le moment d'inertie est la somme sur tout le solide de $r^2 dm$, où r est la distance à l'axe Δ d'un élément de masse dm (Fig. 3) :

$$I_\Delta = \int r^2 dm \ .$$

2.3 Que peut-on dire du mouvement instantané d'un solide dans son référentiel barycentrique ? Qu'en déduire pour le moment cinétique propre ?

• Dans le référentiel du centre de masse, le mouvement du solide a nécessairement un point fixe : G évidemment ! On peut donc considérer que le mouvement instantané est une rotation autour d'un axe, noté Δ_G, passant par G et dirigé selon $\vec{\Omega}$.

• À chaque instant, la composante du moment cinétique propre selon Δ_G s'écrit :

$$\sigma^*_{\Delta G} = I_{\Delta_G} \Omega$$

2.4 Comment sont liés les moments d'inertie par rapport à Δ et à Δ_G ?

• Ce résultat est appelée théorème d'Huygens, il nécessite absolument de vérifier qu'on l'applique bien à deux axes parallèles, dont l'un passe par G (Fig. 4).

• $I_\Delta = I_{\Delta_G} + Md^2$ où M est la masse du solide et d la distance entre les deux axes parallèles.

La notion de vitesse parallèle $\vec{V}_{//}$ n'a plus de sens ici, puisque Δ n'est plus défini.

Figure 2

Si l'axe Δ est un axe de symétrie du solide, c'est un axe principal d'inertie ; mais la réciproque n'est pas vraie.

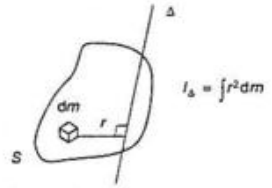


Figure 3

Il s'agit du même vecteur $\vec{\Omega}$ que celui défini dans le référentiel d'étude, car le référentiel du centre de masse R_G est en translation par rapport au référentiel d'étude R :

$$\vec{\Omega}(R_G/R) = \vec{0} \ .$$

Erreur à éviter
Ne pas perdre de vue que $\vec{\Omega}$ varie en général en direction et en norme.

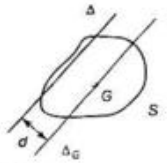


Figure 4

© Lavoisier - La photocopie non autorisée est un délit

3 ■ Puissance – énergie

3.1 Que peut-on dire de la puissance des actions intérieures à un solide ?

• Ce résultat est essentiel : la puissance des actions intérieures est nulle dans le cas d'un solide

$$\mathcal{P}_{int} = 0 \ ;$$

Le traitement de la puissance des actions de contact entre solides fait l'objet du chapitre 3.

Ce résultat n'est pas valable pour un système composé d'un ensemble de solides : on doit alors considérer les actions entre les différents solides.

3.2 Pour un système de forces appliquées à un solide, de résultante $\vec{R}$ et moment en O $\vec{\mathcal{M}}_O$, quelle est l'expression de la puissance ?

• On utilise là les propriétés remarquables du champ des vitesses d'un solide et on obtient :

$$\mathcal{P} = \vec{R} \cdot \vec{V}(O) + \vec{\mathcal{M}}_O \cdot \vec{\Omega} \ .$$

• Dans le cas d'un mouvement de translation, on retrouve l'expression connue pour un point matériel : $\mathcal{P} = \vec{R} \cdot \vec{V}$.

• Pour un mouvement de rotation autour d'un axe fixe Δ contenant le point O, $\mathcal{P} = \vec{\mathcal{M}}_O \cdot \vec{\Omega}$ peut se réécrire en introduisant le moment par rapport à Δ : $\mathcal{M}_\Delta = \vec{\mathcal{M}}_O \cdot \vec{u}_\Delta$ (où $\vec{u}_\Delta$ est unitaire) :

$$\mathcal{P} = \mathcal{M}_\Delta \Omega \ .$$

3.3 Proposer une expression de l'énergie cinétique d'un solide faisant jouer un rôle particulier à un des points O, puis à G. En déduire une décomposition en un terme de translation et un terme de rotation.

• En exploitant une nouvelle fois la structure du champ des vitesses, on peut écrire

$$E_c = \frac{1}{2}\vec{V}(O) \cdot \vec{P} + \frac{1}{2}\vec{\Omega} \cdot \vec{\sigma}(O) \ .$$

On pourra alléger sensiblement l'effort de mémorisation de cette expression en notant les analogies très importantes entre les deux termes : le facteur 1/2 est présent dans les deux termes ; à la vitesse de translation $\vec{V}$ correspond la vitesse de rotation $\vec{\Omega}$ et à la quantité de mouvement $\vec{P}$ le moment cinétique $\vec{\sigma}$.

où $\vec{P} = M\vec{V}(G)$ et $\vec{\sigma}(O)$ sont respectivement la quantité de mouvement totale et le moment cinétique en O.

• Dans le cas d'une translation, on retrouve $E_c = \frac{1}{2}MV^2(G)$; pour une rotation d'axe fixe, $E_c = \frac{1}{2}I_\Delta \Omega^2$.

• Si l'on utilise le théorème de König relatif à l'énergie, on peut décomposer E_c en la somme de l'énergie cinétique du mouvement du centre de masse, $E_c = \frac{1}{2}MV^2(G)$ et l'énergie cinétique propre. Cette dernière s'écrit $E_c = \frac{1}{2}I_{\Delta_0}\Omega^2$. On peut donc faire apparaître une somme de termes associés à une translation et une rotation :

$$E_c = \frac{1}{2}MV^2(G) + \frac{1}{2}I_{\Delta_0}\Omega^2 .$$

Ce résultat est très utile dès que le mouvement n'est pas élémentaire, il constitue un formidable outil pour la résolution de problèmes conservatifs.

Les savoir-faire clefs

1 ▬ Savoir exploiter le moment cinétique d'un solide en rotation.

Conseils méthodologiques

On considère un pendule constitué d'une tige homogène de masse M et longueur L, articulée autour d'un point qui n'est *a priori* ni une de ses extrémités ni son milieu C. La rotation s'effectue autour de l'axe fixe et horizontal Ox (Fig. 5), on repère la position angulaire par l'angle θ.

L'action de l'axe de rotation sur la tige met en jeu un moment nul par rapport à l'axe Ox et on admettra que, dans ces conditions, les actions dues à l'axe de rotation ont une puissance nulle dans le référentiel d'étude.

Le référentiel d'étude est galiléen, un de ses repères est (O,x,y,z) où Oz est la verticale ascendante.

a) Déterminer la position d'équilibre de la tige.

b) À l'instant initial, l'angle $\theta(0)$ est nul et la vitesse angulaire $\dot{\theta}_0$ non nulle. Au cours du mouvement, comment s'exprime le moment cinétique en O de la tige ? Quelle est sa projection sur l'axe Ox ? Vérifier les expressions à l'aide des données suivantes :

– moment d'inertie d'une tige de masse M et longueur L par rapport à un axe perpendiculaire passant par son milieu : $I = M\frac{L^2}{12}$;

– moment d'inertie par rapport à un axe perpendiculaire, passant par une de ses extrémités : $I = M\frac{L^2}{3}$.

c) Appliquer la loi du moment cinétique en O au système constitué par la tige. En déduire l'équation différentielle du mouvement et la période des petites oscillations.

d) Retrouver l'équation du mouvement en utilisant la notion d'énergie mécanique.

e) Comment peut-on déterminer s'il existe, sur le segment $[A.B]$, plusieurs points de fixation O permettant d'obtenir une période T donnée ?

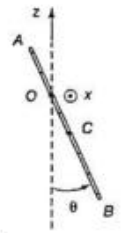


Figure 5

1.a) Deux méthodes peuvent être envisagées : l'une mettant en jeu les lois de la dynamique, l'autre une propriété de l'énergie potentielle.

1.b) Effectuer une décomposition de la tige en petits éléments et intégrer l'expression du moment cinétique de chacun d'entre eux.

1.c) Adopter une écriture vectorielle dans la base polaire.

1.d) Veiller à distinguer toutes les puissances susceptibles d'intervenir ici, c'est une démarche qui doit être systématique.

1.e) Montrer que la réponse à la question met en jeu une seule inconnue scalaire.

© Lavoisier – La photocopie non autorisée est un délit

1.a) Qualitativement, on conçoit qu'une position d'équilibre envisageable est atteinte lorsque la tige est verticale. On peut s'en assurer en appliquant la loi du moment cinétique par rapport à l'axe fixe qui, dans le cas de l'équilibre, revient à annuler le moment des actions extérieures. Puisque les actions dues à l'axe ont un moment toujours nul, il faut donc annuler le moment du poids. Ceci n'est possible qu'en plaçant le centre de masse C à la verticale du point d'articulation O.

La stabilité des deux positions correspondantes se fait en imaginant une légère inclinaison de la tige à partir de la position d'équilibre considérée. Si le centre de masse est situé au-dessus de O, la position est instable, dans le cas contraire la position est stable (Fig. 6).

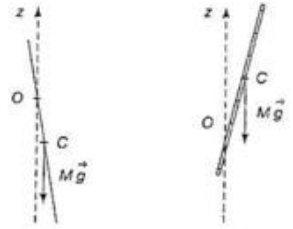


Figure 6

Une seconde approche met en jeu un raisonnement énergétique. Puisque les actions de liaison ne travaillent pas et que la puissance des actions intérieures est nulle dans un solide, seul le poids intervient. On peut, pour cette force conservative, définir une énergie potentielle : Mgz_G où z_G est la cote ascendante du centre de masse, il s'agit de C ici. Ainsi, à une éventuelle constante additive près, l'énergie potentielle du système s'écrit :

$$\boxed{E_p = -Mgd\cos\theta}$$

où d désigne la distance OC.

θ est défini à 2π près.

L'énergie potentielle est extrémale lorsque θ est égal à 0 ou π.

– un minimum d'énergie potentielle correspond à $\theta = 0$, il s'agit de la position d'équilibre stable ;

– un maximum est obtenu pour $\theta = \pi$, c'est la position instable ;

– le cas où d est nul (articulation en C) conduit à une énergie potentielle constante, donc un équilibre indifférent.

b) Chaque élément de la tige situé à distance ℓ de O est animé d'un mouvement circulaire de vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}$. Sa vitesse s'écrit donc, en coordonnées polaires d'origine O (Fig. 7) :

$$\vec{v} = \ell\dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

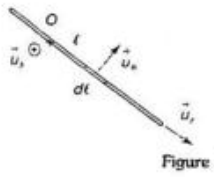


Figure 7

Le moment cinétique de l'élément de masse $dm = \frac{M}{L}d\ell$ s'écrit $d\vec{L}_O = dm\,\ell\,\vec{u}_r \wedge \vec{v}$, c'est-à-dire :

$$d\vec{L}_O = \frac{M}{L}\ell^2\dot{\theta}\vec{u}_z d\ell$$

Sur toute la tige, ℓ varie de $-\frac{L}{2}+d$ à $\frac{L}{2}+d$. L'intégrale $\int_{-\frac{L}{2}+d}^{\frac{L}{2}+d}\ell^2 d\ell$ est égale à $Ld^2+\frac{L^3}{12}$, si bien que :

$$\boxed{\vec{L}_O = M\left(d^2+\frac{L^2}{12}\right)\dot{\theta}\vec{u}_x}.$$

En projection sur l'axe Ox, on obtient le moment cinétique par rapport à l'axe :

C'est un scalaire.

$$L_{Ox} = M\left(d^2+\frac{L^2}{12}\right)\dot{\theta}$$

Dans les cas limites où :

- O est en une extrémité, $d=\frac{L}{2}$ et $L_{Ox} = M\left(\frac{L^2}{3}\right)\dot{\theta} = I_{Ax}\dot{\theta}$;

- O est au milieu, $d=0$ et $L_{Ox} = M\left(\frac{L^2}{12}\right)\dot{\theta} = I_{Cx}\dot{\theta}$.

Il était bien entendu possible d'exploiter le théorème de König pour aboutir à l'expression : le moment cinétique du centre de masse s'obtient simplement par $\vec{L}_O = Md^2\dot{\theta}\vec{u}_x$, tandis que le moment cinétique propre, qui correspond à une rotation autour de l'axe Cx, met en jeu le moment d'inertie par rapport à cet axe : $\vec{L}^* = M\frac{L^2}{12}\dot{\theta}\vec{u}_x$. En sommant ces deux termes, on aboutit immédiatement au résultat :

En pratique, on privilégiera cette méthode.

$$\vec{L}_O = M\left(d^2+\frac{L^2}{12}\right)\dot{\theta}\vec{u}_x$$

c) Le moment du poids en O s'obtient en considérant que le centre de masse est situé au milieu de la tige homogène :

$$\vec{\mathcal{M}}_O = \overrightarrow{OC}\wedge M\vec{g} = -Mgd\sin\theta\,\vec{u}_x$$

Le moment du poids par rapport à l'axe Ox est la projection de ce vecteur : $\mathcal{M}_{Ox} = \vec{\mathcal{M}}_O\cdot\vec{u}_x$. Ici,

$$\boxed{\mathcal{M}_{Ox} = -Mgd\sin\theta}.$$

Les autres actions extérieures sont constituées par les actions de l'axe sur la tige, dont le moment par rapport à l'axe Ox est nul. On peut donc utiliser ce fait pour écrire la loi du moment cinétique par rapport à l'axe fixe Ox :

$\frac{dL_{Ox}}{dt} = \mathcal{M}_{Ox}$, soit :

$$M\left(d^2+\frac{L^2}{12}\right)\ddot{\theta} = -Mgd\sin\theta$$

Aux faibles amplitudes, cette équation se linéarise, puisque $\sin\theta\approx\theta$:

$$\boxed{\ddot{\theta}+\frac{gd}{d^2+\frac{L^2}{12}}\theta = 0}.$$

Sans la linéarisation, l'oscillateur est qualifié de anharmonique.

On aboutit à une équation d'oscillateur harmonique.

© Lavoisier - La photocopie non autorisée est un délit

La pulsation caractéristique est :

$$\boxed{\Omega = \sqrt{\frac{gd}{d^2+\frac{L^2}{12}}}}.$$

la période $T = \frac{2\pi}{\Omega}$.

d) Une approche énergétique est envisageable, car la puissance des actions intérieures est nulle (solide) et la puissance des actions dues à l'axe de rotation est également nulle. Il ne reste que le poids dont nous avons déjà exprimé l'énergie potentielle.

L'énergie cinétique peut, comme l'a été le moment cinétique au b), être exprimée en intégrant $\int\frac{1}{2}dmv^2$ sur les différents éléments de la tige. Mais nous opterons d'emblée pour l'utilisation du théorème de König :

- L'énergie cinétique associée au mouvement circulaire du centre de masse s'écrit $\frac{1}{2}Md^2\dot{\theta}^2$.

- L'énergie cinétique propre correspondant à la rotation de la tige autour de l'axe passant par son centre de masse Cx s'écrit :

$$\frac{1}{2}I_{Cx}\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\frac{ML^2}{12}\dot{\theta}^2$$

Au total, l'énergie cinétique du pendule articulé autour de Ox est :

$$E_c = \frac{1}{2}M\left(d^2+\frac{L^2}{12}\right)\dot{\theta}^2$$

On retrouve $E_c = \frac{1}{2}I_{Ox}\omega^2$, à l'aide de b).

En additionnant l'énergie cinétique et l'énergie potentielle des seules forces qui travaillent, on aboutit à l'énergie mécanique :

L'énergie potentielle a été déterminée au a).

$$\boxed{E = E_c+E_p = \frac{1}{2}M\left(d^2+\frac{L^2}{12}\right)\dot{\theta}^2 - Mgd\cos\theta}.$$

La conservation de l'énergie mécanique dans le référentiel d'étude galiléen prend alors la forme $\frac{d(E_p+E_c)}{dt} = 0$, c'est-à-dire ici :

$$M\left(d^2+\frac{L^2}{12}\right)\dot{\theta}\ddot{\theta}+Mgd\sin\theta\dot{\theta} = 0$$

Après simplification par $\dot{\theta}$, on retrouve l'équation du mouvement.

e) Par raison de symétrie, on peut être certain que s'il existe une solution pour obtenir une période donnée, il existe au moins une autre solution qui se trouve être le symétrique O' du point O par rapport au centre. Mais la question est posée de l'existence d'autres solutions, c'est-à-dire d'autres valeurs de la distance d. Partons donc de la donnée de la période T, donc de la pulsation Ω.

L'équation obtenue précédemment s'écrit, avec l'inconnue d :

$$d^2+\frac{L^2}{12} = \frac{gd}{\Omega^2}.$$

On aboutit ainsi à une équation du second degré :

$$\boxed{d^2-\frac{g}{\Omega^2}d+\frac{L^2}{12} = 0}.$$

Le produit des racines est positif, ainsi que la somme des racines. On doit alors examiner le discriminant pour se prononcer sur l'existence de solutions réelles :

$$\Delta = \frac{Q^2}{\Omega^4} - \frac{L^2}{3}$$

La discussion porte finalement sur la valeur de la pulsation Ω : si le discriminant est positif, il existe deux solutions réelles et positives pour d, donc quatre points de fixations deux à deux symétriques par rapport à C.

Par contre, certaines valeurs de Ω ne donnent aucune solution, bien entendu.

Il faut en outre vérifier que la distance au centre n'excède pas la demi-longueur, c'est-à-dire que les points de fixation ne sont pas hors de la tige.

2 ▬ Savoir raisonner sur divers systèmes.

Conseils méthodologiques

REMARQUE – On complète un exercice examiné au chapitre précédent, en prenant en compte la masse d'une poulie.

Deux singes de même masse M sont au sol et tiennent les deux extrémités d'une corde, qui fait le tour d'une poulie de masse m (Fig. 8). A fournit des efforts en grimpant à la corde, B se contente de se tenir fixement à un point de la corde.

L'étude dans le modèle de la poulie de masse négligeable a mené à la conclusion de l'égalité des accélérations $\ddot{z}_A$ et $\ddot{z}_B$ des deux singes. On désire déterminer ici en quoi la prise en compte de l'inertie de la poulie peut modifier le résultat.

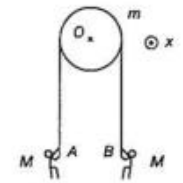


Figure 8

a) Quelle relation peut-on écrire entre les vitesses des singes et la vitesse angulaire de rotation de la poulie ?

b) On distingue une nouvelle fois les trois systèmes suivants :

P : poulie d'axe fixe $\Delta = Ox$, pour laquelle on suppose le moment des actions de la part de l'axe nul en O.

A : singe A

B : singe B.

Appliquer la loi de la résultante cinétique pour les systèmes A et B, puis la loi du moment cinétique en O pour le système P.

c) Peut-on répondre à la question : « Quel singe arrive le premier au niveau de la poulie ? »

d) La méthode consistant à raisonner sur le système formé par la réunion $P \cup A \cup B$, des 3 systèmes précédents, convient-elle également ?

e) Qu'aurait nécessité le fait de raisonner par l'intermédiaire de la loi de la puissance cinétique ?

2.a) Il s'agit *a priori* d'une relation cinématique.

2.b) Dans le bilan des forces extérieures à chaque système, il faut faire apparaître des tensions du fil.

2.c) Procéder en éliminant les tensions entre les différentes équations, afin d'aboutir à une relation entre les accélérations $\ddot{z}_A$ et $\ddot{z}_B$. Intégrer alors celle-ci en exploitant des conditions initiales.

2.d) Parmi les grandeurs cinétiques quantité de mouvement et moment cinétique, réfléchir préalablement à celle pour laquelle on sera en mesure d'écrire une loi ne faisant pas intervenir d'inconnue supplémentaire.

2.e) Recenser les actions intérieures ou extérieures susceptibles d'intervenir.

2.a) La corde est inextensible, donc la vitesse du point de la poulie I_B est identique à celle du singe B. On peut donc écrire (Fig. 9)

$$\vec{V}_B = \vec{V}_O + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OI_B} = \vec{0} + \omega\vec{u}_x \wedge R\vec{u}_y = R\omega\vec{u}_z$$

© Lavoisier - La photocopie non autorisée est un délit

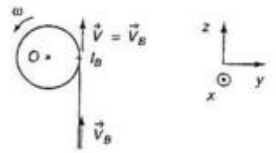


Figure 9

$-R\omega\vec{u}_z$ est la vitesse du point de la corde au niveau de A.

Donc $\dot{z}_A \geqslant -R\omega$.

On en déduit le relation cinématique : $\dot{z}_B = R\omega$.

En revanche, le singe A ne reste pas fixé en un même point de la corde, donc on ne peut écrire une relation du même genre entre $\dot{z}_A$ et ω.

Les portions de corde sont de masse nulle.

b) On définit les tensions $\vec{T}_A$, $\vec{T}_B$, $\vec{T}_A'$ et $\vec{T}_B'$ (Fig. 10) et la loi des actions réciproques permet d'obtenir :

$$\boxed{\vec{T}_A' = -\vec{T}_A \quad \text{et} \quad \vec{T}_B' = -\vec{T}_B}.$$

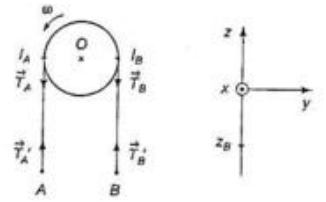


Figure 10

Pour le système A, la loi de la résultante cinétique s'écrit :

$$M\ddot{z}_A = -Mg + \overline{T}_A'$$

Erreur à éviter
Attention aux signes !

où $\overline{T}_A'$ est la valeur algébrique de $\vec{T}_A'$ sur l'axe des z.

La même relation écrite pour le singe B donne bien entendu :

$$M\ddot{z}_B = -Mg + \overline{T}_B'$$

La masse de la poulie étant prise en compte ici, on doit inclure l'inertie dans la modélisation : on exprime donc le moment cinétique en O de la poulie. Puisque l'axe Ox est un axe de symétrie de ce solide, probablement cylindrique, le moment cinétique est colinéaire au vecteur vitesse instantanée de rotation $\vec{\omega}$, la constante de proportionnalité est le moment d'inertie I de la poulie :

$$\vec{L}_O = I\omega\vec{u}_x$$

Le moment nul des actions de l'axe correspond à une liaison idéale (cf. chapitre 3).

Les actions extérieures exercées sur la poulie comprennent

- le poids qui est exercé en O, donc de moment nul,
- les actions dues à l'axe, considérées de moment nul en O,
- les tensions $\vec{T}_A$ et $\vec{T}_B$, de moment en O donné par :

$$\overrightarrow{OI_A} \wedge \vec{T}_A + \overrightarrow{OI_B} \wedge \vec{T}_B = -R\vec{u}_y \wedge \overline{T}_A\vec{u}_z + R\vec{u}_y \wedge \overline{T}_B\vec{u}_z = R(\overline{T}_B - \overline{T}_A)\vec{u}_x$$

La loi du moment cinétique appliquée au point fixe O, pour le système P, s'écrit :

$$I\dot{\omega}\vec{u}_z = R(\vec{T}_B - \vec{T}_A)\vec{u}_z$$

c) Il est possible d'éliminer les valeurs algébriques des forces de tension $\vec{T}_A$ et $\vec{T}_B$ entre les équations de la dynamiques écrites ci-dessus

$$I\dot{\omega} = MR(\ddot{z}_A - \ddot{z}_B)$$

et la vitesse angulaire grâce à la relation cinématique du **a)** :

$$I\ddot{z}_B = MR^2(\ddot{z}_A - \ddot{z}_B)$$

On aboutit finalement à la relation entre les seules accélérations :

$$\boxed{\left(1 + \frac{I}{MR^2}\right)\ddot{z}_B = \ddot{z}_A}.$$

Puisqu'un moment d'inertie est une quantité toujours positive, on peut affirmer que la prise en compte de la masse de la poulie garantit au singe A d'avoir une accélération supérieure à celle du singe B :

$I = \int r^2 dm > 0$

$$\ddot{z}_A > \ddot{z}_B$$

Le singe A est ainsi récompensé de ses efforts : en effet, partis avec une vitesse initiale nulle, les deux singes ont des vitesses dans le rapport donné par :

$$\boxed{\left(1 + \frac{I}{MR^2}\right)\dot{z}_B = \dot{z}_A}.$$

Pour parcourir le chemin correspondant à dénivellation entre le sol et la poulie, le singe A mettra donc un temps plus court que le singe B.

Lorsqu'on prend en compte son inertie, la poulie ne transmet plus intégralement les efforts.

d) Pour le système formé par la réunion des trois corps, les actions extérieures comprennent :

- les poids des singes ;
- le poids de la poulie ;
- l'action de l'axe sur la poulie.

Le poids de la poulie et l'action de l'axe de rotation présentent un moment nul en O, il faut donc utiliser la loi du moment cinétique en ce point fixe :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \overrightarrow{OA} \wedge M\vec{g} + \overrightarrow{OB} \wedge M\vec{g}$$

Par raison de symétrie, le moment total des poids est nul : il s'écrit en effet :

$$\overrightarrow{OI_A} \wedge M\vec{g} + \overrightarrow{OI_B} \wedge M\vec{g} = (\overrightarrow{OI_A} + \overrightarrow{OI_B}) \wedge M\vec{g} = \vec{0}$$

Le moment cinétique en O du système total est donc constant. Or il est nul à l'instant initial, il le reste donc à tout instant. Noter que cette propriété est vraie quelle que soit l'action du singe A !

L'action du singe A est une action intérieure au système considéré ici.

Le moment cinétique $\vec{L}_O$ est par ailleurs la somme des moments cinétiques des 3 systèmes :

$$\vec{L}_O = \overrightarrow{OA} \wedge Mz_A\vec{u}_z + \overrightarrow{OB} \wedge M\dot{z}_B\vec{u}_z + I\omega\vec{u}_z = (MRz_B - MRz_A + I\omega)\vec{u}_z$$

© Ellipses - La photocopie non autorisée est un délit

On obtient ainsi directement la relation :

$$\dot{z}_B - \dot{z}_A + \frac{I}{MR}\omega = 0$$

Combinée à la relation cinématique du **a)**, cette équation fournit le renseignement cherché sur les accélérations :

$$\left(1 + \frac{I}{MR^2}\right)\dot{z}_B = \dot{z}_A$$

REMARQUE – On constate une nouvelle fois qu'il est possible d'obtenir une résolution en appliquant les lois fondamentales à divers systèmes. On retiendra surtout la nécessité de bien préciser quelle loi on utilise, à quel système on l'applique et en quel point, s'il s'agit de la loi du moment cinétique.

e) La loi de la puissance cinétique nécessite de faire intervenir la puissance des actions intérieures. Or ici, l'action du singe A qui consiste à se hisser le long de la corde met en jeu une puissance non nulle : le singe consomme des glucides pour faire fonctionner ses muscles, il transpire peut-être... Ainsi, un bilan d'énergie mécanique devra être complété par la prise en compte de la puissance des actions intérieures, ce qui n'est pas simple dans ce cas.

Conseils méthodologiques

3 ▬ Savoir utiliser la conservation de l'énergie mécanique.

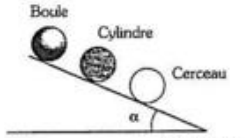


Figure 11

Toute la méthode de résolution repose sur la décomposition du mouvement en une translation du centre de masse et une rotation dans le référentiel barycentrique. Le théorème de König relatif à l'énergie est alors très utile.

Trois solides sont libérés sans vitesse initiale sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale (Fig. 11) : ce sont :

- un cylindre de masse M, de hauteur h et rayon R ;
- une boule de masse M et rayon R ;
- un cerceau, dont la masse M est concentrée sur le cercle de rayon R.

On admet qu'ils roulent sans glisser, ce qui a comme conséquence que la puissance de l'action du plan sur le solide est nulle (la justification de cette propriété tient à ce que la vitesse du point du solide qui est en contact avec le plan est nulle à chaque instant).

a) Relier par un argument cinématique la vitesse V de translation du centre de masse à la vitesse de rotation dans le référentiel barycentrique.

b) Exprimer l'energie cinétique de chaque solide en fonction de la vitesse V.

c) Après avoir justifié l'existence d'une énergie mécanique, établir l'équation différentielle du mouvement.

d) Comparer les différentes accélérations entre elles, ainsi qu'à l'accélération obtenue pour un point matériel glissant sans frottement sur le plan.

Données : Les moments d'inertie par rapport à l'axe de révolution passant par le centre de masse de chacun de ces solides est :

- $\frac{1}{2}MR^2$ pour le cylindre ;
- $\frac{2}{5}MR^2$ pour la boule ;
- MR^2 pour le cerceau.

3.a) Notant G le centre de masse, qui par raison de symétrie est le centre C de chaque solide, et posant $\vec{\omega} = \omega\vec{u}_z$ le vecteur instantané de rotation du solide, on peut écrire :

$$\vec{V}(I) = \vec{V} + \vec{\omega} \wedge \vec{CI}$$

Compte tenu des directions définies dans la figure 12, $\vec{V} = V\vec{u}_x$ et $\vec{CI} = -R\vec{u}_y$, donc en grandeurs algébriques :

$$\boxed{V = -R\omega}.$$

b) Dans le référentiel barycentrique, chaque solide est animé d'un mouvement de rotation autour de l'axe Cz, dont l'énergie cinétique correspondante est :

$$E_c^* = \frac{1}{2}I\omega^2$$

I désignant le moment d'inertie par rapport à l'axe Cz. Ajoutant à cette énergie de rotation, l'énergie cinétique de translation $\frac{1}{2}MV^2$, on peut obtenir grâce au théorème de König :

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2}\left(M + \frac{I}{R^2}\right)V^2}.$$

Pour le cylindre, quelle que soit sa hauteur, $E_c = \frac{3}{4}MV^2$; pour la boule $E_c = \frac{7}{10}MV^2$ et pour le cerceau, $E_c = MV^2$.

On constate que toutes ces énergies sont supérieures à celle du point matériel : $E_c = \frac{1}{2}MV^2$.

c) Raisonnons sur le système constitué par le solide en mouvement. Les actions intérieures ne travaillent pas, car la puissance des actions intérieures à un solide est nulle. On doit donc considérer les actions extérieures, à savoir :

- la réaction du plan, dont l'énoncé précise qu'elle ne travaille pas ;
- le poids, qui est une force conservative dont l'énergie potentielle s'écrit $E_p = Mgh$, où h désigne la cote ascendante du centre de masse.

Ici, h est lié à x par la relation géométrique $h = -x\sin\alpha + H$. H désigne une constante éventuelle, liée au choix des origines. On peut adopter $H = 0$ sans incidence sur la suite, puisque l'énergie potentielle est toujours définie à une constante additive près.

Il est ainsi possible de définir une énergie mécanique :

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2}\left(M + \frac{I}{R^2}\right)\dot{x}^2 - Mgx\sin\alpha$$

La conservation de l'énergie mécanique, dans ce système conservatif, aboutit à $\frac{dE}{dt} = 0$, c'est-à-dire :

$$\left(M + \frac{I}{R^2}\right)\ddot{x}\dot{x} - Mg\dot{x}\sin\alpha = 0$$

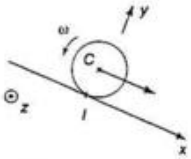


Figure 12

Donc également pour un disque.

Erreur à éviter
Un solide de petite dimension n'est pas un point matériel.

© Lavoisier - La photocopie non autorisée est un délit

Après simplification par $\dot{x}$, l'accélération du centre de masse est une constante :

$$\boxed{\ddot{x} = \frac{M}{\left(M + \frac{I}{R^2}\right)}g\sin\alpha}.$$

d) L'accélération la plus élevée correspond à celle du point matériel : $g\sin\alpha$, puisqu'il n'y a pas dans ce cas de terme associé à l'énergie de rotation. Viennent ensuite les solides par ordre de rapport $\frac{I}{MR^2}$:

- la boule est la plus rapide $\ddot{x} = \frac{5}{7}g\sin\alpha$;
- le cylindre vient ensuite avec $\ddot{x} = \frac{2}{3}g\sin\alpha$;
- le cerceau est le plus lent des solides dans ce démarrage du roulement sans glissement, avec l'accélération $\ddot{x} = \frac{1}{2}g\sin\alpha$. On l'explique aisément par le fait que sa masse est concentrée à distance maximale de l'axe de rotation.

Annales

Pour maîtriser les bases

1. Roulement à billes — D'après Oral Banque PT

Un cylindre de rayon R_1 est en rotation à vitesse angulaire Ω_1 autour de son axe de symétrie Oz, dans le référentiel d'étude R. Un second cylindre coaxial, de rayon R_2 tourne autour du même axe à vitesse Ω_2 (Fig. 13). Des billes de diamètre $d = R_2 - R_1$ sont placées entre ces cylindres ; on ne se préoccupe pas des problèmes d'état de surface, de jeux... en supposant tous ces solides géométriquement parfaits.

On se propose d'étudier la cinématique du mouvement d'une des billes en supposant que ses 2 points I_1 et I_2, qui sont en contact avec des points J_1 et J_2 du cylindre ont, à l'instant considéré, la même vitesse :

$$\vec{V}(I_1) = \vec{V}(J_1) \quad \text{et} \quad \vec{V}(I_2) = \vec{V}(J_2)$$

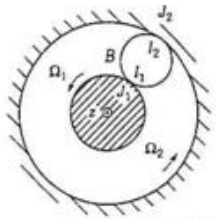


Figure 13

REMARQUE – On parlera ultérieurement de condition de non-glissement en pareil cas.

a) Quelle est la direction du vecteur vitesse instantanée de rotation $\vec{\Omega}$ de la bille dans le référentiel R ?

b) Exprimer, en considérant les vitesses des points I_1et I_2, $\vec{\Omega}$ en fonction des rayons et des vitesses angulaires des deux cylindres.

c) Définir l'axe instantané de rotation Δ d'une bille et préciser le mouvement de tous les points de la bille à l'instant considéré.

d) Envisager des cas particuliers et interpréter les résultats concernant $\vec{\Omega}$ et Δ.

Conseils méthodologiques. Cet exercice relève intégralement de la cinématique : aucune considération de force n'est nécessaire ici. En revanche, une connaissance précise des résultats relatifs à la cinématique du solide est indispensable. **a)** : Définir un référentiel lié à la bille considérée et s'interroger sur le mouvement de ses axes dans R. **b)** : Penser à la relation cinématique dans un solide. **c)** : Il suffit de connaître l'intersection de l'axe Δ avec le plan (xOy) ; **d)** : Où peut se trouver cette intersection ?

a) Soit B un référentiel lié à la bille étudiée, de centre C, ses axes peuvent être (Cx', Cy', Cz'). Il est possible de choisir Cz' toujours parallèle à (Oz), c'est-à-dire que le mouvement de B par rapport à R est une rotation autour d'un axe parallèle à (Oz). À ce stade, on peut affirmer que $\vec{\Omega}(B/R)$ s'écrit $\vec{\Omega} = \Omega\vec{u}_z$.

b) I_1, point de la bille au contact avec un point J_1 du cylindre 1 a même vitesse que lui :

$$\vec{V}(I_1)_{/R} = \vec{V}(J_1)_{/R}.$$

Or $\vec{V}(J_1)_{/R} = \Omega_1\vec{u}_z \wedge \overrightarrow{OJ_1}$: on en déduit en coordonnées polaires (Fig. 14), que :

$$\boxed{\vec{V}(I_1)_{/R} = R_1\Omega_1\vec{u}_\theta}$$

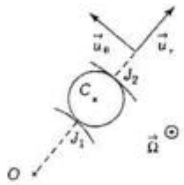


Figure 14

© L'Auteur - La photocopie non autorisée est un délit

De même,

$$\vec{V}(I_2)_{/R} = \vec{V}(J_2)_{/R} = R_2\Omega_2\vec{u}_\theta$$

D'autre part, I_1 et I_2 étant des points du solide lié à B, on peut écrire la relation cinématique :

$$\vec{V}(I_2)_{/R} = \vec{V}(I_1)_{/R} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{I_1I_2}$$

On obtient ainsi un précieux renseignement sur $\vec{\Omega} = \Omega\vec{u}_z$ en soustrayant les vitesses :

$$\vec{V}(I_2)_{/R} - \vec{V}(I_1)_{/R} = \Omega\vec{u}_z \wedge \overrightarrow{I_1I_2} = (R_2\Omega_2 - R_1\Omega_1)\vec{u}_\theta$$

Puisque $\overrightarrow{I_1I_2} = d\vec{u}_r$, on obtient :

$$\boxed{\Omega = \frac{R_2\Omega_2 - R_1\Omega_1}{R_2 - R_1}}.$$

c) La composante $\vec{v}_{//}$ de la vitesse de chaque point d'un solide selon la direction définie par $\vec{\Omega}$ est commune. Or, que l'on considère I_1 ou I_2, on constate immédiatement que ces points n'ont pas de vitesse selon $\vec{u}_z$. On peut en déduire que dans ce mouvement $\vec{v}_{//} = \vec{0}$. Le mouvement de tous les points de la bille est à chaque instant une rotation autour de Δ.

Soit Γ l'intersection de Δ et du plan (xOy) de la figure. Γ est centre instantané de rotation pour les points de la bille dans ce plan : $\vec{V}(M)_{/R} = \Omega\vec{u}_z \wedge \overrightarrow{\Gamma M}$. En considérant notamment I_1 ou I_2, dont la vitesse est dirigée selon $\vec{u}_\theta$, on se convainc que Γ est situé sur l'axe (OC).

Remarque

Les considérations de symétrie conduisent à privilégier l'axe (OC).

Soit r la distance entre O et Γ : $\overrightarrow{O\Gamma} = r\vec{u}_r$.

$$\vec{V}(I_2) = R_2\Omega_2\vec{u}_\theta = \Omega\vec{u}_z \wedge (R_2 - r)\vec{u}_r = (R_2 - r)\Omega\vec{u}_\theta$$

On en déduit que $(R_2 - r)\Omega = R_2\Omega_2$, donc avec les expressions précédentes :

$$\boxed{r = O\Gamma = \frac{R_1R_2(\Omega_2 - \Omega_1)}{R_2\Omega_2 - R_1\Omega_1}}.$$

Remarque

L'existence du point Γ est conditionnée à la non-nullité de Ω, c'est-à-dire $R_2\Omega_2 \neq R_1\Omega_1$.

L'axe instantané de rotation est $\Delta = (\Gamma z)$.

d) Envisageons quelques cas particuliers :

– si Ω_1 est nul, le mouvement de la bille est un roulement à l'extérieur du cylindre, la trajectoire de ses points une épicycloïde. Le centre instantané de rotation est situé en I_1 : $r = R_1$;

– si Ω_2 est nul, on parle d'hypocycloïde, le centre instantané de rotation est situé en I_2 : $r = R_2$;

– si $\Omega_1 = \Omega_2$, alors $\Omega = \Omega_1 = \Omega_2$, l'ensemble formé par la réunion des deux cylindres et des billes constitue un solide. Le centre de rotation Γ est en O : $r = 0$;

– la non-existence de Γ a été évoquée : elle advient lorsque $\boxed{R_2\Omega_2 = R_1\Omega_1}$, la bille a alors un mouvement instantané de translation dans le référentiel R : $\Omega = 0$;

– enfin, on peut chercher à quelle condition le centre instantané de rotation se trouve au centre de la bille : $\Gamma = C$. Il faut ainsi $r = \frac{R_1 + R_2}{2}$. On aboutit alors, à la condition :

$$\boxed{R_2\Omega_2 = -R_1\Omega_1}.$$

Remarque

On exclut les cas où un rayon, R_1 ou R_2, est nul, ainsi que le cas d'égalité $R_1 = R_2$.

En effet, les points I_1 et I_2 ont alors des vitesses opposées dans R, et leur milieu est immobile.

2. Pendule de torsion — D'après Oral Banque PT

Un pendule de torsion est constitué d'une tige de masse m et longueur L, munie de deux masses M sphériques et de rayon R, situées à distance d du milieu O de la tige. Ce solide est suspendu à un fil de torsion vertical d'axe Oz (Fig. 15).

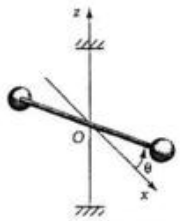


Figure 15

On modélise le système des actions exercées par le fil de torsion par :

- une résultante $\vec{R}$;
- un moment en O correspondant à un couple de rappel élastique : lors d'une torsion d'angle θ du fil autour de l'axe O_z, l'expression du moment est :

$$\vec{\mathcal{M}}_O = -\alpha\theta\vec{u}_z$$

On utilise ce pendule dans une expérience visant à mesurer la constante de gravitation G intervenant dans la loi de Newton de l'attraction universelle. On doit procéder dans un premier temps à un étalonnage du système, c'est-à-dire une détermination de ses caractéristiques, notamment de la constante de torsion α. Dans une seconde phase, on approche des masses connues du pendule et on mesure l'angle de torsion θ_e à l'équilibre pour en déduire G.

a) On envisage des oscillations du pendule dans le plan horizontal (xOy), déterminer l'équation différentielle régissant l'évolution de l'angle $\theta(t)$. On définit les conditions initiales : $\theta(0) = 0$ et $\dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0$. Quel peut être le mode de détermination de la constante α ? On notera I_Δ le moment d'inertie du pendule par rapport à l'axe $\Delta = (Oz)$, sans chercher à l'exprimer.

b) En pratique, le pendule est réalisé de telle sorte que la période des oscillations soit très grande. Quel avantage ce choix peut-il présenter dans le cadre de la mesure effectuée ici ?

c) Du fait de la présence d'un frottement dû au déplacement des masses M dans l'air, un amortissement des oscillations a lieu. On modélise les forces de frottement par $\vec{F} = -f\vec{V}$, appliquée au centre de chacune des masses, $\vec{V}$ désignant leur vitesse. Établir l'équation différentielle en $\theta(t)$ et indiquer la nature de la solution, sachant que l'amortissement est très faible. La prise en compte de ce phénomène peut-elle remettre en question la détermination de α effectuée ci-dessus ?

d) On approche deux masses M' de grande valeur comme indiqué sur la figure 16. Après amortissement des oscillations, la distance entre les centres des masses M et M' est d'. L'angle de torsion par rapport à la position de repos hors présence des masses M' est θ_e. En déduire une expression de G. Commenter.

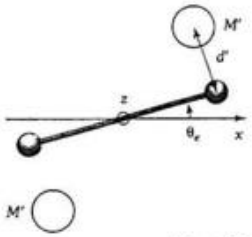


Figure 16

e) Quelle méthode suggérez-vous pour déterminer expérimentalement une très faible valeur de θ_e ?

Conseils méthodologiques. a) : Parmi les lois de la dynamique, choisir celle qui est adaptée au mouvement étudié. **b) :** La force de gravitation est très faible, il faut donc viser une augmentation de la sensibilité. **c) :** Les forces de frottement interviennent comme des forces extérieures, si l'on considère comme système le pendule. **d) :** Il s'agit d'un équilibre.

a) Dans ce mouvement de rotation autour d'un axe fixe, on opte pour une application de la loi du moment cinétique par rapport à l'axe (Oz). La dérivée du moment cinétique par rapport à (Oz) s'écrit :

$$\frac{d\sigma_{Oz}}{dt} = I_\Delta\ddot{\theta}$$

© Lavoisier - La photocopie non autorisée est un délit

Puisque le poids exercé verticalement en O n'a pas de moment par rapport à l'axe, seul intervient le couple de rappel, la loi du moment cinétique par rapport à l'axe donne donc l'équation différentielle :

$$I_\Delta\ddot{\theta} = -\alpha\theta$$

Il s'agit d'une équation d'oscillateur harmonique de pulsation :

$$\boxed{\Omega = \sqrt{\frac{\alpha}{I_\Delta}}}$$

À l'aide des conditions initiales, on peut déterminer les deux constantes d'intégration de la solution générale :

$$\theta(t) = A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t),$$

$$\theta(0) = A = 0,$$

$$\dot{\theta}(0) = B\Omega = \dot{\theta}_0.$$

Finalement :

$$\boxed{\theta(t) = \frac{\dot{\theta}_0}{\Omega}\sin(\Omega t)}$$

⇨ **Remarque**

Un couple est le produit d'une force par une longueur, donc la dimension de α est $[\alpha] = F \cdot L = ML^2T^{-2}$.

b) La sensibilité du pendule est d'autant plus élevée que la constante de torsion α est faible. Pour un moment d'inertie de l'équipage donné, on doit ainsi chercher un fil de torsion de constante de raideur la plus faible possible, sans toutefois amincir excessivement le fil, car il doit supporter le poids du pendule. Le fait de diminuer α a comme conséquence d'allonger la période $T = \frac{2\pi}{\Omega}$ des oscillations.

c) L'intervention des forces de frottement visqueux sur les masses se traduit par un couple de forces supplémentaire. Puisque la vitesse des masses est $\vec{V} = d\dot{\theta}\vec{u}_\theta$, le moment des 2 forces s'écrit :

$$\vec{\mathcal{M}}_0 = 2d\vec{u}_r \wedge (-fd\dot{\theta}\vec{u}_\theta) = -2fd^2\dot{\theta}\vec{u}_z$$

L'équation différentielle apparaît ainsi comme celle d'un oscillateur harmonique amorti : c'est une équation différentielle homogène, du second ordre, à coefficients constants :

$$\boxed{\ddot{\theta} + 2\lambda\Omega\dot{\theta} + \Omega^2\theta = 0}$$

⇨ **Remarque**

L'équation est linéaire car la loi de frottement a été choisie proportionnelle à la vitesse.

Dans le cas présent, l'amortissement est faible, donc les solutions sont pseudo-périodiques, de période très proche de la période propre des oscillations non amorties. De ce fait, la mesure de T permet d'obtenir α avec une bonne précision sans prendre en compte le terme correctif dû au décrément logarithmique.

d) L'équation précédente était homogène, c'est-à-dire sans second membre, car aucun couple de force ne persistait lors de l'arrêt du pendule. La présence des forces de gravitation modifie ce point. À l'équilibre observé en leur présence, on peut écrire la nullité du moment par rapport à l'axe, résultant :

- du couple de force de gravitation : $\vec{\mathcal{M}}'_\Delta = 2d\vec{u}_r \wedge (F\vec{u}_\theta) = 2dF\vec{u}_z$;
- du couple de torsion : $\vec{\mathcal{M}}_\Delta = -\alpha\theta_e\vec{u}_z$.

L'angle de torsion à l'équilibre est donc :

$$\boxed{\theta_e = \frac{2dF}{\alpha}}$$

où $F = G\frac{MM'}{d'^2}$ d'après la loi de Newton.

On aboutit ainsi à l'expression de la constante de gravitation, déduite de simples mesures mécaniques.

$$G = \frac{\alpha\theta_e d'^2}{MM'2d}$$

La force d'attraction gravitationnelle exercée par deux masses de la taille considérée dans une expérience de laboratoire est extrêmement faible. Il est donc délicat de la séparer d'autres forces. Ici, le décalage angulaire est infime.

Remarque

Il s'agit de la détermination de l'une des grandes constantes de la physique.

e) On place en pratique un miroir sur le pendule (Fig. 17), que l'on éclaire avec un pinceau lumineux (un LASER par exemple). Les faibles rotations d'angle θ du pendule provoquent une rotation d'angle 2θ du faisceau émergent. À grande distance, sur un écran ou une barette de capteurs, on obtient l'information sur la mesure de l'angle de déviation.

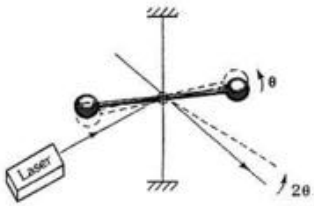


Figure 17

3. Accélération d'une bicyclette — D'après Oral CCP

Une bicyclette est constituée de trois solides :

- le cadre et le cycliste totalisant la masse M ;
- deux roues dont la masse m est concentrée sur le cercle de rayon R.

L'ensemble cycliste et bicyclette dévale sans vitesse initiale et en roue libre (le cycliste n'exerce aucun effort sur les pédales) un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale (Fig. 18).

Figure 18

On modélise alors le système complet de la façon suivante :

Roues/sol : les roues roulent sans glisser, ce qui a comme conséquence que la puissance de l'action du sol sur les roues est nulle (la vitesse du point des roues en contact avec le sol est nulle à chaque instant).

Roues/cadre : la bicyclette est bien entretenue, donc convenablement huilée, on peut considérer les liaisons cadre/roues de puissance totale nulle.

Action du cycliste : On considère que dans toute la descente, le cycliste est immobile dans le référentiel lié au cadre et on souhaite déterminer l'accélération de son mouvement.

a) Relier la vitesse V de translation du cycliste à la vitesse angulaire de rotation des roues.

b) Exprimer l'énergie cinétique de l'ensemble cycliste et bicyclette, en fonction de la vitesse V.

c) Établir l'équation différentielle du mouvement.

d) Comparer l'accélération à celle d'un point matériel de masse M glissant sans frottement sur le plan incliné. Conclure.

Donnée : Le moment d'inertie par rapport à l'axe de révolution des roues est mR^2 si l'on considère la masse concentrée à la périphérie, c'est une approximation que l'on suggère d'adopter.

Conseils méthodologiques. a) : Il s'agit d'une relation entre vitesses, répondre par un argument cinématique. b) et c) : On constate que le système est non dissipatif et qu'un seul degré de liberté demeure, une fois reliées les différentes vitesses. Une résolution par la méthode énergétique semble bien appropriée. d) : On pourra s'inspirer de la comparaison effectuée dans le savoir-faire 3.

© Lavoisier – La photocopie non autorisée est un délit

a) Le cadre et le cycliste ont même vitesse que le centre C de chaque roue. En notant I le point de contact entre la roue et le sol ($\vec{V}(I) = \vec{0}$) ; puis en posant $\vec{\omega} = \omega\vec{u}_z$ le vecteur instantané de rotation de la roue, on peut écrire :

$$\vec{V} + \vec{\omega} \wedge \vec{CI} = \vec{0}$$

Compte tenu des directions définies dans la figure 19, $\vec{V} = V\vec{u}_x$ et $\vec{CI} = -R\vec{u}_y$, donc en grandeurs algébriques :

$$\boxed{V = -R\omega}.$$

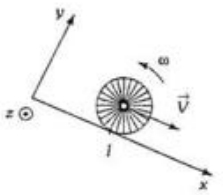


Figure 19

b) L'énergie cinétique est une grandeur extensive.

Pour le cycliste et le cadre, la masse étant M et le mouvement étant réduit à une translation à vitesse V, on peut écrire :

$$E_c = \frac{1}{2}MV^2.$$

Remarque

L'énergie cinétique d'un ensemble est la somme de celle de ses parties. L'ensemble cycliste/cadre peut être assimilé à un solide

Dans son référentiel barycentrique, chaque roue est animée d'un mouvement de rotation autour de l'axe Cz. En notant I le moment d'inertie par rapport à cet axe, l'énergie cinétique correspondante est

$$E_c^*(\text{roue}) = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}mR^2\omega^2 = \frac{1}{2}mV^2$$

Ajoutant à cette énergie de rotation, l'énergie cinétique de translation $\frac{1}{2}mV^2$, on peut obtenir, pour les deux roues :

$$E_c(\text{roues}) = 2mV^2$$

Pour l'ensemble du système constitué du cycliste et sa machine :

$$\boxed{E_c = \left(\frac{M}{2} + 2m\right)V^2}.$$

c) Dans ce problème qui est globalement à une dimension, puisque toutes les grandeurs cinétiques précédentes ont pu être exprimées en fonction de la seule vitesse V, on se propose d'adopter un raisonnement énergétique.

Remarque

Si le cycliste avait exercé un effort en pédalant, cette propriété aurait été modifiée.

Les actions intérieures à chaque solide ne travaillent pas et les actions entre solides, qui se situent au niveau des articulations roues/cadre sont considérées non dissipatives, la puissance des actions intérieures est donc nulle.

On examine ensuite le cas des actions extérieures, à savoir :

- les réactions du sol sur les roues, dont l'énoncé précise qu'elles ne travaillent pas ;
- le poids des divers éléments, qui est une force conservative dont la puissance s'écrit :

Remarque

Le centre de masse des roues est mobile à la même vitesse que le cycliste : $\vec{V}$.

$$\mathcal{P} = M\vec{g}\cdot\vec{V} + 2m\vec{g}\cdot\vec{V} = (M+2m)gx\sin\alpha$$

Dans le référentiel galiléen, la loi de l'énergie cinétique s'écrit $\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}_{int} + \mathcal{P}_{ext}$, c'est-à-dire :

$$2\left(\frac{M}{2} + 2m\right)\dot{x}\ddot{x} = (M+2m)g\dot{x}\sin\alpha$$

Après simplification par $\dot{x}$, l'accélération du centre de masse apparaît constante :

$$\boxed{\ddot{x} = \left(\frac{M+2m}{M+4m}\right)g\sin\alpha}.$$

Remarque

Mouvement uniformément accéléré.

d) L'accélération est voisine de celle d'un point matériel, c'est-à-dire $g\sin\alpha$, pour autant que la masse des roues soit très inférieure à celle du cycliste :

$$m \ll M \Rightarrow \ddot{x} = \left(\frac{M+2m}{M+4m}\right)g\sin\alpha \approx g\sin\alpha$$

En pratique, on se trouve bien dans cette situation. On interprète ce résultat en remarquant :

- d'une part que le roulement sans glissement des roues et le caractère non dissipatif des articulations roues/cadre ont permis de reconstituer une situation sans frottement ;
- d'autre part que le choix de roues de faible masse aboutit à une situation qui minimise le terme associé à l'énergie cinétique de rotation, par rapport à celle de translation.

Ainsi, la puissance des forces de pesanteur se trouve principalement convertie en une augmentation de l'énergie cinétique de translation, comme c'est le cas dans le modèle du point matériel glissant sans frottement.

REMARQUE – Un système composé de plusieurs solides, lorsqu'il est non dissipatif et se ramène à un unique degré de liberté, est avantageusement étudié par des arguments énergétiques. C'est un réflexe qu'il est bon d'acquérir.

Pour approfondir

4. Équilibre en rotation — D'après Oral Mines-Ponts

On considère un pendule constitué d'une tige homogène de masse M et longueur L articulée en son extrémité autour de Ox (Fig. 20). On fait tourner le plan xOy autour de Oz à une vitesse Ω.

a) Déterminer les positions d'équilibre dans le référentiel tournant avec xOy.

b) Peut-on envisager une approche énergétique ?

c) Discuter la stabilité des positions d'équilibre en fonction de Ω et conclure.

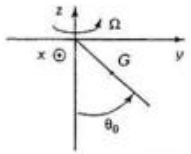


Figure 20

a) Qualitativement, on conçoit qu'une position d'équilibre envisageable est atteinte lorsque la tige est verticale. Il restera à discuter de la stabilité de cette position. Auparavant, on doit envisager le cas où la tige est inclinée d'un angle θ_0 avec la verticale.

Dans le référentiel tournant, l'étude de l'équilibre doit prendre en compte le système des forces d'inertie d'entraînement. Pour un élément à distance ℓ de O, de longueur $d\ell$, la force d'inertie élémentaire s'écrit :

$$d\vec{F}_{ie} = -dm\,\vec{a}_{ie} = dm(\ell\sin\theta_0)\Omega^2\vec{u}_y .$$

Son moment par rapport à Ox est donc : $d\mathcal{M}_{ie} = dm(\ell\sin\theta_0)\Omega^2\ell\cos\theta_0$.

On intègre sur toute la tige, l'élément de masse s'écrivant $dm = \frac{M}{L}d\ell$:

$$\mathcal{M}_{ie} = \int_0^L (\ell\sin\theta_0)\Omega^2\ell\cos\theta_0\frac{M}{L}d\ell = \frac{ML^2}{6}\Omega^2\sin(2\theta_0)$$

D'autre part, le moment du poids par rapport à l'axe Ox s'obtient en considérant que centre de masse est situé au milieu de la tige homogène :

$$\mathcal{M}_P = -Mg\frac{L}{2}\sin\theta_0$$

© Larousier – La photocopie non autorisée est un délit

La somme des moments est nulle, si $\mathcal{M}_{ie} + \mathcal{M}_P = 0$, soit :

$$\boxed{\sin\theta = 0} \quad \text{ou} \quad \boxed{\cos\theta_0 = \frac{3g}{2L\Omega^2}} .$$

⇨ **Remarque**

La nullité du moment total des actions est une condition nécessaire d'équilibre.

Remarquons que cette dernière position angulaire θ_0 n'existe pas toujours.

En posant $\Omega_c = \sqrt{\frac{3g}{2L}}$, on peut en effet conduire la discussion suivante :

- si $\Omega < \Omega_c$, il n'y a pas de solution pour θ_0 ;
- si $\Omega > \Omega_c$, θ_0 ainsi exprimé existe ;
- si enfin $\Omega = \Omega_c$, $\theta_0 = 0$ redonne la solution verticale.

À ce stade de l'étude, on constate que la position verticale n'est pas la seule possible si $\Omega > \Omega_c$.

b) Une approche énergétique est envisageable : il convient de faire apparaître une énergie potentielle de pesanteur et une énergie potentielle associée au système de forces d'inertie.

Pour la pesanteur uniforme, $E_p = Mgz_G + E_0$ que l'on peut écrire :

$$E_p = Mg\frac{L}{2}(1-\cos\theta_0) ,$$

grâce à un choix convenable de la constante additive.

Pour les forces d'inertie, dans cette situation où en O la vitesse est nulle, la puissance des forces d'inertie lors d'une rotation à vitesse angulaire $\dot{\theta}_0$ s'écrit :

$$\mathcal{P}_{ie} = \mathcal{M}_{ie}\dot{\theta}_0 = \frac{ML^2}{6}\Omega^2\sin(2\theta_0)\dot{\theta}_0$$

Il est donc possible de proposer une énergie potentielle $E_{p\,ie}$ telle que $\mathcal{P}_{ie} = -\frac{dE_{p\,ie}}{dt}$:

$$\boxed{E_{p\,ie} = M\frac{L^2}{12}\Omega^2\cos(2\theta_0)} .$$

La recherche des positions d'équilibre revient à celle des extrema d'énergie potentielle totale : $\frac{d(E_p + E_{p\,ie})}{d\theta_0} = 0$, il vient l'équation en θ_0 attendue :

$$-\frac{ML^2}{6}\Omega^2\sin(2\theta_0) + Mg\frac{L}{2}\sin\theta_0 = 0$$

Les solutions sont :

- d'une part $\sin(\theta_0) = 0$, qui redonne la position verticale,
- d'autre part les solutions symétriques $\pm\theta_0$ obtenues précédemment sous réserve qu'elles existent, c'est-à-dire que $\Omega > \Omega_c$.

c) L'étude de la stabilité est aisée en adoptant le critère d'une énergie potentielle minimale (et non plus seulement extrémale) : étudions la dérivée seconde $\frac{d^2(E_p + E_{p\,ie})}{d\theta_0^2}$.

En dérivant l'expression précédente par rapport à l'angle, on obtient :

$$-\frac{ML^2}{3}\Omega^2\cos(2\theta_0) + Mg\frac{L}{2}\cos\theta_0$$

En $\theta_0 = 0$, son signe est celui de $\frac{g}{2} - \frac{L\Omega^2}{3}$. Ainsi, on peut affirmer que si $\Omega > \Omega_c$, la position verticale est instable : seule demeure alors la position correspondant à θ_0 calculé ci-dessus.

En revanche, pour $\Omega < \Omega_c$, la position verticale est stable, elle est d'ailleurs l'unique solution trouvée ci-dessus.

En conclusion, pour chaque valeur de Ω, il existe une seule valeur de l'angle correspondant à une position stable (on confond bien entendu par raison de symétrie les solutions θ_0 et $-\theta_0$ qui correspondent à la même situation dans le référentiel fixe).

5. Couplage rotation-translation — D'après Oral Banque PT

Un pendule est constitué d'une tige de masse m et longueur L, munie de deux masselottes ponctuelles de masse M à distance d réglable du centre de symétrie. Ce solide est suspendu à un ressort vertical (Fig. 21) qui présente :
- une force de rappel élastique lorsque sa longueur varie : on note K la constante de rappel ;
- un couple de rappel élastique $C = -c\theta$ lors d'une torsion d'angle θ.

On envisage d'étudier :
- les oscillations verticales en l'absence de rotation ;
- puis les oscillations horizontales sans mouvement vertical ;
- enfin, le couplage entre ces deux mouvements.

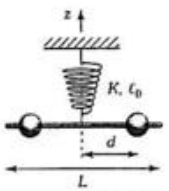


Figure 21

a) Oscillations verticales. Lorsqu'on ne tient pas compte d'un éventuel mouvement de rotation, établir l'équation différentielle régissant les oscillations verticales. Exprimer leur pulsation ω_T.

b) Oscillations horizontales. Déduire de l'indication donnée ci-dessous l'expression du moment d'inertie, par rapport à l'axe Oz du ressort, de l'équipage mobile. Établir l'équation différentielle des oscillations en rotation autour de cet axe. Exprimer leur pulsation ω_R.

Indication : Le moment d'inertie d'une tige par rapport à un axe orthogonal passant par son centre de masse est $I = m\dfrac{L^2}{12}$.

Quelle valeur doit-on choisir pour d, si l'on veut rendre égales les pulsations ω_T et ω_R ? Si l'on néglige la masse m, que devient cette expression ? Commenter la dimension.

On choisira dorénavant cette valeur et on notera ω_0 la pulsation commune.

c) Du fait de la forme hélicoïdale du ressort, les mouvements de translation et de rotation sont couplés. On peut alors modéliser l'action du ressort de la manière suivante : si l'on note z le déplacement vertical depuis la position d'équilibre et θ la torsion,
- la résultante des forces exercées par le ressort s'écrit :
$$\vec{R} = (-Kz + \alpha\theta)\vec{u}_z \ ;$$
- et le moment par rapport à Oz de ces actions est :
$$C = -c\theta + \alpha z \ .$$

Établir le système d'équations différentielles régissant les évolutions de $z(t)$ et $\theta(t)$.

d) Exploiter le fait que ω_T et ω_R définies précédemment sont identiques pour proposer une résolution de ce système. Le terme de couplage dû à α est petit ; faire alors apparaître dans les solutions une modulation lente de l'enveloppe des oscillations.

On précise les conditions initiales : $z(0) = Z_0$, $\dot{z}(0) = 0$, $\theta(0) = 0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$.

e) Exprimer l'énergie cinétique du système et montrer qu'il est possible de définir une énergie potentielle. Que peut-on dire de l'énergie mécanique dans ce mouvement ?

Conseils méthodologiques. Appliquer successivement la loi de la résultante cinétique au **a)** et du moment cinétique par rapport à un axe fixe au **b)**. À la question **c)**, c'est l'application conjointe de ces deux relations fondamentales qui conduit au système d'équations différentielles. Au **d)**, il convient d'utiliser les théorèmes qui permettent de séparer les termes de translation et de rotation dans l'énergie cinétique (théorème de König) et la puissance des actions extérieures. L'expression de l'énergie potentielle s'obtient en cherchant à mettre le travail élémentaire sous la forme d'une différentielle : $\mathcal{P} = -\dfrac{dE_p}{dt}$.

© Lavoisier - La photocopie non autorisée est un délit

a) La résultante des actions extérieures appliquées au centre de masse du solide est :
$$\vec{R} = (m+2M)\vec{g} - K(\ell - \ell_0)\vec{u}_z$$
si l'on note ℓ la longueur du ressort et ℓ_0 sa longueur à vide. On peut en déduire la longueur du ressort à l'équilibre :
$$\boxed{\ell_e = \ell_0 + \frac{(m+2M)g}{K}}.$$
Dorénavant, on raisonne avec une cote z définie par : $\ell = \ell_e - z$.
L'accélération du centre de masse dans le référentiel galiléen d'étude est alors $\vec{a}_G = \ddot{z}\vec{u}_z$. On obtient finalement, après la simplification autorisée par la nouvelle définition de l'origine en ℓ_e, l'équation différentielle régissant les oscillations verticales :

Remarque

$(m+2M)g$ se compense avec $K(\ell_e - \ell_0)$.

$$(m+2M)\ddot{z} = -Kz$$
La pulsation correspondante est : $\boxed{\omega_T = \sqrt{\dfrac{K}{(m+2M)}}}$.

b) Le moment d'inertie du solide est obtenu par addition des différents moments, les masselottes ne contribuant que par Md^2, car on ne prend pas en compte leur taille (masses ponctuelles).

Remarque

$I_{Oz} = \int r^2 dm$ est une grandeur additive.

$$I_{Oz} = m\frac{L^2}{12} + 2Md^2$$
La dérivée du moment cinétique par rapport à l'axe Oz s'écrit $\dfrac{d\sigma_{Oz}}{dt} = I_{Oz}\ddot{\theta}$ (Fig. 22) ; donc la loi du moment cinétique par rapport à l'axe donne l'équation différentielle :

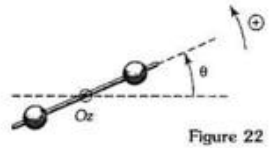


Figure 22

$$I_{Oz}\ddot{\theta} = -c\theta$$
On retrouve une équation d'oscillateur harmonique de pulsation : $\omega_R = \sqrt{\dfrac{c}{I_{Oz}}}$.

Rendre égales les pulsations ω_T et ω_R nécessite de régler d de telle sorte que $m\dfrac{L^2}{12} + 2Md^2 = \dfrac{c}{K}(m+2M)$, soit :
$$d = \sqrt{\frac{1}{2M}\left(\frac{c(m+2M)}{K} - m\frac{L^2}{12}\right)}$$
En négligeant m, on aboutit simplement à :
$$\boxed{d = \sqrt{\frac{c}{K}}}.$$
c et K ont été définis respectivement à partir d'un couple de forces et d'une force. Si l'on note F la dimension d'une force, $[K] = F \cdot L^{-1}$, tandis que $[c] = F \cdot L$.

Remarque

Un angle n'a pas de dimension.

Ainsi, $\dfrac{c}{K}$ a bien la dimension de L^2.

c) La loi de la résultante cinétique donne, en tenant compte du terme dû à θ :
$$(m+2M)\ddot{z} = -Kz + \alpha\theta$$
De même, la loi du moment cinétique par rapport à l'axe conduit à :
$$I_{Oz}\ddot{\theta} = -c\theta + \alpha z$$

Remarque

La disparition du terme de poids est due comme précédemment à un choix judicieux d'origine.

On pose $\gamma = \frac{\alpha}{I_{Oz}}$ et on peut alors écrire $\frac{\alpha}{m+2M} = \frac{\alpha}{K}\omega_0^2 = \frac{\alpha}{K}\frac{c}{I_{Oz}}$, donc :

$$\frac{\alpha}{m+2M} = \gamma\frac{c}{K}.$$

En utilisant la notation ω_0 suggérée dans l'énoncé, le système différentiel prend la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} \ddot{z} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega_0^2 & \gamma\frac{c}{K} \\ \gamma & -\omega_0^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ \theta \end{pmatrix}.$$

d) On déplore l'absence de symétrie dans l'opérateur matriciel, mais il est aisé de la rétablir : il suffit de définir une grandeur homogène à une longueur :

$$R = \sqrt{\frac{c}{K}}$$

et étudier l'évolution de z et $R\theta$ au cours du temps. Ces deux grandeurs étant homogènes, et compte tenu des relations précédentes, on aboutit à un système symétrique :

$$\begin{pmatrix} \ddot{z} \\ R\ddot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega_0^2 & \gamma R \\ \gamma R & -\omega_0^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ R\theta \end{pmatrix}$$

Il est possible de découpler le système d'équations en posant $S = z + R\theta$ et $D = z - R\theta$.

⇨ **Remarque**

On note S et D pour somme et différence.

Les équations différentielles correspondantes sont :

$$\ddot{S} + (\omega_0^2 - R\gamma)S = 0 \quad \text{et} \quad \ddot{D} + (\omega_0^2 + R\gamma)D = 0$$

On définit ainsi deux pulsations de valeurs proches de ω_0, car le terme de couplage $R\gamma$ est faible :

$$\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - R\gamma} \quad \text{et} \quad \omega'' = \sqrt{\omega_0^2 + R\gamma}.$$

Puisque les conditions initiales correspondent à $S(0) = Z_0$, $\dot{S}(0) = 0$ d'une part, $D(0) = Z_0$, $\dot{D}(0) = 0$ d'autre part, on peut résoudre chacune des équations différentielles :

$$S(t) = Z_0\cos(\omega' t) \quad \text{et} \quad D(t) = Z_0\cos(\omega'' t)$$

On remonte alors aux expressions de z et θ par somme et différence :

$$z(t) = \frac{Z_0}{2}[\cos(\omega' t) + \cos(\omega'' t)] \quad \text{et} \quad \theta(t) = \frac{Z_0}{2R}[\cos(\omega' t) - \cos(\omega'' t)].$$

Grâce aux identités trigonométriques :

$$\cos(\omega' t) + \cos(\omega'' t) = 2\cos\left[\frac{(\omega' + \omega'')t}{2}\right]\cos\left[\frac{(\omega' - \omega'')t}{2}\right]$$

et

$$\cos(\omega' t) - \cos(\omega'' t) = -2\sin\left[\frac{(\omega' + \omega'')t}{2}\right]\sin\left[\frac{(\omega' - \omega'')t}{2}\right]$$

on obtient les expressions ci-dessus sous la forme de produits de deux facteurs.

⇨ **Remarque**

$\omega' \approx \omega_0$ et $\omega'' \approx \omega_0$

$|\omega'' - \omega'| \ll \omega_0$

L'un varie lentement, car sa pulsation est faible devant ω_0 : $\Omega = -\frac{(\omega' - \omega'')t}{2}$; l'autre oscille avec la pulsation $\frac{(\omega' + \omega'')}{2} \approx \omega_0$.

Finalement, les solutions sont :

$$z(t) = Z_0\cos(\Omega t)\cos(\omega_0 t) \quad \text{et} \quad \theta(t) = \frac{Z_0}{R}\sin(\Omega t)\sin(\omega_0 t).$$

© Lavoisier – La photocopie non autorisée est un délit

Les graphes correspondants sont représentés à la figure 23 ; on peut les interpréter ainsi :

Peu après l'instant initial, les oscillations verticales ont une forte amplitude ($z(t)$ oscille quasiment avec l'amplitude Z_0) tandis que le mouvement de rotation autour de l'axe Oz est quasi inexistant.

Peu à peu l'amplitude des oscillations verticales diminue, au profit de l'apparition d'oscillations horizontales, en rotation autour de l'axe du ressort.

À un certain moment, les oscillations verticales sont d'amplitude nulle et seules demeurent les oscillations de rotation.

Le phénomène continue alors à évoluer ; mais cette fois ce sont les oscillations de rotation qui laissent peu à peu la place au mouvement vertical.

On retrouve ici un phénomène de battements, rencontré dans de multiples cas d'oscillateurs couplés. Ici, ce sont les deux degrés de liberté d'un même oscillateur qui sont mis en œuvre.

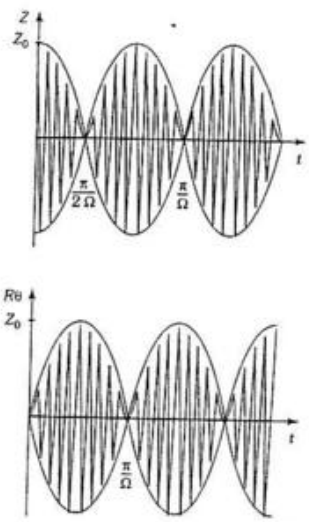


Figure 23

e) L'énergie cinétique est la somme des énergies de translation et de rotation :

$$E_c = \frac{1}{2}(2M + m)\dot{z}^2 + \frac{1}{2}I_{Oz}\dot{\theta}^2$$

La puissance des actions de liaison tige - ressort s'écrit :

$$\mathcal{P} = \vec{R}\cdot\vec{V}_G + \vec{\mathcal{M}}\cdot\vec{\Omega} = (-kz + \alpha\theta)\dot{z} + (-c\theta + \alpha z)\dot{\theta}$$

On reconnaît une différentielle $\mathcal{P} = -\frac{dE_p}{dt}$, où l'énergie potentielle E_p se met sous la forme d'une somme de 3 termes :

- $\frac{1}{2}Kz^2$ correspond à l'énergie potentielle élastique habituelle ;
- $\frac{1}{2}c\theta^2$ à l'énergie potentielle élastique de torsion ;
- $\alpha z\theta$ est un terme traduisant le couplage.

Si l'on fait abstraction du terme dû au poids, pris en compte dans le décalage d'origine, l'énergie mécanique est la somme $E_m = E_c + E_p$, dont on veut montrer qu'elle se conserve.

⇨ **Remarque**

La puissance des forces intérieures est nulle pour un solide.

Plutôt qu'utiliser les solutions obtenues avec des conditions initiales particulières, on peut exploiter les équations différentielles du mouvement ; en effet :

- en multipliant les deux membres de $(m + 2M)\ddot{z} = -Kz + \alpha\theta$ par $\dot{z}$
- et ceux de $I_{Oz}\ddot{\theta} = -c\theta + \alpha z$ par $\dot{\theta}$,

on peut sommer les résultats et obtenir :

$$(m + 2M)\dot{z}\ddot{z} + I_{Oz}\dot{\theta}\ddot{\theta} + Kz\dot{z} + c\theta\dot{\theta} - \alpha(\theta\dot{z} + z\dot{\theta}) = 0$$

Les deux premiers termes du premier membre correspondent à $\frac{dE_c}{dt}$, les trois derniers à $\frac{dE_p}{dt}$. On établit ainsi la conservation de l'énergie mécanique, que l'examen des oscillogrammes avait permis de pressentir.

⇨ **Remarque**

Aucune cause de dissipation par frottement n'est prise en compte dans ce modèle.

En effet, au cours du temps, les oscillateurs correspondant aux deux degrés de liberté de rotation et translation échangent de l'énergie, ce qui explique les battements. En outre, le retour périodique à une amplitude maximale pour l'un ou l'autre oscillateur atteste d'une conservation de l'énergie totale.

6. Effet de marée dans le système Terre-Lune — D'après CCP

On rappelle que le référentiel de Copernic, noté R dont l'origine est le centre de masse O du système solaire et les trois axes x, y, z pointent vers trois étoiles lointaines de la sphère céleste, réalise une excellente approximation d'un référentiel galiléen. On note T le centre de masse de la Terre et R_T le référentiel géocentrique, l'axe Tz étant l'axe des pôles. De même L est le centre de masse de la lune et R_L son référentiel barycentrique (référentiel sélénocentrique). Soleil, Lune et Terre sont supposés sphériques à répartition de masse à symétrie sphérique.

Données numériques :

Constante gravitationnelle : $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$
Masse du Soleil : $m_S = 1{,}99 \cdot 10^{30}\,\text{kg}$
Masse de la Lune : $m_L = 7{,}34 \cdot 10^{22}\,\text{kg}$
Masse de la Terre : $m_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}\,\text{kg}$
Distance Terre Soleil : $D_S = 1{,}50 \cdot 10^{11}\,\text{m}$
Distance moyenne Terre Lune : $D_L = 3{,}84 \cdot 10^{8}\,\text{m}$
Rayon de la Lune : $R_L = 1{,}75 \cdot 10^{6}\,\text{m}$
Rayon de la Terre : $R_T = 6{,}37 \cdot 10^{6}\,\text{m}$

1. Termes de marée

a) Quel est le mouvement du référentiel géocentrique dans le référentiel de Copernic, lorsque la masse de la Lune m_L est très inférieure à celle de la Terre m_T ? R_T est-il galiléen dans ces conditions ?

b) On considère une particule de masse m assimilée à un point matériel se trouvant au point P, au voisinage de la Terre à l'instant t. On appelle $\vec{F}$ la résultante des forces autres que les forces de gravitation et d'inertie s'exerçant sur la particule. On note $\vec{G}_S(P)$, $\vec{G}_L(P)$ et $\vec{G}_T(P)$ les champs gravitationnels créés respectivement en P par le Soleil, la Lune et la Terre. Montrer que l'on peut écrire, dans le référentiel R_T :

$$m\vec{a}(P)_{/T} = \vec{F} + m\vec{G}_T(P) + m\vec{G}_L(P) + m\vec{G}_S(P) - m\vec{a}(T)_{/R}$$

où $\vec{a}(P)_{/T}$ et $\vec{a}(T)_{/R}$ sont respectivement les accélérations des points P et T dans R_T et R.

c) On suppose $\vec{F} = \vec{0}$. M étant un point de la Terre, on montre qu'en faisant un développement limité de $\vec{G}_S(M)$ et de $\vec{G}_L(M)$ au voisinage de T, on peut écrire :

$$\vec{G}_S(M) = \vec{G}_S(T) + [(\overrightarrow{TM} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{G}_S]_T \quad \text{et} \quad \vec{G}_L(M) = \vec{G}_L(T) + [(\overrightarrow{TM} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{G}_L]_T$$

où $(\overrightarrow{TM} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})$ est un opérateur linéaire appliqué à $\vec{G}_S$ ou $\vec{G}_L$, dont le résultat est calculé en T.

– En considérant la Terre comme un système de points discrets A_i, de masse m_i, tels que $\Sigma_i m_i = m_T$, exprimer $\vec{a}(T)_{/R}$ en appliquant le théorème du centre d'inertie à la Terre.

– Montrer alors que l'on peut écrire :

$$m\vec{a}(P)_{/T} = m\vec{G}_T(P) + m\vec{C}_L(P) + m\vec{C}_S(P)$$

où $\vec{C}_L(P) = \vec{G}_L(P) - \vec{G}_L(T)$ représente le champ de marée dû à la Lune en P et $\vec{C}_S(P) = \vec{G}_S(P) - \vec{G}_S(T)$ représente le champ de marée dû au Soleil en P.

d) On suppose l'astre considéré (Soleil ou Lune), de centre A (S ou L) de masse m_A situé à la distance D_A de T telle que $\overrightarrow{TA} = D_A\vec{e}_x$, dans le plan équatorial. On considère les points P_1 et P_2 de la surface de la Terre de coordonnées $(R_T, 0, 0)$ et $(-R_T, 0, 0)$ dans le repère associé au référentiel R_T. En considérant que $\frac{R_T}{D_A} \ll 1$, évaluer le champ de marée $\vec{C}_A(P_1)$ et $\vec{C}_A(P_2)$. Quelle est la direction de ces deux vecteurs ? Faire un schéma.

© Lavoisier - La photocopie non autorisée est un délit

e) Évaluer numériquement le terme $\frac{2Gm_AR_T}{D_A^3}$ dans le cas où l'astre A est le Soleil, puis la Lune. Quel est l'astre qui a l'effet le plus important ?

2. Effets

Dans toute la suite, on ne tient plus compte de l'effet du Soleil ; le système Terre-Lune est donc considéré isolé dans l'espace. On souhaite en revanche décrire deux effets des forces de marée :

– le ralentissement de la rotation propre de la Terre ;

– la lente variation de la distance Terre-Lune.

En généralisant à un point quelconque de la Terre le calcul fait dans les questions précédentes, on peut montrer que l'effet de marée se traduit par l'existence de deux bourrelets diamétralement opposés, alignés avec la ligne des centres de la Lune et de la Terre. En fait, les bourrelets de marée sont entraînés par la rotation de la Terre, plus rapide que le mouvement de la Lune sur son orbite et se trouvent donc décalés par rapport à la direction Terre-Lune d'un angle α (Fig. 24). La Lune exerce alors une action dont le moment sur les bourrelets tend à freiner la rotation de la Terre. La diminution du moment cinétique de rotation propre de la Terre est alors compensée par une augmentation du moment cinétique orbital de la Lune et donc par une augmentation progressive de la distance Terre-Lune. On veut quantifier ici ces effets.

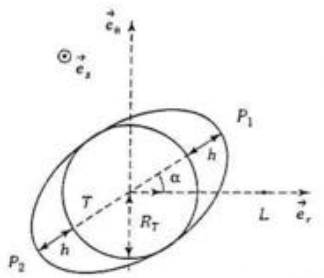


Figure 24

a) On modélise les marées terrestres par deux bourrelets d'eau symétriques de hauteur h formant un ellipsoïde tangent à la sphère terrestre. Calculer la masse m_b de l'ensemble des deux bourrelets.

Données : Volume d'un ellipsoïde de demi-grand axe a et de demi-petit axe b : $V = \frac{4}{3}\pi ab^2$.
Masse volumique de l'eau : $\rho = 1\,000\,\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$.
Hauteur des bourrelets $h = 0.5\,\text{m}$.

b) On admettra que le moment en T des forces exercées par la Lune sur l'ensemble (Terre sphérique + bourrelets) $\vec{M}$ peut s'écrire en première approximation $\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2$ où $\vec{M}_1$ et $\vec{M}_2$ sont les moments en T des forces $\vec{F}_1 = \frac{m_b}{2} \cdot \vec{C}_L(P_1)$ et $\vec{F}_2 = \frac{m_b}{2} \cdot \vec{C}_L(P_2)$ résultant de l'action de la Lune sur les points P_1 et P_2. Exprimer $\vec{M}$ en fonction de m_b et des vecteurs $\vec{G}_L(P_1)$, $\vec{G}_L(P_2)$ et $\overrightarrow{TP_1}$.

c) On admettra qu'en faisant l'hypothèse que $\frac{R}{D_L} \ll 1$, $\vec{M}$ peut s'écrire : $\vec{M} = -\frac{A\sin(2\alpha)}{D_L^3}\vec{e}_z$

où $A = \frac{3}{2}Gm_bm_L(R+h)^2$. On obtient pour $\alpha = 3°$, $\|\vec{M}\| = M = 4{,}5 \cdot 10^{16}\,SI$.

Le moment d'inertie de la Terre par rapport à son axe de rotation étant $J_T = \frac{2}{5}m_TR_T^2$, exprimer la variation $\frac{d\Omega_T}{dt}$ de la vitesse angulaire de rotation de la Terre dans R_T. Calculer sa valeur numérique.

On appelle T la période de rotation propre terrestre. Exprimer $\frac{dT}{dt}$ en fonction de Ω_T et $\frac{d\Omega_T}{dt}$ et calculer sa valeur numérique en secondes par an avec $\Omega_T = 7{,}29 \cdot 10^{-5}\,\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$. Comparer avec la valeur observée qui est de $1.65 \cdot 10^{-5}\,\text{s}$ par an.

d) En considérant l'expression du moment cinétique total $\vec{L}^*(T,L)$ du système Terre-Lune, donner l'expression de $\frac{dD_L}{dt}$ et calculer sa valeur numérique en cm par an. Comparer avec la valeur observée qui est de 3,4 cm par an.
On pourra considérer le moment cinétique propre de la Lune constant.

Conseils méthodologiques : Les questions **1.a)** et **1.b)** font intervenir les notions élémentaires de mécanique du point, en référentiel non galiléen. Dans l'argumentaire, veiller à la signification du mot translation. Au **1.c)**, exploiter la linéarité de l'opérateur appliqué à une somme de termes, il donne la somme des résultats correspondants. La loi de la gravitation est utile en **1.d)**.

Revenir à la définition du moment d'une force à la question **2.b)** et raisonner vectoriellement. Au **2.c)**, il faut appliquer une loi du moment cinétique, préciser dans quel référentiel ? Au **2.d)**, utiliser le théorème de König pour faire apparaître le moment cinétique orbital, le moment cinétique de rotation propre de la Terre et celui de la Lune. Il faudra justifier que ce dernier se conserve et le moment cinétique orbital pourra être exprimé en invoquant le mouvement du mobile fictif affecté de la masse réduite.

1.a) Les axes de R_T sont en translation par rapport à ceux du référentiel de Copernic, mais l'origine de ce repère est animée d'un mouvement elliptique. Pour cette dernière raison, le référentiel R_T n'est pas galiléen. Le rapport des masses indiqué ne change rien en l'occurrence !

b) Il faut tenir compte dans R_T des forces d'inertie : mais puisque R_T est en translation par rapport au référentiel galiléen, seule la force d'inertie d'entraînement est à considérer.

L'accélération d'entraînement est commune à tous les points : c'est l'accélération de l'origine de R_T : $\vec{a}(T)/R$.

Remarque

$\vec{\Omega}(R_T/R) = \vec{0}$, donc $\vec{a}_e = \vec{0}$

On obtient l'expression de la relation fondamentale de la dynamique, en remarquant que la somme des forces appliquées est $\vec{F} + m\vec{G}_T(P) + m\vec{G}_L(P) + m\vec{G}_S(P)$:

$$\boxed{m\vec{a}(P)_{/T} = \vec{F} + m\vec{G}_T(P) + m\vec{G}_L(P) + m\vec{G}_S(P) - m\vec{a}(T)_{/R}}.$$

c) Pour chaque point A_i, on peut écrire :

$$m_i\vec{G}_S(A_i) = m_i\vec{G}_S(T) + m_i[(\overrightarrow{TA_i}\cdot\overrightarrow{\text{grad}})\vec{G}_S]_T$$

donc en sommant sur tous les points, on écrit :

$$\sum_i m_i\vec{G}_S(A_i) = \sum_i m_i\vec{G}_S(T) + \sum_i m_i[(\overrightarrow{TA_i}\cdot\overrightarrow{\text{grad}})\vec{G}_S]_T$$

Pour ce dernier terme, on peut se laisser guider par la linéarité de l'opérateur :

$$\sum_i m_i[(\overrightarrow{TA_i}\cdot\overrightarrow{\text{grad}})\vec{G}_S]_T = \left[\left(\sum_i m_i\overrightarrow{TA_i}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{G}_S\right]_T$$

Remarque

Il s'agit de la linéarité de la dérivation

il ne reste plus qu'à utiliser le fait que T est le barycentre des A_i :

$$\sum_i m_i\overrightarrow{TA_i} = \vec{0}$$

Finalement, $\sum_i m_i\vec{G}_S(A_i) = \sum_i m_i\vec{G}_S(T) = m_T\vec{G}_S(T)$.

De même, $\sum_i m_i\vec{G}_L(A_i) = m_T\vec{G}_L(T)$.

Ainsi, la relation fondamentale de la dynamique pour la Terre s'écrit, après sommation sur tous les points :

$$m_T\vec{a}(T)_{/R} = m_T\vec{G}_S(T) + m_T\vec{G}_L(T).$$

En simplifiant par la masse totale de la Terre m_T, on obtient l'accélération de T dans le référentiel de Copernic :

$$\boxed{\vec{a}(T)_{/R} = \vec{G}_S(T) + \vec{G}_L(T)}.$$

© Lavoisier – La photocopie non autorisée est un délit

On peut alors remplacer l'accélération du centre de la Terre dans la relation générale écrite à la question précédente :

$$m\vec{a}(P)_{/T} = m\vec{G}_T(P) + m\vec{G}_L(P) + m\vec{G}_S(P) - m\vec{G}_L(T) - m\vec{G}_S(T)$$

Remarque

Noter que $\vec{F} = \vec{0}$.

Il est alors essentiel de noter que, dans le référentiel géocentrique, l'influence d'un astre A (Soleil ou Lune) n'est pas dû à son seul champ de gravitation ; mais à la différence :

$$\vec{C}_A(P) = \vec{G}_A(P) - \vec{G}_A(T)$$

Remarque

On doit dorénavant veiller à distinguer le champ de marée du champ de gravitation.

Le point P est donc soumis au champ de gravitation de la Terre et à la somme des champs de marée de la Lune et du Soleil

$$\boxed{m\vec{a}(P)_{/T} = m\vec{G}_T(P) + m\vec{C}_L(P) + m\vec{C}_S(P)}.$$

d) Pour un astre dont la répartition des masses est à symétrie sphérique, on peut obtenir le champ de gravitation par le théorème de Gauss : on montre alors que le champ créé à l'extérieur de l'astre est le même que celui que l'on aurait obtenu pour l'astre ponctuel :

Remarque

Voir pour les détails le chapitre d'électrostatique

$$\vec{G}_A(P) = -\frac{Gm_A}{AP^3}\overrightarrow{AP}$$

On obtient ainsi :

$$\vec{G}_A(P_1) = \frac{Gm_A}{(D_A - R_T)^2}\vec{u}_x \quad \text{et} \quad \vec{G}_A(P_2) = \frac{Gm_A}{(D_A + R_T)^2}\vec{u}_x$$

Utilisant l'expression au centre de la Terre : $\vec{G}_A(T) = \frac{Gm_A}{(D_A)^2}\vec{u}_x$, on obtient l'expression du champ de marée :

$$\vec{C}_A(P_1) = Gm_A\left[\frac{1}{(D_A - R_T)^2} - \frac{1}{D_A^2}\right]\vec{u}_x = \frac{Gm_A}{D_A^2}\left[\frac{1}{(1 - R_T/D_A)^2} - 1\right]\vec{u}_x$$

Finalement, grâce à un développement limité mettant à profit le fait que $R_T \ll D_A$,

Technique de calcul

$$\frac{1}{(1-\varepsilon)^2} \approx 1 + 2\varepsilon$$

$$\boxed{\vec{C}_A(P_1) = \frac{2Gm_A R_T}{D_A^3}\vec{u}_x}.$$

De la même manière, on obtient $\vec{C}_A(P_2) = -\vec{C}_A(P_1)$.

Les deux termes de champ de marée sont colinéaires à l'axe (TA) joignant le centre de la Terre à celui de l'astre perturbateur, mais ils sont de sens contraires (Fig. 25).

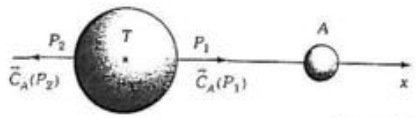


Figure 25

e) Numériquement, pour l'influence de la Lune, l'intensité du terme de marée sur Terre est :

$$\frac{2Gm_L R_T}{D_L^3} = 1{,}1 \cdot 10^{-6}\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$$

en revanche, l'influence du Soleil est décrite par

$$\frac{2Gm_S R_T}{D_S^3} = 5 \cdot 10^{-7}\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Contrairement à ce qu'aurait donné la comparaison des seules forces de gravitation, on peut évaluer le terme de marée dû au Soleil à la moitié de celui de la Lune.

2.a) Le volume total des bourrelets est :

$$V_b = \frac{4}{3}\pi(ab^2 - R_T^3) = \frac{4}{3}\pi((R_T+h)R_T^2 - R_T^3) = \frac{4}{3}\pi R_T^2 h$$

La masse correspondante est ainsi :

$$m_b = \frac{4}{3}\pi R_T^2 h\rho = 8.5 \cdot 10^{16}\ \text{kg}$$

b) Par définition du moment d'une force, $\vec{M}_1 = \overrightarrow{TP_1} \wedge \frac{m_b}{2}(\vec{G}_L(P_1) - \vec{G}_L(T))$ et $\vec{M}_2 = \overrightarrow{TP_2} \wedge \frac{m_b}{2}(\vec{G}_L(P_2) - \vec{G}_L(T))$.

En utilisant la relation vectorielle $\overrightarrow{TP_1} = -\overrightarrow{TP_2}$, on aboutit à une simplification dans l'expression du moment total :

$$\boxed{\vec{M} = \frac{m_b}{2}\overrightarrow{TP_1} \wedge (\vec{G}_L(P_1) - \vec{G}_L(P_2))}.$$

Remarque

$\overline{M}$ est la composante algébrique du moment vectoriel compte tenu du sens $\overline{M} = -M$

c) La loi du moment cinétique dans le référentiel barycentrique R_T, projetée sur l'axe Tz, permet d'écrire :

$$\overline{M} = J_T \frac{d\Omega_T}{dt}$$

Avec les expressions de M et J_T rappelées, on peut déterminer :

$$\frac{d\Omega_T}{dt} = -4.64 \cdot 10^{-22}\ \text{rad} \cdot \text{s}^{-2}$$

Remarque

L'expression de A de l'énoncé est étrange car elle ne s annule pas pour $h = 0$.

En différenciant la relation $T = \frac{2\pi}{\Omega_T}$, on obtient : $\boxed{\frac{dT}{dt} = -\frac{2\pi}{\Omega_T^2}\frac{d\Omega_T}{dt}}$.

Numériquement, la variation est de l'ordre de $5.5 \cdot 10^{-13}\ \text{s}^{-2}$, c'est-à-dire $1.7 \cdot 10^{-5}$ s par année. La valeur est cohérente avec celle mesurée : le modèle considéré est pertinent.

d) Le système Terre-Lune étant considéré isolé dans l'espace, son moment cinétique total $\vec{L}^*(T,L)$ dans son référentiel barycentrique R^* se conserve. Il est composé, d'après le théorème de König, de la somme

- du moment cinétique propre de la Lune $\vec{L}(L/R_L)$, qui est supposé constant ;
- du moment cinétique propre de la Terre $\vec{L}(T/R_T)$;
- du moment cinétique orbital $\overrightarrow{CT} \wedge m_T\vec{v}(T)_{/R^*} + \overrightarrow{CL} \wedge m_L\vec{v}(L)_{/R^*}$.

Le moment cinétique propre de la Terre s'écrit $\vec{L}(T/R_T) = J_T\Omega_T\vec{u}_z$.

Le moment cinétique orbital peut être exprimé à l'aide du mobile fictif.

Remarque

On reprend ici la méthode de résolution du problème à deux corps vue en première année

En notant M le point matériel tel que $\overrightarrow{TL} = \overrightarrow{CM}$ et de masse $\mu = \frac{m_L m_T}{m_L + m_T}$, on peut écrire :

$$\vec{L}_{orb} = \overrightarrow{CT} \wedge m_T\vec{v}(T)_{/R^*} + \overrightarrow{CL} \wedge m_L\vec{v}(L)_{/R^*} = \overrightarrow{CM} \wedge \mu\vec{v}(M)_{/R^*}$$

© Lavoisier - La photocopie non autorisée est un délit

D'autre part, dans le mouvement quasi circulaire du mobile fictif la relation fondamentale de la dynamique s'écrit :

$$\mu\frac{v_M^2}{D_L} = \frac{Gm_T m_L}{D_L^2}$$

Remarque

La variation de D_L est supposée lente.

On peut donc écrire :

$$\boxed{v_M = \sqrt{\frac{Gm_T m_L}{\mu D_L}}}.$$

Remarque

Le mobile fictif subit la force de gravitation exercée par T sur L.

Le moment cinétique orbital est donc $L_{orb} = \mu D_L v_M$, soit :

$$L_{orb} = \sqrt{\mu D_L Gm_T m_L} = \frac{m_T m_L}{\sqrt{m_T + m_L}}\sqrt{D_L G}$$

Il est ainsi possible d'exprimer la composante selon $\vec{u}_z$ du moment cinétique total du système Terre-Lune dans le référentiel barycentrique :

$$L^*(T.L) = L_L + J_T\Omega_T + \frac{m_T m_L}{\sqrt{m_T + m_L}}\sqrt{D_L G}$$

Remarque

Système Terre-Lune isolé.

Puisqu'il y a conservation de ce terme, la dérivée temporelle est nulle :

$$\frac{dL^*(T.L)}{dt} = 0 = 0 + J_T\frac{d\Omega_T}{dt} + \frac{m_T m_L}{\sqrt{m_T + m_L}}\sqrt{G}\frac{1}{2\sqrt{D_L}}\frac{dD_L}{dt}$$

On déduit numériquement la valeur de $\frac{dD_L}{dt}$ de celle de $\frac{d\Omega_T}{dt}$:

$$\boxed{\frac{dD_L}{dt} = 1.2 \cdot 10^{-9}\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}}.$$

Cette variation, qui représente 3,8 centimètres par an, est voisine de celle mesurée. On remarque qu'il s'agit bien d'une augmentation : lorsque la Terre ralentit, la distance Terre-Lune augmente, ce qui permet une conservation du moment cinétique du système.

Actions de contact

Méthodes

Le cours en questions

1 ▬ Contact ponctuel

1.1 Comment définit-on la vitesse de glissement d'un solide sur un autre ?

• Lorsque deux solides sont en contact supposé ponctuel, on doit distinguer plusieurs points au niveau du contact (Fig. 1) :
– le point géométrique de contact I qui n'est lié à aucun solide (c'est le point de l'espace où s'effectue le contact à l'instant considéré) ;
– les points I_1 et I_2 de chacun des solides, qui coïncident avec le point de contact à l'instant considéré.
Il est essentiel de comprendre que les points I_1 et I_2 n'ont *a priori* pas la même vitesse dans le référentiel d'étude R : on distingue donc :

$$\vec{V}_1 = \vec{v}(I_1/R) \quad \text{et} \quad \vec{V}_2 = \vec{v}(I_2/R).$$

La vitesse de glissement se définit ainsi comme

$$\vec{V}_g = \vec{V}_1 - \vec{V}_2 .$$

• La vitesse de glissement est également la vitesse relative, en ce sens que c'est la vitesse de I_1 par rapport au référentiel lié au solide 2.

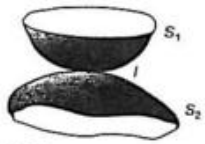


Figure 1

© Lavoisier – La photocopie non autorisée est un délit

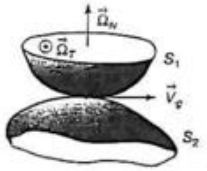


Figure 2

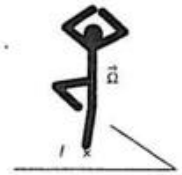


Figure 3

1.2 Comment distingue-t-on les mouvements de glissement, roulement et pivotement ?

• Il s'agit d'une décomposition du mouvement général d'un solide par rapport à un autre. Reprenons les notations précédentes et envisageons de décrire le mouvement d'un point P_1 du solide 1 par rapport au solide 2. On peut utiliser la relation cinématique dans un solide et écrire :

$$\vec{V}(P_1/S_2) = \vec{V}(I_1/S_2) + \vec{\Omega}(S_1/S_2) \wedge \vec{I_1P_1}$$

Puisque I_1 coïncide avec I et compte tenu de la définition de la vitesse de glissement rappelée ci-dessus, on peut écrire :

$$\vec{V}(P_1/S_2) = \vec{V}_g + \vec{\Omega}(S_1/S_2) \wedge \vec{IP_1}$$

• Il reste à décomposer le vecteur $\vec{\Omega}(S_1/S_2)$ en une composante dans le plan tangent au point de contact : $\vec{\Omega}_T$ et une composante normale $\vec{\Omega}_N$. La vitesse de P_1 apparaît comme une somme de 3 termes :

$$\vec{V}(P_1/S_2) = \vec{V}_g + \vec{\Omega}_T \wedge \vec{IP_1} + \vec{\Omega}_N \wedge \vec{IP_1} \quad .$$

• Dans l'expression précédente de la vitesse d'un point P_1 de S_1 par rapport à S_2 :
– le premier terme n'est autre que la vitesse de glissement ;
– le second est associé à un roulement de S_1 sur S_2 à la vitesse angulaire $\vec{\Omega}_T$ (Fig. 2) ;
– le troisième terme décrit un pivotement à la vitesse angulaire $\vec{\Omega}_N$.

1.3 Proposer un exemple de glissement pur, de roulement pur et de pivotement pur.

• Lorsqu'un véhicule freine en bloquant ses roues, le mouvement de chacune d'entre elles par rapport à la route est un glissement pur, pour autant que le véhicule ne pivote pas sur lui même (pas de tête-à-queue).

• Au contraire, les roues d'une bicyclette qui se déplace en ligne droite ont généralement un mouvement de roulement pur.

• Enfin, lorsqu'une patineuse tourne autour d'un axe vertical avec l'extrémité de son patin fixe, elle est animée d'un pivotement d'axe perpendiculaire à la glace (Fig. 3).

2 ▬ Lois du frottement

2.1 Dans le cas d'un glissement de vitesse $\vec{V}_g$, comment se traduisent les lois de Coulomb ?

• On décompose la résultante des actions de contact $\vec{R}$ en une composante tangentielle $\vec{T}$ et une composante normale $\vec{N}$ au plan tangent au

solide (Fig. 4). La composante tangentielle $\vec{T}$ est dirigée en sens contraire de la vitesse de glissement.

• En outre, il y a proportionnalité entre les normes des deux composantes : si l'on note μ_d le coefficient de frottement dynamique, on peut écrire :

$$\|\vec{T}\| = \mu_d \|\vec{N}\| \ .$$

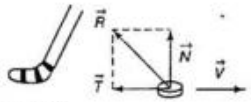


Figure 4

2.2 Quelles sont les lois relatives au non-glissement ?

• Aucun renseignement n'est disponible quant à la direction de la composante tangentielle ; ce n'est qu'après prise en compte des autres actions et connaissance de l'éventuel mouvement qu'on peut déterminer cette composante.

La direction de la résultante n'est pas connue *a priori* : sa détermination est possible une fois déterminés les mouvements et les autres forces appliquées.

• En revanche, on dispose d'une inégalité relative aux normes des composantes : en notant μ_s le coefficient de frottement statique, on peut écrire :

$$\|\vec{T}\| \leqslant \mu_s \|\vec{N}\| \ .$$

En pratique, on confond parfois les deux coefficients de frottement ; on parle alors du coefficient de frottement, sans plus de précision.

2.3 Un solide est en contact ponctuel avec un support fixe dans le référentiel d'étude. Que peut-on dire de la puissance des actions du frottement de glissement ?

• On doit discuter selon la vitesse de glissement qui, dans le référentiel considéré, est la vitesse du point d'application de la force de contact. Ainsi,

– Si la vitesse de glissement est nulle, la puissance du frottement est nulle :

$$\mathcal{P} = \vec{R} \cdot \vec{V}_g = 0$$

– En présence de glissement, $\vec{V}_g$ est dirigée en sens contraire de $\vec{T}$, donc :

$$\mathcal{P} = \vec{T} \cdot \vec{V}_g \leqslant 0$$

Le cas de nullité advient lorsqu'il n'y a pas de frottement (on parle de glissement sans frottement) : $\vec{T} = \vec{0}$.

Attention ! Si le support est mobile dans le référentiel d'étude, ces conclusions ne sont plus valables.

2.4 Deux solides sont en contact ponctuel. Que peut-on dire de la puissance totale des actions de frottement de glissement ?

• En vertu de la loi des actions réciproques, la force exercée par le solide 1 sur le solide 2 : $\vec{R}_{1\to 2}$ est opposée à $\vec{R}_{2\to 1}$ (Fig. 5). Or ces deux forces n'ont pas nécessairement même puissance, puisque la vitesse de glissement peut être non nulle. En effet, en notant I_1 et I_2 les points des solides en contact, et $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ leurs vitesses, $\vec{V}_g = \vec{V}_1 - \vec{V}_2$. Ainsi, on peut écrire :

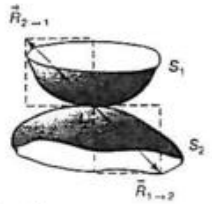


Figure 5

© Ellipses - La photocopie non autorisée est un délit

$$\mathcal{P}_T = \vec{R}_{1\to 2} \cdot \vec{V}_2 + \vec{R}_{2\to 1} \cdot \vec{V}_1 = \vec{R}_{2\to 1} \cdot \vec{V}_g$$

– si la vitesse de glissement est nulle, la puissance totale est nulle car $\vec{V}_1 = \vec{V}_2$ et $\vec{R}_{1\to 2} = -\vec{R}_{2\to 1}$.

– si la vitesse de glissement est non nulle, elle est colinéaire à la composante tangentielle $\vec{T}_{2\to 1}$ et donc :

$$\mathcal{P}_T = \vec{T}_{2\to 1} \cdot \vec{V}_g \ .$$

La puissance totale des actions de contact apparaît négative ou nulle ; mais il est parfaitement possible que la puissance de l'une des forces $\vec{R}_{1\to 2}$ ou $\vec{R}_{2\to 1}$ soit positive.

D'après la loi du frottement, cette puissance est négative (nulle en l'absence de frottement : $\mu_d = 0$).

3 ■ Liaisons

3.1 Combien de degrés de liberté compte un solide libre ?

• Le mouvement d'un solide totalement libre, c'est-à-dire lié d'aucune manière compte 6 degrés de liberté (Fig. 6).

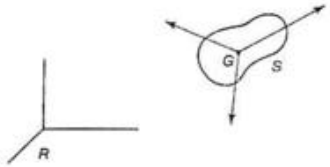


Figure 6

• On peut commodément se représenter ce résultat en distinguant :

– 3 degrés de liberté de translation, décrits par exemple à l'aide des 3 coordonnées spatiales du centre de masse G ;

– 3 degrés de liberté de rotation correspondant au mouvement de trois axes fixes par rapport au solide dans le référentiel d'étude.

Les trois paramètres angulaires permettant de décrire la rotation peuvent être les angles d'Euler présentés dans le cours de S.I.

3.2 Rappeler les relations définissant une liaison rotule. Combien de degrés de liberté reste-t-il à un solide ainsi lié ?

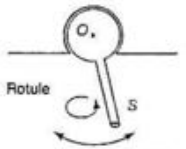


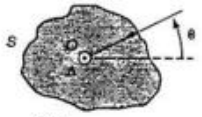
Figure 7

• Un solide lié par une rotule de centre O est libre de se mouvoir en rotation autour de ce point. En revanche, aucun mouvement n'est autorisé pour le point du solide situé en O (Fig. 7).

• Le mouvement ne comporte que 3 degrés de liberté de rotation : les trois degrés de liberté de translation ont disparu. En effet, pour s'en convaincre on peut définir un référentiel lié au solide, d'origine O et comportant trois axes fixes par rapport au solide. Le mouvement ne peut faire varier que la direction des axes du repère : c'est-à-dire que seuls trois paramètres angulaires sont nécessaires pour préciser la position du solide.

3.3 Quelles sont les propriétés d'une liaison pivot (on pourra distinguer un pivot glissant d'un pivot non glissant) ? Combien de degrés de liberté obtient-on dans chacun des cas ?

• Un pivot glissant comprend un axe Δ autour duquel le solide peut librement tourner et éventuellement le long duquel il peut glisser. On peut donc choisir de décrire le mouvement, en présence d'une telle liaison, par un paramètre angulaire associé à la rotation (Fig. 8) et une coordonnée spatiale donnant l'abscisse d'un point le long de l'axe. On aboutit ainsi à un mouvement à deux degrés de liberté : un degré de rotation et un degré de translation.



Pivot

Figure 8

• Dans le cas d'un pivot non glissant, la rotation autour d'un axe fixe est toujours présente ; mais aucune translation n'est permise le long de l'axe. Il ne demeure alors qu'un degré de liberté de rotation.

3.4 Liaisons parfaites. Dans le cas d'une liaison rotule, puis pour chacune des liaisons pivot, préciser les hypothèses aboutissant à la notion de liaison parfaite.

• Considérons un solide lié à un bâti par une liaison rotule de centre O. On se place dans le référentiel lié au bâti pour raisonner. Les actions de liaison comprennent une résultante $\vec{R}$ et un moment en O : $\vec{\mathcal{M}}_O$. Dans le référentiel considéré, la liaison est dite parfaite, ou non dissipative, si quel que soit l'état de mouvement du solide ainsi lié, la puissance des actions de liaison est nulle. Or, cette puissance s'écrit :

$$\mathcal{P}_{liaison} = \vec{R} \cdot \vec{V}_O + \vec{\mathcal{M}}_O \cdot \vec{\Omega}$$

La vitesse de O est nulle, donc le premier terme disparaît ; en revanche, la vitesse de rotation $\vec{\Omega}$ est quelconque. On en déduit que dans une liaison rotule parfaite, le moment en O est nécessairement nul :

$$\vec{\mathcal{M}}_O = \vec{0} \quad .$$

• Le même raisonnement est tenu pour la liaison pivot, mais avec un vecteur de vitesse de rotation $\vec{\Omega}$ contraint de demeurer dirigé selon l'axe Δ. Quant à la vitesse d'un point du solide situé sur l'axe, elle est nulle dans le cas du pivot non glissant, dirigée selon l'axe dans le cas glissant.

Le modèle de liaison parfaite correspond donc à un moment par rapport à Δ des actions de liaison nul :

$$\vec{\mathcal{M}}_O \cdot \vec{u}_\Delta = \vec{\mathcal{M}}_{/\Delta} = 0$$

et une résultante quelconque dans le cas non glissant, ou possédant une composante selon l'axe nulle dans le cas glissant.

© Lavoisier - La photocopie non autorisée est un délit

Les savoir-faire clefs

Conseils méthodologiques

1 ■ Savoir écrire une condition de non-glissement.

Dans les cas représentés sur la figure 9, exprimer la vitesse du point C en fonction de $\vec{V}$.

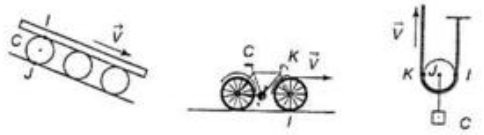


Figure 9

Utiliser la relation cinématique des vitesses dans les solides concernés.

a) Un plot parallélépipédique repose sur des rouleaux cylindriques. Il n'y a aucun glissement aux divers points de contact.

b) La bicyclette roule sans glisser sur le plan.

c) La poulie s'élève lorsque la corde est hissée, il n'y a pas de glissement de la corde sur la poulie. La liaison au centre de la poulie est un pivot.

Erreur à éviter

Ne pas oublier qu'on doit utiliser la relation cinématique au sein d'un solide et que la réunion de deux solides articulés n'est pas un solide.

1.a) Tous les points du plot ont même vitesse $\vec{V}$, notamment *I*. D'autre part, il n'y a pas de glissement en *J* : $\vec{V}_J = \vec{0}$. La relation cinématique donne ainsi, en notant $\vec{\Omega}$ le vecteur de rotation instantanée des cylindres, $\vec{V}_I = \vec{\Omega} \wedge \vec{JI}$ et $\vec{V}_C = \vec{\Omega} \wedge \vec{JC}$. Puisque $\vec{JI} = 2\vec{JC}$,

$$\boxed{\vec{V} = 2\vec{V}_C}.$$

b) Tous les points du cadre ont même vitesse $\vec{V}_C$, donc le centre *J* de la roue avant a cette vitesse. Il n'y a pas de glissement en *I*, $\vec{V}_I = \vec{0}$. On déduit de la relation cinématique appliquée à la roue avant : $\vec{V}_J = \vec{\Omega} \wedge \vec{IJ}$ et $\vec{V}_K = \vec{\Omega} \wedge \vec{IK}$.

On parle de mouvement de rotation instantané, car au fur et à mesure de l'ascension, le point de la corde situé en *I* change.

La relation $\vec{IK} = 2\vec{IJ}$ aboutit à : $\boxed{\vec{V} = 2\vec{V}_C}$.

c) La poulie s'élève en roulant (instantanément) autour du point *I*.

On peut donc écrire : $\vec{V}_I = \vec{0}$, $\vec{V}_J = \vec{V}_C$ et $\vec{V}_K = \vec{V}$. Or, en notant $\vec{\Omega}$ le vecteur de rotation instantanée de la poulie, $\vec{V}_K = \vec{\Omega} \wedge \vec{IK}$ et $\vec{V}_J = \vec{\Omega} \wedge \vec{IJ}$. Finalement,

$$\boxed{\vec{V} = 2\vec{V}_C}.$$

2 ▬ Savoir étudier un équilibre en présence de frottement.

Conseils méthodologiques

On désire poser un objet sur un manège en rotation à vitesse angulaire constante autour de son axe (Fig. 10).

On considère pour simplifier que l'objet est une caisse de dimensions suffisamment petites devant le rayon du manège, pour qu'on puisse considérer le contact s'effectuant en un point P à distance r de l'axe.

Par contre, aucun roulement ni basculement de la caisse n'est envisagé.

a) Dans quel référentiel peut-on ramener cet exercice à l'étude d'un équilibre ? Quelles sont les forces à considérer alors ?

b) En faisant l'hypothèse d'une absence de glissement, exprimer la force de contact exercée par le plateau sur l'objet.

c) En notant μ_s le coefficient de frottement statique, déduire de l'étude ci-dessus l'intervalle de valeurs de r permettant d'obtenir l'équilibre.

d) La condition précédente est-elle nécessaire, est-elle suffisante ?

e) Le non-respect de la condition signifie-t-il nécessairement un déplacement de la caisse par rapport au manège ?

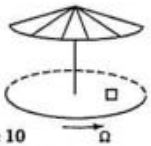


Figure 10

2.a) Faire intervenir les forces d'inertie d'entraînement et justifier que les forces d'inertie de Coriolis n'apparaissent pas.

2.b) Écrire la loi de la résultante cinétique dans le cas de l'équilibre, sans faire d'hypothèse préalable sur la direction de $\vec{T}$.

2.d) Adopter un raisonnement par l'absurde : s'il y a équilibre...

2.a) En se plaçant dans le référentiel lié au plateau du manège, c'est-à-dire tournant à vitesse angulaire Ω autour de l'axe vertical Oz, on se ramène à une situation d'équilibre ; mais il faut ajouter les forces d'inertie au poids et à la réaction du plateau sur l'objet (Fig. 11). Puisqu'il s'agit d'un équilibre, l'accélération de Coriolis est nulle : on ne tient compte que de :

$$\boxed{\vec{F}_{ie} = Mr\Omega^2\vec{u}_r}.$$

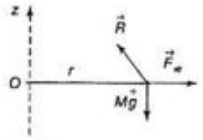


Figure 11

b) Décomposons la réaction du plateau sur l'objet en une composante tangentielle et une composante normale : $\vec{R} = \vec{T} + \vec{N}$, avec $\vec{N} = N\vec{u}_z$.

La somme des forces est nulle à l'équilibre, si bien que :

$$\vec{F}_{ie} + M\vec{g} + \vec{R} = \vec{0}$$

En projection sur l'axe vertical, on obtient : $\|\vec{N}\| = Mg$.

De même, sur l'axe radial, $\|\vec{T}\| = Mr\Omega^2$.

Dans le cas d'un équilibre, $\vec{v}_r = \vec{0}$, il n'y a pas de force d'inertie de Coriolis.

Cette condition n'est que nécessaire !

c) La loi de Coulomb relative au cas de non-glissement stipule que la composante tangentielle ne peut excéder $\mu_s\|\vec{N}\|$, on en déduit une condition nécessaire vérifiée par la distance r à l'axe du manège : $Mr\Omega^2 \leqslant Mg\mu_s$, soit :

$$\boxed{0 \leqslant r \leqslant \frac{g}{\Omega^2}\mu_s}.$$

d) La condition ci-dessus est nécessaire, mais si on lance un objet avec une certaine vitesse de glissement, dans la zone définie par $0 \leqslant r \leqslant \frac{g}{\Omega^2}\mu_s$, on voit cet objet se déplacer pendant quelque temps au moins.

© Lavoisier – La photocopie non autorisée est un délit

e) Si l'on suppose un objet déposé immobile par rapport au manège dans la zone $r > \mu_s\frac{g}{\Omega^2}$, on observe que l'équilibre ne peut perdurer, car la composante tangentielle excède $\mu_s\|\vec{N}\|$.

REMARQUE – On retiendra la prise en compte d'une force d'inertie et le traitement réservé aux composantes tangentielle et normale dans un cas d'équilibre.

Conseils méthodologiques

3 ▬ Savoir étudier un mouvement de glissement.

Des enfants s'élancent sur le bord d'un lac gelé, puis glissent sur la glace (Fig. 12). On les assimile alors à des solides sans rotation et on modélise le contact selon les lois de Coulomb, avec un coefficient de frottement μ.

En sus de la loi de Coulomb, projeter la loi de la résultante cinétique au b). Au e), chercher une situation ne faisant pas intervenir de rotation.

Figure 12

a) La vitesse initiale de la glissade est égale à V_0, doit-on discuter l'hypothèse de glissement ? Comment peut-on prévoir qualitativement l'évolution de la vitesse de glissement ?

b) Appliquer les lois de Coulomb et la loi de la résultante cinétique pour obtenir l'évolution de la vitesse de translation.

c) Que peut-on dire d'un point de vue énergétique pour ce qui concerne l'action de contact sol-chaussures ? En déduire $\frac{dV}{dt}$.

d) La distance d'arrêt et la durée de la glissade dépendent-elles du coefficient de frottement, de la vitesse initiale ?

e) Dans quelle situation le freinage d'un véhicule peut-il s'étudier de la même façon ?

La vitesse présente au début du mouvement est conférée par la prise d'élan, non décrite ici.

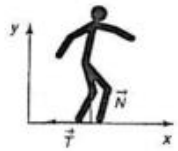


Figure 13

3.a) Les conditions initiales correspondent à $V_0 \neq 0$ où V_0 n'est autre que la vitesse des chaussures par rapport au support, c'est-à-dire la vitesse de glissement.

Il y a donc forcément glissement durant la glissade. Une composante de l'action de contact va nécessairement s'opposer à ce glissement ; puisque le poids est vertical, on en déduit que c'est la force de frottement qui va faire diminuer la vitesse horizontale de l'enfant.

b) L'action de contact du plan sur l'enfant peut être modélisée par (Fig. 13)

$$\vec{R} = \vec{T} + \vec{N} = \overline{T}\vec{u}_x + N\vec{u}_y$$

La valeur algébrique $\overline{T}$ est négative, puisque la composante tangentielle est de sens opposé à la vitesse de glissement.

En outre, d'après les lois de Coulomb $\overline{T} = -\mu N$, où μ est le coefficient de frottement dynamique.

La loi du mouvement qu'il convient d'appliquer dans cette translation d'un solide est la loi de la résultante cinétique : $\vec{R} + M\vec{g} = M\frac{d\vec{V}}{dt}$.

– En projection sur $\vec{u}_y$, on obtient :

$$N = Mg$$

– puis sur $\vec{u}_x$:

$$M\frac{dV}{dt} = \overline{T}$$

En regroupant ces résultats,

$$\frac{dV}{dt} = -\mu g$$

Il est ainsi possible d'intégrer ce mouvement uniformément accéléré ; en tenant compte des conditions initiales, il vient :

$$\boxed{V(t) = V_0 - \mu g t}.$$

c) La puissance de la force de contact n'est pas nulle :

$$\mathcal{P}_{contact} = \overline{T}\, V_g < 0$$

L'énergie cinétique n'est donc pas conservée, elle diminue selon :

$$\frac{dE_c}{dt} = \overline{T}\, V_g = -\mu M g V$$

En présence de frottement et de glissement, il y a dissipation.

On obtient bien l'équation du mouvement en utilisant directement cette loi : $\frac{dE_c}{dt} = MV\frac{dV}{dt} = -\mu M g V$, soit :

$$\boxed{\frac{dV}{dt} = -\mu g}.$$

d) La fin de la glissade correspond à l'annulation de la vitesse de glissement : $V(t_0) = 0$. Puisque $V(t) = V_0 - \mu g t$, la durée s'écrit :

$$t_0 = \frac{V_0}{\mu g}$$

La distance parcourue est donnée par une primitive de la vitesse : $d = V_0 t_0 - \frac{1}{2}\mu g t_0^2$. Finalement,

$$\boxed{d = \frac{1}{2}\frac{V_0^2}{\mu g}}.$$

L'application du théorème de l'énergie cinétique donne ce résultat directement : le travail de la force de frottement durant la phase d'arrêt s'écrit $W = -\mu M g d$, puisque la composante T est constante. La variation de l'énergie cinétique étant égale à ce travail,

$$0 - \frac{1}{2}MV_0^2 = -\mu M g d$$

Si $\overline{T}$ n'est pas constante, $W = \int_{trajet} \overline{T}\,dx$ est moins aisé à utiliser.

Distance et durée du freinage dépendent toutes deux de la vitesse initiale par son carré et sont inversement proportionnelles au coefficient de frottement.

e) Une situation identique est rencontrée dans le cas d'un véhicule bloquant ses roues au freinage. En effet, il peut alors être assimilé à un solide et on retrouve la proportionnalité de la composante tangentielle du frottement au poids. L'étude du mouvement est ainsi régie par les mêmes équations que ci-dessus.

© Livralor - La photocopie non autorisée est un délit

REMARQUE – La résolution énergétique permet ici d'obtenir plus aisément et plus élégamment la distance d'arrêt ; mais la discussion préalable sur la constance de la composante tangentielle est alors indispensable.

Conseils méthodologiques

4 ■ Savoir traduire le caractère idéal d'une liaison.

Deux pièces coulissent l'une par rapport à l'autre grâce à une glissière en queue d'arronde (Fig. 14). On s'intéresse aux degrés de liberté du mouvement relatif de la pièce supérieure par rapport au support inférieur.

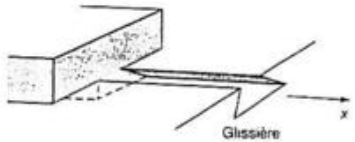


Figure 14

Examiner les équations cinématiques de la liaison : vecteur $\vec{\Omega}$ et vitesse d'un point.

a) Combien de degrés de liberté de translation existe-t-il ?

b) *Idem* pour la rotation.

c) Si la liaison est non dissipative, que peut-on dire de la résultante et du moment des actions de liaison ?

4.a) Si on note Ox un axe dirigé selon la glissière, on peut écrire que la vitesse de tout point de la pièce supérieure a une composante nulle selon y et z dans le référentiel lié au support : $V_y = V_z = 0$.
Il n'y a qu'un degré de liberté de translation.

b) La forme de la glissière interdit toute rotation de la pièce supérieure par rapport à la pièce inférieure, donc à chaque instant $\vec{\Omega} = \vec{0}$. Il n'y a aucun degré de liberté de rotation.

c) Annuler la puissance des actions de liaison du support sur la pièce supérieure mobile, quel que soit l'état de mouvement, donc quelle que soit la vitesse $\vec{V} = V\vec{u}_x$ ne nécessite que la condition $R_x = 0$.

En pratique, ce seront les autres actions appliquées au corps mobile qui fixeront les composantes R_y et R_z, ainsi que le moment.

Le moment en tout point des actions de liaison est quelconque !

REMARQUE – L'étude des propriétés d'une liaison idéale doit donc être menée en deux temps : après l'aspect cinématique consistant à recenser les degrés de liberté, on examine la puissance de la liaison.

Annales

Pour maîtriser les bases

1. Amplitude d'un mouvement — D'après Oral Centrale-Supelec

Dans un cylindre creux, mobile sans frottement autour de son axe fixe, une bille est déposée en une position repérée par l'angle $\Psi(0)$ par rapport à la verticale (Fig. 15). Initialement, aucun des solides n'a de vitesse dans le référentiel galiléen d'étude et $|\Psi(0)| < \frac{\pi}{2}$.

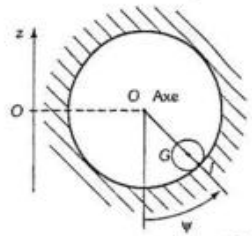


Figure 15

a) Que peut-on dire sur l'énergie mécanique de ce système, au cours du mouvement ?

b) Montrer que dans la suite du mouvement $\Psi(t) \leqslant \Psi(0)$.

Conseils méthodologiques. Dans une analyse très globale on peut envisager de raisonner sur le système complet. Penser alors à prendre en compte la puissance des actions de contact et réfléchir à l'existence d'une énergie potentielle pour les autres actions.

a) Si l'on considère comme système l'ensemble des deux solides, cylindre et bille, on peut s'interroger sur la puissance des actions intérieures et extérieures dans le référentiel d'étude.

Pour les actions extérieures, la liaison pivot au niveau de l'axe est non dissipative et le poids dérive d'une énergie potentielle. Par contre, pour la prise en compte des actions intérieures, limitée ici au contact entre cylindre et bille, une dissipation est possible dans le cas du glissement.

On peut donc affirmer que l'énergie mécanique, composée de la somme de l'énergie cinétique de l'ensemble et de l'énergie potentielle de pesanteur de la bille, ne peut que décroître.

Ainsi, on écrit $E_c(t) + E_p(t) \leqslant E_c(0) + E_p(0)$, avec $E_c(0) = 0$.

En outre, $E_c(t) \geqslant 0$, donc nécessairement : $\boxed{E_p(t) \leqslant E_p(0)}$.

⇨ **Remarque**

Le centre de masse du cylindre étant fixe, la puissance du poids est nulle.

b) En terme d'angle Ψ, on doit exprimer l'altitude du centre de masse de la bille. Si l'on note R et r les rayons respectifs du cylindre et de la bille, on peut écrire

$$z_G = -(R-r)\cos(\Psi)$$

L'inégalité sur l'énergie potentielle se traduit bien par l'expression attendue :

$$\boxed{\Psi(t) \leqslant \Psi(0)}.$$

⇨ **Remarque**

La restriction $|\Psi(0)| < \frac{\pi}{2}$ permet de s'assurer que la bille est bien déposée sur le cylindre et prévient ainsi toute chute libre initiale à l'intérieur du cylindre.

REMARQUE – Dans cet exercice, espérer résoudre totalement le problème en vue de répondre à la question posée est illusoire. La méthode énergétique est extrêmement efficace ! Il faut acquérir le réflexe de l'examiner d'emblée.

© Lavoisier - La photocopie non autorisée est un délit

2. Mouvement à plusieurs phases — D'après CCP

Une boule de bowling est lancée par un joueur sur une piste horizontale (Fig. 16) dans les conditions suivantes :

- la vitesse angulaire de rotation initiale est nulle ;
- la vitesse horizontale du centre de masse est $\vec{V}_0$.

Figure 16

a) Y a-t-il glissement ou non de la boule sur la piste juste après le lancer ?

b) Dans la première phase de mouvement, appliquer les lois de la résultante cinétique et du moment cinétique pour obtenir l'évolution des vitesses de translation et de rotation.

c) Dans cette première phase de mouvement, y a-t-il conservation de l'énergie cinétique de la boule ?

d) Quand prend fin la première phase de mouvement ? Étudier la phase qui suit.

Conseils méthodologiques. b) : Exploiter la loi de Coulomb en sus des lois de la dynamique. **d)** : penser à utiliser l'aspect énergétique.

a) On note $\vec{V} = v\vec{u}_x$ la vitesse du centre de masse de la boule et $\vec{\Omega} = \omega\vec{u}_z$ la vitesse instantanée de rotation par rapport au référentiel d'étude (Fig. 17). On obtient alors la vitesse de glissement par

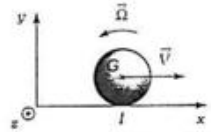


Figure 17

$$\vec{V}_g = \vec{V}_I = \vec{V} + \vec{\Omega} \wedge \vec{GI} = (v + R\omega)\vec{u}_x$$

Les conditions initiales correspondent à $V \neq 0$ et $\omega = 0$, donc la vitesse de glissement initiale est non nulle : c'est

$$\boxed{\vec{V}_g = \vec{V}_0}.$$

Il y a donc forcément glissement dans la première phase de mouvement.

b) L'action de contact du plan sur la bille peut être modélisée par

$$\vec{R} = \vec{T} + \vec{N} = \overline{T}\vec{u}_x + N\vec{u}_y$$

avec $\overline{T}$ valeur algébrique négative puisque la composante tangentielle est de sens opposé à la vitesse de glissement.

En outre, $\overline{T} = -\mu N$ où μ est le coefficient de frottement.

Les lois du mouvement qu'il convient d'appliquer ici sont :

⇨ **Remarque**

μ est plus précisément le coefficient de frottement dynamique ici.

- la loi de la résultante cinétique en projection sur $\vec{u}_y$: $N = Mg$,

puis sur $\vec{u}_x$: $M\frac{dv}{dt} = \overline{T} = -\mu N = -\mu Mg$

- la loi du moment cinétique dans le référentiel barycentrique (le moment d'inertie de la boule homogène est $I = \frac{2}{5}MR^2$) :

$$I\frac{d\omega}{dt} = R\overline{T}$$

Il est ainsi possible d'intégrer séparément les équations relatives aux mouvements de translation et de rotation. En tenant compte des conditions initiales, il vient :

$\boxed{v(t) = V_0 - \mu g t}$ et $\boxed{\omega(t) = -\frac{5\mu g}{2R} t}$.

c) L'énergie cinétique n'est pas conservée, la puissance de la force de contact n'est en effet pas nulle :

$$\mathcal{P} = \frac{dE_c}{dt} = \vec{T} \vec{V}_g < 0$$

d) La fin de la première phase advient lorsque s'annule la vitesse de glissement $V_g = v + R\omega$. Avec les expressions précédentes, la décroissance de cette vitesse est décrite par :

$$V_g(t) = V_0 - \mu g t - \frac{5\mu g}{2} t = V_0 - \frac{7\mu g}{2} t$$

L'instant marquant la fin du glissement est ainsi $t_0 = \frac{2}{7}\frac{V_0}{\mu g}$.

Pour $t \geqslant t_0$, le roulement se fait sans glissement, donc la réaction du sol ne travaille plus : l'énergie cinétique se conserve ! On peut donc affirmer que $v(t)$ et $\omega(t)$ conservent les valeurs qu'elles ont prises à l'instant t_0 :

$\boxed{v(t) = v(t_0) = \frac{5}{7} V_0}$ et $\boxed{\omega(t) = \omega(t_0) = -\frac{5}{7}\frac{V_0}{R}}$.

REMARQUE – Il est intéressant de noter comment on a pu envisager un changement de nature du mouvement : après une phase de glissement, on entre dans un roulement pur par annulation de la vitesse de glissement. Les deux phases de mouvement ont des propriétés totalement différentes, comme l'atteste l'examen énergétique.

⇨ **Remarque**

Le signe négatif obtenu pour la vitesse angulaire est dû au choix des orientations : il est bien naturel de voir la boule se mettre en rotation, sous l'effet de la force de frottement, dans le sens obtenu.

⇨ **Remarque**

La mesure de t_0 permet d'accéder à une bonne estimation de μ.

3. Roulement oscillant — D'après Oral Mines-Ponts

Un cylindre est posé sur un plan horizontal, le contact ponctuel en I est caractérisé par le coefficient de frottement μ. Un ressort horizontal est attaché à une de ses extrémités sur un point fixe P (Fig. 18), l'autre extrémité est liée au cylindre par un pivot idéal de même axe que le cylindre.

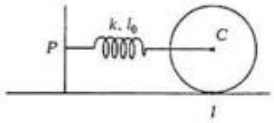


Figure 18

a) Déterminer la longueur du ressort à l'équilibre.

b) Étudier les oscillations de roulement pur du cylindre autour de l'équilibre, dans l'hypothèse du non-glissement en I.

c) Quelle est l'amplitude maximale autorisée pour rester dans les conditions précédentes ?

d) Qualitativement, comment évolue la nature du mouvement au cours du temps, si l'amplitude initiale est supérieure à celle permettant le non-glissement ?

Conseils méthodologiques. a) : Ne pas oublier la condition portant sur la rotation. b), c) et d) : Si l'on parvient à montrer que le mouvement n'a qu'un seul degré de liberté ; on peut envisager d'obtenir l'unique équation nécessaire par raisonnement avec l'énergie. Il reste alors à réfléchir soigneusement sur les contributions des différentes actions intérieures et extérieures.

© Lavoisier – La photocopie non autorisée est un délit

a) Considérant le cylindre comme système, on répertorie les actions extérieures (Fig. 19) :

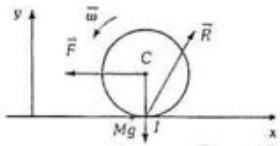


Figure 19

- son poids appliqué en C ;
- l'action de liaison avec le ressort, dont la résultante est la tension du ressort $\vec{F} = -k(\ell - \ell_0)\vec{u}_x$ et de moment nul par rapport à Cz ;
- la réaction du plan en I, comportant *a priori* une composante normale $\vec{N}$ et une composante tangentielle $\vec{T}$.

À l'équilibre, la résultante des actions extérieures est nulle et la somme des moments en tout point est nulle.

Utilisons cette dernière condition au point C. La seule action ayant *a priori* une contribution non nulle au moment en C est la réaction en I. La nullité du moment en C impose donc :

$$\vec{T} = \vec{0}$$

$\vec{R}$ est ainsi verticale.

On en déduit, par l'annulation de la résultante donc de sa projection sur $\vec{u}_x$, que $\vec{F}$ est nécessairement nulle. La longueur du ressort à l'équilibre est donnée par :

$\boxed{\ell = \ell_0}$.

b) Le non-glissement en I permet d'obtenir une équation cinématique liant la vitesse de rotation ω autour de Cz dans le référentiel barycentrique, à la vitesse linéaire du centre de masse $V_C = \dot{x}$:

$$\dot{x} = -R\omega$$

On se ramène ainsi à un mouvement à un seul degré de liberté, qui peut s'étudier à l'aide d'une équation énergétique.

Le non-glissement en I permet d'écrire, dans le référentiel du support, que la puissance de la réaction $\vec{R}$ est nulle. D'autre part, le poids du cylindre ne travaille pas dans ce mouvement horizontal. Il n'y a donc que la force de tension du ressort dont il faille tenir compte d'un point de vue énergétique. On a recours alors à l'énergie potentielle élastique :

$$E_p = \frac{1}{2} k (\ell - \ell_0)^2$$

Exprimons enfin l'énergie cinétique du cylindre, à l'aide du théorème de König : $E_c = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + E_c^*$. Dans le référentiel barycentrique, le mouvement du cylindre est une rotation autour de l'axe Cz, d'énergie cinétique :

$$E_c^* = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{4} M R^2 \omega^2$$

À l'aide de l'équation cinématique de non-glissement, on aboutit à :

$$E_c = \frac{3}{4} M \dot{x}^2$$

Dans ce mouvement conservatif, l'énergie mécanique reste constante, si bien qu'on obtient l'équation différentielle du mouvement par $\frac{d(E_c + E_p)}{dt} = 0$. Finalement, en posant $x = \ell - \ell_0$,

$\boxed{\frac{3}{2} M \ddot{x} + kx = 0}$.

Le mouvement du centre de masse est une oscillation harmonique de pulsation :

$\boxed{\Omega = \sqrt{\frac{2k}{3M}}}$.

Dans le référentiel barycentrique, le mouvement est une oscillation en rotation d'axe Cz, de même pulsation.

⇨ **Remarque**

On choisit l'origine de l'abscisse du centre C, à la position d'équilibre, c est systématiquement un moyen de simplifier les écritures.

c) Pour tester la validité de l'hypothèse de non-glissement en I, il faut comparer les normes des composantes tangentielle et normale de la réaction, à chaque instant. Il est aisé d'obtenir la réaction $\vec{R}$ grâce à la loi de la résultante cinétique :

$$\vec{R} = M\vec{a}_C - \vec{F} - M\vec{g}$$

– la projection de cette relation sur l'axe y donne $\|\vec{N}\| = Mg$;

– la projection sur x conduit à $\vec{T} = (kx + M\ddot{x})\vec{u}_x$, donc à l'aide de l'équation du mouvement :

$$\|\vec{T}\| = \frac{1}{3}kx$$

La norme de la composante tangentielle reste inférieure à $\mu\|\vec{N}\| = \mu Mg$ si l'amplitude du mouvement n'excède pas :

$$\boxed{X_{max} = \frac{3\mu Mg}{k}}.$$

Remarque

La loi du moment cinétique dans le référentiel barycentrique pouvait également fournir $\vec{T}$.

d) Si l'amplitude excède la valeur indiquée, des phases de glissement apparaissent, au cours desquelles la dissipation de l'action de contact en I provoque une diminution d'énergie mécanique. Ainsi, les amplitudes des oscillations diminuent et on se rapproche peu à peu des conditions compatibles avec un non-glissement. Après une phase transitoire assez complexe, le mouvement devient celui décrit ci-dessus. Le modèle non dissipatif proposé, notamment au niveau du pivot, est bien entendu responsable du caractère apparemment perpétuel de ce mouvement.

REMARQUE – Un mouvement qui présente en apparence deux degrés de liberté (translation et rotation ici) peut parfois, après une analyse cinématique, se ramener à un mouvement à un seul degré. Si en outre l'évolution est non dissipative, une résolution énergétique aboutit avec une grande efficacité.

4. Chute d'une cheminée — D'après Mines-Ponts

Une cheminée est modélisée par un cylindre homogène de masse M, de longueur D et de rayon très petit devant D. L'équilibre de la cheminée est rompu, elle amorce une rotation autour de sa base dans le plan vertical (O, x, y). On appelle θ l'angle de la cheminée avec la verticale et on définit la base mobile de coordonnées polaires $\vec{u}$, $\vec{v}$ (Fig. 20).

Les moments d'inertie en G autour de Gz et en O autour de Oz sont respectivement $J_G = \frac{1}{12}MD^2$ et $J_O = \frac{1}{3}MD^2$. La liaison pivot en O est parfaite.

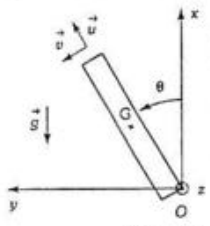


Figure 20

a) Déterminer, par application du théorème du moment cinétique en O, l'équation d'évolution de l'angle θ.

b) Retrouver cette équation par un raisonnement énergétique.

c) Exprimer, en fonction de l'angle θ, les composantes R_u et R_v de la réaction du sol en O. Pour quelle valeur de θ la cheminée décolle-t-elle du sol ?

Conseils méthodologiques. a) et b) : Le mouvement peut être considéré comme une rotation autour d'un point fixe O dans le référentiel lié au sol. L'axe de rotation Oz étant fixe, il suffit de s'intéresser à la composante du moment cinétique et du moment des forces selon cet axe. **c) :** La détermination de la résultante des actions de contact découle aisément de la loi de la résultante cinétique, appliquée au système composé de la tour. Il faut alors exploiter les équations du mouvement, identifiées dans les questions précédentes.

© Lin cartier - La photocopie non autorisée est un délit

a) Avec l'expression du moment d'inertie J_O rappelée, on peut écrire le moment cinétique de la cheminée par rapport à Oz :

$$\sigma_{Oz} = J_O\dot{\theta}$$

Par ailleurs, la réaction du sol n'a pas de moment par rapport à Oz (modèle de pivot parfait), donc seul le poids contribue au moment par rapport à Oz :

$$M_{poids/Oz} = Mg\frac{D}{2}\sin\theta$$

Remarque

Le poids est exercé au centre de masse, donc à distance $D/2$ de O.

La loi du moment cinétique par rapport à l'axe fixe Oz s'écrit :

$$J_O\ddot{\theta} = Mg\frac{D}{2}\sin\theta$$

En remplaçant J_O par sa valeur, il vient :

$$\boxed{\ddot{\theta} = \frac{3}{2}\frac{g}{D}\sin\theta}.$$

b) L'énergie cinétique de la cheminée dans son mouvement de rotation autour de l'axe fixe Oz s'écrit :

$$E_c = \frac{1}{2}J_O\dot{\theta}^2$$

Par ailleurs, la puissance de l'action de liaison est nulle dans le référentiel d'étude (liaison parfaite) et le poids dérive d'une énergie potentielle :

$$E_p = Mgx_G = Mg\frac{D}{2}\cos\theta$$

Remarque

La puissance des actions intérieures est nulle pour un solide.

Puisque l'énergie mécanique se conserve, par dérivation temporelle on écrit :

$$\frac{dE_c}{dt} + \frac{dE_p}{dt} = 0$$

et on obtient ainsi :

$$J_O\dot{\theta}\ddot{\theta} - Mg\frac{D}{2}\sin\theta\dot{\theta} = 0$$

Remarque

On peut également raisonner à l'aide de la loi de la puissance cinétique :

$$\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}_{ext} + \mathcal{P}_{int} = \mathcal{P}_{ext}.$$

Après simplification par $\dot{\theta}$, on retrouve l'équation attendue.

c) L'obtention de $\vec{R}$ peut *a posteriori* être effectuée à partir de la loi de la résultante cinétique :

$$\vec{R} + M\vec{g} = M\vec{a}_G$$

Remarque

C'est une fois le mouvement identifié que l'on sait trouver $\vec{R}$: ce n'est pas une force donnée.

Seule la composante selon $\vec{u}$ est nécessaire pour obtenir l'instant de décollage :

$$R_u - Mg\cos\theta = M\left(-\frac{D}{2}\dot{\theta}^2\right)$$

L'expression de $\dot{\theta}^2$ est connue à partir de la conservation de l'énergie mécanique entre l'instant initial et l'instant courant :

$$\frac{1}{2}J_O\dot{\theta}^2 + Mg\frac{D}{2}\cos\theta = Mg\frac{D}{2}$$

En effet, l'énergie cinétique initiale est négligée.

À partir des deux expressions précédentes, on obtient celle de R_u :

$$\boxed{R_u = Mg\left(\frac{5}{2}\cos\theta - \frac{3}{2}\right)}.$$

Remarque

On vérifie que la valeur initiale $R_u = Mg$, est bien celle attendue (l'opposé du poids).

La tour décolle donc lorsque R_u s'annule, c'est-à-dire pour :

$$\boxed{\cos\theta = \frac{3}{5}}.$$

Numériquement, $\theta = 53°$.

REMARQUE – Cette résolution mêle les aspects énergétiques et les lois de la dynamique : résultante cinétique et moment cinétique. Il faut garder une vue d'ensemble pour n'utiliser, à chaque question, que la ou les relations utiles. Dans un exercice du même type posé à l'oral, le découpage en questions élémentaires n'est pas toujours donné.

5. Pousser ou tirer ? — D'après Mines-Ponts

Un ustensile ménager est constitué d'un bloc solide de masse M qui glisse sur le sol avec un coefficient de frottement μ. Une tige de masse négligeable, articulée idéalement au niveau du bloc, permet de tirer ou pousser celui-ci : l'opérateur exerce une force $\vec{F}$ colinéaire à la tige (Fig. 21).

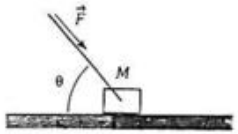


Figure 21

On désire déterminer l'intensité F de la force $\vec{F}$ en fonction de l'angle θ que fait la tige avec l'horizontale, le bloc étant animé d'un mouvement de translation rectiligne et uniforme. On n'envisagera pas de rotation du bloc, donc pas de basculement, seulement une translation.

a) Dans le cas où l'opérateur tire l'ustensile, exprimer F en fonction de θ.

b) Même question dans le cas de la poussée.

c) Tracer le graphe de $F(\theta)$ et identifier l'existence d'un angle limite dans l'une des situations. Commenter.

Conseils méthodologiques. a) et b) : Ignorant tout de l'action de contact entre le sol et le bloc, on doit au départ considérer les composantes tangentielle et normale de sa résultante et raisonner en valeur algébrique pour la composante tangentielle. C'est en combinant les relations obtenues par projection de la loi de la résultante cinétique et par la loi de Coulomb du frottement, que l'on obtient l'expression de F.

a) On suppose ici que l'opérateur tire l'ustensile, le déplacement s'effectuant selon la direction horizontale Ox, dans le sens des x décroissants (Fig. 22). Dans ce mouvement rectiligne uniforme, c'est-à-dire à vitesse constante, l'accélération du centre de masse est nulle : la résultante des forces extérieures l'est donc également :

$$\vec{F} + M\vec{g} + \vec{R} = \vec{0}$$

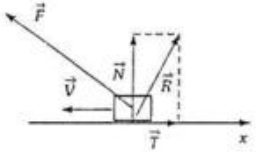


Figure 22

En projection sur l'axe horizontal Ox,

$$F\cos\theta = \overline{T}$$

tandis que sur la verticale Oy,

$$F\sin\theta + \overline{N} = Mg$$

La relation de Coulomb, écrite dans ce cas de glissement, donne $\overline{T} = \mu\overline{N}$.

Remarque

Le sens de déplacement a été pris en compte.

© Ellipses – La photocopie non autorisée est un délit

On peut ainsi résoudre et obtenir l'intensité F :

$$\boxed{F = \frac{\mu Mg}{\mu\sin\theta + \cos\theta}}.$$

b) La même démarche est adoptée dans le cas où l'opérateur pousse : déplacement dans le sens des x croissants (Fig. 23). La nullité de la résultante des forces extérieures s'écrit, en projection sur l'axe horizontal Ox,

$$F\cos\theta + \overline{T} = 0$$

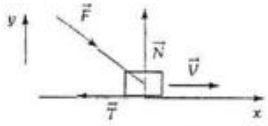


Figure 23

sur la verticale Oy,

$$-F\sin\theta + \overline{N} = Mg$$

La relation de Coulomb tient compte du sens de la composante tangentielle, opposé à celui de la vitesse de glissement :

$$\overline{T} = -\mu\overline{N}.$$

Erreur à éviter

Le signe rend compte du sens de déplacement !

Après résolution,

$$\boxed{F = \frac{\mu Mg}{\cos\theta - \mu\sin\theta}}.$$

c) Les graphes indiquent une différence notable de comportement (Fig. 24) : si la traction est possible quel que soit l'angle, la poussée admet un angle limite θ_{lim} donné par :

$$\boxed{\tan\theta_{lim} = \frac{1}{\mu}}.$$

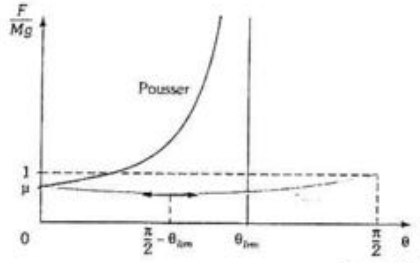


Figure 24

On peut faire aisément l'expérience de l'existence d'un angle limite en poussant un crayon sur une table : lorsque celui-ci est quasi vertical, le mouvement change de nature car l'extrémité posée sur le sol cesse de glisser. Il se produit un arc-boutement, si bien que, quelle que soit l'intensité de la force exercée, le mouvement de glissement régulier ne peut plus avoir lieu.

On remarquera que la traction permet d'avoir une intensité plus faible que la poussée, à même angle : en effet, la composante verticale de la force permet d'alléger le bloc et ainsi de diminuer N donc T.

REMARQUE – Il apparaît dans ce genre d'exercice un souci lié aux orientations des différentes forces, notamment de la composante tangentielle. La méthode qui est proposée ici est également vivement recommandée : elle consiste à raisonner avec des valeurs algébriques, en s'interrogeant sur le signe des composantes utiles.

Remarque

Si le support ou le solide présentent un peu d'élasticité, on peut obtenir dans ce cas une succession de phases brèves de glissement et collage, on parle de régime fixe-glisse.

Pour approfondir

6. Oscillations amorties par frottement solide — D'après CCP

Un cube de masse M peut glisser sur un plan horizontal avec un coefficient de frottement μ. Il est lié à un ressort de longueur à vide ℓ_0 et constante de raideur k, dont une extrémité est fixe (Fig. 25). À l'instant initial, le ressort a une longueur égale à $\ell_0 + A$ (avec A positif) et la masse n'a pas de vitesse.

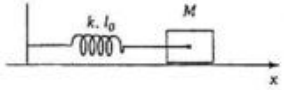


Figure 25

On confondra les coefficients de frottement statique et dynamique et on n'envisagera pas d'autre mouvement pour le cube que la translation.

a) À quelle condition la masse se met-elle en mouvement ?

b) Dans le cas où un mouvement a lieu, le décrire en donnant sa loi horaire $x(t)$ jusqu'au prochain arrêt du cube.

c) À quelle condition le cube se met-il à nouveau en mouvement, dans le sens contraire, après ce premier arrêt ?

d) Lorsque l'amplitude initiale A est suffisamment élevée pour qu'un grand nombre d'oscillations aient lieu, quelle est l'allure de l'enveloppe du graphe de $x(t)$? Que peut-on dire de la variation au cours du temps de l'amplitude des oscillations ?

e) Comparer au résultat obtenu pour un frottement fluide.

Conseils méthodologiques. Dans chaque question, il est indispensable de savoir si l'on cherche à étudier un équilibre, ou si l'on se place dans une phase de mouvement. En effet, la loi du frottement dans chacun des cas prend une forme très différente et le mouvement étudié ici enchaîne les diverses phases. Pour chacun des cas, la maîtrise préalable des savoir-faire est vivement conseillée !

a) Le cube peut rester immobile, sous l'effet :

- de son poids $\vec{Mg}$;
- de la tension $\vec{F}$ du ressort ;
- de l'action de contact $\vec{R}$ de la part du plan,

si la relation :

$$\vec{F} + \vec{Mg} + \vec{R} = \vec{0}$$

est compatible avec la condition $\|\vec{T}\| \leqslant \mu \|\vec{N}\|$, où $\vec{T}$ et $\vec{N}$ sont respectivement les composantes tangentielle et normale de $\vec{R}$.

Remarque

$\vec{F} + \vec{Mg} + \vec{R} = \vec{0}$ est la loi de la résultante cinétique à l'équilibre.

Or la projection verticale de l'égalité donne $\|\vec{N}\| = Mg$, tandis que la projection horizontale s'écrit $\|\vec{T}\| = kA$.

On en déduit la condition rendant l'équilibre impossible, donc correspondant à la mise en mouvement :

$$\boxed{A > \frac{\mu Mg}{k}}.$$

b) Le mouvement a lieu dans le sens des x décroissants (conditions de la figure), donc la vitesse de glissement est dirigée selon $-\vec{u}_x$. La composante tangentielle $\vec{T}$ s'écrit donc $\vec{T} = T\vec{u}_x$ avec T positive.

© Eyrolles – La photocopie non autorisée est un délit

La loi de Coulomb dans le cas du glissement permet ainsi d'écrire :

$$\vec{T} = \mu Mg \vec{u}_x$$

La loi du mouvement en projection sur l'axe horizontal aboutit par conséquent à l'expression :

$$M\ddot{x} = -kx + \mu Mg$$

où l'origine choisie pour l'abscisse x correspond à un ressort non étiré. Cette équation différentielle admet pour solution, en posant $\Omega = \sqrt{\frac{k}{M}}$.

$$x(t) = \alpha\cos(\Omega t) + \beta\sin(\Omega t) + \frac{\mu Mg}{k}$$

Les conditions initiales correspondent à $x(0) = A$ et $\dot{x}(0) = 0$, soit $\beta = 0$ et $\alpha = A - \frac{\mu Mg}{k}$.

Remarque

On peut poser $u = x - \frac{\mu Mg}{k}$ pour se ramener à $\ddot{u} + \Omega^2 u = 0$.

Ainsi, la loi horaire de la première phase de mouvement s'écrit :

$$x(t) = \left(A - \frac{\mu Mg}{k}\right)\cos(\Omega t) + \frac{\mu Mg}{k}$$

La durée de cette phase, jusqu'à la première annulation de $\dot{x}$, est $\Delta T = \frac{\pi}{\Omega}$, c'est-à-dire une demi-période de l'oscillation de pulsation Ω. La valeur X_1 de l'abscisse, après cette première phase, est donc :

$$\boxed{X_1 = 2\frac{\mu Mg}{k} - A}.$$

c) La mise en mouvement a été envisagée au a) : la situation présente est de même nature et en appliquant le raisonnement précédent, on aboutit à la conclusion suivante : il y a mise en mouvement à partir d'une abscisse X, si $|X| > \frac{\mu Mg}{k}$.

On en conclut qu'il existe une zone comprise entre les abscisses $\pm\frac{\mu Mg}{k}$ où le mobile ne repart pas s'il s'arrête.

Plusieurs cas peuvent être distingués :

- si $\frac{\mu Mg}{k} < A \leqslant 2\frac{\mu Mg}{k}$, alors $0 \leqslant X_1 < \frac{\mu Mg}{k}$ et le mobile est arrêté à droite de l'origine, dans la zone d'où il ne peut repartir ;
- si $2\frac{\mu Mg}{k} < A \leqslant 3\frac{\mu Mg}{k}$, alors $-\frac{\mu Mg}{k} \leqslant X_1 < 0$: le mobile s'arrête à gauche de l'origine mais ne peut repartir ;
- enfin, si $A > 3\frac{\mu Mg}{k}$, le premier arrêt a lieu à une distance de l'origine suffisante pour qu'une nouvelle phase s'amorce, avec un déplacement dans le sens des x croissants.

d) Le mouvement est composé d'une succession de phases au cours desquelles :

- le mouvement est sinusoïdal de durée égale à une demi-période d'oscillation

$$\boxed{\Delta T = \frac{\pi\sqrt{M}}{\sqrt{k}}} ;$$

- le sens de déplacement s'inverse d'une phase à l'autre ;
- la valeur absolue de l'amplitude diminue de $2\frac{\mu Mg}{k}$, c'est-à-dire une diminution constante.

Le fait de constater une alternance des signes des abscisses d'arrêt, avec une décroissance régulière pendant des durées elles-aussi constantes, permet d'obtenir deux enveloppes affines (Fig. 26).

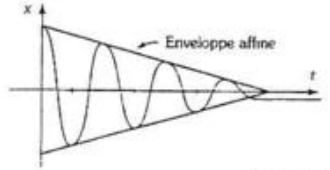


Figure 26

La valeur absolue de la pente des ces deux droites peut être obtenue simplement en comparant deux abscisses d'arrêt successives de même signe, par exemple $X_0 = A$, X_2, X_4...

Ces valeurs forment une suite arithmétique de raison $-4\frac{\mu Mg}{k}$, les instants correspondants croissant avec la raison $2\Delta T = 2\frac{\pi}{\Omega}$.

La pente est ainsi :

$$\boxed{\frac{\Delta X_{2p}}{\Delta t} = -2\frac{\mu g\sqrt{M}}{\pi\sqrt{k}}}.$$

Pour la succession des abscisses d'arrêt négatives, la pente est opposée.

Remarque

Le mouvement cesse lorsque l'abscisse d'arrêt vérifie $|X| < \frac{\mu Mg}{k}$, en général, ce n'est donc pas pour une abscisse nulle.

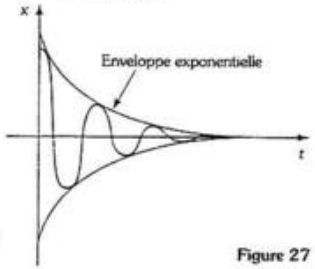


Figure 27

e) On rappelle que l'existence d'un frottement fluide conduit à une enveloppe décroissant exponentiellement (Fig. 27).

Ainsi, on obtient un critère simple pour distinguer un amortissement par frottement fluide d'un amortissement par frottement solide : il suffit de regarder l'allure de l'enveloppe.

REMARQUE – L'apport méthodologique de cet exercice réside dans le traitement de phases successives, pour lesquelles l'interrogation sur la nature du mouvement est nécessaire. Les savoir-faire étudiés précédemment suffisent, encore faut-il bien les maîtriser !

Remarque

Il existe un décrément logarithmique. L'abscisse d'arrêt est cette fois nulle

7. Démarrage d'un véhicule — D'après CCP

On étudie le démarrage d'un véhicule en ligne droite, dans le référentiel terrestre R considéré galiléen. La modélisation du véhicule est sommaire (Fig. 28) :

– le système S_1, de masse m_1 constitué par l'essieu de longueur L et les deux roues avant. On note J_1 son moment d'inertie par rapport à l'axe G_1y où G_1 est le centre de masse de S_1. Les roues sont assimilées à deux disques de rayon a et de centres O_1 et O_1'.

On appelle R_1^* le référentiel du centre de masse de S_1 ; les roues sont animées, dans R_1^*, d'un mouvement de rotation autour de G_1y à la vitesse angulaire ω ;

– le système S_2 constitué par l'essieu et les deux roues arrière. On utilise l'indice 2 pour toutes les propriétés correspondant à ce système : m_2, J_2, G_2, R_2^* ... ;

– le système S de masse M est constitué du reste de la voiture. On néglige les mouvements de S autres que la translation : on ne prend pas en compte les déformations de la suspension par exemple. Le centre de masse G de l'ensemble du véhicule se trouve à une hauteur h du sol, une distance l_1 de G_1 et l_2 de G_2 suivant Ox, comme indiqué sur la figure.

Les roues avant sont motrices et donc soumises pendant la phase d'accélération à un couple de forces, dont le moment résultant en G_1 est assimilable à $\vec{\Gamma} = \Gamma\vec{e}_y$ avec $\Gamma > 0$.

La résultante des actions de contact du sol sur chaque roue de S_1 est représentée par : $\vec{F}_1 = T_1\vec{e}_x + N_1\vec{e}_z$, elle s'exerce en I_1 et I_1'. Il en va de même pour l'action du sol sur S_2, en substituant l'indice 2 à l'indice 1 dans les expressions.

Le coefficient de frottement de glissement, noté f_0, entre une roue et le sol est identique pour les quatre roues.

© Lavoisier – La photocopie non autorisée est un délit

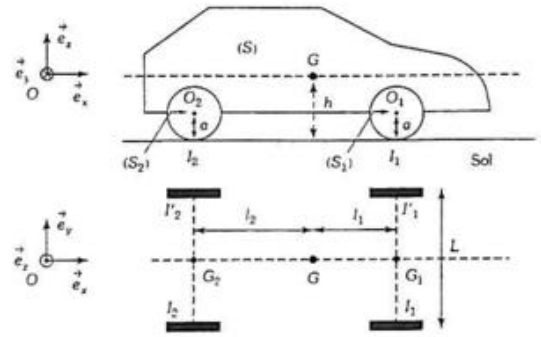


Figure 28

On considère en outre que les forces de frottement de l'air sur le véhicule sont équivalentes à une force unique $\vec{F}_{air}$ appliquée en G avec : $\vec{F}_{air} = -\frac{\rho c_x v^2 S}{2}\vec{e}_x$ lorsque la voiture se déplace d'un mouvement de translation rectiligne suivant l'axe Ox. ρ est la masse volumique de l'air : $\rho = 1{,}23\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$, c_x est le coefficient de traînée qui dépend du profil de la voiture, avec $c_x = 0{,}3$ et S est la section de maître couple, plus grande surface transversale de la voiture : $S = 1{,}93\ \text{m}^2$.

Numériquement :

$l_1 = 1{,}3\ \text{m}$; $l_2 = 1{,}7\ \text{m}$; $h = 0{,}8\ \text{m}$; $a = 0{,}3\ \text{m}$; $M = 1\,370\ \text{kg}$; $g = 9{,}81\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

a) Écrire le théorème du centre d'inertie dans R pour la voiture. En déduire deux relations notées (1) et (2).

b) Écrire le théorème du moment cinétique en G_1 pour S_1 dans R_1^* ; puis en G_2 pour S_2 dans R_2^*. En déduire les relations (3) et (4).

c) Écrire la relation (5) de non-glissement des roues liant la vitesse linéaire $v(t) = \dot{x}(t)$ du centre de masse G de la voiture et la vitesse angulaire ω des roues. Donner alors l'équation différentielle relative à $x(t)$.

d) On ne fait aucune hypothèse préalable quant au mouvement des roues et on considère pour la suite que la masse de S_1 et celle de S_2 sont négligeables devant celle de S, ce qui revient à poser $m_1 = m_2 = 0$ et $J_1 = J_2 = 0$ dans les relations (1) à (5). Que deviennent ces relations ?

e) Constatant qu'il manque une équation pour déterminer les composantes des actions de contact, on écrit le théorème du moment cinétique en G pour S dans R^* ; la relation obtenue est notée (6).

Remarque

On utilise ici l'approximation négligeant les masses des roues

f) En déduire T_1, T_2, N_1 et N_2. Comparer N_1 et N_2, préciser le sens des composantes tangentielles.

g) Déterminer la valeur maximale Γ_{max} de Γ qui assure un roulement sans glissement des roues de la voiture. Comment varie Γ_{max} en fonction de l_2, de h et de f_0 ? Quel est le sens physique de ces dépendances ?

Application numérique pour $f_0 = 0{,}7$ (pneus en bon état et route sèche), pour $f_0 = 0{,}4$ (route mouillée) et enfin pour $f_0 = 0{,}1$ (route verglacée).

h) On considère que Γ_{max} n'est jamais atteint en raison d'une puissance moteur insuffisante. Déterminer l'expression de la vitesse limite v_{lim} atteinte par la voiture, pour $\Gamma = 300\ \text{N}\cdot\text{m}$.

Conseils méthodologiques. Dans cet exercice, on doit faire feu de tout bois : c'est-à-dire utiliser la loi de la résultante cinétique et la loi du moment cinétique, conjointement pour plusieurs systèmes. Dans chaque cas, réfléchir au système considéré et au référentiel par rapport auquel le mouvement est étudié. Ce n'est qu'après les différentes mises en équation effectuées que l'on pourra résoudre : au f), puis au g). L'emploi de valeurs littérales algébriques est indispensable, car il peut être difficile de deviner quelles composantes sont nulles, positives ou négatives. Si nécessaire, revoir avant d'aborder l'exercice l'écriture des lois générales de la mécanique du solide, au chapitre précédent.

a) Le théorème du centre de masse s'écrit :

$$(M+m_1+m_2)\vec{a}_G = (M+m_1+m_2)\vec{g} + 2(\vec{F}_1+\vec{F}_2) + \vec{F}_{air}$$

Sur l'axe vertical, on obtient :

$$(M+m_1+m_2)g = 2N_1 + 2N_2 \quad (1)$$

tandis que sur l'axe horizontal,

$$(M+m_1+m_2)\ddot{x} = 2T_1 + 2T_2 - \frac{1}{2}\rho c_x \dot{x}^2 S \quad (2)$$

b) Le théorème du moment cinétique en G_1 pour S_1 dans R_1' fait intervenir G et les actions de contact en I_1 et I_1'. On peut donc écrire, en projection sur G_1y,

$$J_1\dot{\omega} = \Gamma - 2aT_1 \quad (3)$$

Il en va de même pour le train arrière, mais sans couple moteur :

$$J_2\omega = -2aT_2 \quad (4)$$

c) Le non-glissement des roues sur le sol se traduit par une relation de cinématique : $\vec{V}(O_1) = \vec{V}(I_1) + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{I_1O_1}$, avec $\vec{V}(I_1) = \vec{0}$.

Sur chacun des essieux, cette relation donne :

$$\boxed{\dot{x} = a\omega} \quad (5)$$

On peut ainsi reprendre la relation (2) et y substituer T_1 et T_2 déduits de (3) et (4). En remplaçant ω par $\frac{\dot{x}}{a}$, il vient :

$$\left(M+m_1+m_2+\frac{J_1}{a^2}+\frac{J_2}{a^2}\right)\ddot{x} = \frac{\Gamma}{a} - \frac{1}{2}\rho c_x \dot{x}^2 S$$

d) La simplification demandée conduit à :

$$\begin{cases} Mg = 2N_1 + 2N_2 \quad (1') \\ M\ddot{x} = 2T_1 + 2T_2 - \frac{1}{2}\rho c_x \dot{x}^2 S \quad (2') \\ \Gamma = 2aT_1 \quad (3') \\ T_2 = 0 \quad (4') \end{cases}$$

e) Le moment cinétique du châssis en G reste nul dans ce mouvement de translation, donc on peut écrire que le moment en G des actions extérieures subies par S est nul. Or les actions extérieures comprennent, outre le poids et la force de frottement dans l'air, les actions de contact au niveau des essieux. Il faut bien entendu tenir compte du couple Γ, mais affecté d'un signe négatif.

Les résultantes des actions de liaison en G_1 et G_2 peuvent être assimilées aux actions de contact du sol sur les roues, car le poids de celles-ci est négligé, ainsi que leur inertie (ainsi, la somme des forces sur une roue est nulle).

Remarque

Les composantes T_1, T_2, N_1 et N_2 sont algébriques ici.

Remarque

Du fait de la loi des actions réciproques, le moment de l'action du train avant sur S est opposé à celui exercé par S sur S_1.

© Ulmer - La photocopie non autorisée est un délit

Finalement,

$$-\Gamma - 2hT_1 - 2hT_2 - 2l_1N_1 + 2l_2N_2 = 0$$

et par suite :

$$N_2l_2 - N_1l_1 = \frac{\Gamma}{2} + h(T_1+T_2) \quad (6)$$

f) T_2 est nul et $T_1 = \frac{\Gamma}{2a}$ d'après les équations simplifiées. En utilisant l'équation de la question précédente et (1'), on obtient :

$$\boxed{N_1 = \frac{-\Gamma}{2(l_1+l_2)} - \frac{\Gamma h}{2a(l_1+l_2)} + \frac{Mgl_2}{2(l_1+l_2)}} \quad \text{et} \quad \boxed{N_2 = \frac{\Gamma}{2(l_1+l_2)} + \frac{\Gamma h}{2a(l_1+l_2)} + \frac{Mgl_1}{2(l_1+l_2)}}.$$

Les composantes normales sont différentes pour deux raisons :

– d'une part, le centre de masse n'est pas à mi-chemin des roues, si bien que même à l'arrêt les composantes verticales exercées par le sol sur les roues seraient différentes ;

– d'autre part, lors de la phase d'accélération, les composantes tangentielles sont exercées au niveau du sol ce qui tendrait à faire basculer la voiture (une moto peut se cabrer au démarrage). La composante normale est donc diminuée sur les roues avant d'un terme proportionnel à Γ, tandis qu'elle est accrue sur les roues arrière.

La composante tangentielle sur les roues arrière est nulle dans ce modèle où l'on néglige l'inertie des roues. Seules les roues avant subissent donc une action de contact, avec une composante tangentielle dirigée vers l'avant. Dans une phase de freinage, c'est vers l'arrière que l'on trouverait la composante.

g) Les roues arrière ne peuvent glisser puisque $\|T_2\| = 0$, en revanche, il est possible de déterminer Γ_{max} afin d'assurer le non-glissement des roues avant. La loi du frottement écrite dans le cas du non-glissement nécessite en effet

$$\|T_1\| \leqslant f_0\|N_1\|$$

Les expressions précédentes permettent d'écrire :

$$\frac{\Gamma}{2af_0} \leqslant -\frac{\Gamma}{2(l_1+l_2)} - \frac{\Gamma h}{2a(l_1+l_2)} + \frac{Mgl_2}{2(l_1+l_2)}$$

Après mise en facteur de Γ dans le premier membre de l'équation, on aboutit bien à une condition de la forme $\Gamma \leqslant \Gamma_{max}$, avec

$$\boxed{\Gamma_{max} = \frac{Mgl_2}{1 + \frac{h}{a} + \frac{l_1+l_2}{af_0}}}.$$

La valeur ainsi obtenue permet d'interpréter l'influence des différents paramètres :

– le couple maximal est fonction croissante du coefficient de frottement f_0. En effet, la meilleure adhérence obtenue avec des pneumatiques de bonne qualité sur une route sèche autorise une accélération plus élevée au démarrage ;

– le couple maximum est en revanche fonction décroissante de la hauteur h, c'est ici l'effet déjà signalé d'une tendance au basculement qui permet l'interprétation. Allégeant les roues avant, l'effet des composantes tangentielles dirigées vers l'avant diminue la composante normale. On a déjà mentionné l'exemple encore plus radical du cabrage d'un véhicule, correspondant à une annulation de la composante normale ;

– enfin, de même qu'une fonction de la forme $\frac{x}{ax+b}$ est croissante avec x, si b est positif, le couple maximal croît avec l_2. En effet, puisque ce sont les roues avant qui peuvent glisser, il est favorable de placer le centre de masse vers l'avant du véhicule. Ainsi, la composante normale s'en trouve augmentée et permet une composante tangentielle de valeur plus élevée.

Numériquement, sur route sèche et avec des pneumatiques en bon état, le couple maximal est 1 270 N · m ; il descend à 795 N · m, puis 220 N · m lorsque la route devient humide puis verglacée. Cette décroissance est très sensible.

b) L'équation (2'), dans le cas d'un mouvement uniforme ($\ddot{x} = 0$) et dans l'approximation de l'inertie des roues négligée, devient :

$$0 = 2\frac{\Gamma}{2a} - \frac{1}{2}\rho c_x \dot{x}^2 S$$

La vitesse $V = \dot{x}$ correspondante s'écrit : $\boxed{V = \sqrt{\dfrac{2\Gamma}{a\rho c_x S}}}$.

Numériquement, cette vitesse est égale à $53\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ soit $191\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1}$, valeur scientifiquement acceptable, mais déraisonnable sur la route !

REMARQUE – Ce problème de longue haleine met en œuvre l'intégralité des chapitres de mécanique. On peut remarquer qu'il suffit de raisonner sur chaque système bien identifié, pour aboutir à un système d'équations permettant la résolution.

8. Soulever ou retenir — D'après ENS

En montagne, un sauveteur retient son compagnon alpiniste qui a dévissé, avec une technique très fruste (Fig. 29). La corde passe par-dessus le rocher arrondi fixe, l'angle dont elle tourne est $\frac{\pi}{2}$. On notera μ le coefficient de frottement en confondant les coefficients statique et dynamique et on pourra négliger la masse de la corde devant celle de l'alpiniste suspendu.

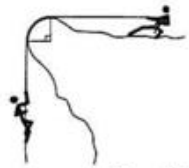


Figure 29

a) En considérant qu'en tout point du contact corde-rocher, la condition limite de non-glissement est atteinte, quelle est la force nécessaire pour empêcher la descente ?

b) Quelle est au contraire la force minimale à exercer pour faire remonter l'alpiniste en détresse ?

Conseils méthodologiques. L'énoncé est volontairement laconique, dans l'esprit des sujets d'oral posés aux écoles normales supérieures. Il faut remarquer ici que l'action de contact est répartie sur toute la longueur du contact, avec une tension de la corde *a priori* variable selon la position. On utilisera donc une tension fonction d'un paramètre angulaire. Un bilan des forces est nécessaire ; il peut être écrit pour chaque élément de longueur de corde. Penser à utiliser une base de projection polaire.

a) On paramètre la zone du contact entre la corde et le rocher à l'aide d'un angle α, celui-ci valant 0 au niveau de la portion verticale de corde, $\frac{\pi}{2}$ de l'autre côté. La tension de la corde est variable sur cette portion (Fig. 30), car les composantes tangentielle et normale de l'action de contact interviennent, on note $\vec{T}(\alpha)$ cette tension.

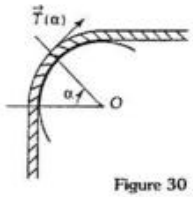


Figure 30

Aux limites de la zone considérée, $T(0) = Mg$ et $T\left(\frac{\pi}{2}\right) = F$, où F est la force cherchée.

On raisonne alors sur le système constitué de l'élément de corde entre les angles α et $\alpha + d\alpha$.

L'équilibre de cet élément sous l'action des tensions et des actions de contact s'écrit :

$$\vec{T}(\alpha + d\alpha) - \vec{T}(\alpha) + dn\,\vec{u}_r + dt\,\vec{u}_\alpha = \vec{0}$$

dn et dt sont ici les composantes normale et tangentielle de l'action de contact.

Remarque

L'orientation de α donnée sur la figure définit celle du vecteur unitaire $\vec{u}_\alpha$.

© Librairie – La photocopie non autorisée est un délit

Dans cette situation où le sauveteur se contente de retenir, la composante tangentielle est dirigée selon $\vec{u}_\alpha$ et on peut écrire $dt \leqslant \mu\, dn$. Donc la condition limite correspond à : $dt = \mu\, dn$

Remarque

On considère ici, pour simplifier, que la condition limite est atteinte en tout point, c'est-à-dire pour toutes les valeurs de α.

Puisque $\vec{T}(\alpha) = T(\alpha)\vec{u}_\alpha$ se différencie comme :

$$\vec{T}(\alpha + d\alpha) - \vec{T}(\alpha) = dT\,\vec{u}_\alpha + T(\alpha)\cdot(-d\alpha\,\vec{u}_r)$$

les relations précédentes deviennent :

$$dT = -dt = -\mu\, dn \quad \text{et} \quad T(\alpha)\, d\alpha = dn$$

On intègre alors l'équation $\frac{dT}{T} = -\mu\, d\alpha$ en tenant compte de la condition à la limite $T(0) = Mg$. Finalement, la tension décroît avec l'angle selon :

$$T(\alpha) = Mg\exp(-\mu\,\alpha)$$

Cette décroissance était prévue, puisque les forces de frottement réparties le long du contact contribuent ici à retenir l'alpiniste. La tension exercée par le sauveteur est bien inférieure au poids de l'alpiniste :

$$\boxed{F = Mg\exp\left(-\mu\,\frac{\pi}{2}\right)}.$$

Numériquement, pour $\mu = 0{,}7$ le rapport entre ces forces est 3.

Remarque

Le coefficient de frottement varie avec les matériaux et les conditions expérimentales, mais sa valeur numérique est de l'ordre de l'unité pour les situations courantes.

b) Dans le cas où le sauveteur veut hisser l'alpiniste, la composante tangentielle des forces de frottement change de sens. Si l'on envisage une remontée à vitesse constante, pour ne pas ajouter de terme d'inertie et atteindre ainsi la force minimale, on peut écrire à nouveau

$$\vec{T}(\alpha + d\alpha) - \vec{T}(\alpha) + dn\,\vec{u}_r + dt\,\vec{u}_\alpha = \vec{0}$$

Mais cette fois, $dt = -\mu\, dn$ (en projection sur $\vec{u}_\alpha$) et on obtient une croissance de la tension : $T(\alpha) = Mg\exp(\mu\,\alpha)$

La force nécessaire pour hisser l'alpiniste est égale à $F = Mg\exp\left(\mu\,\frac{\pi}{2}\right)$, soit trois fois le poids, ce qui est déraisonnable. Le sauveteur devra employer un autre système : ne serait-ce qu'une poulie, qui permet de transmettre l'effort (la force devient égale au poids) ; mais mieux encore, un système de palan qui démultiplie la force.

Remarque

On considère qu'il y a mouvement ici, ce qui fait qu'en tout point on peut écrire la loi de Coulomb qui se traduit par $dt = -\mu\, dn$.

9. Brisure d'une cheminée — D'après Mines-Ponts

On poursuit et approfondit l'étude de la chute d'une cheminée, entamée ci-dessus dans l'exercice n° 4 des Bases. En réalité, une cheminée peut se briser au cours de sa chute ; l'étude suivante va préciser les contraintes subies pendant la chute. Une longueur $OP = d$ de cheminée subit l'action du sol en O, l'action de son poids ainsi que l'action du reste de la cheminée sur elle-même, en P. Cette action assure la rigidité de la cheminée. Le contact en P n'est pas ponctuel, si bien que l'action du reste de la cheminée sur la longueur d est modélisée par une force $\vec{S}$ de composantes S_u et S_v et un couple $\vec{C}$ porté par l'axe horizontal Oz (Fig. 31).

a) En appliquant le principe fondamental de la dynamique à la longueur d de cheminée, exprimer S_v en fonction de M, g, θ, d et D. La grandeur S_v est appelée effort de cisaillement.

Tracer le graphe donnant S_v en fonction du rapport $\frac{d}{D}$ (θ est donné).

b) Si la cheminée perd sa rigidité, elle s'effrite. Elle aura tendance à s'effriter au point où l'effort de cisaillement est le plus important ; quel est ce point ?

c) Montrer que le théorème du moment cinétique en O, appliqué à la longueur d de cheminée conduit à l'expression suivante du moment (noté C) du couple $\vec{C}$:

$$C = -\frac{1}{4} M g d \left(\frac{d}{D} - 1\right)^2 \sin\theta$$

d) Si ce couple est supérieur au couple maximum que peut subir la cheminée, celle-ci se brise. En quel point la cheminée se brisera-t-elle ? Commenter à ce sujet les deux photographies de la figure 32.

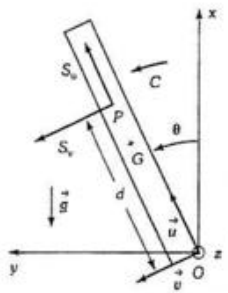


Figure 31

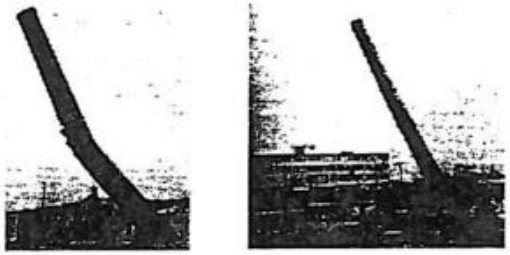


Figure 32

Conseils méthodologiques. Il est étudié ici, avec des méthodes transposées de ce qui est connu, une situation qui relèverait de la résistance des matériaux. Bien que cette discipline ne figure pas au programme de physique des classes préparatoires, les notions et outils de modélisation utilisés ici sont parfaitement dans le champ des connaissances du cours de mécanique. Devant ce type d'énoncé, il ne faut pas chercher à se ramener à une situation connue ou déjà vue, mais bien au contraire adopter la démarche assez détaillée proposée question par question. Sur chaque élément du système, on appliquera donc les lois de la mécanique usuelles. Les résultats et notations de l'exercice 4 des bases sont réemployés.

a) Pendant la phase de mouvement précédant la rupture, on peut conserver les résultats obtenus dans l'exercice des Bases sur la chute d'une cheminée.

Pour le segment de longueur d considéré, on peut en outre écrire la loi de la résultante cinétique, en utilisant la proportionnalité du poids à la longueur du segment.

Son intensité est $m\vec{g} = M\frac{d}{D}\vec{g}$.

On aboutit ainsi à :

$$\vec{S} + \vec{R} + m\vec{g} = m\vec{a}_g$$

Le centre de masse g est animé d'un mouvement de rotation autour de O, de rayon de trajectoire $\frac{d}{2}$, donc en projection sur $\vec{v}$, on écrit :

$$R_v + S_v + Mg\frac{d}{D}\sin\theta = M\frac{d}{D}\frac{d}{2}\ddot{\theta}$$

Remarque

Avant la brisure, on a bien affaire à un solide, puisqu'il n'y a pas de déformation.

Remarque

$M\frac{d}{D}$ est la masse du tronçon de longueur d

Remarque

Seule est utilisée ici la projection sur la tangente à la trajectoire de g

© Ellipses – La photocopie non autorisée est un délit

Puisque le mouvement suit la loi $\ddot{\theta} = \frac{3}{2}\frac{g}{D}\sin\theta$, obtenue dans l'exercice relatif à la chute d'une cheminée, il vient :

$$R_u + S_v = -Mg\frac{d}{D}\sin\theta + \frac{3}{4}M\frac{d^2}{D^2}g\sin\theta$$

L'expression de R_u résulte de même de l'application de la loi de la résultante cinétique au mouvement de la tour :

$$\vec{R} + M\vec{g} = M\vec{a}_G$$

En projection sur $\vec{v}$, on obtient dans un premier temps :

$$R_u + Mg\sin\theta = M\frac{D}{2}\ddot{\theta}$$

Avec la loi du mouvement rappelée ci-dessus :

$$R_u = \frac{3}{4}Mg\sin\theta - Mg\sin\theta = -\frac{1}{4}Mg\sin\theta$$

Finalement, l'expression de l'effort de cisaillement est :

$$\boxed{S_v = Mg\sin\theta\left[\frac{1}{4} - \frac{d}{D} + \frac{3}{4}\left(\frac{d}{D}\right)^2\right]}$$

Le graphe de S_v en fonction du rapport $\frac{d}{D}$ a une forme parabolique (Fig. 33). L'effort de cisaillement s'annule pour $d = D$ puisque l'extrémité est libre ; il est en revanche maximal à la base ($d = 0$) où il vaut $\frac{1}{4}Mg\sin\theta$. Un point d'annulation est observé au tiers de la hauteur.

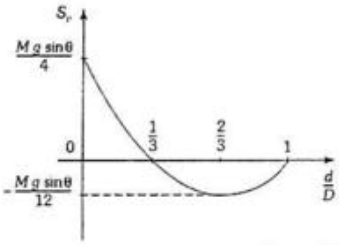


Figure 33

b) D'après les remarques précédentes, on peut affirmer que la cheminée s'effrite d'abord à sa base. On peut en outre considérer que cette zone ayant dû supporter le poids de la partie supérieure durant toute la durée d'existence de la cheminée, a connu un vieillissement plus important sous l'effet des contraintes.

Ce phénomène vient s'ajouter à la cause examinée ci-dessus.

Remarque

Cette remarque est indépendante de l'étude qui précède.

c) En utilisant le fait que le poids est exercé au centre de masse du segment, c'est-à-dire en son milieu pour ce modèle homogène, on peut écrire la loi du moment cinétique sous la forme :

$$\vec{C} + \frac{d}{2}\vec{u}\wedge M\frac{d}{D}\vec{g} + d\vec{u}\wedge\vec{S} = \frac{d}{dt}(\vec{\sigma}_O)$$

En projection sur $\vec{u}_z$, il vient :

$$C + M\frac{d}{2}\frac{d}{D}g\sin\theta + dS_v = \frac{1}{3}M\frac{d}{D}d^2\ddot{\theta}$$

On peut alors mener à bien le calcul de C, en utilisant les expressions précédentes de S_v et $\ddot{\theta}$. Le couple est ainsi fonction de la distance d selon la loi :

$$\boxed{C = -\frac{Mgd}{4}\sin\theta\left[1 - 2\frac{d}{D} + \left(\frac{d}{D}\right)^2\right]}$$

Il s'agit bien de l'expression attendue.

Remarque

Le moment d'inertie du segment par rapport à Oz est $\frac{1}{3}\left(M\frac{d}{D}\right)d^2$

d) C est nul en $d = 0$ et pour $d = D$ qui sont les extrémités.

Il est en revanche maximum, pour θ donné, lorsque $\frac{\partial C}{\partial d} = 0$. Dérivons donc $d\left(\frac{d}{D} - 1\right)^2$ par rapport à d, on obtient :

$$\left(\frac{d}{D}-1\right)^2+d\frac{2}{D}\left(\frac{d}{D}-1\right)=\left(\frac{d}{D}-1\right)\left(3\frac{d}{D}-1\right)$$

Le maximum cherché se situe donc pour $3\frac{d}{D}-1=0$, c'est-à-dire :

$$\boxed{d=\frac{D}{3}}.$$

C'est au tiers de la cheminée que s'effectue la brisure.

Les photographies proposées illustrent les deux situations :

- rupture par cisaillement à la base ;
- brisure.

Sauf à disposer de renseignements sur la résistance des matériaux utilisés, sur d'éventuelles amorces de rupture dues au vieillissement ou enfin sur la nature de la construction, il n'est pas possible sur la base de ces deux photographies d'expliquer pourquoi l'une subit tel ou tel sort, contrairement à l'autre.

D'autre part on ne connaît pas la nature de la cause de chute : s'il s'agit d'une explosion, il est probable qu'il faudrait également prendre en compte l'existence d'une propagation des ondes de pression, cisaillement...

C'est par le jeu de la réflexion de telles ondes que l'on a pu expliquer par exemple pourquoi des spaghetti se brisent en plusieurs morceaux, lorsqu'on les tord en rapprochant les extrémités.

On peut noter que le décollage envisageable au sens de l'exercice sur la chute d'une tige posée ne s'observe pas ici : d'une part les angles mis en jeu sont inférieurs à 53° et d'autre part, l'existence d'une maçonnerie à la base d'une cheminée ne permet pas de considérer celle-ci seulement posée sur le sol.

REMARQUE – Ce problème aborde la résistance des matériaux, matière étudiée en école d'ingénieurs. Il est formateur, puisqu'il ouvre des perspectives sur le fait que les lois peuvent être utilisées pour des portions de système. Elles apportent alors des informations sur les contraintes au sein du solide considéré.

© Lavoisier – La photocopie non autorisée est un délit

Filtres linéaires et analyse de Fourier

Méthodes

Le cours en questions

1 ■ Filtres

1.1 Qu'est-ce qu'un filtre linéaire ?

• Soit un dispositif comportant une entrée et une sortie (Fig. 1). Celui-ci peut être qualifié de filtre linéaire si une équation différentielle linéaire à coefficients constants relie les grandeurs d'entrée et de sortie.

Exemple en électrocinétique : circuit représenté en Fig. 2 pour lequel $\tau \dot{v}_s + v_s = \tau \dot{v}_e$, avec $\tau = RC$.

• L'ordre du filtre est l'ordre de son équation différentielle.

En toute généralité, un filtre est linéaire si et seulement si une relation linéaire lie l'entrée et la sortie. La notion de filtre n'est pas spécifique à l'électrocinétique, elle intervient par exemple en mécanique, électromagnétisme, acoustique...

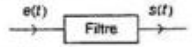


Figure 1

1.2 Comment caractériser le régime sinusoïdal forcé ?

• Un générateur impose à l'entrée d'un circuit la tension $v_e(t) = v_0 \cos \omega t$. La tension de sortie vérifie une équation différentielle linéaire dont la solution est la somme de la solution générale de l'équation homogène et de la solution particulière en $\cos(\omega t + \varphi)$. La solution générale tend vers 0 quand $t \to \infty$. Alors, la tension de sortie est égale à la solution particulière : c'est le régime sinusoïdal forcé.

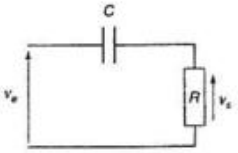


Figure 2

• Il faut alors privilégier la notation complexe :

$$\underline{u} = \underline{u}_0 \exp(j\omega t), \quad \text{où } u = \mathcal{R}e(\underline{u}).$$

L'amplitude $\underline{u}_0$ est complexe et comporte une phase.

© Lavoisier - La photocopie non autorisée est un délit

1.3 Qu'est-ce que le diagramme de Bode ?

• On définit la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{v}_s}{\underline{v}_e}$. Alors le diagramme de Bode représente les graphes des deux fonctions :

$$G_{dB} = 20 \log|\underline{H}|, \quad \text{et} \quad \varphi = \text{Arg}(\underline{H}),$$

en fonction de $\log \frac{\omega}{\omega_0}$, où ω_0 est une pulsation caractéristique du système.

G_{dB} est appelé gain et φ phase.

Il est aussi possible de tracer le gain et la phase en fonction de $\log\omega$, cela a pour effet de translater les courbes horizontalement.

1.4 Rappeler les principaux types de filtres

• On distingue notamment les filtres :

passe-bas si $|\underline{H}|$ tend vers 0 à haute fréquence et ne tend pas vers 0 à basse fréquence

passe-haut si $|\underline{H}|$ tend vers 0 à basse fréquence et ne tend pas vers 0 à haute fréquence

passe-bande si $|\underline{H}|$ tend vers 0 à basse et haute fréquence.

On consultera la figure 3.

On distingue aussi le réjecteur de bande, qui est en quelque sorte l'opposé du passe-bande : seules les basses et hautes fréquences passent.

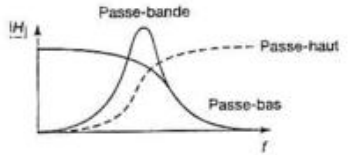


Figure 3

1.5 Qu'est-ce que la bande passante d'un filtre ?

• C'est l'intervalle de pulsation $\Delta\omega$ dans lequel $|\underline{H}(j\omega)| \geq \frac{|\underline{H}|_{max}}{\sqrt{2}}$ (Fig. 4).

C'est donc la gamme de fréquence dans laquelle le signal est transmis sans être trop affaibli.

Du point de vue du gain, cela revient à chercher les pulsations pour lesquelles le gain est 3 dB au-dessous du maximum.

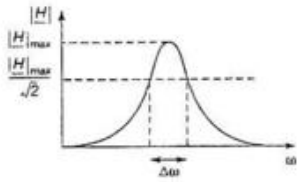


Figure 4

1.6 Quelle est la définition du facteur de qualité ?

• Pour un filtre passe-bande, on définit le nombre Q sans dimension par $Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$, où $\Delta\omega$ est la bande passante et ω_0 la pulsation de résonance (pulsation pour laquelle $|\underline{H}(j\omega_0)| = |\underline{H}|_{max}$).

• Pour le filtre passe-bande du deuxième ordre, la fonction de transfert se met sous la forme canonique :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

2 ■ Séries de Fourier

2.1 Expliquer très simplement le principe du développement en série de Fourier

• Toute fonction périodique suffisamment régulière peut s'écrire comme une somme de sinusoïdes de fréquences multiples de celle de la fonction en question.

2.2 Quelle est explicitement la série de Fourier d'une fonction ?

• Si $g(t)$ est T-périodique, alors :

$$g(t) = a_0 + \sum_{n \geq 1}\left(a_n \cos\left(n\frac{2\pi}{T}t\right) + b_n \sin\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)\right)$$

avec : $a_0 = \frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle} g(t)\,dt$ $\quad a_n = \frac{2}{T}\int_{\langle T\rangle} g(t)\cos\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)dt$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{\langle T\rangle} g(t)\sin\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)dt$$

⇒ La partie en cosinus (sinus) correspond à la partie paire (impaire) de la fonction g.

⇒ $\int_{\langle T\rangle}$ signifie que l'intégrale est effectuée sur n'importe quel intervalle de longueur T, comme $[0, T]$ et $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$.

• Utilisation des complexes :

$$g(t) = \sum_{n \in Z} \underline{c}_n \exp\left(jn\frac{2\pi}{T}t\right), \quad \text{avec } \underline{c}_n = \frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle} g(t)\exp\left(-jn\frac{2\pi}{T}t\right)dt.$$

2.3 Quel est le sens physique des coefficients de Fourier ?

• a_0 est la valeur moyenne de g.

⇒ On l'appelle aussi composante continue ou constante.

• Les termes en a_1 et b_1 constituent le fondamental. Ils donnent l'allure générale de la fonction g.

• Les termes en a_n et b_n pour $n \geq 2$ s'appellent les harmoniques. Les hauts harmoniques ($n \to \infty$) correspondent aux variations brusques éventuelles de g.

© Larousse – La photocopie non autorisée est un délit

2.4 Qu'est-ce que le spectre d'un signal ?

• C'est l'ensemble des paramètres caractéristiques (pulsation et amplitude) de chaque composante sinusoïdale d'un signal. En pratique, cela revient à tracer $\sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \frac{|\underline{c}_n|}{2}$ en fonction de la pulsation (ou de la fréquence, ou de n) (Fig. 5, où on a posé $\omega_0 = 2\pi/T$, T est la période de g).

Figure 5

2.5 Quelle est l'action d'un filtre sur un signal périodique ?

• Soit $v_e(t)$ un signal d'entrée T-périodique. On note $\underline{H}(j\omega)$ la fonction de transfert d'un filtre et $\varphi(\omega) = \text{Arg}\,\underline{H}(j\omega)$. Formellement, on peut écrire le signal de sortie sous les formes suivantes :

– si $v_e(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n \cos\left(n\frac{2\pi}{T}t\right) + b_n \sin\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)\right)$, alors :

$$v_s(t) = \underline{H}(0)a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left|\underline{H}\left(jn\frac{2\pi}{T}\right)\right|\left(a_n \cos\left(n\frac{2\pi}{T}t + \varphi\left(n\frac{2\pi}{T}\right)\right) + b_n \sin\left(n\frac{2\pi}{T}t + \varphi\left(n\frac{2\pi}{T}\right)\right)\right);$$

– si $v_e(t) = \sum_{n \in Z} \underline{c}_n \exp\left(jn\frac{2\pi}{T}t\right)$, alors :

$$v_s(t) = \sum_{n \in Z} \underline{H}\left(jn\frac{2\pi}{T}\right)\underline{c}_n \exp\left(jn\frac{2\pi}{T}t\right).$$

• Action d'un filtre passe-bas de pulsation de coupure ω_c :

– si $\omega_c \gg \omega_0$ (Fig. 6), alors seuls les hauts harmoniques sont coupés : $v_s(t) \approx v_e(t)$ (les points anguleux et discontinuités sont atténués) ;

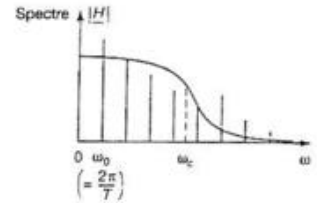


Figure 6

– si $\omega_c \ll \omega_0$ (Fig. 7), quasiment seule la composante continue passe. Le reste du signal est très affaibli.

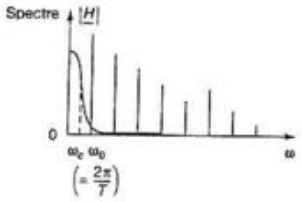


Figure 7

• Action d'un filtre passe-haut de pulsation de coupure ω_c :

– si $\omega_c \gg \omega_0$ (Fig. 8), alors seuls les hauts harmoniques passent ; le signal de sortie est très affaibli.

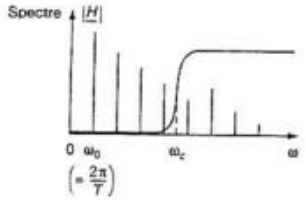


Figure 8

– si $\omega_c \ll \omega_0$ (Fig. 9), tout le signal passe, sauf la composante continue qui est coupée.

C'est le principe de fonctionnement du mode AC de l'oscilloscope.

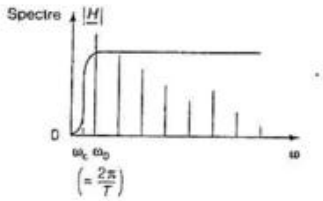


Figure 9

2.6 Qu'est-ce qu'un pseudo-intégrateur ou dérivateur ?

Le terme pseudo-intégrateur provient du fait que l'intégration n'est pas systématique : le signal doit vérifier certaines conditions pour être intégré. De plus, la composante continue n'est pas intégrée.

• Si dans un certain domaine de fréquence, un filtre possède une fonction de transfert $\underline{H} \sim A/j\omega$ et si le spectre de v_e est quasiment contenu dans ce domaine de fréquence, alors $v_s(t) \approx A\int^t v_e(u)\,du$.

• Si dans un certain domaine de fréquence, un filtre possède une fonction de transfert $\underline{H} \sim A\,j\omega$ et si le spectre de v_e est quasiment contenu dans ce domaine de fréquence, alors $v_s(t) \approx A\dfrac{dv_e}{dt}(t)$.

© Le Groupe - La photocopie non autorisée est un délit

Les savoir-faire clefs

1 ■ Savoir tracer un diagramme de Bode.

Conseils méthodologiques

1.1.a) Diviseur de tension.

1.1.b) Étudier les limites basse et haute pulsations.

1.1.c) Utiliser les équivalents du condensateur dans ces limites.

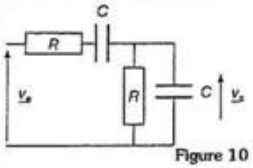


Figure 10

1.2.a) Diviseur de tension.

1.2.b) Étudier les limites basse et haute pulsations.

1.2.c) Utiliser les équivalents du condensateur dans ces limites.

1.2.e) et f) Définitions 1.5 et 1.6 du Cours en questions.

1.1 On considère le circuit *RC* représenté en Fig. 2.

a) Calculer la fonction de transfert $\underline{H} = \underline{v_s}/\underline{v_e}$. On introduira $\omega_0 = 1/RC$.

b) En déduire la nature du filtre.

c) Vérifier ce résultat en considérant qualitativement les limites basse et haute pulsations.

d) Tracer le diagramme de Bode. On donnera notamment le tracé asymptotique.

1.2 Soit le circuit de la figure 10. On posera $\omega_0 = 1/RC$ et $x = \omega/\omega_0$.

a) Calculer la fonction de transfert $\underline{H} = \underline{v_s}/\underline{v_e}$.

b) En déduire la nature du filtre.

c) Vérifier ce résultat en considérant qualitativement les limites basse et haute pulsations.

d) Trouver la pulsation de résonance.

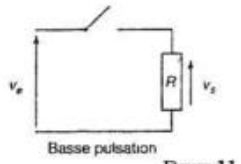
e) Quelles sont les pulsations de coupure et la bande passante ?

f) Quel est le facteur de qualité du filtre ?

g) Tracer le diagramme de Bode. On donnera notamment le tracé asymptotique.

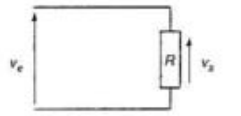
1.1.a) On remarque un diviseur de tension :

$$\underline{H} = \frac{\underline{v_s}}{\underline{v_e}} = \frac{R}{R + 1/jC\omega} = \frac{j\dfrac{\omega}{\omega_0}}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_0}}.$$



Basse pulsation

Figure 11



Haute pulsation

Figure 12

b) On s'intéresse aux limites basse et haute pulsations :

$$\omega \to 0 \quad \underline{H} \to 0$$
$$\omega \to \infty \quad \underline{H} \to 1.$$

Le filtre coupe totalement les basses fréquences, il s'agit d'un passe-haut.

c) À basse pulsation, le condensateur est équivalent à un circuit ouvert ($\underline{Z}_C = \dfrac{1}{jC\omega} \to \infty$). Le circuit équivalent est alors indiqué en Fig. 11. Aucun courant ne circule dans la résistance, donc la tension à ses bornes est nulle : $\underline{v_s} = 0$, soit $\underline{H} \to 0$.

À pulsation élevée, le condensateur est équivalent à un fil ($\underline{Z}_C = \dfrac{1}{jC\omega} \to 0$). Le circuit équivalent est alors indiqué en Fig. 12.

Clairement, $\underline{v}_s = \underline{v}_e$, soit $\underline{H} \to 1$.

Le filtre est bien un passe-haut, conformément à l'analyse précédente.

Cette approche qualitative basse et haute fréquence doit être obligatoirement menée afin de mettre en évidence une éventuelle erreur de calcul.

d) Le gain vaut :

$$G_{dB} = 20\log|\underline{H}| = 20\log\frac{\frac{\omega}{\omega_0}}{\sqrt{1+\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}.$$

On cherche les branches asymptotiques en utilisant un équivalent de la fonction de transfert :

On évite au maximum les études de fonction : la recherche d'équivalents de la fonction de transfert, plus un point particulier, permet un tracé rapide.

$\omega \ll \omega_0$: $\underline{H} \sim j\frac{\omega}{\omega_0}$ $\quad G_{dB} \sim 20\log\frac{\omega}{\omega_0}$ $\quad \varphi \to \frac{\pi}{2}$

$\omega = \omega_0$: $\underline{H} = \frac{j}{1+j}$ $\quad G_{dB} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad \varphi = \frac{\pi}{4}$

$\omega \gg \omega_0$: $\underline{H} \sim 1$ $\quad G_{dB} \to 0$ $\quad \varphi \to 0$.

À basse fréquence, le gain croît (20 dB/décade) et est nul à haute fréquence.

Sachant que $G_{dB}(\omega_0) = 20\log\frac{1}{\sqrt{2}} \approx -3\,dB$, on achève le tracé (Fig. 13).

On remarque alors que ω_0 est la pulsation de coupure.

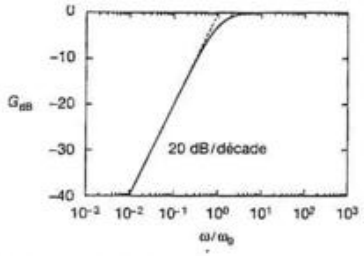


Figure 13

On procède de même pour le déphasage :

$$\varphi = \mathrm{Arg}\,\underline{H} = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}\,\frac{\omega}{\omega_0}.$$

Les asymptotes sont $\pi/2$ à basse pulsation et 0 à haute pulsation. On conclut avec la valeur $\pi/4$ pour $\omega = \omega_0$ (Fig. 14).

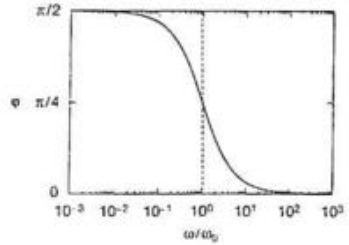


Figure 14

© Lavoisier - La photocopie non autorisée est un délit

1.2.a) On met encore en évidence un diviseur de tension :

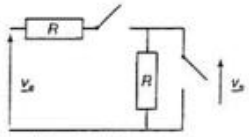
$$\underline{H} = \frac{\underline{v}_s}{\underline{v}_e} = \frac{\underline{Z}_{R//C}}{\underline{Z}_{R//C} + \underline{Z}_R + \underline{Z}_C}.$$

Déjà, $\underline{Z}_{R//C} = \dfrac{R\frac{1}{jC\omega}}{R+\frac{1}{jC\omega}} = \dfrac{R}{1+jRC\omega}$. Alors :

Il est aussi possible d'appliquer le théorème de Millman au point où est prélevée $\underline{v}_s$.

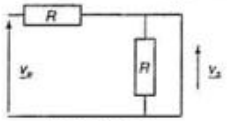
$$\underline{H} = \frac{\frac{R}{1+jRC\omega}}{\frac{R}{1+jRC\omega}+R+\frac{1}{jC\omega}} = \frac{jRC\omega}{RjC\omega(1+1+jRC\omega)+1+jRC\omega}$$

$$= \frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}+3j\frac{\omega}{\omega_0}} = \boxed{\frac{jx}{1-x^2+3jx} = \underline{H}}.$$



Basse pulsation

Figure 15



Haute pulsation

Figure 16

b) On considère les limites basse et haute pulsations. Dans les deux cas, $\underline{H} \to 0$. Le circuit est passe-bande.

c) À basse pulsation, le circuit est équivalent à celui de la figure 15. Aucun courant ne parcourt la résistance, soit $\underline{v}_s \to 0$.

À haute pulsation, le circuit est équivalent à celui de la figure 16. Typiquement, $\underline{v}_s \to 0$.

On a bien un circuit passe-bande.

d) Pour obtenir la pulsation de résonance, il faut évaluer le maximum du module de la fonction de transfert :

$$|\underline{H}| = \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^2+9x^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1/x-x)^2+9}}.$$

Éviter de dériver pour trouver le maximum si possible.

Clairement, le maximum est obtenu quand le dénominateur est minimal, c'est-à-dire pour $x = 1$, soit une pulsation de résonance égale à ω_0.

e) On doit résoudre $|\underline{H}(j\omega)| = H_{max}/\sqrt{2}$, soit :

Erreur à éviter
H_{max} n'est pas forcément égal à 1.

$$\frac{1}{\sqrt{(1/x-x)^2+9}} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \quad \text{car } H_{max} = |\underline{H}(x=1)| = 1/3.$$

Bien remarquer la simplification.

Alors, $(1/x-x)^2+9 = 18$, d'où : $\left(\frac{1}{x}-x\right)^2 = 9$, d'où : $\frac{1}{x}-x = \pm 3$.

En multipliant par x, on obtient l'équation à résoudre :

$$x^2 \pm 3x - 1 = 0.$$

On évalue le discriminant : $\Delta = 9+4 = 13$. Les solutions sont :

$$x = \frac{\mp 3 \pm \sqrt{13}}{2}.$$

On ne conserve que les racines positives $x_1 = \dfrac{-3+\sqrt{13}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$.

Au final :

$\omega_1 = x_1\omega_0 = \dfrac{-3+\sqrt{13}}{2}\omega_0 \approx 0{,}3\,\omega_0$ et $\omega_2 = x_2\omega_0 = \dfrac{3+\sqrt{13}}{2}\omega_0 \approx 3{,}3\,\omega_0$

On note que $\omega_1\omega_2 = \omega_0^2$, relation générale liant les pulsations de coupure et de résonance.

La bande passante vaut alors :

$$\boxed{\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = 3\omega_0}.$$

Elle est typiquement assez large.

f) On en déduit le facteur de qualité :

$$\boxed{Q = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{1}{3}}.$$

Le facteur de qualité est typiquement faible. Le filtre n'est pas sélectif et laisse passer une large gamme de fréquences.

On pouvait aussi utiliser la forme canonique du Cours en questions **1.6** pour obtenir immédiatement le facteur de qualité : $\underline{H} = \dfrac{1/3}{1+jQ(x-1/x)}$, soit : $Q = 1/3$.

On en déduit alors aisément la bande passante :

$\Delta\omega = \omega_0/Q = 3\omega_0$,

conformément à la question **1.2.f)**.

g) Le gain vaut explicitement :

$$G_{dB} = 20\log\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^2+9x^2}}.$$

Le tracé du diagramme de Bode peut être très avantageusement mené en ne considérant que les limites basse et haute fréquences, avec un point intermédiaire.

Mais cette fonction est assez compliquée, on va plutôt s'intéresser à ses asymptotes :

- à basse fréquence, $x \ll 1$. Alors, $\underline{H} \sim jx$, soit :

$$G_{dB} = 20\log x \quad \text{et} \quad \varphi \to \frac{\pi}{2}.$$

L'asymptote possède une pente de 20 dB/décade.

- pour $x = 1$, $\underline{H} = 1/3$, soit :

$$G_{dB} = -20\log 3 = -9{,}5\,\text{dB} \quad \text{et} \quad \varphi = 0\ ;$$

- à haute fréquence, $x \gg 1$. Alors, $\underline{H} \sim \dfrac{jx}{-x^2} = \dfrac{-j}{x}$, soit :

$$G_{dB} = -20\log x \quad \text{et} \quad \varphi \to -\frac{\pi}{2}.$$

L'asymptote possède une pente de –20 dB/décade.

On peut aussi s'aider des deux pulsations de coupure à –3 dB. On obtient alors le graphe de la figure 17 où les asymptotes sont tracées avec des tirets.

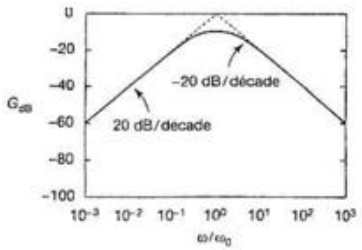


Figure 17

© Ellipses – La photocopie non autorisée est un délit

Pour la phase, on procède de même. Il n'est pas nécessaire de chercher la formule explicite afin d'obtenir l'allure du tracé. La limite de $\underline{H}$ à basse pulsation est $\pi/2$. De même, l'équivalent à haute pulsation est $-\pi/2$. Pour finir, $\varphi(x = 1) = 0$. Le tracé est présenté en Fig. 18.

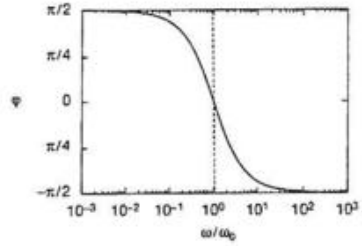


Figure 18

Conseils méthodologiques

2 ■ Savoir décomposer un signal en série de Fourier.

2.a) Expressions **2.2** du Cours en questions.

a) Calculer la décomposition en série de Fourier du signal rectangulaire représenté en Fig. 19. On note $\alpha = T_f/T$ le rapport cyclique ($0 < \alpha < 1$).
On utilisera la décomposition en cosinus et sinus.

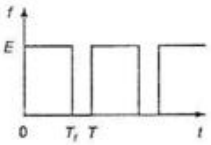


Figure 19

2.b) Étudier la parité.

b) Commenter le cas $\alpha = 1/2$.
Tracer le spectre dans ce cas particulier.

c) Comment se comportent a_n et b_n quand $n \to \infty$? Quelle est l'interprétation de cette lente décroissance ?

Du point de vue de l'homogénéité, les coefficients de Fourier ont la dimension de la fonction en question.

2.a) Commençons par la valeur moyenne :

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt = \frac{1}{T}\{E(T_f - 0) + 0(T - T_f)\} = \boxed{\alpha E}.$$

Ensuite :

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\left(n2\pi\frac{t}{T}\right)dt = \frac{2}{T}\int_0^{T_f} E\cos\left(n2\pi\frac{t}{T}\right)dt$$

$$= \frac{2E}{2\pi n}\left[\sin\left(n2\pi\frac{t}{T}\right)\right]_0^{T_f} = \boxed{\frac{E}{n\pi}\sin(2\pi n\alpha)}.$$

Enfin :

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\left(n2\pi\frac{t}{T}\right)dt = \frac{2}{T}\int_0^{T_1} E\sin\left(n2\pi\frac{t}{T}\right)dt$$

$$= \frac{2E}{2\pi n}\left[-\cos\left(n2\pi\frac{t}{T}\right)\right]_0^{T_1} = \boxed{\frac{E}{n\pi}(1-\cos(2\pi n\alpha))}.$$

b) Pour $\alpha = 1/2$, la fonction considérée est impaire (mis à part le terme constant), c'est en fait un signal en créneaux. On constate effectivement que les coefficients $(a_n)_{n\geq 1}$ sont nuls.

Le spectre est représenté en Fig. 20.

De plus, les b_n pour n pairs sont alors aussi nuls, correspondant à une autre symétrie de la fonction (parité par rapport à $t = T/4$).

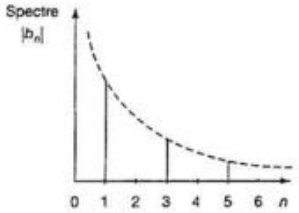


Figure 20

c) a_n et b_n sont $O(1/n)$ et pas $O(1/n^2)$. Les coefficients de Fourier décroissent lentement $\sim 1/n$, ce qui est significatif d'une fonction discontinue.

3 ■ Savoir déterminer l'action d'un filtre sur un signal périodique.

Conseils méthodologiques

Un filtre a pour fonction de transfert : $\underline{H} = \dfrac{-1}{1-\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}+j\sqrt{5}\dfrac{\omega}{\omega_0}}$.

a) Quelle est la nature du filtre ? Quelle est la fréquence de coupure ? On donne $\omega_0 = 1{,}2\ 10^5$ rad · s^{-1}.

Trouver v_s en régime forcé et commenter éventuellement le résultat sachant que v_e vaut successivement (v_0 et v_1 sont des constantes) :

b) $v_e(t) = v_0\cos(\omega_0 t)$.

c) $v_e(t) = v_0\cos(\omega t)$.

d) $v_e(t) = v_0\cos(\omega_0 t) + v_1$.

e) $v_e(t) = v_0\cos(\omega_0 t) + v_1\cos(2\omega_0 t)$.

f) $v_e(t)$ est le créneau représenté en Fig. 21, de période $T = 10^{-3}$ s.

On donne :

$$v_e(t) = \frac{E}{2} + \sum_{p=0}^{\infty}\frac{2E}{\pi(2p+1)}\sin\left((2p+1)2\pi\frac{t}{T}\right).$$

g) $v_e(t)$ est toujours le même créneau, mais de période $T = 10^{-5}$ s.

3.a) Utiliser le savoir-faire 1.

3.b) et c) Utiliser la définition de la fonction de transfert.

3.d) et e) Procéder par linéarité.

3.f) et g) Utiliser le Cours en questions 2.5.

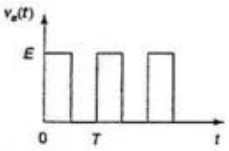


Figure 21

© Lavoisier – La photocopie non autorisée est un délit

3.a) On s'intéresse aux limites de basse et haute fréquences.

À basse fréquence, $\underline{H} \to -1$, alors qu'à haute fréquence, $\underline{H} \to 0$. Le filtre est passe-bas.

Pour la fréquence de coupure, il faut évaluer la pulsation ω_c telle que $|\underline{H}(\omega_c)| = H_{max}/\sqrt{2}$. On pose $x = \omega/\omega_0$. Comme :

$$|\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2+5x^2}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{1+3x^2+x^4}}}.$$

$|\underline{H}|$ est une fonction strictement décroissante de ω (ou de x).

la fonction de transfert est maximale à pulsation nulle et $H_{max} = 1$.

On doit ainsi résoudre :

$$|\underline{H}(j\omega_c)| = \frac{1}{\sqrt{1+3x_c^2+x_c^4}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

soit $x_c^4 + 3x_c^2 - 1 = 0$. On pose $u_c = x_c^2$ et on résout : $u_c = (-3+\sqrt{13})/2$ (car $u_c > 0$) et $x_c = \sqrt{u_c} = 0{,}55$. Ainsi :

$$\omega_c = 0{,}55\,\omega_0 \quad \text{et} \quad \boxed{f_c = \omega_c/2\pi = 10{,}5\ \text{kHz}}.$$

La bande-passante va de la fréquence nulle à f_c.

Erreur à éviter
Cette relation n'est valable que pour $\underline{v}_e$ sinusoïdale complexe.

b) On utilise le fait que $\underline{H}(j\omega) = \underline{v}_s/\underline{v}_e$. Ainsi, $\underline{v}_s = \underline{H}(j\omega)\underline{v}_e$ si $\underline{v}_e$ est sinusoïdale complexe de pulsation ω.

Ici, $\underline{v}_e = v_0\exp(j\omega_0 t)$. Comme $\underline{H}(\omega_0) = 1/j\sqrt{5}$, on en déduit :

$$\underline{v}_s = \frac{v_0}{j\sqrt{5}}\exp(j\omega_0 t) = \frac{v_0}{\sqrt{5}}\exp j\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right).$$

Pour obtenir v_s, il faut passer à la partie réelle :

En toute généralité, l'action d'un filtre sur un signal sinusoïdal se traduit par la variation de l'amplitude du signal et l'apparition d'un déphasage.

$$v_s(t) = \frac{v_0}{\sqrt{5}}\cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right) = \boxed{\frac{v_0}{\sqrt{5}}\sin(\omega_0 t)}.$$

c) Plus généralement, on reprend la même étude pour une pulsation fixée et quelconque ω. On pose $\underline{H}(j\omega) = |\underline{H}(j\omega)|\exp j\varphi(\omega)$.

Alors, de même :

$$\underline{v}_s = (|\underline{H}(j\omega)|\exp j\varphi(\omega))v_0\exp(j\omega t) = v_0|\underline{H}(j\omega)|\exp j(\omega t+\varphi(\omega)).$$

Ainsi, $\boxed{v_s(t) = v_0|\underline{H}(j\omega)|\cos(\omega t+\varphi(\omega))}$, avec $\varphi = \text{Arg}\,\underline{H}$.

Un signal constant correspond à une pulsation nulle.

d) Par linéarité, on décompose le signal en deux. Pour la partie $v_0\cos\omega_0 t$, on a déjà résolu le problème à la question b). Enfin, si $v_{e2} = v_1 = \text{cte}$, $v_{s2} = \underline{H}(0)v_{e2} = -v_{e2}$.

Erreur à éviter
Ne pas utiliser $\underline{v}_s = \underline{H}v_e$ ici ! v_e n'est pas sinusoïdale.

Au final, $\boxed{v_s(t) = \dfrac{v_0}{\sqrt{5}}\sin(\omega_0 t) - v_1}$.

e) On utilise encore la linéarité. La partie oscillant à ω_0 a déjà été traitée. Ensuite, si $v_{e2} = v_1\cos(2\omega_0 t)$, alors :

$$\underline{v}_{s2} = \underline{H}(2\omega_0)\underline{v}_{e2} = \frac{-1}{-4+2j\sqrt{5}}v_1\exp(j2\omega_0 t) = \frac{v_1}{6}\exp j(2\omega_0 t+\varphi'),$$

où $\tan\varphi' = \sqrt{5}/2$ $(0 < \varphi' < \pi/2)$.

Alors :

$$\boxed{v_s(t) = \frac{v_0}{\sqrt{5}}\sin(\omega_0 t) + \frac{v_1}{6}\cos(2\omega_0 t + \varphi')}$$

f) Il s'agit ici de l'action d'un filtre passe-bas de fréquence de coupure $f_c = 10^4$ Hz sur un signal périodique de fréquence associée $f = 10^3$ Hz $\ll f_c$.

Par linéarité, on décompose le signal en série de Fourier et on s'intéresse à chacun de ses termes. Le signal est la somme d'un terme constant et de sinusoïdes de pulsation $n2\pi/T$ (n impair).

Le terme constant, le fondamental et les harmoniques $n = 3, 5, 7, 9$ sont sous la fréquence de coupure. En première approximation, ils sont peu perturbés par le filtre passe-bas et sont simplement multipliés par -1 (car $\underline{H}(0) = -1$). Les harmoniques plus élevés sont coupés, ce qui adoucit le signal. On en déduit l'allure de v_s (Fig. 22).

Plus formellement, on peut écrire v_s sous la forme d'une série :

$$v_s(t) = -\frac{E}{2} + \sum_{p=0}^{\infty} \left|\underline{H}\left((2p+1)\frac{2\pi}{T}\right)\right| \frac{2E}{\pi(2p+1)} \sin\left((2p+1)2\pi\frac{t}{T} + \varphi(2p+1)\frac{2\pi}{T}\right)$$

avec $\varphi(\omega) = \text{Arg}\,\underline{H}(j\omega)$.

g) Cette fois-ci, la fréquence associée au signal d'entrée est $f = 10^5$ Hz $\gg f_c$. Mis à part le terme constant, tous les termes de la série de Fourier ont une fréquence bien supérieure à la fréquence de coupure. En première approximation, ils sont coupés par le filtre. Alors, $\boxed{v_s(t) \approx -E/2}$.

De manière plus fine, le fondamental et chaque harmonique sont multipliés par $\underline{H}(j\omega) \approx -\omega_0^2/\omega^2 \ll 1$. Cela correspond à une double intégration. Ainsi, au signal constant $-E/2$ se superpose un signal de faible amplitude composé de branches de paraboles (Fig. 23).

Voir le savoir-faire 2 pour une justification de la nullité des harmoniques de rang pair du créneau.

Figure 22

Un créneau intégré une fois donne un signal en triangles, qui intégré à son tour donne des branches de paraboles.

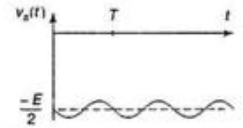


Figure 25

4 ■ Savoir traiter les circuits pseudo-intégrateur ou dérivateur.

Conseils méthodologiques

Soit le circuit présenté en Fig. 24. L'amplificateur opérationnel est idéal et fonctionne en régime linéaire.

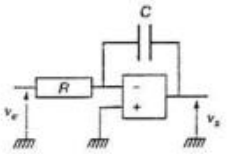


Figure 23

a) Calculer sa fonction de transfert.

b) Montrer qu'il s'agit d'un intégrateur. On donnera la relation entrée-sortie en régime quelconque.

c) Si $v_e(t) = v_0 + v_1\cos\omega t$, que vaut le signal de sortie ? Commenter.

4.c) Consulter le savoir-faire 3.

© Laurelec - La photocopie non autorisée est un délit

4.d) Consulter le 'cours en questions 2.6..

d) On rajoute une résistance $R' \gg R$ en parallèle sur la capacité. Montrer que le circuit est alors un pseudo-intégrateur dans un domaine de pulsations qu'on précisera. *On donne* : $R = 10$ kΩ, $R' = 100$ kΩ et $C = 0{,}1$ µF.

e) Que vaut le signal de sortie pour le signal $v_e(t) = v_0 + v_1\cos\omega t$ vérifiant la condition avec $R'C\omega \gg 1$?

f) Et pour le créneau représenté en Fig. 25 ? Préciser notamment l'amplitude de variation du signal de sortie. On supposera $T \ll R'C$.

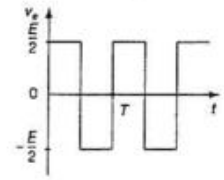


Figure 24

4.a) On applique le théorème de Millman à l'entrée inverseuse :

$$\underline{v}_- = \frac{\frac{v_e}{R} + jC\omega v_s}{\frac{1}{R} + jC\omega}.$$

Or, $\underline{v}_- = \underline{v}_+ = 0$ car le régime est linéaire. On déduit :

$$\boxed{\underline{H}(j\omega) = -\frac{1}{jRC\omega}}$$

b) La fonction de transfert est proportionnelle à $1/(j\omega)$. On a donc un intégrateur. En régime quelconque, la relation entrée-sortie est

$$\boxed{v_s(t) = -\frac{1}{RC}\int^t v_e(t')dt'}$$

Ainsi, le signal de sortie peut diverger. Il est en fait limité par la tension de saturation de l'amplificateur opérationnel. En pratique, l'intégrateur pur est peu utilisé car la sortie dérive. En effet, la moyenne d'un signal n'est jamais rigoureusement nulle et un terme de dérive intervient systématiquement.

Rappelons les équivalences notation complexe/notation temporelle :

$j\omega \leftrightarrow \frac{d}{dt}$ et $1/j\omega \leftrightarrow \int dt$.

c) Vu la relation précédente, on déduit :

$$v_s(t) = -\frac{1}{RC}\int^t (v_0 + v_1\cos\omega t')dt' = -\frac{1}{RC}\left(v_0 t + \frac{v_1}{\omega}\sin\omega t\right) + \text{cte}.$$

Le signal diverge au cours du temps.

d) On applique à nouveau Millman à l'entrée inverseuse :

$$\underline{v}_- = 0 = \frac{\frac{v_e}{R} + \frac{\underline{v}_s}{\underline{Z}_{eq}}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{\underline{Z}_{eq}}},$$

où $\underline{Z}_{eq}$ est l'impédance du dipôle R' // C :

$$\underline{Z}_{eq} = \frac{R'\frac{1}{jC\omega}}{R'+\frac{1}{jC\omega}} = \frac{R'}{1+jR'C\omega}.$$

On déduit alors : $\boxed{\underline{H}(j\omega) = -\frac{\underline{Z}_{eq}}{R} = -\frac{R'/R}{1+jR'C\omega}}$.

Un filtre pseudo-intégrateur doit avoir une fonction de transfert $\underline{H} = A/j\omega$. Pour que ce soit le cas ici, il est nécessaire que $R'C\omega \gg 1$, soit $\omega \gg 1/(R'C)$, ou $\boxed{f \gg 1/(2\pi R'C) = 15\ \text{Hz}}$. Alors, $\underline{H} = -1/(jRC\omega)$.

Si le signal d'entrée a un spectre majoritairement contenu dans cette zone (il faut évidemment que ce soit le cas pour le fondamental), alors $v_s(t) = -\frac{1}{RC}\int^t v_e(u)du$. Le signal est intégré, sauf le terme constant qui est multiplié par $\underline{H}(0) = -\frac{R'}{R}$.

Le signal est intégré mais aussi très atténué car on est dans la zone où $|H| \ll 1$.

e) On procède par superposition. Le terme constant est multiplié par $-R'/R$ car $\underline{H}(0) = -R'/R$. Pour $v_{e2} = v_1\cos\omega t$:

$$\underline{v}_{s2} = \underline{H}(j\omega)\underline{v}_{e2} = \underline{H}(j\omega)v_1\exp(j\omega t) = -\frac{v_1}{jRC\omega}\exp j\omega t$$

On prend la partie réelle : $v_{s2} = -\frac{v_1}{RC\omega}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$.

Le signal de sortie est :

$$\boxed{v_s(t) = -\frac{R'}{R}v_0 - \frac{v_1}{RC\omega}\sin(\omega t)}.$$

On observe le résultat attendu : le signal est intégré (et atténué), mis à part le terme constant.

f) Comme $T \ll R'C$, $\omega \gg \frac{1}{R'C}$. Le fondamental et les harmoniques ne sont pas situés dans la bande-passante : ils sont très atténués. En revanche, la composante constante passe et est multipliée par $-R'/R$.

La composante constante étant quasi nulle, elle le reste.

L'harmonique de pulsation $n\omega$ est multiplié par $\underline{H}(jn\omega) \sim -1/(jnRC\omega)$. Le signal v_e privé de sa composante continue est intégré et multiplié par $-1/RC$. C'est au départ un créneau compris entre $-E/2$ et $E/2$. L'intégration donne un signal en triangles de même période T. Évaluons son amplitude maximale grâce à la relation entrée-sortie :

$$v_s(t) = -\frac{1}{RC}\int^t v_e(t')dt'.$$

On intègre entre $t = 0$ et $T = T/2$:

$$v_s\left(\frac{T}{2}\right) - v_s(0) = -\frac{1}{RC}\int_0^{T/2}\frac{E}{2}dt = -\frac{T}{4RC}E.$$

L'amplitude est ainsi $ET/(4RC) \ll E$: le signal est très atténué, intégré et inversé (Fig. 26)

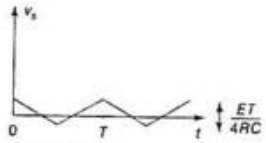


Figure 26

© Lavoisier – La photocopie non autorisée est un délit

Annales

Pour maîtriser les bases

1. Filtre linéaire ou non ? — D'après Oral Banque PT

On envoie sur différents filtres le signal $e(t)$ dont le spectre est donné en Fig. 27. Les spectres du signal de sortie des filtres numéros 1, 2 et 3 sont donnés en Fig. 28

a) Conclure quant à la linéarité des différents filtres.

b) Pour les filtres linéaires, donner leur nature. On proposera des ordres de grandeur pour leurs caractéristiques.

Figure 27

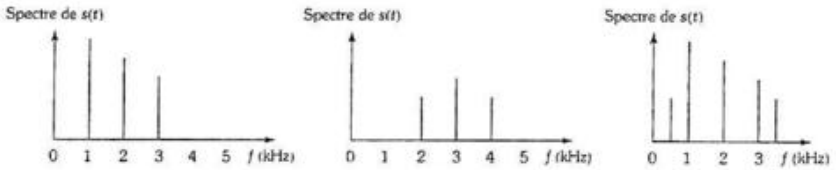


Figure 28

Conseils méthodologiques. Cet exercice utilise le savoir-faire 3 (action d'un filtre sur un signal périodique).

a) Si un signal est la somme de sinusoïdes oscillant à certaines fréquences, alors, après passage par un filtre linéaire, le signal est toujours somme de sinusoïdes de mêmes fréquences. Cette propriété découle de la linéarité du filtre et du fait qu'un signal sinusoïdal garde même forme après passage dans un filtre linéaire.

Ainsi, le filtre 3 n'est certainement pas linéaire car de nouvelles fréquences sont apparues à 500 Hz et 3500 Hz. En revanche, les filtres 1 et 2 semblent linéaires.

Remarque

Il n'est pas possible de conclure positivement de manière certaine en examinant le cas d'un seul signal.

b) Le filtre 1 est un filtre *passe-bas*. En effet, les harmoniques de fréquence supérieure à $f_c = 3$ kHz sont coupés.

Le filtre 2 est un filtre *passe-bande* de fréquence de résonance $f_r = 3$ kHz.

En effet, cet harmonique n'est quasiment pas amorti. La bande passante vaut environ $\Delta f = 2$ kHz. En effet, la bande entre 2 et 4 kHz n'est pas trop amortie par le filtre.

2. Étude partielle d'un onduleur — D'après ESIM

On étudie un onduleur de secours permettant de reconstituer un réseau alternatif monophasé à partir de batteries délivrant une fonction continue U_B. Un premier dispositif transforme la tension continue en $u(t)$ représentée en Fig. 29.

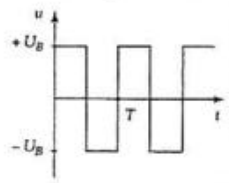


Figure 29

a) Quelle est la valeur efficace U de $u(t)$ définie comme $U^2 = \langle u^2(t) \rangle$, où $\langle \ldots \rangle$ est la valeur moyenne ?

b) La décomposition en série de Fourier de $u(t)$ est :

$$u(t) = \frac{4U_B}{\pi}\left(\sin(\omega t) + \frac{\sin(3\omega t)}{3} + \frac{\sin(5\omega t)}{5} + \ldots\right).$$

Justifier que tous les termes en cosinus sont nuls.

c) La distorsion globale d_g de la tension $u(t)$ dépend du taux d'harmoniques : si on note U_1 la valeur efficace du fondamental de $u(t)$, et U_n la valeur efficace de l'harmonique de rang n, la distorsion globale est définie par :

$$d_g = \frac{\sqrt{U_2^2 + U_3^2 + \ldots}}{U_1}.$$

Calculer d_g pour $u(t)$. Le cahier des charges impose $d_g \leqslant 5\,\%$. Commenter. On donne $1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{8}$.

d) Dans un onduleur à modulation de largeur d'impulsion, la tension $u(t)$ est de la forme suivante :

$$u(t) = \frac{4U_B}{\pi}\left(0{,}802\sin(\omega t) - \frac{2.01}{13}\sin(13\omega t) - \frac{2.64}{15}\sin(15\omega t) + \ldots\right).$$

S'attend-on *a priori* à un meilleur ou pire taux de distorsion ? Le taux de distorsion globale est alors $d_g = 49\,\%$. Essayer de donner une explication.

e) Par quelle méthode peut-on espérer diminuer le taux de distorsion ? Quel est l'avantage du second signal par rapport au premier ?

Conseils méthodologiques. L'exercice met en œuvre les méthodes des savoir-faire 2 (décomposition d'un signal en série de Fourier) et 3 (action d'un filtre sur un signal périodique).

a) On remarque que $u^2(t) = U_B^2$. Ainsi : $\boxed{U = U_B}$.

b) Le signal $u(t)$ est *impair* : sa décomposition en série de Fourier ne comprend que des sinus.

c) Déjà, pour n pair, $U_n = 0$ car les harmoniques de rang pair n'ont aucun poids dans $u(t)$.

Ensuite, rappelons que pour un signal sinusoïdal, la valeur efficace vaut l'amplitude divisée par $\sqrt{2}$. Or, pour $u(t)$, l'amplitude de l'harmonique de rang n est $\frac{4U_B}{\pi}\frac{1}{n}$. On déduit immédiatement :

$$\boxed{U_n = \frac{4U_B}{n\pi\sqrt{2}}}.$$

La définition du taux de distorsion global indique :

$$d_g = \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \ldots}}{1} = \sqrt{\frac{\pi^2}{8} - 1} = 48\,\%.$$

Le résultat est bien loin de celui imposé par le cahier des charges...

Remarque

En d'autres termes, cela signifie qu'un créneau est loin de ressembler à une sinusoïde !

© Ellipses – La photocopie non autorisée est un délit

d) Par rapport au premier signal, on a supprimé les harmoniques 3, 5, 7, 9 et 11. On s'attend ainsi à un taux de distorsion bien plus faible.

Le poids de l'harmonique 13 (15) est 2 (2,6) fois plus important que pour le premier signal. Si le changement de forme de $u(t)$ a fait disparaître les premiers harmoniques, le poids des suivants semble supérieur d'un facteur 2. Les deux effets peuvent se compenser.

e) Il est nécessaire de filtrer le signal. On utilise par exemple un filtre *passe-bas* permettant de laisser passer le fondamental et de couper les harmoniques. La pulsation de coupure sera donc légèrement supérieure à ω.

Cette opération sera réalisée avec davantage d'efficacité pour le second signal $u(t)$. En effet, le premier harmonique présent ($n = 13$) est nettement séparé en fréquence du fondamental et le filtre pourra fortement l'atténuer. En revanche, pour le premier signal $u(t)$, le premier harmonique présent ($n = 3$) est très proche en fréquence du fondamental et ne sera pas fortement atténué.

3. Modulation — D'après Mines-Ponts

À partir d'un signal $e(t) = E\cos(\Omega t)$ et d'une porteuse haute fréquence $p(t) = S\sin(\omega_0 t)$ ($\omega_0 \gg \Omega$), on génère le signal modulé $s(t) = S(1 + ke(t))\sin(\omega_0 t)$, porteur de l'information initiale et qui sera transmis.

a) On définit le taux de modulation par $m = kE$. Représenter le signal modulé en amplitude $s(t)$ dans les deux cas $m < 1$ et $m > 1$.

b) Représenter la décomposition spectrale du signal $s(t)$.

c) Reprendre la question précédente lorsque l'information à transmettre $e(t)$ possède un spectre continu, analogue à celui de la figure 30, avec $\omega_{max} < \omega_0$.

Figure 30

d) Un circuit multiplieur délivre à sa sortie la tension $u(t) = Ks(t)e_0(t)$, où $e_0(t) = E_0\sin(\omega_0 t)$ est de même pulsation que la porteuse. Exprimer $u(t)$ et préciser les différentes composantes de son spectre.

e) Comment recueillir le signal initial ?

Conseils méthodologiques. Cet exercice nécessite l'usage du savoir-faire 2 (séries de Fourier) et 3 (action d'un filtre).

a) On écrit la forme du signal modulé : $s(t) = S(\underbrace{1 + m\cos\Omega t}_{\text{lent}})(\underbrace{\sin\omega_0 t}_{\text{rapide}})$.

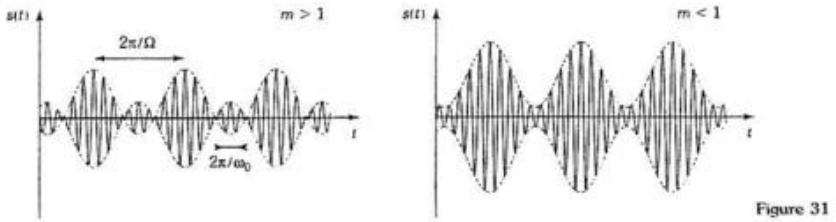


Figure 31

Le signal rapide oscille entre -1 et 1 pendant une durée si brève que le terme $S(1+m\cos\Omega t)$ reste quasiment constant.

En conséquence, on trace les fonctions $\pm S(1+m\cos\Omega t)$ (c'est ce qu'on appelle l'*enveloppe du signal*), puis on ajoute des oscillations rapides entre les deux.

Il faut distinguer deux cas, selon les valeurs de m : le signal constituant l'enveloppe garde ou ne garde pas un signe constant.

Le résultat est tracé en Fig. 31 ($m > 1$) et ($m < 1$) où les enveloppes sont indiquées avec des tirets.

Remarque

La méthode est générale pour tracer les courbes avec enveloppe.

Technique de calcul

On rappelle :

$$\sin a\cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b)+\sin(a-b)]$$

b) Afin d'obtenir le spectre, on écrit le signal $s(t)$ sous forme d'une somme de sinus et de cosinus.

Il s'agit donc de linéariser l'expression fournie :

$$\boxed{s(t) = S\left[\sin\omega_0 t + \frac{m}{2}\sin(\omega_0+\Omega)t + \frac{m}{2}\sin(\omega_0-\Omega)t\right]}.$$

Remarque

Cette forme n'est pas une série de Fourier, le signal $s(t)$ n'est d'ailleurs pas forcément périodique.

On en déduit aisément la forme du spectre.

Celui-ci comporte trois raies, aux pulsations ω_0 et $\omega_0 \pm \Omega$.

L'allure est représentée en Fig. 32.

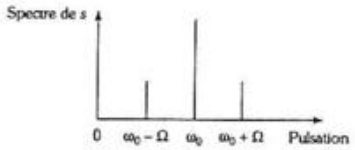


Figure 32

c) Soit une pulsation ω comprise entre ω_{min} et ω_{max}.

Lors de la modulation, cette pulsation donne naissance à trois composantes de pulsations ω_0 et $\omega_0 \pm \Omega$.

On obtient alors le spectre du signal modulé sur la figure 33.

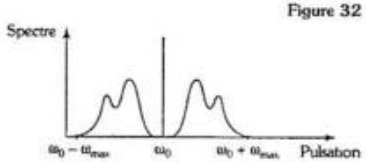


Figure 33

d) On linéarise à nouveau l'expression proposée :

$$u(t) = KSE_0(1+m\cos\Omega t)\sin^2\omega_0 t$$

$$= \frac{KSE_0}{2}(1+m\cos\Omega t)(1-\cos 2\omega_0 t)$$

$$\boxed{u(t) = \frac{KSE_0}{2}\left[1+m\cos\Omega t - \cos 2\omega_0 t - \frac{m}{2}(\cos(2\omega_0-\Omega)t + \cos(2\omega_0+\Omega)t)\right]}.$$

Le spectre correspondant est tracé sur la figure 34.

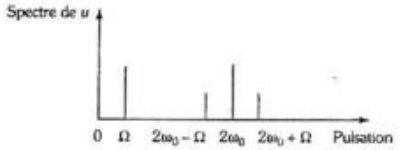


Figure 34

e) Pour récupérer le signal initial (à une constante multiplicative près), on utilise un filtre passe-bas de pulsation de coupure ω_c telle que $\Omega \ll \omega_c \ll 2\omega_0$.

Pour enlever la composante constante, on peut ensuite utiliser un filtre passe-haut de pulsation de coupure $\omega_c' \ll \Omega$.

Remarque

Il est aussi possible d'utiliser un passe-bande de pulsation de résonance Ω et de bande passante de l'ordre de Ω, soit un facteur de qualité de l'ordre de 1 (ou plus sélectif).

© Lavoisier – La photocopie non autorisée est un délit

4. Filtres en cascade — D'après Oral Centrale-Supelec

On pose $\underline{H}_i(j\omega) = 1/\left(1+j\frac{\omega}{\omega_i}\right)$. On s'intéresse à la fonction de transfert $\underline{H} = \underline{H}_1 \cdot \underline{H}_2$. On prendra $\omega_1 \ll \omega_2$.

a) Tracer le diagramme de Bode correspondant à ce filtre.

b) Proposer deux exemples de filtres possédant cette fonction de transfert.

Conseils méthodologiques. L'exercice fait principalement appel au savoir-faire 1 (établissement d'un diagramme de Bode).

a) Le filtre est clairement un passe-bas du deuxième ordre.

On cherche le diagramme de Bode asymptotique. Il faut distinguer trois domaines :

- $\omega \ll \omega_1$: $\underline{H} \sim 1$, soit :

$$G_{dB} \to 0 \quad \text{et} \quad \varphi \to 0 ;$$

- $\omega_1 \ll \omega \ll \omega_2$: $\underline{H} \sim \frac{\omega_1}{j\omega}$, soit :

$$G_{dB} \sim -20\log\frac{\omega}{\omega_1} \quad \text{et} \quad \varphi \to -\frac{\pi}{2} ;$$

- $\omega \gg \omega_2$: $\underline{H} \sim -\frac{\omega_1\omega_2}{\omega^2}$, soit :

$$G_{dB} \sim -20\log\frac{\omega^2}{\omega_1\omega_2} = -40\log\frac{\omega}{\omega_0} \quad \text{et} \quad \varphi \to \pm\pi .$$

où $\omega_0^2 = \omega_1\omega_2$. On retiendra le signe moins d'après la valeur intermédiaire.

Le diagramme de Bode est tracé en Fig. 35 (les asymptotes pour le gain sont en tirets).

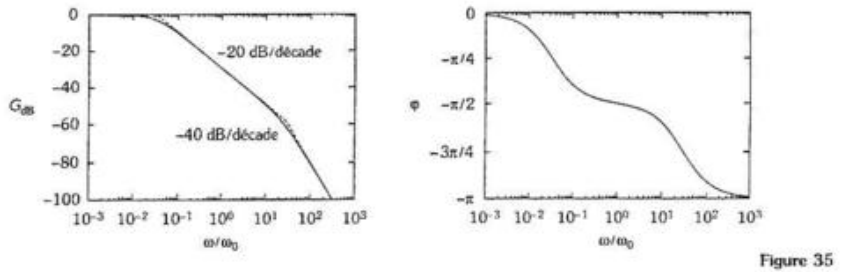


Figure 35

b) On pense assez rapidement au filtre RC de la figure 36 dont la fonction de transfert est $\underline{H}(j\omega) = 1/(1+jRC\omega)$. Cependant, en placer deux en cascades comme sur la figure 37 (avec $R_1C_1\omega_1 = 1$ et $R_2C_2\omega_2 = 1$) n'est pas une solution. En effet, l'intensité i sortant du premier filtre est différente de 0, condition requise pour obtenir la fonction de transfert précédente. Il faut intercaler un circuit *suiveur* (Fig. 38). Ainsi, le courant sortant du premier filtre est nul, alors que la tension est intégralement reportée à l'entrée du second filtre.

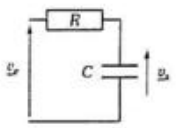


Figure 36

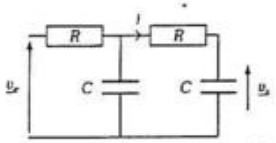


Figure 37

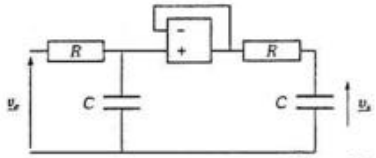


Figure 38

On peut aussi utiliser un filtre *RLC*, comme sur la figure 39. La fonction de transfert vaut :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1/jC\omega}{R + j(L\omega - 1/C\omega)} = \frac{1}{1 + jRC\omega - LC\omega^2}$$

à comparer à :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_1}\right)\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_2}\right)} = \frac{1}{1 + j\omega\left(\frac{1}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_2}\right) - \frac{\omega^2}{\omega_1\omega_2}}.$$

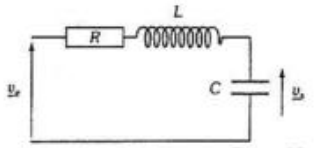


Figure 39

Les deux filtres sont identiques si : $\omega_1\omega_2 = \frac{1}{LC}$ et $\frac{\omega_1\omega_2}{\omega_1 + \omega_2} = \frac{1}{RC}$.

La seconde condition se réécrit : $\omega_1 + \omega_2 = R/L$.

Comme $\omega_1 \ll \omega_2$, on déduit : $\omega_2 = \frac{R}{L}$ et $\omega_1 = \frac{1}{RC}$.

5. Filtre pseudo-dérivateur — D'après Oral CCP

On considère le montage tracé en Fig. 40. L'amplificateur opérationnel est idéal et fonctionne en régime linéaire.

a) Trouver qualitativement la nature du filtre.

b) Calculer la fonction de transfert et la mettre sous la forme :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}.$$

Que valent Q et ω_0 ? *On donne :* $R = 100\,\Omega$ et $C = 0{,}1\,\mu F$.

c) On place en entrée le signal en triangle de la figure 41 avec $T = 10^{-2}$ s. Décrire le signal de sortie.

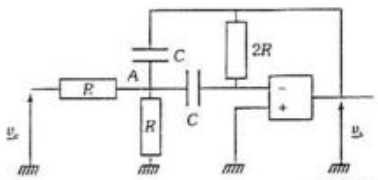


Figure 40

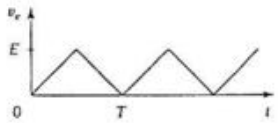


Figure 41

© Larousse – La photocopie non autorisée est un délit

Conseils méthodologiques. *Cet exercice utilise simultanément les techniques des savoir-faire 3 (action d'un filtre sur un signal périodique) et 4 (filtres pseudo-intégrateurs ou dérivateurs).*

a) On considère les limites basse et haute pulsations :

- À basse pulsation, les condensateurs sont équivalents à un interrupteur ouvert et le schéma se réduit à celui de la figure 42. Alors, $\underline{v}_s = \underline{v}_-$ car le courant parcourant la résistance $2R$ est nul (il est égal à celui entrant dans l'entrée inverseuse). Comme $\underline{v}_- = \underline{v}_+$, on déduit $\underline{v}_s = 0$.
- À haute pulsation, les condensateurs sont équivalents à un fil et le schéma se réduit à celui de la figure 43. Alors, clairement, $\underline{v}_s = \underline{v}_-$. Comme $\underline{v}_- = \underline{v}_+$, on déduit $\underline{v}_s = 0$.

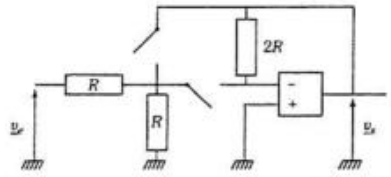


Figure 42

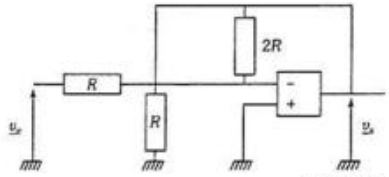


Figure 43

Le filtre est un **passe-bande**.

b) On applique le théorème de Millman successivement :

- en A :

$$\underline{v}_A = \frac{\frac{\underline{v}_e}{R} + jC\omega\underline{v}_s + jC\omega\underline{v}_- + \frac{0}{R}}{\frac{1}{R} + jC\omega + jC\omega + \frac{1}{R}},$$

avec $\underline{v}_- = 0$:

- à l'entrée inverseuse :

$$\underline{v}_- = 0 = \frac{\frac{\underline{v}_s}{2R} + jC\omega\underline{v}_A}{\frac{1}{2R} + jC\omega},$$

soit : $\underline{v}_A = -\underline{v}_s/(2jRC\omega)$.

On reporte l'expression de $\underline{v}_A$ dans la première expression :

$$-\frac{\underline{v}_s}{2jRC\omega}\left(\frac{2}{R} + 2jC\omega\right) = \frac{\underline{v}_e}{R} + jC\omega\underline{v}_s.$$

soit : $-2\underline{v}_s(1 + jRC\omega) = 2jRC\omega(\underline{v}_e + jRC\omega\underline{v}_s)$.

On isole $\underline{v}_e$ et $\underline{v}_s$: $\underline{v}_s(2 + 2jRC\omega - 2R^2C^2\omega^2) = -2jRC\omega\underline{v}_e$.

Au final :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{v}_s}{\underline{v}_e} = \frac{-jRC\omega}{1 + jRC\omega - R^2C^2\omega^2} = \boxed{\frac{-1}{1 + j\left(RC\omega - \frac{1}{RC\omega}\right)}}$$

L'expression est bien de la forme désirée avec $\boxed{H_0 = -1}$, $\boxed{\omega_0 = 1/RC}$ et $\boxed{Q = 1}$.

Numériquement : $\omega_0 = 10^5$ rad · s^{-1}, soit : $\boxed{f_0 = 16\text{ kHz}}$.

c) Le signal d'entrée est de basse fréquence : $f = 100$ Hz.

En effet, la fréquence de résonance est $f_0 = 16$ kHz et la bande-passante est $\Delta f = f_0/Q$.

Remarque

Rappelons la définition du facteur de qualité : $Q = f_0/\Delta f$

On peut donc penser approximer la fonction de transfert par :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{-1}{1+j\left(RC\omega - \frac{1}{RC\omega}\right)} \approx \frac{-1}{\frac{-j}{RC\omega}} = -jRC\omega .$$

Vérifions numériquement : $RC\omega = 10^{-3}$, ce qui légitime l'approximation réalisée.

Le filtre joue le rôle de *pseudo-dérivateur*, avec inversion de signe (et atténuation car $\underline{H} \ll 1$ dans le domaine spectral considéré) : $v_s = -RC\dfrac{dv_e}{dt}$.

En particulier, le filtre coupe la composante continue ($\underline{H}(0) = 0$).

L'aspect est donné en Fig. 44.

Remarque

L'approximation reste valable pour une bonne partie des harmoniques de v_e (de rang $n \leqslant 50$)

Remarque

La dérivation d'une fonction affine est une constante.

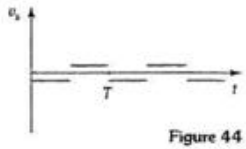


Figure 44

6. Exemple de filtrage — D'après Centrale-Supelec

On considère le filtre représenté en Fig. 45. On donne les valeurs :
$R = 80\,\Omega$, $L = 200\,\text{mH}$ et $C = 10\,\mu\text{F}$, et on pose $\omega_0^2 LC = 1$.

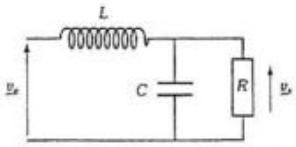


Figure 45

a) Par un raisonnement qualitatif, donner la nature du filtre.

b) Déterminer la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{\underline{v}_s}{\underline{v}_e}$.

c) Tracer la courbe $|\underline{H}(j\omega)|$. En déduire l'ordre de grandeur de la pulsation de coupure.

d) Le filtre est alimenté par une fonction périodique $e(t)$ de fréquence $f = 1/T = 1\,000\,\text{Hz}$, représentée en Fig. 46. On appelle $\alpha = T_f/T$ le rapport cyclique. On décompose $e(t)$ sous la forme :

$$e(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t))$$

avec $\omega = 2\pi/T$. Déterminer les coefficients a_n et b_n en fonction de V_0 et α.

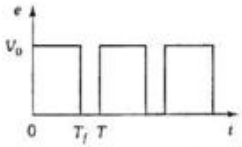


Figure 46

e) On écrit : $e(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cos(n\omega t + \Phi_n)$

avec $c_n \geqslant 0$. Déterminer c_n en fonction de V_0 et α.

f) On se propose de déterminer le signal de sortie $s(t)$. Expliquer pourquoi la tension de sortie $s(t)$ est sensiblement constante dans le temps. Déterminer la valeur s_m de cette constante en fonction de V_0 et α.

g) Vérifier que pour obtenir un ordre de grandeur convenable de l'ondulation résiduelle de la tension de sortie s, il suffit de ne considérer dans le calcul que le fondamental de la série de Fourier. On calculera son rapport avec l'harmonique $n = 2$ pour $\alpha = 3/4$.

h) Déterminer alors l'ondulation $\Delta s = s_{max} - s_{min}$ de la tension de sortie. En déduire le taux d'ondulation $\Delta s/s_m$. Calculer sa valeur numérique.

© Lavoisier – La photocopie non autorisée est un délit

Conseils méthodologiques. Ce problème récapitulatif utilise les savoir-faire 1 (étude d'un filtre), 2 (décomposition en série de Fourier d'un signal) et 3 (action d'un filtre sur un signal périodique).

a) À basse pulsation, l'inductance est équivalente à un fil. On déduit alors immédiatement $v_s = v_e$.
À haute pulsation, le condensateur est équivalent à un fil. Alors, la tension de sortie v_s est nulle.
Le filtre est **passe-bas**.

b) On appelle $\underline{Z}_{eq}$ la résistance équivalente de l'ensemble $R \parallel C$:

$$\underline{Z}_{eq} = \frac{R/jC\omega}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{R}{1+jRC\omega} .$$

Le montage est alors équivalent à celui de la figure 47. On remarque un diviseur de tension :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{Z}_{eq}}{\underline{Z}_{eq} + jL\omega} = \frac{R}{R + jL\omega(1+jRC\omega)} = \boxed{\frac{1}{1 - LC\omega^2 + \frac{jL\omega}{R}}} .$$

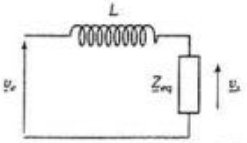


Figure 47

Cette expression est bien celle d'un filtre passe-bas

c) On évalue le module : $|\underline{H}(j\omega)| = 1/\sqrt{f(\omega)}$, avec :

$$f(\omega) = (1 - LC\omega^2)^2 + \frac{L^2\omega^2}{R^2} = 1 + \omega^2\left(\frac{L^2}{R^2} - 2LC\right) + L^2C^2\omega^4 .$$

L'application numérique donne $f(\omega) = 1 + 2.5 \cdot 10^{-6}[\omega]^2 + 4 \cdot 10^{-12}[\omega]^4$, où $[\omega]$ est la valeur numérique de ω en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

Le gain (module de la fonction de transfert) est tracé en Fig. 48.
On cherche quand $|\underline{H}| = H_{max}/\sqrt{2} \approx 0{,}7$.
La figure indique $\boxed{\omega_c \approx 70\ \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}}$.

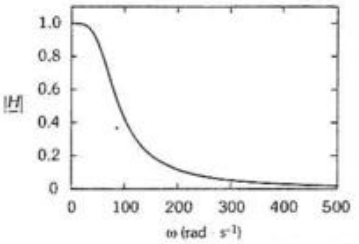


Figure 48

d) Cette question a été intégralement traitée dans le savoir-faire 2.
On obtient :

$$\boxed{a_0 = \alpha V_0} , \quad \boxed{a_n = \frac{V_0}{n\pi}\sin(2\pi n\alpha)} \text{ et } \boxed{b_n = \frac{V_0}{n\pi}(1 - \cos(2\pi n\alpha))} .$$

e) Déjà, on identifie les valeurs moyennes : $\boxed{c_0 = a_0 = \alpha V_0}$.
Ensuite, on transforme la somme d'un sinus et cosinus de même période selon :

$$a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t) = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}\left(\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}\cos(n\omega t) + \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}\sin(n\omega t)\right) .$$

En posant $\cos\Phi_n = a_n/\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ et $\sin\Phi_n = b_n/\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, on obtient :

$$a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t) = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}\cos(n\omega t - \Phi_n) .$$

On déduit alors :

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \frac{V_0}{n\pi}\sqrt{\sin^2(2\pi n\alpha) + (1 - \cos(2\pi n\alpha))^2} = \boxed{\frac{2V_0}{n\pi}|\sin(\pi n\alpha)|}.$$

f) L'énoncé suggère que seule la composante constante de $e(t)$ passe. Essayons de comprendre ce phénomène.

Rappelons que le signal $e(t)$ est la somme d'un terme constant et de sinusoïdes de fréquence $nf = n \cdot 1\,000\,\text{Hz}$. Tous les termes sinusoïdaux sont très atténués car ils sont nettement en dehors de la bande passante [0 – 70 Hz]. En sortie, seul subsiste quasiment le terme constant.

Comme $\underline{H}(0) = 1$, $\boxed{s(t) \approx s_m = 1 \cdot a_0 = \alpha V_0}$.

g) Reprenons le raisonnement précédent, mais de manière plus quantitative :

- $\underline{H}(0) = 1$: la composante continue passe intégralement ;
- $|\underline{H}(\omega = 2\pi f)| = 1{,}3 \cdot 10^{-2}$: le fondamental est très atténué (son amplitude est multipliée par 0,013) ;
- $|\underline{H}(\omega = 4\pi f)| = 3{,}2 \cdot 10^{-3}$: l'harmonique $n = 2$ est encore plus atténué.

En sortie, l'amplitude du fondamental est ainsi $|\underline{H}(2\pi f)|c_1$ alors que celle de l'harmonique $n = 2$ est $|\underline{H}(4\pi f)|c_2$. Le rapport de ces deux amplitudes est donc :

$$\frac{|\underline{H}(4\pi f)|c_2}{|\underline{H}(2\pi f)|c_1} = \frac{3{,}2 \cdot 10^{-3}\dfrac{V_0}{2\pi}|\sin(2\pi\alpha)|}{1{,}3 \cdot 10^{-2}\dfrac{V_0}{\pi}|\sin(\pi\alpha)|} = |\cos(\pi\alpha)|\frac{3{,}2 \cdot 10^{-3}}{1{,}3 \cdot 10^{-2}} \approx \boxed{0{,}17}.$$

Négliger l'harmonique $n = 2$ par rapport au fondamental constitue une erreur de 17 %. C'est une assez bonne approximation.

h) D'après la question précédente, l'amplitude du fondamental du signal de sortie est $|\underline{H}(2\pi f)|c_1$.

Alors (Fig. 49) :

$$\Delta s = 2|\underline{H}(2\pi f)|c_1 = |\underline{H}(2\pi f)|\frac{4V_0}{\pi}|\sin(\pi\alpha)|.$$

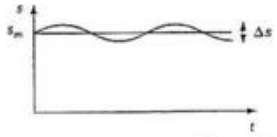


Figure 49

Finalement, le taux d'ondulation vaut :

$$\frac{\Delta s}{s_m} = \frac{4}{\pi\alpha}|\underline{H}(2\pi f)| \cdot |\sin(\pi\alpha)| \approx 1{,}5 \cdot 10^{-2}.$$

Le signal de sortie est constant à 1,5 % près.

© Eyrolles – La photocopie non autorisée est un délit

Pour approfondir

7. Étude d'un sismographe — D'après Mines-Ponts

Un sismographe est typiquement constitué d'une masse M attachée à un ressort de raideur k et longueur à vide ℓ_0 (Fig. 50). Le ressort est fixé à un bâti lié au sol. Un dispositif non représenté assure un amortissement sur la masse se traduisant par la force : $\vec{f} = -h\vec{v}$, où $\vec{v}$ est la vitesse de la masse par rapport au bâti. L'axe Oz est lié au sol (et au bâti).

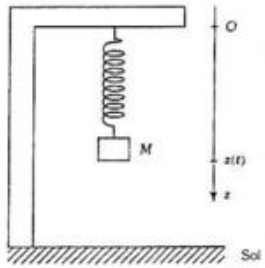


Figure 50

a) En l'absence de séisme, le référentiel lié au sol est supposé galiléen. Quelle est la longueur du ressort au repos ℓ_0' ?

b) Quand un séisme intervient, le sol subit un déplacement $Z(t)$ (l'orientation de $\vec{u}_z$ est aussi vers le bas) par rapport à un référentiel galiléen. Le référentiel lié au sol est-il alors galiléen ?

c) On pose $u(t) = z(t) - \ell_0'$. Montrer que : $\ddot{u} + \frac{\sqrt{2}}{\tau}\dot{u} + \omega_0^2 u = \alpha\ddot{Z}$.

On précisera la valeur et l'homogénéité de τ, ω_0, et α. On explicitera aussi leur interprétation physique.

d) On se place désormais en régime sinusoïdal forcé. Notamment, $\underline{Z}(t) = Z_0\exp(j\omega t)$. Donner l'expression de la fonction de transfert mécanique $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{u}}{\underline{Z}}$ dans le cas $\omega_0\tau = 1$ (on mettra $\underline{H}$ sous forme d'une fonction de ω_0/ω).

e) Tracer son diagramme de Bode. Quel type de filtre a-t-on réalisé ?

f) La pulsation propre du sismomètre étant $\omega_0 = 20\ \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$, l'appareil détecte une onde sismique sous la forme de la fonction périodique $u(t)$. L'application d'un algorithme de transformée de Fourier fournit le spectre c_n tracé en Fig. 51. Quelle est la période de cette onde ?

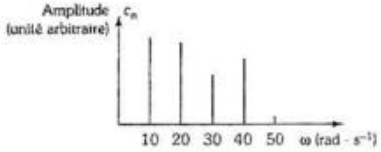


Figure 51

g) Montrer qu'il est possible d'obtenir l'excitation $Z(t)$ sous la forme $Z(t) = \sum_{n>0} c_n'\cos(n\omega t + \varphi_n')$ et expliciter les c_n' en fonction des c_n notamment.

h) Comment devrait-on modifier les caractéristiques du sismomètre afin que l'enregistrement de $u(t)$ permette de déduire directement $Z(t)$?

i) En considérant l'allure du diagramme de Bode en amplitude pour $\omega_0\tau > 1$, expliquer pourquoi le choix $\omega_0\tau > 1$ doit absolument être évité.

Conseils méthodologiques. On étudie dans ce problème le principe du sismomètre. Les premières questions nécessitent des notions de mécanique du point de première année, notamment en ce qui concerne les référentiels non galiléens. La suite du problème fait principalement appel aux savoir-faire 2 (décomposition d'une fonction en série de Fourier) et 3 (action d'un filtre sur une fonction périodique).

a) On applique la relation fondamentale de la dynamique à la masse M, en projection sur $\vec{u}_z$, dans le référentiel lié au sol : $0 = Mg - k(\ell'_0 - \ell_0)$. En effet, l'accélération et la force de frottement sont nulles à l'équilibre. On obtient :

$$\boxed{\ell'_0 = \ell_0 + \frac{Mg}{k}}.$$

La longueur du ressort à l'équilibre est plus importante que celle à vide, à cause de la pesanteur.

b) Le référentiel lié au sol est en translation rectiligne *a priori* non uniforme par rapport à un référentiel galiléen : il n'est donc pas galiléen (sauf si $Z(t)$ est une fonction affine du temps, ce qui serait étonnant lors d'un séisme !).

c) Appliquons à nouveau la relation fondamentale de la dynamique pour la masse M dans le référentiel lié au sol et en projection sur $\vec{u}_z$. Ce référentiel étant non galiléen, il faut prendre en compte les forces d'inertie :

$$M\ddot{z}(t) = Mg - h\dot{z}(t) - k(z(t) - \ell_0) + \vec{f}_{\text{inertie}} \cdot \vec{u}_z.$$

Comme le référentiel est en translation par rapport à un référentiel galiléen, la force d'inertie est simplement $\vec{f}_{\text{inertie}} = -M\ddot{Z}(t)\vec{u}_z$. On obtient alors, en effectuant le changement de variable $u(t) = z(t) - \ell'_0$ (avec $\dot{u}(t) = \dot{z}(t)$),

$$\boxed{\ddot{u}(t) + \frac{h}{M}\dot{u}(t) + \frac{k}{M}u(t) = -\ddot{Z}(t)}.$$

On identifie alors $\boxed{\alpha = -1}$, $\boxed{\omega_0 = \sqrt{k/M}}$ est la pulsation propre de l'oscillateur (période des oscillations libres sans frottement) et $\boxed{\tau = \sqrt{2}M/h}$ est un temps s'interprétant comme la durée typique du régime transitoire.

Remarque

Comme $\dot{u}(t)/\tau$ est homogène à $u(t)$, τ est nécessairement un temps.

d) On reporte dans l'équation différentielle précédente la forme de u et Z :

$$\left(-\omega^2 + \frac{\sqrt{2}}{\tau}(j\omega) + \omega_0^2\right)\underline{u} = +\omega^2\underline{Z}.$$

Ainsi :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{u}}{\underline{Z}} = \frac{\omega^2}{-\omega^2 + j\frac{\sqrt{2}}{\tau}\omega + \omega_0^2} = \frac{\omega^2}{-\omega^2 + j\sqrt{2}\omega_0\omega + \omega_0^2}$$

$$\boxed{\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{-1 + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} + j\sqrt{2}\frac{\omega_0}{\omega}}}.$$

Remarque

La fonction de transfert est bien le quotient de la quantité observée (déplacement de la masse) sur la cause (déplacement du sol).

e) Afin de tracer aisément son diagramme de Bode, on étudie les limites habituelles :

- $\omega \ll \omega_0$: $\underline{H} \sim \omega^2/\omega_0^2$, soit : $G_{\text{dB}} \sim -40\log\frac{\omega}{\omega_0}$ et $\varphi \to 0$;
- $\omega = \omega_0$: $\underline{H} = 1/j\sqrt{2}$, soit : $G_{\text{dB}} = -3\text{dB}$ et $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ (c'est la pulsation de coupure) ;
- $\omega \gg \omega_0$: $\underline{H} \sim -1$, soit : $G_{\text{dB}} \to 0$ et $\varphi \to \pm\pi$ (la valeur intermédiaire indique de choisir le signe moins).

Afin de conclure, il convient de vérifier que le filtre n'est pas résonant.

On évalue :

$$|\underline{H}(j\omega)|^2 = \frac{1}{(u^2-1)^2 + 2u^2} = \frac{1}{1+u^4},$$

où $u = \omega_0/\omega$. La fonction de transfert est bien monotone.

Remarque

La fonction de transfert est monotone pour $\omega_0\tau \leqslant 1$ et le filtre est résonant pour $\omega_0\tau > 1$.

Le diagramme de Bode est tracé en Fig. 52. Le filtre est *passe-haut* du deuxième ordre.

© Lavoisier - La photocopie non autorisée est un délit

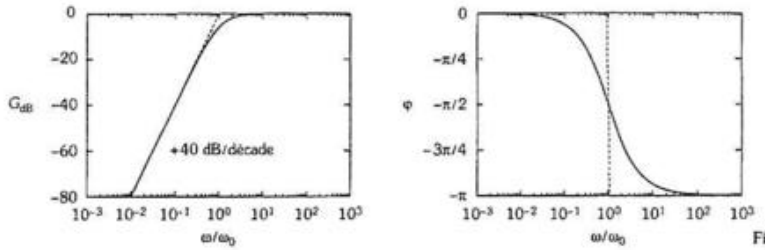


Figure 52

f) Les pulsations présentes dans le spectre sont toutes multiples de $\omega = 10\ \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$. La période de la fonction est donc :

$$\boxed{T = 2\pi/\omega = 0{,}63\ \text{s}}.$$

g) Il est possible d'exprimer $Z(t)$ en fonction de $u(t)$, en utilisant le filtre de fonction de transfert :

$$\underline{H}'(j\omega) = \underline{H}^{-1}(j\omega) = \frac{\underline{Z}}{\underline{u}}.$$

Sachant que $u(t) = \sum_{n>0} c_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$ (le poids du pic de fréquence nulle sur la figure 51 est nul, soit $c_0 = 0$), la relation générale entre l'entrée et la sortie d'un filtre indique :

$$Z(t) = \sum_{n>0} \frac{1}{|\underline{H}(jn\omega)|} \cos(n\omega t + \varphi'_n),$$

où $\varphi'_n = \varphi_n - \text{Arg}\,\underline{H}(jn\omega)$. On déduit $\boxed{c'_n = c_n/|\underline{H}(jn\omega)|}$.

En d'autres termes, il est possible de remonter à $Z(t)$ par la mesure de $u(t)$.

h) On aimerait avoir la relation $Z(t) = \pm u(t)$. Pour ce faire, il est indispensable que $\underline{H} = \pm 1$ dans toute la gamme de pulsation où $u(t)$ possède un poids spectral conséquent. Cela est possible dans la zone $\omega \gg \omega_0$.

ω n'est pas modifiable (elle est liée à la période de la secousse). Il faut ainsi diminuer $\omega_0 = \sqrt{k/M}$.

i) Dans ce cas, on a montré en question **e)** que le filtre serait résonant. Le système pourrait alors amplifier de manière très importante un signal de la pulsation de résonance (qui est aux alentours de ω_0, c'est-à-dire proche de celle de l'harmonique $n = 2$ de la secousse considérée ici). Le déplacement $u(t)$ de la masse serait alors quasi sinusoïdal à cette pulsation, et il serait difficile de recueillir avec précision les amplitudes des autres harmoniques (elles seraient très faibles par rapport à celle de l'harmonique amplifié). La reconstruction de $Z(t)$ serait alors peu précise.

8. Circuit déphaseur — D'après Oral Centrale-Supelec

Considérons le montage de la figure 53.

a) Quelle est sa fonction de transfert $\underline{H} = \underline{v}_s/\underline{v}_e$?

b) Vérifier les limites basse et haute pulsation sans calcul.

c) Quelle est l'allure du diagramme de Bode ?

d) Expliquer l'utilité d'un tel montage.

e) Le signal d'entrée $v_e(t)$ est T-périodique. À quelle condition le signal de sortie est-il de la forme $v_s(t) = v_e(t - \tau)$? Quelle est alors l'expression de τ ? On posera $\omega_0 = 1/RC$.

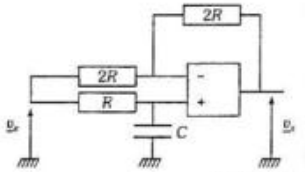


Figure 53

Conseils méthodologiques. Ce montage très particulier met en œuvre les savoir-faire 1 (calcul des fonctions de transfert) et 3 (effet d'un filtre sur un signal périodique).

a) On suppose que l'amplificateur opérationnel est idéal et fonctionne en régime linéaire. Par conséquent, $\underline{v}_+ = \underline{v}_-$.

On évalue les potentiels des entrées inverseuse et non inverseuse par le théorème de Millman (ou par un diviseur de tension), sachant qu'aucun courant ne pénètre dans l'amplificateur opérationnel par les entrées inverseuse et non inverseuse :

$$\underline{v}_+ = \frac{\frac{\underline{v}_e}{R} + jC\omega 0}{jC\omega + \frac{1}{R}} = \frac{\underline{v}_e}{1+jRC\omega} \qquad \underline{v}_- = \frac{\frac{\underline{v}_e}{2R} + \frac{\underline{v}_s}{2R}}{\frac{1}{2R} + \frac{1}{2R}} = \frac{\underline{v}_e + \underline{v}_s}{2}.$$

L'égalité de ces deux potentiels implique :

$$2\underline{v}_e = (\underline{v}_e + \underline{v}_s)(1+jRC\omega).$$

Finalement : $\boxed{\underline{H} = \frac{\underline{v}_s}{\underline{v}_e} = \frac{1-jRC\omega}{1+jRC\omega}}$.

b) À basse pulsation, le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert (Fig. 54). Le courant i est nul (rappelons qu'aucun courant ne pénètre dans l'entrée non inverseuse). Alors, $\underline{v}_+ = \underline{v}_e$ car la tension aux bornes de la résistance R est nulle.

Comme $\underline{v}_- = \underline{v}_+ = \underline{v}_e$, on déduit qu'aucun courant ne traverse la résistance $2R$ de gauche (les deux bornes sont au même potentiel). Par conséquent, la loi des nœuds à l'entrée inverseuse montre que le courant traversant la seconde résistance $2R$ est aussi nul. On déduit $\underline{v}_s = \underline{v}_e$, soit $\underline{H}(0) = 1$.

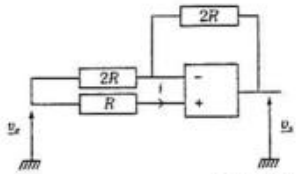


Figure 54

À haute pulsation, le condensateur est équivalent à un fil. Alors, $\underline{v}_+ = 0$.

Le même courant i' traverse les deux résistances $2R$:

$$i' = \frac{\underline{v}_e - \underline{v}_-}{2R} = \frac{\underline{v}_- - \underline{v}_s}{2R}, \quad \text{soit} : \underline{v}_s = -\underline{v}_e.$$

vu la valeur nulle de $\underline{v}_-$. La limite de $\underline{H}$ à haute pulsation est -1.

Erreur à éviter

Bien exploiter sans se tromper la situation particulière du circuit

La valeur de la fonction de transfert $\underline{H}$ évaluée à la question a) est cohérente avec ces deux résultats.

c) Tout d'abord, on remarque que $\boxed{|\underline{H}| = 1}$ car la fonction de transfert est égale au quotient d'un complexe par son conjugué. Ainsi :

$$\boxed{G_{dB} = 20\log|\underline{H}| = 0}.$$

Pour tracer la phase, on peut se contenter des limites suivantes :

$\omega \ll \omega_0$ $\underline{H} \to 1$ $\varphi \to 0$

$\omega = \omega_0$ $\underline{H} = \frac{1-j}{1+j}$ $\varphi = -\frac{\pi}{2}$

$\omega \gg \omega_0$ $\underline{H} \to -1$ $\varphi \to \pm\pi$

(vraisemblablement, par continuité, la phase à haute pulsation est $-\pi$).

L'allure est tracée en Fig. 55.

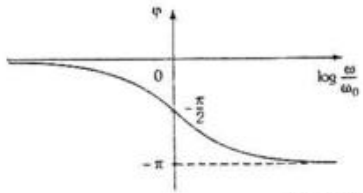


Figure 55

On aurait aussi pu obtenir une expression explicite de la phase :

$$\varphi = \operatorname{Arg}\underline{H} = \operatorname{Arg}(1-j\omega RC) - \operatorname{Arg}(1+j\omega RC)$$
$$= -2\operatorname{Arctan}(RC\omega).$$

© Lavoisier – La photocopie non autorisée est un délit

d) Le filtre n'amplifie pas le signal et ne l'atténue pas. En revanche, il le déphase. C'est un circuit *déphaseur*.

e) Comme $v_e(t)$ est T-périodique, on peut la développer en série de Fourier, par exemple sous forme complexe :

$$v_e(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \underline{c}_n \exp\left(jn\frac{2\pi}{T}t\right).$$

En sortie du filtre, on obtient :

$$v_s(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \underline{H}\left(jn\frac{2\pi}{T}\right)\underline{c}_n \exp\left(jn\frac{2\pi}{T}t\right),$$

alors qu'on désire :

$$v_s(t) = v_e(t-\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \underline{c}_n \exp\left(jn\frac{2\pi}{T}(t-\tau)\right).$$

Par identification, on obtient l'égalité :

$$\underline{H}\left(jn\frac{2\pi}{T}\right) = \exp\left(-jn\frac{2\pi}{T}\tau\right), \quad \text{soit} : \underline{H}(j\omega) = \exp(-j\omega\tau).$$

Technique de calcul

On utilise en fait la liberté de la famille $(\exp(jn\omega t))$.

Vu la forme exacte de la fonction de transfert, il faudrait :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1-jRC\omega}{1+jRC\omega} \approx \exp(-j\omega\tau).$$

En passant aux arguments, l'égalité s'écrit : $-2\operatorname{Arctan}(RC\omega) = -2\omega\tau$.

L'égalité précédente se vérifie dans la limite $RC\omega \ll 1$: le filtre effectue l'opération demandée si la fonction possède la majeure partie de son poids spectral dans ce domaine. C'est le cas si $\boxed{T \gg RC}$.

Alors, le décalage temporel est $\boxed{\tau = RC}$.

9. Accident de plongée — D'après Mines-Ponts

Lors d'une plongée, le détendeur équilibre la pression de l'air inhalé dans les poumons avec celle de l'eau environnante. Cet air est principalement composé d'oxygène (21 %) et d'azote (78 %). L'azote est un gaz diluant qui, au cours de la descente, se dissout par diffusion dans le sang puis dans les tissus. À température constante et à saturation, la quantité de gaz dissous dans un liquide est proportionnelle à la pression exercée par ce gaz sur le liquide ; la quantité d'azote qui se dissout dans l'organisme d'un plongeur augmente donc avec la profondeur. Ce phénomène engendre des problèmes lorsque le plongeur remonte trop vite à la surface : l'azote dissous, sous l'effet de la diminution de la pression, reprend sa forme gazeuse. Des bulles apparaissent alors dans l'organisme du plongeur. Dans 90 % des cas, les accidents de décompression sont localisés dans les articulations, particulièrement au niveau des tissus cartilagineux. Une hypothèse couramment admise (dite hypothèse de Hempleman) est que ces accidents surviennent lorsque la masse d'azote stockée dans les cartilages dépasse une valeur critique.

a) Le cartilage n'étant pas irrigué par le sang, les échanges entre sang et cartilage ont lieu uniquement par diffusion, supposée unidirectionnelle, suivant Ox (Fig. 56). La concentration d'azote $C(x,t)$ dans le cartilage d'épaisseur L $(0 \leqslant x \leqslant L)$ est supposée régie par l'équation de diffusion :

$$D\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = \frac{\partial C}{\partial t}, \text{ où la constante } D \text{ est le coefficient de diffusion.}$$

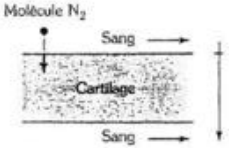


Figure 56

On cherche, pour cette équation, des solutions de la forme $C(x,t) = K + f(x)g(t)$, où K est une constante. Déterminer les équations différentielles vérifiées par $f(x)$ et $g(t)$. On introduira dans ces équations une constante q homogène à l'inverse d'une longueur (et qui n'intervient, à ce stade, que par son carré).

b) Montrer que, q étant fixé, la solution physiquement acceptable de l'équation de diffusion, $C_q(x,t)$, peut s'écrire : $C_q(x,t) = K_q + F_q(x,t)$ avec $F_q(x,t) = [A_q\cos(qx) + B_q\sin(qx)]\exp(-Dq^2t)$.

c) Le plongeur atteint la cote z au temps $t = 0$, puis reste à cette profondeur : le temps mis pour atteindre cette cote est négligeable. On note $C_s(z)$ la concentration en azote du sang du plongeur à la profondeur z.

Déterminer les valeurs autorisées de q et les expressions de K_q, A_q et B_q, les conditions aux limites étant $C_q(0,t) = C_q(L,t) = C_s(z)$.

d) Imposons à présent à la solution de l'équation de diffusion la forme $C(x,t) = K + \sum_q F_q(x,t)$, où $F_q(x,t)$, introduite précédemment, est une fonction périodique de la variable x.

Quelle est la période spatiale de cette fonction ? Déterminer alors l'expression de $C(x,t)$ à la profondeur z. On notera C_0 la concentration à saturation, homogène et à l'air libre, de l'azote dans le sang et on utilisera la condition initiale $C(x,0) = C_0$.

Conseils méthodologiques. Cette application des séries de Fourier pour la résolution de l'équation de diffusion utilise le savoir-faire 2 (décomposition d'un signal en série de Fourier).

a) On introduit la forme proposée dans l'équation de diffusion :

$$Df''(x)g(t) = f(x)g'(t)\ .$$

On sépare les variables :

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{1}{D}\frac{g'(t)}{g(t)} = \text{cte}\ .$$

En effet, le premier terme ne dépend que de x et le second que de t.

Technique de calcul

Si deux fonctions α et β vérifient $\forall x,t\ ,\ \alpha(x) = \beta(t)$, alors α et β sont constantes et égales.

Résolvons la partie temporelle : $g(t) = g_0\exp(\text{cte}Dt)$.

Afin que la solution ne diverge pas (la concentration en une espèce reste toujours finie), il est nécessaire que cte < 0. On pose cte $= -q^2$. En effet, cte est homogène à l'inverse du carré d'une longueur :

$$\text{cte} = f''/f,\quad \text{soit :}\ [\text{cte}] = ([f]/L^2)/[f] = 1/L^2\ .$$

Alors : $\boxed{f''(x) + q^2f(x) = 0}$ et $\boxed{g'(t) + qDg(t) = 0}$.

b) On intègre les deux équations précédentes : $f(x) = A\cos qx + B\sin qx$ et $g(t) = g_0\exp(-q^2Dt)$. On intègre la constante g_0 dans A et B, soit $A_q = Ag_0$ et $B_q = Bg_0$. K_q est une constante quelconque. On obtient alors la forme proposée par l'énoncé.

Remarque

La solution physiquement acceptable provient du signe de la constante déterminé à la question a).

c) On utilise la solution obtenue à la question précédente, sachant que les valeurs en $x = 0$ et $x = L$ sont indépendantes du temps car égales à $C_s(z)$. Commençons par considérer $x = 0$:

$$C_s(z) = K_q + (A_q\cos 0 + B_q\sin 0)\exp(-q^2Dt)$$

pour tout t. Ainsi, $A_q = 0$ et $K_q = C_s(z)$. Ensuite, en $x = L$:

$$C_s(z) = K_q + (B_q\sin qL)\exp(-q^2Dt)$$

pour tout t. Ainsi, $\sin qL = 0$, d'où $qL = n\pi$, où $n \in \mathbb{N}$.

On déduit :

$$\boxed{C(x,t) = C_s(z) + B_n\sin\frac{n\pi x}{L}\exp-\frac{n^2\pi^2Dt}{L^2}}$$

Remarque

B_q (désormais noté B_n) ne se voit pas, pour l'instant, attribuer de valeur définie.

© Lavoisier – La photocopie non autorisée est un délit

d) On somme les fonctions obtenues précédemment :

$$C(x,t) = K + \sum_{n=1}^{\infty} B_n\sin\frac{n\pi x}{L}\exp-\frac{n^2\pi^2Dt}{L^2}\ .$$

Si $K = C_s(z)$, alors les conditions aux limites en $x = 0$ et $x = L$ sont bien vérifiées.

L'expression obtenue fait penser à la série de Fourier d'une fonction impaire, à laquelle on a ajouté une constante (seuls les termes en sinus sont présents) et dont les coefficients dépendent du temps. Rappelons que si la période d'une fonction est T, les termes de sa série de Fourier seront de la forme $\sin\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)$.

Par identification, la période (spatiale) de cette fonction $C(x,t)$ est $\boxed{2L}$.

Il reste à vérifier les conditions initiales : $C(x,0) = C_0$ pour $0 \leq x \leq L$.

Cela implique :

$$\text{sur } 0 \leq x \leq L,\ C_s(z) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n\sin\frac{n\pi x}{L} = C_0$$

Les B_n apparaissent comme les coefficients de Fourier d'une fonction impaire, valant $C_0 - C_s(z)$ sur $[0,L]$. Cette fonction est tracée en Fig. 57.

Alors, d'après les formules de décomposition :

$$B_n = \frac{2}{2L}\int_{-L}^{L}\text{Sgn}(x)(C_0 - C_s(z))\sin\left(n\frac{2\pi}{2L}x\right)dx$$

$$= \frac{4}{2L}(C_0 - C_s(z))\int_0^L\sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right)dx$$

soit :

$$\boxed{B_n = \frac{2}{L}(C_0 - C_s(z))\frac{L}{n\pi}\left[-\cos\left(n\frac{\pi}{L}x\right)\right]_0^L}\ .$$

Au final :

$$B_{2n} = 0\ ,$$

$$B_{2n+1} = \frac{4}{(2n+1)\pi}(C_0 - C_s(z))\ .$$

Alors, la concentration est exactement connue :

$$\boxed{C(x,t) = C_s(z) + \frac{4}{\pi}(C_0 - C_s(z))\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\frac{(2n+1)\pi x}{L}}{2n+1}\exp-\frac{(2n+1)^2\pi^2Dt}{L^2}}$$

On peut alors, en fixant les valeurs des paramètres et en intégrant, calculer la masse d'azote dans le cartilage et déterminer si un problème de décompression survient.

Technique de calcul

La linéarité de l'équation de diffusion permet ce traitement.

Remarque

On a ici une série de Fourier spatiale : il suffit de substituer les variables spatiales aux variables temporelles pour utiliser les résultats du cours.

Erreur à éviter

Bien isoler la somme des sinus (qui correspond à une fonction impaire de période $2L$) des deux termes constants à laquelle la somme s'identifie sur $[0,L]$.

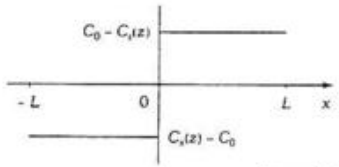


Figure 57

Électrostatique

Méthodes

Le cours en questions

1 ■ Champ et potentiel électrostatiques

1.1 Qu'est-ce qu'une densité volumique/surfacique de charge ?

• Dans le cas d'une charge répartie en volume, on définit la densité volumique de charge comme le quotient de la charge élémentaire contenue dans un volume élémentaire par ce même volume $\rho = \frac{dq}{d\tau}$ (unité : $C \cdot m^{-3}$).

• Similairement, dans le cas d'une charge répartie en surface, on définit la densité surfacique de charge $\sigma = \frac{dq}{dS}$ (unité : $C \cdot m^{-2}$).

Erreur à éviter
Ces deux quantités ne sont pas homogènes entre elles, et il est rigoureusement impossible de substituer l'une à l'autre dans une expression ! La densité volumique intervient notamment dans les équations de Maxwell, et la densité surfacique dans les relations de passage.

1.2 Quelles sont les relations locales vérifiées par le champ et le potentiel électrostatiques ?

• Le champ électrostatique vérifie les deux équations de Maxwell (locales)

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (1) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E} = \vec{0} \quad (2).$$

En coordonnées cartésiennes,

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z},$$

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E} = \begin{vmatrix} \partial/\partial x & E_x \\ \partial/\partial y \wedge & E_y \\ \partial/\partial z & E_z \end{vmatrix} \quad \text{et}$$

$$\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,V = \frac{\partial V}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{u}_z.$$

© Lavoisier – La photocopie non autorisée est un délit

Cette relation est équivalente à l'équation de Maxwell :
$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E} = \vec{0}$.

En coordonnées cartésiennes,
$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$.

Cette équation s'obtient à partir des résultats précédents :
$\operatorname{div}\vec{E} = \operatorname{div}(-\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,V) = -\Delta V = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$.

Démonstration à connaître.

• Le champ et le potentiel vérifient la relation :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,V \quad (3).$$

• L'équation de Poisson relie alors le potentiel aux charges :

$$\Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0.$$

1.3 Rappeler les formes intégrales associées aux équations (1) à (3)

• L'équation de Maxwell-Gauss (1) donne sous forme intégrale le théorème de Gauss :

$$\oiint_{(S)} \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}.$$

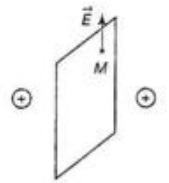
• L'équation de Maxwell-Faraday (2) revient à exprimer la nullité de la circulation du champ électrique sur tout contour fermé :

$$\oint_C \vec{E} \cdot \vec{dl} = 0.$$

• Enfin : $V_2 - V_1 = -\int_1^2 \vec{E} \cdot \vec{dl}$.

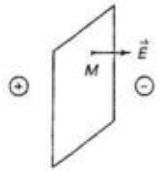
1.4 Quelles sont les propriétés de symétrie du champ électrostatique ?

• Le champ électrique est un vecteur. En tout point M d'un plan de symétrie des charges, il est dirigé selon ce plan (Fig. 1). En tout point M d'un plan d'antisymétrie des charges, il est dirigé perpendiculairement à ce plan (Fig. 2).



Plan de symétrie des charges

Figure 1



Plan d'antisymétrie des charges

Figure 2

• De chaque côté d'un plan de symétrie (antisymétrie) des charges, le champ électrique se transforme en (l'opposé de) son symétrique (Fig. 3) alors que le potentiel est identique (opposé).

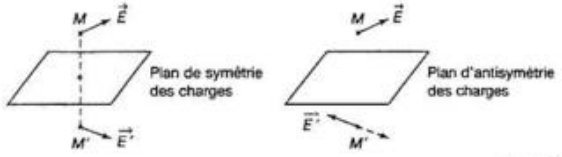


Figure 3

1.5 Donner les expressions des champ et potentiel électrostatiques en fonction des charges.

• Pour des charges discrètes q_i situées en P_i (Fig. 4),

$$\vec{E}(M) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 P_i M^3}\overrightarrow{P_i M} \qquad V(M) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 P_i M} + \text{cte}.$$

• Pour des charges à distribution volumique $\rho(P)$ (Fig. 5),

$$\vec{E}(M) = \iiint_\tau \frac{\rho(P)d\tau}{4\pi\varepsilon_0 PM^3}\overrightarrow{PM} \qquad V(M) = \iiint_\tau \frac{\rho(P)d\tau}{4\pi\varepsilon_0 PM} + \text{cte}.$$

1.6 Comment évaluer en pratique le champ électrostatique ?

• **Après** avoir établi les propriétés d'invariance et de symétrie, il existe en pratique deux possibilités.

• Si les symétries et invariances sont suffisantes, il faut appliquer le théorème de Gauss.

• En toute généralité, on calcule le champ électrique à partir des expressions données en **1.5**, en projetant éventuellement sur la direction du champ si elle est connue.

1.7 Rappeler les relations de passage vérifiées par le champ et le potentiel.

• La composante tangentielle du champ électrique est toujours continue. En revanche, à la traversée d'une distribution surfacique de charges, la composante normale du champ électrique est discontinue. Au final, on obtient (Fig. 6)

$$\vec{E}(M_2) - \vec{E}(M_1) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}_{12}.$$

• En revanche, le potentiel V est toujours continu.

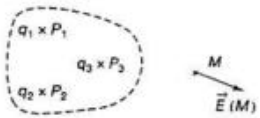


Figure 4

Figure 5

On substitue :
$q_i \rightsquigarrow \rho(P)d\tau$ et $\sum_i \rightsquigarrow \iiint_\tau$.

On peut aussi procéder à l'aide des équations locales énoncées en **1.2**, ou partir de l'expression du potentiel (cas du dipôle électrostatique).

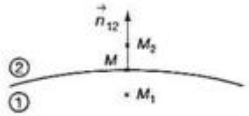


Figure 6

Erreur à éviter
Les relations de passage sont des conséquences des équations de Maxwell. L'utilisation directe des équations de Maxwell sur une surface chargée est à proscrire ; il faut se servir des relations de passage.

En effet, sa dérivée spatiale, le champ électrique, doit rester finie.

© Lavoisier - La photocopie non autorisée est un délit

2 ■ Équilibre électrostatique des conducteurs

2.1 Comment définir un conducteur à l'équilibre électrostatique ?

• Un conducteur est un milieu dans lequel peut circuler un courant macroscopique. L'exemple typique est constitué des conducteurs ohmiques qui vérifient $\vec{j} = \gamma\vec{E}$.

• Un conducteur est à l'équilibre électrostatique si aucun courant macroscopique n'existe dans ce conducteur : $\vec{j} = \vec{0}$ en tout point.

2.2 Quelles sont ses propriétés ?

• À l'intérieur, le champ électrique est nul, ainsi que la densité volumique de charge : $\vec{E} = \vec{0}$ et $\rho = 0$ dans un conducteur à l'équilibre.

Démonstration à connaître.

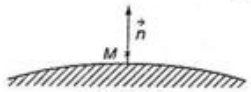


Figure 7

• Le volume du conducteur constitue une équipotentielle.

• À la surface du conducteur peuvent exister des charges surfaciques caractérisées par la densité (surfacique) σ.

• Le champ électrique à la surface d'un conducteur à l'équilibre est $\vec{E}(M) = \frac{\sigma(M)}{\varepsilon_0}\vec{n}$ (Fig. 7), c'est le **théorème de Coulomb**.

Le théorème de Coulomb se déduit aisément des relations de passage.

2.3 Que dire des lignes de champ en présence de conducteurs à l'équilibre électrostatique ?

Une ligne de champ électrique est en tout point colinéaire au champ électrique et de même sens.

Les lignes de champ partent et aboutissent uniquement aux conducteurs et à l'infini. Elles sont orientées dans le sens des potentiels strictement décroissants.

2.4 Qu'appelle-t-on condensateur ?

On parle alors d'influence totale.

• Soient deux conducteurs à l'équilibre électrostatique. On suppose que toute ligne de champ quittant le premier atteint le second.
L'ensemble de deux tels conducteurs est un condensateur.

2.5 Qu'est-ce que la capacité d'un condensateur ?

• Dans un condensateur, soit Q la charge d'un conducteur et V_1 son potentiel (V_2 est le potentiel de l'autre armature et $-Q$ sa charge). Alors, on pose C telle que : $Q = C(V_1 - V_2)$.

• L'énergie électrique stockée par un condensateur est :

$$U_e = \frac{1}{2}C(V_1 - V_2)^2 = \frac{Q^2}{2C}.$$

• Propriété : $C \geqslant 0$.

2.6 Que vaut la densité volumique d'énergie électrique ?

- $u_e(M) = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2(M)$ et s'exprime en J · m^{-3}.
- L'énergie du condensateur vaut alors $U_e = \iiint u_e(M) d\tau$, où l'intégrale est étendue à l'espace inter-armatures.

2.7 Quelle est la capacité d'un condensateur plan ?

$C = \varepsilon_0 \frac{S}{e}$ où S est la surface d'une armature et e leur distance (Fig. 8).

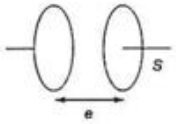


Figure 8

La démonstration et le résultat sont à connaître, voir le savoir-faire 4.

Les savoir-faire clefs

1 ■ Savoir utiliser les symétries et invariances.

Conseils méthodologiques

1.1 Une boule de rayon R porte une charge volumique à symétrie sphérique $\rho(r)$ (Fig. 9).

a) De quelle(s) variable(s) dépend le champ électrique ?

b) Quelle est sa direction ?

c) Qu'en est-il du potentiel ?

Figure 9

1.1.a) Appliquer les invariances.

1.1.b) Se servir de symétries.

1.1.c) Utiliser la définition du potentiel.

1.2 Le plan infini $z = 0$ porte la charge surfacique uniforme σ (Fig. 10).

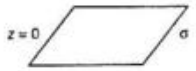


Figure 10

a) De quelle(s) variable(s) dépend le champ électrique ?

b) Quelle est sa direction ?

c) Que dire du champ électrique en deux points symétriques par rapport au plan $z = 0$?

d) Conclure pour le potentiel.

1.2.a) Appliquer les invariances.

1.2.b) Se servir de symétries.

1.2.c) Utiliser un plan de symétrie.

1.2.d) Utiliser la définition du potentiel.

1.1.a) Les coordonnées sphériques (r, θ, φ) respectent naturellement la géométrie du problème.

Bien réfléchir aux coordonnées adaptées au problème.

© Lavoisier – La photocopie non autorisée est un délit

Erreur à éviter
Attention à ne pas invoquer de plans de symétries à ce moment du raisonnement.

La distribution de charges est clairement invariante par toutes les rotations autour du centre O de la boule. La norme du champ électrique est donc indépendante des angles θ et φ. Elle ne peut donc dépendre que de r :

$$\boxed{\|\vec{E}\| = \|\vec{E}(r)\|}.$$

Il est nécessaire de trouver au moins **deux** plans de symétrie pour trouver une direction de champ.

b) Soit M un point quelconque. Tout plan passant par M et le centre O est un plan de symétrie des charges (Fig. 11). En conséquence, le champ électrique est parallèle à l'intersection de tous ces plans, soit $\vec{E} = E\vec{u}_r$.

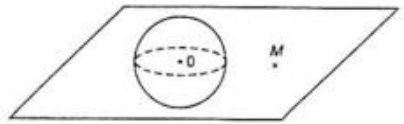


Figure 11

Au final, $\boxed{\vec{E} = E(r)\vec{u}_r}$.

c) $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$, d'où $\vec{E} = -\frac{dV}{dr}\vec{u}_r$ car $\vec{E} \parallel \vec{u}_r$. Le potentiel ne dépend que de r.

1.2.a) On utilise ici les coordonnées cartésiennes qui sont le plus adaptées au problème.

La situation est clairement invariante par toutes les translations de direction $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$. La norme du champ électrique ne peut donc dépendre que de z : $\boxed{\|\vec{E}\| = \|\vec{E}(z)\|}$.

Erreur à éviter
Ne pas se servir du plan $z = 0$ pour déduire la direction du champ en un point M quelconque ! En effet, ce plan ne contient généralement pas le point M.

b) Soit M un point quelconque. Tout plan passant par M et perpendiculaire au plan $z = 0$ est un plan de symétrie des charges (Fig. 12). En conséquence, le champ électrique est parallèle à l'intersection de tous ces plans, soit : $\boxed{\vec{E} = E\vec{u}_z}$.

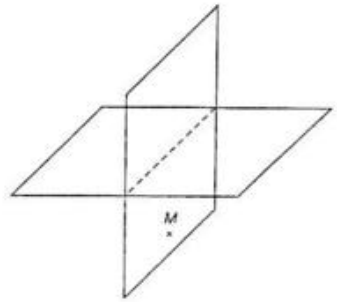


Figure 12

Au final : $\boxed{\vec{E} = E(z)\vec{u}_z}$.

c) Il reste à conclure vis-à-vis de la fonction $E(z)$. Deux point situés de part et d'autre du plan $z = 0$ sont symétriques par rapport à ce plan de symétrie des charges. Les champs en ces deux points doivent être symétriques l'un de l'autre. Comme le champ est selon $\vec{u}_z$, il se retourne en traversant le plan $z = 0$: ainsi, $\boxed{\vec{E}(-z) = -\vec{E}(z)}$.

d) $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$, d'où $\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial x}\vec{u}_x - \frac{\partial V}{\partial y}\vec{u}_y - \frac{\partial V}{\partial z}\vec{u}_z$. Comme $\vec{E} = E(z)\vec{u}_z$, V ne dépend que de z. De plus, comme V est la primitive d'une fonction impaire, elle est paire.

2 ■ Savoir se servir des équations locales et relations de passage.

Conseils méthodologiques

2.1 Le plan infini $z = 0$ porte la charge surfacique uniforme σ (Fig. 10). Le champ électrique est de la forme $\vec{E} = E(z)\vec{u}_z$, avec $E(z)$ impaire (voir le savoir-faire 1.2).

a) À l'aide d'une équation locale, établir une équation différentielle satisfaite par $E(z)$.

b) En utilisant une relation de passage, donner l'expression du champ électrique dans tout l'espace.

c) Retrouver ce résultat grâce au théorème de Gauss.

2.2 Une boule de rayon R porte une charge volumique telle qu'à l'intérieur de cette boule, $\vec{E} = E_0\vec{u}_r$, où E_0 est une constante (Fig. 13).

a) Calculer la densité volumique de charge. En coordonnées sphériques, $\text{div}(A\vec{u}_r) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2A)}{\partial r}$.

b) Le champ électrique est-il continu ou discontinu en $r = R$?

c) Trouver une équation différentielle satisfaite par le champ électrique en dehors de la boule.

d) Donner la forme exacte du champ électrique dans tout l'espace.

e) Quelle est la charge totale Q portée par la boule ?

f) Retrouver le champ en dehors de la boule par le théorème de Gauss.

2.1.a) Utiliser Maxwell-Gauss.

2.1.b) Utiliser la relation de passage pour $\vec{E}$.

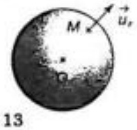


Figure 13

2.2.a) Utiliser Maxwell-Gauss.

2.2.b) Se servir de la relation de passage pour $\vec{E}$.

2.2.c) Utiliser le savoir-faire 1.1 et à nouveau Maxwell-Gauss.

2.2.d) Utiliser les questions **1.2.b)** et **1.2.c)**.

2.2.f) Intégrer la densité de charge, qui est non uniforme.

2.1.a) On utilise l'équation de Maxwell-Gauss : $\text{div}\vec{E} = 0$, soit ici $\boxed{E'(z) = 0}$, vu la forme du champ.

b) En conséquence, $\vec{E} = E_0\vec{u}_z$ pour $z > 0$ et $\vec{E} = -E_0\vec{u}_z$ pour $z < 0$. La relation de passage en $z = 0$ s'écrit alors :

© Lavoisier - La photocopie non autorisée est un délit

$$\vec{E}(z = 0^+) - \vec{E}(z = 0^-) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u}_z.$$

On en déduit $2E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$.

Le champ électrique s'écrit donc :

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}_z \text{ pour } z > 0} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{E} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}_z \text{ pour } z < 0}.$$

c) Pour le choix de la surface de Gauss, il faut trouver une surface sur laquelle le champ électrique (ou plus précisément $\vec{E} \cdot \overrightarrow{dS}$) reste constant. On choisit un cylindre de longueur $2z$, centré en $z = 0$ et de section S (Fig. 14). Alors,

$$\oint_{(S)} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} = E(z)S - E(-z)S = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}.$$

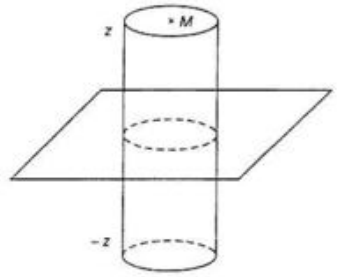


Figure 14

En effet, sur la surface latérale, $\vec{E} \perp \overrightarrow{dS}$ et seule l'intégrale sur les deux sections droites est non nulle.

On en déduit $E(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$. On a bien retrouvé le résultat de la question précédente.

2.2.a) L'équation de Maxwell-Gauss indique $\text{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$. Vu la forme de la divergence en coordonnées sphériques,

$$\text{div}\vec{E} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2E_0)}{\partial r} = \frac{1}{r^2}(2rE_0) = \frac{2E_0}{r}.$$

Ainsi : $\boxed{\rho = \frac{2\varepsilon_0 E_0}{r}}$.

b) Comme les seules charges sont ici réparties en volume, le champ électrique est continu dans tout l'espace, et notamment en $r = R$.

c) Déjà, par raison d'invariances et symétries, $\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$.

On est exactement dans le cas du savoir-faire 1.

On utilise à nouveau l'équation de Maxwell-Gauss en dehors de la boule : $\text{div}\vec{E} = 0$, soit :

$$\mathrm{div}\vec{E} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2E(r))}{\partial r} = 0 .$$

Alors : $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}(r^2E(r))}{\mathrm{d}r} = 0}$.

d) À l'intérieur de la boule, le résultat est déjà connu.

À l'extérieur, d'après la question précédente, $r^2E(r) = \text{cte}$. Par continuité du champ en $r = R$, on en déduit $\boxed{\vec{E} = E_0\dfrac{R^2}{r^2}\vec{u}_r}$ à l'extérieur.

On retrouve le résultat classique : pour une répartition de charge à symétrie sphérique, le champ en dehors de la distribution est le même que si toute la charge était concentrée à l'origine.

e) On intègre sur tout la boule :

$$Q = \iiint \rho\,\mathrm{d}\tau = \int_0^R \frac{2\varepsilon_0 E_0}{r} 4\pi r^2\,\mathrm{d}r = \varepsilon_0 E_0 [4\pi r^2]_0^R = \boxed{4\pi\varepsilon_0 E_0 R^2}.$$

Vu la symétrie sphérique, on intègre sur des coquilles d'épaisseur $\mathrm{d}r$ et de volume $\mathrm{d}\tau = 4\pi r^2\,\mathrm{d}r$. Attention à ne pas multiplier directement par le volume de la boule $\frac{4}{3}\pi R^3$!

f) On choisit comme surface de Gauss (S) la sphère de rayon $r > R$ (Fig. 15).

Alors $\oiint_{(S)} \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$, car la charge intérieure est celle de la boule.

Figure 15

Comme $\vec{E} \parallel \vec{u}_r$, $\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = E\cdot\mathrm{d}S$.

De plus, $E = E(r)$ est uniforme sur la sphère de rayon r, d'où :

$$E(r)\oiint_{(S)} \mathrm{d}S = E(r)4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} = 4\pi E_0 R^2 .$$

La surface de la sphère de rayon r est $4\pi r^2$.

Au final, $\boxed{\vec{E} = E_0\dfrac{R^2}{r^2}\vec{u}_r}$, conformément au résultat de la question **2.2.d)**.

3 ■ Savoir calculer le potentiel.

Conseils méthodologiques

Soient deux plans parallèles infinis, placés en $z = \pm a/2$, portant chacun la densité surfacique de charge σ (Fig. 16).

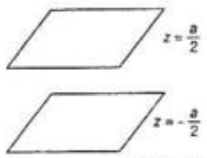


Figure 16

a) De quelle(s) variable(s) dépend le potentiel électrostatique ?

b) Discuter des propriétés de parité/imparité du potentiel.

3.a) Utiliser les invariances.

c) Quelle est l'équation différentielle satisfaite par V ?

3.c) Equation de Poisson.

d) La résoudre dans trois domaines disjoints. On prendra $V(0) = 0$.

e) Calculer le champ électrique. En déduire la forme exacte du potentiel.

3.e) Penser aux relations de passage.

f) Tracer l'allure de $V(z)$.

© Lavoisier - La photocopie non autorisée est un délit

3.a) On choisit les coordonnées cartésiennes. Vu les invariances par translation selon $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$, V ne dépend que de z.

b) Le plan $z = 0$ est un plan de symétrie des charges et par conséquent un plan de symétrie pour le potentiel : $\boxed{V(z) \text{ est paire}}$.

c) Le potentiel satisfait à l'équation de Poisson $\Delta V + \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$. En dehors des plans, il n'existe aucune charge, soit :

$$\boxed{\Delta V = V''(z) = 0 \text{ pour } z \neq \pm\frac{a}{2}}.$$

d) Dans chacun des trois domaines $z < -a/2$ (domaine 1), $-a/2 < z < a/2$ (domaine 2) et $z > a/2$ (domaine 3), V est une fonction affine de z : $V(z) = b_i z + c_i$.

Déjà, comme $V(0) = 0$, $c_2 = 0$.

Bien exploiter toutes les conditions sur le potentiel : parité et continuité.

Ensuite, il faut utiliser la parité de V. Dans le domaine 2, comme V est paire, $V = b_2 z = 0$. Dans les domaines 1 et 3, comme $V(z) = V(-z)$ pour $z > a/2$, $c_1 = c_3$ et $b_1 = -b_3$.

Enfin, le potentiel doit être continu, soit : $V(a/2) = V(-a/2) = 0$.

Au final,

$$\begin{cases} z \leqslant -\dfrac{a}{2},\ V(z) = b_1\left(z + \dfrac{a}{2}\right) \\ -\dfrac{a}{2} \leqslant z \leqslant \dfrac{a}{2},\ V(z) = 0 \\ z \geqslant \dfrac{a}{2},\ V(z) = b_1\left(-z + \dfrac{a}{2}\right) \end{cases}$$

Il reste une constante à déterminer.

e) Le champ électrique vaut :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z}\vec{u}_z .$$

Pour $z \geqslant a/2$, $\vec{E} = b_1\vec{u}_z$ alors que $\vec{E} = \vec{0}$ dans la zone du milieu.

La relation de passage pour le champ électrique impose

$$\vec{E}(z = a/2^+) - \vec{E}(z = a/2^-) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u}_z .$$

Ainsi, $b_1 = \sigma/\varepsilon_0$.

Pour trouver le potentiel, il était aussi possible de calculer d'abord le champ électrique, puis d'intégrer.

f) On en déduit alors aisément le graphe demandé.

4 ■ Savoir traiter les conducteurs à l'équilibre électrostatique.

Conseils méthodologiques

4.1 Une boule métallique de rayon R est reliée à la terre. On place à une distance d du centre de la boule une charge q (Fig. 17).

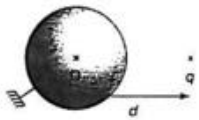


Figure 17

a) Où se trouvent les charges et commenter leur signe.

b) En calculant le potentiel au centre de la boule, calculer la charge Q portée par cette dernière.

c) Si $q > 0$, tracer l'allure des lignes de champ.

d) La boule est désormais isolée et porte une charge nulle (la charge q est toujours présente). Quel est le potentiel de la boule ?

4.1.a) Utiliser le 2.2 du Cours en questions.

4.1.b) Utiliser le 1.5 du Cours en questions.

4.1.c) Le long d'une ligne de champ, le potentiel décroît strictement.

4.2 Une boule métallique de rayon R est placée dans le champ électrique extérieur uniforme $\vec{E}_0 = E_0\vec{u}_z$ (Fig. 18). Cette boule est de plus reliée à la masse. En dehors de la boule, on cherche le potentiel sous la forme :

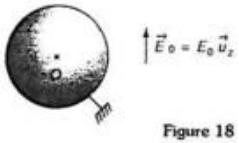


Figure 18

$$V(r,\theta) = \left(\frac{A}{r^2} + Br\right)\cos\theta,$$

où A et B sont des constantes.

a) Que vaut le champ électrique à l'intérieur de la boule ? Comment expliquer cette valeur ?

b) En exprimant que la boule est liée à la terre, trouver une relation entre A et B.

c) En étudiant le système loin de la boule, on montre que $B = -E_0$. Calculer le champ électrique en un point à la surface de la boule.

d) En déduire la répartition de charges sur la boule.

4.2.a) Le cours en questions 2.2.

4.2.d) Utiliser le théorème de Coulomb.

4.1.a) La boule est un conducteur à l'équilibre électrostatique : elle ne peut comporter aucune charge en volume. Les charges sont nécessairement localisées en surface.

La charge q crée un champ électrique dans tout l'espace. Elle peut attirer sur la boule des charges de signe opposé, provenant de la terre.

b) Le potentiel en O est dû en partie à la charge q et en partie aux charges situées à la surface de la boule : $V(O) = 0 = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 d} + \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$ car les charges de surface sont toutes à la distance R du point O. Ainsi :

$$\boxed{Q = -qR/d}.$$

On vérifie que Q est de signe opposé à q, et de valeur absolue inférieure.

© Lavoisier - La photocopie non autorisée est un délit

c) On cherche les extrémités possibles des lignes de champ : la boule, la charge q et l'infini.

Comme l'infini et la boule sont au même potentiel (nul), aucune ligne de champ ne peut partir de l'un pour aller à l'autre.

Les lignes de champ joignent nécessairement la charge q à la boule ou à l'infini. Comme $q > 0$, les lignes de champ quittent la charge pour aller vers la boule ou l'infini. On en déduit l'allure indiquée sur la figure 19.

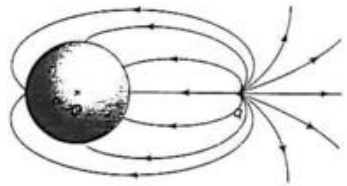


Figure 19

La boule étant une équipotentielle, on peut évaluer son potentiel en n'importe quel point.

d) De même, on évalue $V(O)$: $V(O) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 d} + \dfrac{0}{4\pi\varepsilon_0 R}$.

Le « 0 » s'explique par la nullité de la charge portée par la boule.

4.2.a) La boule est un conducteur à l'équilibre électrostatique donc le champ à l'intérieur est nécessairement nul. Le champ extérieur $\vec{E}_0$ modifie la répartition de charges à la surface de la boule. Ces charges surfaciques créent à leur tour un champ électrique. Le champ électrique total est la somme de ces deux champs. En fait, les charges à la surface de la boule créent à l'intérieur de cette dernière un champ électrique opposé à $\vec{E}_0$: le champ électrique total est nul dans la boule.

b) Dans cette expérience, le potentiel de la boule est nul : $V(r = R) = \left(\dfrac{A}{R^2} + BR\right)\cos\theta = 0$ quel que soit θ. Ainsi, $\boxed{A = -BR^3}$.

c) $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V$, soit en coordonnées sphériques :

$$\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial r}\vec{u}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{u}_\theta.$$

On en déduit :

$$\vec{E} = E_0\left(\left(\frac{2R^3}{r^3} + 1\right)\cos\theta\,\vec{u}_r + \left(\frac{R^3}{r^3} - 1\right)\sin\theta\,\vec{u}_\theta\right).$$

Le champ tangentiel est nul à la surface, en conformité avec la continuité de cette composante.

À la surface de la boule, $r = R^+$ et $\boxed{\vec{E}(r = R^+) = 3E_0\cos\theta\,\vec{u}_r}$.

On constate que la charge totale portée par la boule est alors nulle.

d) Le théorème de Coulomb donne la réponse : $\vec{E}(r = R^+) = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u}_r$, soit :

$$\boxed{\sigma = 3\varepsilon_0 E_0\cos\theta}.$$

5 ■ Savoir calculer une capacité.

Conseils méthodologiques

Soit un condensateur plan. Les armatures sont des disques de surface S, séparés par la distance e (Fig. 8). On négligera les effets de bord.

a) Tracer l'allure des équipotentielles. De quelle(s) variable(s) dépend le potentiel ?

b) Quelle est la forme du champ électrique ? Le calculer grâce au théorème de Gauss.

c) En déduire la capacité.

5.b) Utiliser la définition de $\vec{E}$ à partir de V.

5.c) Relier C à $V_1 - V_2$.

5.a) Deux équipotentielles sont déjà connues, ce sont les surfaces planes des deux armatures. On peut donc imaginer que les équipotentielles sont des surfaces planes, parallèles les unes aux autres (Fig. 20).
V est donc une fonction de x uniquement.

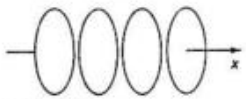


Figure 20

b) $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V = -\dfrac{dV}{dx}\vec{u}_x$.

On considère la surface de Gauss sur la figure 21. Le cylindre possède une de ses bases à l'intérieur du conducteur (qui possède une épaisseur non nulle). Le flux dans le conducteur est nul ($\vec{E} = \vec{0}$ dans le conducteur), ainsi que le flux latéral car alors $\vec{E} \perp \overrightarrow{dS}$. Ainsi,

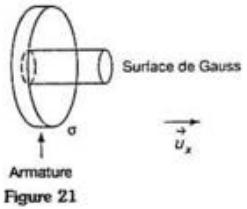


Figure 21

$$\iint_{(S)} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} = E(x)S = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0},$$

d'où : $\boxed{\vec{E} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u}_x}$.

Cette expression n'est rien d'autre que le théorème de Coulomb à la surface de l'armature.

c) Rappelons la définition de la capacité C : $Q = C(V_1 - V_2)$, où Q est la charge de l'armature 1. Ici, $Q = \sigma S$. Comme :

$$V_1 - V_2 = -\int_2^1 \vec{E} \cdot \vec{dl} = \int_1^2 E \cdot dx = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} e,$$

on arrive à : $Q = \varepsilon_0 (V_1 - V_2)\dfrac{S}{e}$.

Au final, : $\boxed{C = \varepsilon_0 \dfrac{S}{e}}$.

C'est bien la formule énoncée dans Le cours en questions.

© Lavoisier – La photocopie non autorisée est un délit

Annales

Pour maîtriser les bases

1. Charges volumiques/charges surfaciques — D'après CCP

À l'intérieur de certains matériaux, le champ électrique vérifie en régime stationnaire l'équation différentielle $\Delta\vec{E} = \dfrac{\vec{E}}{\lambda^2}$, où λ est une constante.

Figure 22

a) Quelle est la dimension de λ ?

b) Le champ électrique est de la forme $\vec{E} = E(x)\vec{u}_x$. En déduire une équation en $E(x)$. La résoudre.

c) La situation est celle de la figure 22. À l'extérieur du matériau, le champ électrique vaut $\vec{E}_0 = E_0\vec{u}_x$ et à l'intérieur, il est de la forme précédente. Simplifier cette expression, sachant que les seules charges présentes sont volumiques.

d) En déduire la densité volumique de charges. Vérifier son homogénéité.

e) En pratique, la distance λ est très faible, il est alors commode de décrire la répartition de charges par une charge surfacique σ. Donner sa valeur.

Conseils méthodologiques. Cet exercice fait appel au savoir-faire 2 (utilisation des équations locales et relations de passage).

a) Du point de vue de la dimensionnalité, $\Delta\vec{E}$ correspond à une dérivée seconde du champ électrique par rapport aux coordonnées spatiales. Ainsi, $[\Delta\vec{E}] = [\vec{E}]/L^2$, où L est homogène à une longueur.

Remarque

Rappelons que $f'(x)$ a pour dimension celle de f divisée par celle de x.

Comme $\Delta\vec{E} = \vec{E}/\lambda^2$, on en déduit que λ est homogène à une longueur.

b) Exprimons $\Delta\vec{E}$ en **coordonnées cartésiennes** :

$$\Delta\vec{E} = \Delta E_x\vec{u}_x + \Delta E_y\vec{u}_y + \Delta E_z\vec{u}_z = \Delta E(x)\vec{u}_x = E''(x)\vec{u}_x.$$

On en déduit aisément l'équation : $\boxed{E''(x) - \dfrac{1}{\lambda^2}E(x) = 0}$.

Sa solution est : $\boxed{E(x) = \alpha\exp\left(-\dfrac{x}{\lambda}\right) + \beta\exp\left(\dfrac{x}{\lambda}\right)}$

où α et β sont des constantes.

c) Déjà, comme le champ électrique reste borné dans le matériau, le terme divergent en $\exp\left(\dfrac{x}{\lambda}\right)$ est nul, soit $\beta = 0$.

Ensuite, pour déterminer α, on utilise la continuité du champ électrique en l'absence de charges surfaciques.

$\vec{E}(x = 0^+) = \vec{E}_0$, soit : $\alpha = E_0$.

Ainsi : $\boxed{\vec{E}(x) = E_0 \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right)\vec{u}_x}$.

d) On utilise l'équation de Maxwell-Gauss :

$$\text{div}\vec{E} = E'(x) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

d'où : $\boxed{\rho = -\frac{\varepsilon_0 E_0}{\lambda}\exp-\frac{x}{\lambda}}$.

Technique de calcul

Rappelons :

$$\text{div}\,\vec{E} = \frac{\partial E_x}{dx} + \frac{\partial E_y}{dy} + \frac{\partial E_z}{dz}.$$

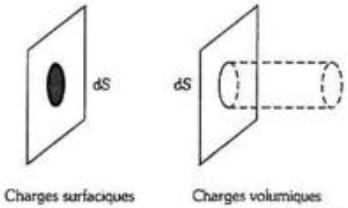
$\varepsilon_0 E$ est homogène à une charge par unité de surface (penser à la relation de passage pour le champ électrique). En conséquence, $\varepsilon_0 E_0/\lambda$ est bien homogène à une charge volumique.

e) Au bout de quelques λ, la densité volumique de charge est quasi nulle. Pour simplifier, on peut la remplacer par une densité surfacique de charges.

Considérons une surface dS sur le matériau (Fig. 23) :

- si la charge est surfacique, la charge contenue sur dS est $dq = \sigma dS$;
- si la charge est volumique, la charge contenue derrière dS entre x et $x + dx$ est $d^2q = \rho(x)dSdx$. La charge totale contenue contre dS est alors

$$dq = dS\int_{x=0}^{\infty}\rho dx = -dS\frac{\varepsilon_0 E_0}{\lambda}\int_0^{\infty}\exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right)dx = -dS\varepsilon_0 E_0.$$



Charges surfaciques — Charges volumiques

Figure 23

Par l'équivalence des deux descriptions en ce qui concerne la charge,

$\boxed{\sigma = -\varepsilon_0 E_0}$.

2. Force exercée entre les deux armatures d'une capacité — D'après Polytechnique

Soit un condensateur composé de deux armatures planes, de surface S et séparées d'une distance l (Fig. 24) et soumis à la tension U. On négligera tout effet de bord.

a) En assimilant une armature à un plan infini chargé uniformément à la densité surfacique de charges σ, calculer le champ électrostatique $\vec{E}_1$ créé dans tout l'espace.

b) En déduire le champ créé par les deux armatures du condensateur. Montrer notamment que le champ créé par l'armature du bas est la moitié du champ total au voisinage de cette armature.

c) Exprimer $\vec{F}_{capa}$, force exercée par l'armature du bas sur l'armature du haut. En déduire $\vec{F}_{capa} = -\frac{\varepsilon_0 S U^2}{2l^2}\vec{u}_z$. Commenter la direction de $\vec{F}_{capa}$.

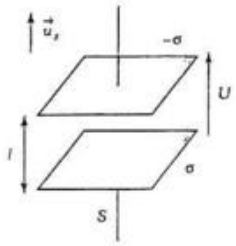


Figure 24

© Lavoisier - La photocopie non autorisée est un délit

Conseils méthodologiques. Consulter les savoir-faire 1 et 2 (utilisation des symétries et invariances, mise en œuvre des relations locales).

a) Ce calcul a été mené dans les savoir-faire 1 et 2. On déduit (Fig. 25) :

$$\vec{E}_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}_z$$

Figure 25

au-dessus de la plaque. Le champ prend la valeur opposée au-dessous.

b) L'armature du haut porte la charge surfacique opposée $-\sigma$. Le champ créé au-dessous de l'armature supérieure est ainsi $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u}_z$. Au final, le champ interarmature est la somme des champs créés par les deux plaques :

$\boxed{\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u}_z}$.

La moitié de ce champ est créée par l'armature du bas et la moitié par l'armature du haut.

c) Les charges de l'armature du haut sont soumises au champ de l'armature du bas, c'est-à-dire $\vec{E}/2$.

L'armature du haut porte la charge $q = -\sigma S$ et la force de Lorentz :

$$\vec{F} = q\frac{\vec{E}}{2} = -\sigma S\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}_z = -S\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\vec{u}_z.$$

Erreur à éviter

Ne pas utiliser la formule $\vec{F} = q\vec{E}$, où $\vec{E}$ est le champ total.

La formule indiquée par l'énoncé fait intervenir la différence de potentiel U. On l'obtient en intégrant le champ :

$$U = -\int\vec{E}\cdot\vec{dl} = -El = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}l.$$

Alors :

$\boxed{\vec{F} = -\varepsilon_0 S\frac{U^2}{2l^2}\vec{u}_z}$.

Cette force est attractive : les deux armatures portent des charges opposées et s'attirent.

3. Capacité associée à un câble coaxial — D'après Banque PT

Un câble coaxial est constitué de deux cylindres creux coaxiaux d'axe Oz (Fig. 26). Le cylindre intérieur (extérieur) a pour rayon a (b), et leur longueur commune est l. On négligera les effets de bord. On utilisera les coordonnées cylindriques r, θ et z.

On suppose que les deux cylindres sont en équilibre électrostatique et portent respectivement les charges électriques $+Q$ et $-Q$ uniformément réparties sur leur surface.

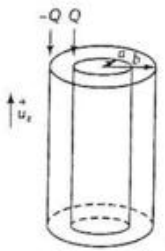


Figure 26

a) Rappeler les équations de Maxwell concernant le champ électrique dans l'espace inter-armatures.

b) Montrer que le champ électrostatique est radial et ne dépend que de r, soit $\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$.

c) Établir l'expression de $E(r)$ en fonction de Q, ε_0, r et l, et de constantes à déterminer en distinguant trois domaines distincts.

d) Le conducteur intérieur est au potentiel V_1 et l'extérieur à V_2. Exprimer la différence de potentiel $V_1 - V_2$ en fonction de Q, ε_0, l, a et b.

e) Déterminer la capacité C du câble en fonction de ε_0, l, a et b. En déduire C'_0, capacité du câble par unité de longueur.

f) Quelle est la densité volumique d'énergie électrostatique ? En déduire l'énergie emmagasinée W_e par le câble et retrouver l'expression de C.

g) $a = 1\,\text{mm}$, $b = 1{,}65\,\text{mm}$, $\varepsilon_0 = 8{,}84 \cdot 10^{-12}\,\text{F.m}^{-1}$. Que vaut C'_0 ?

Conseils méthodologiques. Utiliser les symétries et invariances (savoir-faire 1), puis le théorème de Gauss pour le calcul d'une capacité (savoir-faire 5).

a) Les équations de Maxwell sont $\boxed{\text{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0}$ car l'espace inter-armatures est vide et $\boxed{\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = \vec{0}}$.

b) La distribution de charges est invariante par toute translation selon $\vec{u}_z$ (car on néglige les effets de bord) et toute rotation autour de cet axe. Ainsi, $\|\vec{E}\| = \|\vec{E}(r)\|$.

Soit M un point quelconque. Le plan contenant M et l'axe Oz est un plan de symétrie des charges (Fig. 27). Il en est de même du plan contenant M et perpendiculaire à l'axe. Le champ électrique est donc selon leur intersection, soit $\vec{E} = E\vec{u}_r$.

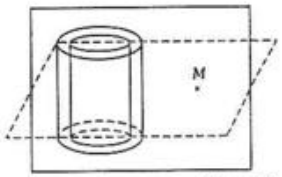


Figure 27

Au total, $\boxed{\vec{E} = E(r)\vec{u}_r}$.

c) Vu les symétries de la situation, on applique le théorème de Gauss à un cylindre S de hauteur l et de rayon $a < r < b$:

$$\oiint_{(S)} \vec{E} \cdot \vec{dS} = \iint_S \vec{E} \cdot \vec{dS} = E(r) \iint_S dS = E(r) 2\pi r l = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

En effet, les charges intérieures à S sont situées sur le cylindre de rayon a. On obtient alors :

$$\boxed{E(r) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 r l}}$$

Erreur à éviter

Dessiner la surface de Gauss pour identifier correctement les charges intérieures.

d) Par définition, $V_1 - V_2 = -\int_2^1 \vec{E} \cdot \vec{dl}$. Ainsi :

$$\boxed{V_1 - V_2 = \int_1^2 \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 r l} dr = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l} \ln\frac{b}{a}}$$

On vérifie que, pour $Q > 0$, le champ est radial sortant et $V_1 > V_2$ car $\vec{E}$ est dirigé dans le sens des potentiels décroissants.

e) Comme $Q = C(V_1 - V_2)$, on déduit aisément $\boxed{C = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln\frac{b}{a}}}$.

© Lavoisier – La photocopie non autorisée est un délit

Par unité de longueur, cela donne : $\boxed{C'_0 = \frac{C}{l} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{b}{a}}}$.

f) La densité volumique d'énergie électromagnétique vaut $u_e(M) = \varepsilon_0 \frac{E^2}{2}$.

En intégrant sur l'espace inter-armatures :

$$W_e = \iiint_{a<r<b} u_e \, d\tau = \int_a^b \frac{Q^2}{8\pi^2\varepsilon_0 r^2 l^2} l 2\pi r \, dr = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 l} \ln\frac{b}{a}$$

Technique de calcul

L'intégration selon z est immédiate. En revanche, attention à l'intégration en r sur des couronnes entre r et $r + dr$.

Comme $W_e = \frac{Q^2}{2C}$, on retrouve l'expression : $\boxed{C = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln\frac{b}{a}}}$.

g) $C'_0 = 1{,}1 \cdot 10^{-10}\,\text{F} \cdot \text{m}^{-1}$

Erreur à éviter

Attention à l'unité.

4. Équilibre électrostatique d'un ensemble de conducteurs — D'après Oral Polytechnique

L'ensemble de conducteurs schématisé en Fig. 28 est à l'équilibre électrostatique. Quelques lignes de champ sont représentées. Le conducteur 1 contient les conducteurs 2 et 3, et est relié à la masse. Mis à part les conducteurs 2 et 3, la cavité du conducteur 1 est vide. Le conducteur 2 porte une charge $Q_2 = 0$, et le conducteur 3 est au potentiel $V_3 < 0$.

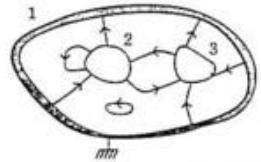


Figure 28

a) Où se situe la charge portée par le conducteur 1 ? On appellera Q_{1i} (Q_{1e}) la charge de la surface intérieure (extérieure) du conducteur 1.

b) Éliminer les lignes de champ impossibles.

c) Relier Q_{1i} et Q_3.

d) Soient V_1, V_2 et V_3 les potentiels des conducteurs 1, 2 et 3. Montrer que V_2 est compris entre V_1 et V_3.

e) Donner le signe de Q_{1i}.

f) En admettant que le potentiel est nul à l'extérieur, en déduire Q_{1e}.

Conseils méthodologiques. On utilise ici principalement le savoir-faire 4 (étude des conducteurs à l'équilibre électrostatique).

a) Le conducteur 1 est à l'équilibre électrostatique. La charge qu'il porte se situe nécessairement en **surface**. On distinguera la charge de la surface intérieure et celle de la surface extérieure.

b) Comme $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$, une ligne de champ suit les potentiels strictement décroissants. Ainsi, la ligne du champ en boucle est impossible. De même, la ligne de champ partant et arrivant sur le conducteur 2 n'est pas physiquement admissible.

Vu la relation de passage à la surface d'un conducteur (théorème de Coulomb), une ligne de champ doit être normale à un conducteur en arrivant sur celui-ci : la ligne de champ située tout à droite ne satisfait pas à cette condition.

Des six lignes de champ subsistant, seules trois peuvent exister de façon non contradictoire : une ligne de champ ne peut pas partir du conducteur 1 vers le conducteur 2 alors qu'une autre part du conducteur 2 vers le conducteur 1 (sinon, on aurait $V_1 > V_2$ et $V_1 < V_2$.

c) Considérons la surface de Gauss (S) de la figure 29. Alors :

$$\oiint_{(S)} \vec{E} \cdot \vec{dS} = 0 = \frac{Q_{1i} + Q_2 + Q_3}{\varepsilon_0}.$$

En effet, en tout point de la surface de Gauss, le champ électrostatique est nul (les points sont à l'intérieur d'un conducteur à l'équilibre électrostatique). Les charges intérieures à (S) sont Q_{1i}, $Q_2 = 0$ et Q_3. On en déduit ainsi : $\boxed{Q_3 = -Q_{1i}}$.

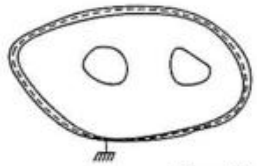


Figure 29

d) Nécessairement, V_2 est compris entre V_1 et V_3. En effet, si ce n'était pas le cas, V_2 serait un maximum ou un minimum de potentiel parmi les conducteurs, et les lignes de champ ne pourraient que partir (cas d'un maximum) ou arriver (cas d'un minimum) sur le conducteur 2. Dans ce cas, le théorème de Gauss appliqué à une surface entourant tout juste le conducteur 2 (Fig. 30) permettrait de conclure respectivement $Q_2 > 0$ (car $\forall \vec{dS}, \vec{E} \cdot \vec{dS} \geqslant 0$) ou $Q_2 < 0$.

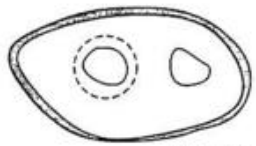


Figure 30

e) On a alors deux possibilités, sachant que $V_1 = 0$ car le conducteur 1 est relié à la masse :

- $0 = V_1 < V_2 < V_3$;
- $V_3 < V_2 < V_1 = 0$.

Comme $V_3 < 0$, seul le deuxième cas est possible : $\boxed{V_3 < V_2 < V_1 = 0}$.

Pour déterminer le signe de Q_{i1}, on remarque que les lignes de champ ne peuvent qu'arriver sur le conducteur 3 (en effet, si une ligne de champ quittait ce conducteur, elle arriverait sur un conducteur de potentiel plus bas que lui, ce qui est impossible). Alors, en utilisant la surface de Gauss de la figure 31, on remarque :

$$\oiint_{(S)} \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{Q_3}{\varepsilon_0}$$

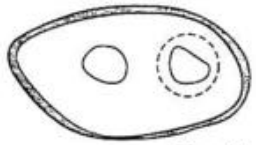


Figure 31

Comme $\forall \vec{dS}, \vec{E} \cdot \vec{dS} \geqslant 0$, on déduit $Q_3 < 0$ et $\boxed{Q_{1i} = -Q_3 > 0}$.

f) Alors, le champ électrique est nul en tout point à l'extérieur du conducteur 1. On applique la relation de passage à la surface (extérieure) du conducteur 1 :

$$\vec{E} - \vec{0} = \frac{\sigma_{1e}}{\varepsilon_0} \vec{n}_{ext} = \vec{0}$$

Le conducteur 1 n'est pas chargé extérieurement : $\boxed{Q_{1e} = 0}$.

© Le physicien – La photocopie non autorisée est un délit

5. Physique d'un nuage orageux — D'après Mines-Ponts

On peut étudier le champ électrique dans les nuages en envoyant de petites sondes accrochées à des ballons. La figure 32 donne un exemple du profil de sa valeur algébrique, comptée positivement pour un champ ascendant.

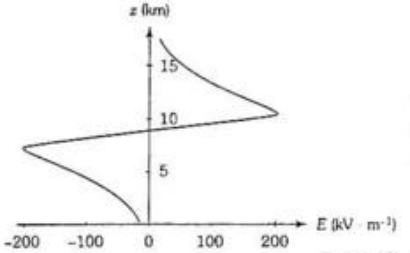


Figure 32

a) Indiquer en le justifiant (théorème de Gauss ou équation de Maxwell-Gauss) le signe des charges électriques dans le nuage en fonction de la zone.

b) On modélise le nuage par un dipôle vertical situé en son centre à $z = 10$ km. En admettant que le champ au sol ($5\ \text{kV} \cdot \text{m}^{-1}$) est créé par ce dipôle, donner un ordre de grandeur de ce moment dipolaire. Préciser l'orientation de ce dipôle.

c) À partir de la figure 32 et en approximant la forme du champ électrique dans la zone considérée, estimer la différence de potentiel U entre le bas du nuage (situé à une altitude de l'ordre de 5 km) et le sol. L'ordre de grandeur est voisin d'une de ces trois estimations : 400 kV, 4 MV ou 400 MV.

⇨ **Remarque**

Question b) hors programme PT (cette question est indépendante des autres et peut être passée sans problème)

d) Lors de la décharge due à la foudre, l'intensité électrique associée est de l'ordre de 10^5 A et le phénomène dure environ 500 µs. Quelle charge Δq est alors échangée ? On admet que l'énergie dissipée est celle d'un condensateur de charge Δq sous la tension U. Évaluer l'énergie dissipée, ainsi que la capacité de ce condensateur.

Conseils méthodologiques. Cet exercice, assez qualitatif, fait appel conjointement aux savoir-faire 2 (relations locales), 3 (connaissances sur le potentiel) et 4 (conducteurs à l'équilibre électrostatique).

a) Le champ électrique est de la forme $\vec{E} = E(z)\vec{u}_z$. Alors : $\text{div}\vec{E} = \dfrac{dE_z}{dz} = E'(z) = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$.

Ainsi, le signe de la charge est localement donné par celui de la courbe $E(z)$. On en déduit :

- entre 0 et 7,5 km, $E(z)$ décroît, soit $\rho < 0$;
- entre 7,5 km et 10 km, $E(z)$ croît, soit $\rho > 0$;
- au-delà de 10 km, $E(z)$ décroît, soit $\rho < 0$.

b) D'après les positions de Gauss, le dipôle est vertical, orienté vers le bas. En effet, pour les points situés en avant du dipôle ($\theta = 0$), le champ est parallèle au dipôle et de même direction. Sa valeur est en coordonnées sphériques :

$$\vec{E} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \begin{vmatrix} 2\cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{vmatrix} = \frac{2p}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \vec{u}_r \text{ pour } \theta = 0$$

Comme le centre du nuage est à la distance $r \approx 10$ km du sol, on obtient :

$$\boxed{p = 2\pi\varepsilon_0 r^3 E \approx 2.8 \cdot 10^5\ \text{C} \cdot \text{m}}$$

$\vec{p}$ est orienté vers le bas.

c) Dans cette zone, le champ électrique varie quasi linéairement avec l'altitude passant d'une valeur faible pour $z = 0$ à $E = -150\ \text{kV} \cdot \text{m}^{-1}$ pour $z = 5\,\text{km}$.

La valeur du champ électrique est alors donnée par $E(z) = -\alpha z$ avec $\alpha = 150 \cdot 10^3 / 5\,000 = 30\,\text{V} \cdot \text{m}^{-2}$.

La relation locale liant le champ électrique au potentiel $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$ donne ici $E = -\dfrac{dV}{dz}$, soit :

$$V_2 - V_1 = -\int_1^2 E(z)\,dz$$

Ainsi :

$$U = V(z = 5\text{km}) - V(z = 0) = \int_0^{5\,\text{km}} \alpha z\,dz = \left[\alpha \frac{z^2}{2}\right]_0^{5\,\text{km}} = 30\,\frac{5\,000^2}{2} = 3{,}8 \cdot 10^8\,\text{V} = 380\ \text{MV}$$

Cette différence de potentiel est ainsi très proche de **400 MV**.

d) Rappelons la relation entre une intensité et la charge échangée : $I = \dfrac{dq}{dt}$, soit $\Delta q = I\Delta t$. L'application numérique donne : $\Delta q = 50\,\text{C}$.

L'énergie stockée dans un condensateur de charge Δq sous la tensions U est :

$$E = \frac{\Delta q U}{2} = 10^{10}\,\text{J} = 10^4\,\text{MJ}$$

Remarque

Le coulomb est une unité très grande par rapport aux charges usuelles. 50 C représente une énorme charge.

Cette valeur est énorme. Il est très difficile de maîtriser une telle énergie, par ailleurs libérée en un temps extrêmement bref.

La capacité associée est :

$$C = \frac{\Delta q}{U} = 1{,}3 \cdot 10^{-7}\,\text{F}$$

Cette valeur de capacité est du même ordre de grandeur que celles utilisées en travaux pratiques.

6. Électrisation du sol — D'après Mines-Ponts

Lors d'un orage peut se développer au niveau du sol une zone chargée. On a tracé en Fig. 33 les équipotentielles au niveau d'une aspérité. Celle-ci est supposée conductrice si bien que sa surface est une équipotentielle.

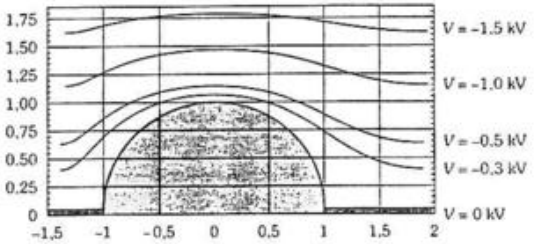


Figure 33

a) Quel est le signe de la charge portée par l'aspérité ?

b) Représenter l'allure de quelques lignes de champ.

c) Dans quelles régions le champ est-il le plus intense ?

© Larousse – La photocopie non autorisée est un délit

d) Si on admet que loin de l'aspérité le champ est de $5\ \text{kV} \cdot \text{m}^{-1}$, évaluer sa valeur au sommet de chaque aspérité.

e) La valeur du champ électrique maximal dans l'air (champ disruptif) est de $30\ \text{kV} \cdot \text{cm}^{-1}$. Commenter.

Conseils méthodologiques. Utiliser le savoir-faire 4 (conducteurs à l'équilibre électrostatique).

a) Comme $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V$, le champ électrique est orienté dans le sens des potentiels décroissants. Le champ électrique est donc orienté du sol vers le ciel.

De plus, le théorème de Coulomb appliqué au niveau du sol $\vec{E} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}$, où $\vec{n}$ est la normale sortante du sol, indique :

$\sigma > 0$.

Le sol est chargé positivement.

b) $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$, donc le champ électrique est perpendiculaire en tout point aux équipotentielles. Il faut tracer des lignes normales aux équipotentielles. Leur allure est donnée en Fig. 34.

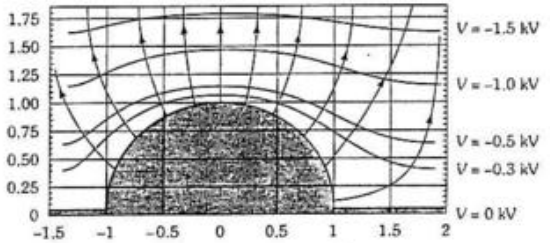


Figure 34

Il ne faut pas oublier d'orienter les lignes de champ (dans le sens de $\vec{E}$).

c) De même manière que sur une carte de montagne, la pente élevée est indiquée par des courbes de niveau très proches, un champ électrique élevé est synonyme d'équipotentielles proches. Plus quantitativement, $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$ signifie que la valeur du champ électrique entre deux points pas trop éloignés M_1 et M_2 est à peu près égale à la différence de potentiels entre ces points $V_1 - V_2$ divisée par leur distance M_1M_2 : $E = \dfrac{|V_1 - V_2|}{M_1M_2}$. Si le potentiel varie rapidement (courbes équipotentielles proches), le champ électrique est intense.

On constate graphiquement que le champ est le plus intense juste au-dessus de l'aspérité.

Remarque

C'est ce qu'on appelle « le pouvoir des pointes ».

d) On évalue le champ grâce à la formule approximative donnée à la question précédente, juste au-dessus de l'aspérité, entre les équipotentielles 0 et −0,3 kV :

$$E = \frac{0 - (-0{,}3)\,\text{kV}}{0{,}5\,\text{carreau}} = 0{,}6\,\text{kV} \cdot \text{carreau}^{-1}.$$

Erreur à éviter

Ne pas conclure à ce niveau !

Au loin, en haut à droite, entre les équipotentielles −1 kV et −1,5 kV, on obtient :

$$E' = \frac{(1{,}5 - 1)\,\text{kV}}{2\,\text{carreau}} = 0{,}25\ \text{kV} \cdot \text{carreau}^{-1}$$

Pour éliminer l'unité inconnue « carreau », on effectue le quotient :

$$\frac{E}{E'} = 2.4 .$$

Vu la valeur de E', on arrive à $\boxed{E = 12\,\text{kV} \cdot \text{m}^{-1}}$.

e) On est encore loin du champ disruptif. Il faudrait pour s'en approcher une aspérité plus pointue.

Remarque

On en déduit aussi la longueur d'un carreau, 0.05 m.

7. Oscillations d'un plasma — D'après CCP

Un plasma est constitué de deux types de particules chargées. On notera n^+ et n^- la densité particulaire des particules positives et négatives. Les charges positives sont supposées fixes, contrairement aux charges négatives (électrons de masse m) libres de se déplacer selon la direction $\vec{u}_x$. La densité volumique de charge $\rho = e(n^+ - n^-)$, où e est la charge élémentaire, est nulle au repos.

a) Sous l'effet d'une perturbation, les électrons contenus initialement dans une tranche cylindrique de base S dans le plan d'abscisse x et d'épaisseur dx se retrouvent dans une tranche d'abscisse $x + \xi(x,t)$ et d'épaisseur $dx + d\xi(x,t)$ (Fig. 35) avec $d\xi(x,t) \ll dx$. En écrivant la conservation du nombre d'électrons, écrire la variation $\delta n^-(x,t) \ll n^-$ du nombre d'électrons du système précédent en fonction de $n^-(x,t)$ et de $\dfrac{\partial \xi(x,t)}{\partial x}$.

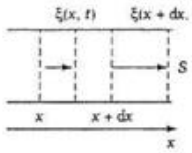


Figure 35

b) Exprimer la charge volumique ρ en fonction de n^-, e et ξ.

c) En utilisant l'équation de Maxwell-Gauss, donner l'expression du champ électrique $\vec{E}_p$ dans le plasma en fonction de n^-, e et ξ.

d) Écrire l'équation du mouvement pour un électron soumis à $\vec{E}_p$ et dont le déplacement par rapport à l'équilibre est $\xi(x,t)$.

e) Montrer que le plasma peut être le siège d'oscillations spontanées à une pulsation ω_p qu'on exprimera en fonction de e, m, ε_0 et n^-.

f) Application numérique pour $e = 1.6\ 10^{-19}$ C, $m = 9{,}1\ 10^{-31}$ kg, $\varepsilon_0 = 8{,}8\ 10^{-12}$ F · m^{-1} et $n^- = 10^{29}$ m^{-3}.

Conseils méthodologiques. Cet exercice met en œuvre les techniques des savoir-faire 1 (utilisation des symétries et invariances) et 2 (utilisation des équations locales).

a) Au repos, la densité électronique est $n^-(x,t) = n^-$. Lors de la perturbation, elle devient $n^-(x,t) = n^- + \delta n^-(x,t)$.

Au repos, le nombre d'électrons dans le système est $n^- S dx$ vu que le volume du système est $S dx$. Lors de la perturbation, il devient $(n^- + \delta n^-(x,t))S(dx + d\xi(x,t))$ car le volume du système est alors $S(dx + d\xi(x,t))$.

Par conservation du nombre d'électrons dans le système (fermé) :

$$n^- S dx = (n^- + \delta n^-(x,t))S(dx + d\xi(x,t))$$

soit en divisant par $S dx$ dans la limite $dx \to 0$:

$$n^- = (n^- + \delta n^-(x,t))\left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}(x,t)\right).$$

© Eyrolles – La photocopie non autorisée est un délit

Alors, à des termes du deuxième ordre près :

$$\boxed{0 = n^- \frac{\partial \xi}{\partial x}(x,t) + \delta n^-(x,t)}.$$

L'interprétation du signe moins entre $\delta n^-(x,t)$ et $\partial \xi / \partial x$ est la suivante : si $\xi(x,t)$ est une fonction croissante de x, alors les charges négatives se répartissent dans un plus grand espace et $\delta n^-(x,t) < 0$.

b) La charge volumique ρ est liée à la densité volumique de charges positives et négatives :

$$\rho = e(n^+ - n^-(x,t)) = e(n^+ - n^- - \delta n^-(x,t)) = en^- \frac{\partial \xi}{\partial x}(x,t).$$

c) Déjà, par invariance par translation selon les directions $\vec{u}_y$ et $\vec{u}_z$, le module du champ électrique ne dépend que de x.

Tout plan contenant l'axe Ox est un plan de symétrie des charges. Le champ électrique est donc dirigé selon leur intersection $\vec{u}_x$.

Alors, $\vec{E}_p = E(x,t)\vec{u}_x$.

L'équation de Maxwell-Gauss s'écrit :

$$\text{div}\vec{E}_p = \frac{\partial E(x,t)}{\partial x} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = \frac{en^-}{\varepsilon_0}\frac{\partial \xi}{\partial x}(x,t).$$

Technique de calcul

Comme on a intégré pour un certain temps, la constante d'intégration dépend du choix de l'instant.

On intègre à t fixé :

$$E(x,t) = \frac{en^-}{\varepsilon_0}\xi(x,t) + f(t).$$

Or, si $\xi(x,t) = 0$ (plasma au repos), le champ électrique est nul. On en déduit la nullité de $f(t)$. Ainsi :

$$\boxed{\vec{E}_p(x,t) = \frac{en^-}{\varepsilon_0}\xi(x,t)\vec{u}_x}$$

d) Appliquons la relation fondamentale de la dynamique pour un électron déplacé de $\xi(x,t)\vec{u}_x = \xi(t)\vec{u}_x$ par rapport à sa position initiale x (x étant fixé, on l'oublie dans le déplacement ξ) :

$$m\frac{d^2\xi}{dt^2}(x,t)\vec{u}_x = -e\vec{E}_p(x + \xi(t), t) = -\frac{en^-}{\varepsilon_0}\xi(x,t)\vec{u}_x.$$

Remarque

Cette équation n'est valable qu'au premier ordre à cause de l'approximation de la valeur du champ électrique.

On en déduit l'équation :

$$\boxed{\frac{d^2\xi}{dt^2}(t) + \frac{n^-e^2}{m\varepsilon_0}\xi(t) = 0}.$$

e) On voit apparaître une quantité homogène à une pulsation :

$$\boxed{\omega_p^2 = \frac{n^-e^2}{m\varepsilon_0}}.$$

Les solutions de l'équation sont :

$$\xi(t) = A\cos(\omega_p t + \varphi)$$

où A et φ sont des constantes par rapport au temps. Des oscillations à ω_p de l'ensemble des charges négatives peuvent alors apparaître spontanément.

f) L'application numérique indique $\omega_p = 1.8\ \ 10^{16}$ rad s^{-1}. On est alors au-delà du visible (UV).

8. Piège à molécules polaires — D'après Polytechnique

On étudie le potentiel créé par un système électrostatique formé de six électrodes cylindriques et parallèles $\{C_i, i = 1,2,\ldots,6\}$ disposées aux sommets d'un hexagone régulier auxquelles elles sont orthogonales (Fig. 36). Leur rayon a est très inférieur au côté R de l'hexagone $a \ll R$. L'électrode C_i porte la densité linéique de charges $(-1)^{i+1}\lambda$. On considérera que ces charges sont fixes et uniformément réparties à la surface des électrodes. On supposera ces électrodes comme infinies selon l'axe Oz. On utilisera les coordonnées cylindriques r, θ, z.

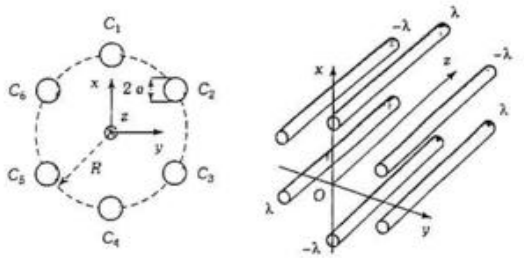


Figure 36

a) Quelles conclusions sur le champ électrostatique $\vec{E}$ et le potentiel V peut-on tirer de l'invariance par translation selon z ?

b) Considérer la symétrie par rapport à un plan perpendiculaire à l'axe Oz. Quelle propriété du champ $\vec{E}$ déduit-on ?

c) Que dire pour l'un des trois plans passant par l'axe central et deux électrodes opposées ?

d) Montrer que les trois plans passant par l'axe et à égale distance des électrodes sont équipotentiels.

e) Quelle est la période angulaire d'invariance du système par rotation autour de l'axe Oz. En déduire une expression générale du potentiel $V(r,\theta,z)$ sous forme d'une série.

f) Soit une électrode de densité linéique de charges λ. Déterminer le champ électrostatique en un point P à l'aide de la distance D de P à l'axe de l'électrode ($D \gg a$). Faire de même avec le potentiel.

g) Montrer qu'en le choisissant nul sur l'axe central, le potentiel vaut :

$$V(P) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{D_2D_4D_6}{D_1D_3D_5}$$

où D_i est la distance de P à l'axe de l'électrode C_i.

h) Dans la partie centrale $r \ll R$, un développement de l'expression précédente mène à :

$$V(r,\theta) \sim \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\frac{r^3}{R^3}\cos(3\theta)$$

Cette expression respecte-t-elle les symétries étudiées précédemment ?

Conseils méthodologiques. Ce problème utilise principalement les symétries et invariances (savoir-faire 1).

a) Les charges sont invariantes par translation selon l'axe Oz. Le potentiel V ne dépend donc pas de z : il est de la forme $V(r,\theta)$.

La norme du champ électrique est de même indépendante de z.

© Larousse - La photocopie non autorisée est un délit

De plus, comme : $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V = -\frac{\partial V}{\partial r}\vec{u}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}\vec{u}_\theta - \frac{\partial V}{\partial z}\vec{u}_z$,

on établit que le champ électrique n'a de composantes que selon $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_z$.

b) Un tel plan est un plan de symétrie des charges. Prenons par exemple le plan $z = 0$. Alors :

$$\vec{E}(-z) = s(\vec{E}(z))$$

où s est la symétrie orthogonal (réflexion) par rapport à ce plan.

Comme le champ n'est que selon $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$, on déduit :

$$\vec{E}(-z) = \vec{E}(z).$$

Cela était prévisible car le champ électrique ne dépend pas de z (question a)).

Remarque

Cette symétrie implique aussi $V(r,\theta,z) = V(r,\theta,-z)$, égalité évidemment vérifiée vu que V est indépendant de z.

c) Considérons le plan contenant l'axe Oz et les axes de C_1 et C_4. C'est aussi un plan de symétrie des charges. Là encore, les champs en deux points symétriques P^+ et P^- par rapport à un tel plan (Fig. 37) vérifient :

$$\vec{E}(P^-) = s(\vec{E}(P^+)).$$

Notamment, en tout point d'un tel plan, le champ est radial (en effet, il est contenu dans le plan, mais n'a pas de composante selon $\vec{u}_z$ d'après la question a).

En ce qui concerne le potentiel, il est inchangé par une réflexion selon un tel plan : $V(P^+) = V(P^-)$. On déduit immédiatement $V(r,-\theta) = V(r,\theta)$.

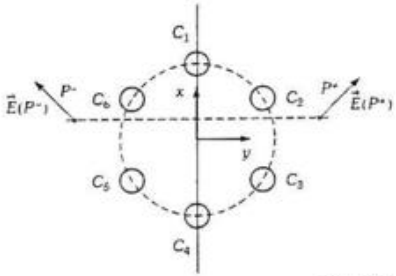


Figure 37

d) Les plans invoqués sont des plans d'antisymétrie pour les charges : le champ $\vec{E}$ est orthogonal sur ces plans. Les surfaces équipotentielles étant orthogonales aux lignes de champ, ces plans sont des équipotentiels.

e) La période angulaire est typiquement $T_\theta = 2\pi/3$. Après une telle rotation, la situation physique est la même.

Fixons r. La fonction $V(r \text{ fixe}, \theta)$ est $T_\theta = 2\pi/3$ périodique. Elle se décompose donc en série de Fourier :

$$V(r \text{ fixe}, \theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2\pi n\theta}{T_\theta} + b_n\sin\frac{2\pi n\theta}{T_\theta}\right).$$

Comme on a fixé r, les constantes a_0, a_n et b_n sont des fonctions de r, soit :

$$V(r,\theta) = a_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n(r)\cos 3n\theta + b_n(r)\sin 3n\theta).$$

Vu la parité de V par rapport à θ (question c)), les termes en sinus sont nuls :

$$\boxed{V(r,\theta) = a_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r)\cos 3n\theta}.$$

f) Soit une électrode seule (Fig. 38), chargée linéiquement à λ.

Par invariance par translation de long de cette électrode et rotation autour de celle-ci, le potentiel ne dépend que de la distance à l'axe D : $V = V(D)$. Le champ électrique est alors de la forme :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V = -\frac{\text{d}V}{\text{d}D}\vec{u}_D.$$

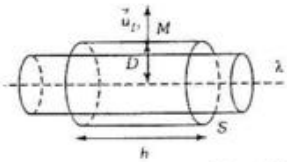


Figure 38

Appliquons le théorème de Gauss à un cylindre S de rayon $D > a$, de hauteur h et d'axe celui de l'électrode (Fig. 38) :

$$\oiint_{(S)} \vec{E}\ \mathrm{d}\vec{S} = E(D)2\pi Dh = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0}$$

On obtient : $\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 D}\vec{u}_D$.

Alors le potentiel vaut : $V(D) = -\int^D E(D')\mathrm{d}D' = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln D + \text{cte}$.

Erreur à éviter

Ne pas confondre le fait que les charges soient réparties en surface de l'électrode avec la densité linéique qui correspond à la charge portée en surface par une longueur unité.

g) Par linéarité, on somme les potentiels correspondant à toutes les électrodes :

$$V(D) = \sum_{i=1}^{6} -\frac{(-1)^{i+1}\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln D_i + \text{cte} \qquad \boxed{V(D) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{D_2D_4D_6}{D_1D_3D_5} + \text{cte}}$$

Si le potentiel est nul sur l'axe, on annule la constante car alors $D_1 = D_2 = \ldots = D_6$ et $V(r = 0) = \text{cte} = 0$.

h) Examinons successivement les propriétés établies :

- V est indépendant de z (question **a)**) ;
- $\vec{E}(-z) = \vec{E}(z)$ (question **b)**) ;
- V est pair en θ (question **c)**) ;
- les plans $\theta = \pi/6[\pi/3]$ forment une équipotentielle nulle (question **d)**) ;
- V est $2\pi/3$ périodique en θ. De plus, il est bien de la forme proposée en question **e)**.

La forme proposée est un candidat très plausible pour le potentiel.

Pour approfondir

9. Émission ionique — D'après Polytechnique

On considère un gaz ionisé globalement neutre, constitué d'ions et d'électrons en nombres égaux. Pour les réacteurs utilisés dans les industries de microélectronique, des électrodes sont polarisées de manière à extraire un flux d'ions du gaz ionisé qui est ensuite accéléré dans une zone appelée gaine. Nous admettrons que la gaine ne contient que des ions qui s'écoulent entre une anode plane infinie située en $x = 0$ et une cathode plane infinie en $x = D$ (Fig. 39).

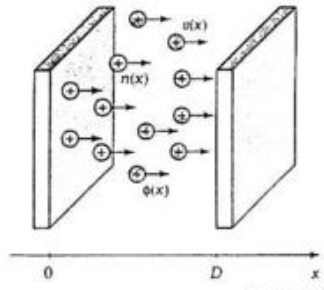


Figure 39

L'écoulement ionique est unidimensionnel et stationnaire le long de x. Les ions de masse m et charge $+e$ sont décrits par leur densité $n(x)$ et leur vitesse $v(x)\vec{u}_x$. Soit $\varphi(x)$ le potentiel électrostatique au point x. Les conditions aux limites de ce problème unidimensionnel sont, avec U constante positive :

$$\varphi(0) = 0 \quad \varphi(D) = -U < 0 \quad v(0) = 0 \quad \vec{E}(0) = \vec{0}$$

© Le Vocateur - La photocopie non autorisée est un délit

Le courant ionique $\vec{J} = J\vec{u}_x$, avec $J = en(x)v(x)$ constant, est considéré comme une donnée du problème. Le but de l'étude est d'établir la caractéristique courant-tension $U(J)$.

a) Exprimer la vitesse d'un ion $v(x)$ en fonction du potentiel électrostatique $\varphi(x)$. En déduire la relation entre $n(x)$ et $\varphi(x)$.

b) Établir l'équation différentielle du deuxième ordre satisfaite par $\varphi(x)$.

c) En déduire la relation entre $\varphi'(x)$ et $\varphi(x)$.

d) Montrer que le potentiel est donné par $\varphi(x) = \beta x^{4/3}$, où β est un coefficient qu'on exprimera en fonction de J, e, m et ε_0.

e) En déduire la relation courant-tension dans la gaine en exprimant la différence de potentiel U en fonction de J et des paramètres du problème.

f) Application numérique : une valeur typique de la densité de flux de particules est $J/e = 10^{18}\ \mathrm{m^{-2}\cdot s^{-1}}$ pour $U = 50\,\mathrm{V}$. Quelle est la valeur de D, épaisseur typique de ces gaines ioniques dans le cas d'ions $^{12}C^+$? On donne $\varepsilon_0 = 8.84\cdot 10^{-12}\ \mathrm{F\cdot m^{-1}}$.

Conseils méthodologiques. Problème complexe : la distribution de charges agit sur le potentiel (équation de Poisson, consulter le savoir-faire 3), qui à son tour agit sur celle-ci.

a) L'ion est soumis seulement à la force électrostatique (le poids est négligé devant celle-ci).

La force électrostatique est conservative. On peut par conséquent utiliser la conservation de l'énergie mécanique d'un ion le long de sa trajectoire :

$$E = \text{cte} = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + e\varphi\,.$$

Déterminons la constante en $x = 0$: comme $v = 0$ et $\varphi = 0$, cte $= 0$.

Ainsi, $\boxed{v = \sqrt{\frac{-2e\varphi}{m}}}$.

Erreur à éviter

La relation fondamentale de la dynamique n'est pas bien adaptée ici car v n'est pas la vitesse d'un ion en fonction du temps.

Comme $J = env = \text{cte}$,

$$\boxed{n(x)\sqrt{-\varphi(x)} = J\sqrt{\frac{m}{2e^3}}}\,.$$

Remarque

Comme $\varphi \leq 0$, le signe moins dans la racine ne pose aucun problème.

b) L'équation de Poisson permet de relier le potentiel à la densité volumique de charges :

$$\Delta\varphi + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0 = \varphi''(x) + \frac{en(x)}{\varepsilon_0}\,.$$

En effet, $\rho(x) = en(x)$.

On en déduit :

$$\boxed{\varphi''(x) + \frac{J}{\varepsilon_0}\sqrt{\frac{m}{2e}}\frac{1}{\sqrt{-\varphi(x)}} = 0}$$

c) Il faut intégrer, en multipliant par φ' :

$$\varphi'\varphi'' + \frac{J}{\varepsilon_0}\sqrt{\frac{m}{2e}}\varphi'(-\varphi)^{-1/2} = 0$$

On obtient :

$$\frac{\varphi'^2}{2} - \frac{2J}{\varepsilon_0}\sqrt{\frac{m}{2e}}(-\varphi)^{1/2} = \text{cte}.$$

Là aussi, la constante se détermine en $x = 0$: c'est 0.

d) L'énoncé propose une solution : $\varphi = \beta x^{4/3}$. Essayons-la :

$$\frac{16\beta^2 x^{2/3}}{18} = \frac{J}{\varepsilon_0}\sqrt{\frac{2m}{e}}\sqrt{-\beta}\,x^{2/3}.$$

Cette solution convient si $\frac{8}{9}(-\beta)^{3/2} = \frac{J}{\varepsilon_0}\sqrt{\frac{2m}{e}}$. Ainsi :

$$\boxed{\beta = -\left(\frac{9J}{8\varepsilon_0}\sqrt{\frac{2m}{e}}\right)^{2/3}}.$$

e) Il reste à utiliser la dernière condition aux limites : $\varphi(D) = -U$, soit $\beta D^{4/3} = -U$, d'où :

$$\boxed{U = \left(\frac{9J}{8\varepsilon_0}\sqrt{\frac{2m}{e}}\right)^{2/3} D^{4/3}}.$$

La différence de potentiel U est proportionnelle à l'intensité exposant $2/3$.

f) La masse d'un atome de ^{12}C vaut :

$$m = \frac{12\ 10^{-3}}{6.02\ 10^{23}} = 2.0 \cdot 10^{-26}\ \text{kg}$$

On en déduit $D = 5.9 \cdot 10^{-3}$ m.

10. Écrantage dans un plasma — D'après Centrale-Supelec

Les plasmas sont des milieux globalement neutres, partiellement ou totalement ionisés. On s'intéresse à un plasma d'argon contenant, en moyenne et par unité de volume n_e électrons libres de masse m_e et de charge $-e$, $n_i = n_e$ ions Ar^+ de masse m_i et n_0 atomes de Ar de masse m_0. On considère que le plasma est à l'équilibre thermodynamique local, ce qui permet de définir la température T de ce plasma.

Considérons un ion Ar^+ particulier placé à l'origine. Du fait de l'attraction coulombienne au voisinage de cet ion, on observe un surplus de charge négative, responsable d'un écart local à la neutralité.

Pour une fonction à symétrie sphérique $f(r)$, le laplacien s'écrit : $\Delta f(r) = \frac{1}{r}\frac{d^2(rf(r))}{dr^2}$.

a) Soit $V(r)$ le potentiel en un point M situé à la distance r de l'ion Ar^+. On considère le potentiel nul à l'infini. Les densités volumiques d'ions et d'électrons en M s'écrivent :

$$n_+ = n_e\exp\left(-\frac{eV(r)}{kT}\right) \text{ et } n_- = n_e\exp\left(\frac{eV(r)}{kT}\right).$$

avec $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C (charge élémentaire) et $k = 1,28 \cdot 10^{-23}$ J · K^{-1} (constante de Boltzmann). Quelle(s) remarque(s) vous inspirent ces expressions de n_+ et n_- ? Quel nom donne-t-on usuellement à ces lois de répartition ?

b) Donner l'expression de la densité volumique totale de charges au point M, $\rho(r)$ pour $r \neq 0$.

c) Quelle est l'équation locale satisfaite en M par le potentiel $V(r)$?

© Lavoisier - La photocopie non autorisée est un délit

d) On se place dans l'hypothèse $eV(r) \ll kT$. Simplifier l'expression précédente et la résoudre en introduisant la fonction $u(r) = rV(r)$. On utilisera deux constantes d'intégration A_1 et A_2.

e) On admet qu'au voisinage immédiat de l'ion Ar^+, l'influence de sa charge, supposée ponctuelle, l'emporte sur celle des charges volumiques. Déterminer les constantes A_1 et A_2. Donner l'expression de $V(r)$ en fonction de e, ε_0, r et d'une distance caractéristique λ_D (longueur de Debye) qu'on explicitera en fonction de ε_0, k, T, n_e et e. Commenter le résultat obtenu.

f) En déduire la densité volumique de charge $\rho(r)$ en $r \neq 0$, puis la charge totale $Q(r)$ (y compris la charge ponctuelle centrale) contenue dans une sphère de centre O et de rayon r en fonction de e, λ_D et r. Discuter les cas $r \to 0$ et $r \to \infty$. Conclure.

g) Application numérique. On donne pour ce plasma $n_e = 3,0 \cdot 10^{21}$ m^{-3}, $\varepsilon_0 = 8,84 \cdot 10^{-12}$ F · m^{-1}. Calculer la valeur numérique de λ_D à la température de 10^3 K, puis de 10^4 K. Discuter la validité de l'approximation faite au e). Comparer λ_D à la distance typique entre deux ions Ar^+.

Conseils méthodologiques. Se servir des savoir-faire 2 (relations locales) et 3 (utilisation du potentiel).

a) Les deux densités volumiques de charges présentent une forme similaire : $n = A\exp\left(-\frac{e_p}{kT}\right)$, où A est une constante et e_p l'énergie potentielle d'un ion ou d'un électron dans le potentiel V.

Plus l'énergie potentielle d'une particule est élevée en un point, moins les particules ont tendance à se regrouper autour de ce point. Ce type de loi a été étudié en première année lors de l'étude de l'atmosphère isotherme. La loi de pression était de la forme $p = p_0\exp\left(-\frac{mgz}{kT}\right)$.

Dans ce cas, l'énergie potentielle de pesanteur était $e_p = mgz$. Ce facteur $\boxed{\exp\left(-\frac{e_p}{kT}\right)}$ s'appelle le **facteur de Boltzmann**.

Remarque

En effet, une charge q placée dans le potentiel V possède l'énergie potentielle qV.

b) Il faut comptabiliser les charges positives (ions) et négatives (électrons). Leur densité volumique est respectivement n_+ (n_-). Leurs charges volumiques associées sont :

$$\rho_+ = +en_+ \text{ et } \rho_- = -en_-$$

La densité volumique de charges totale est ainsi :

$$\rho = \rho_+ + \rho_- = e(n_+ - n_-)$$

Le milieu est localement chargé en M si $n_+(M) \neq n_-(M)$.

c) Le potentiel satisfait l'équation de Poisson : $\Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$. Avec l'expression précédente de la densité volumique de charges et celle du laplacien donnée dans l'énoncé :

$$\boxed{\frac{1}{r}\frac{d^2(rV)}{dr^2} + \frac{en_e}{\varepsilon_0}\left(\exp\left(-\frac{eV}{kT}\right) - \exp\left(\frac{eV}{kT}\right)\right) = 0}$$

d) On peut ainsi linéariser :

$$\frac{1}{r}\frac{d^2u}{dr^2} = -\frac{en_e}{\varepsilon_0}\left(1 - \frac{eV}{kT} - 1 - \frac{eV}{kT}\right)$$

soit : $u''(r) - \frac{2n_e e^2}{\varepsilon_0 kT}u(r) = 0$.

Technique de calcul

Rappelons $\exp(x) = 1 + x + o(x^2)$ pour $x \ll 1$.

On posera $\frac{1}{\lambda_D^2} = \frac{2n_e e^2}{\varepsilon_0 kT}$. Vu l'équation différentielle, cette quantité est typiquement homogène à l'inverse du carré d'une longueur.

Remarque

En effet, $u''(r)$ est homogène à $[u]$ divisée par le carré d'une longueur.

On peut aisément résoudre cette équation :

$$u(r) = A_1 \exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right) + A_2 \exp\left(\frac{r}{\lambda_D}\right).$$

soit en revenant au potentiel :

$$\boxed{V(r) = \frac{u(r)}{r} = \frac{A_1}{r}\exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right) + \frac{A_2}{r}\exp\left(\frac{r}{\lambda_D}\right)}.$$

Erreur à éviter

La solution de $f''(r) - k^2 f(r) = 0$ est $f(r) = A_1 \exp(kr) + A_2 \exp(-kr)$. à ne pas confondre avec $f''(r) + k^2 f(r) = 0$ dont la solution est $f(r) = A_1 \cos(kr) + A_2 \sin(kr)$.

e) Pour déterminer A_1 et A_2, on utilise les conditions aux limites.

À l'infini, le potentiel est pris nul :

$$\lim_{r \to \infty} V(r) = 0.$$

En conséquence, le terme divergent en A_2 est nul : $A_2 = 0$.

Près de l'origine, l'influence de l'ions Ar^+ est prépondérante. Le potentiel près de l'origine est donc quasiment le même que celui d'une charge ponctuelle $+e$ placée à l'origine :

$$V(r) \underset{r \to 0}{\sim} \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

On compare ce résultat à l'expression exacte du potentiel :

$$V(r) = \frac{u(r)}{r} = \frac{A_1}{r}\exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right).$$

On en déduit alors $A_1 = e/(4\pi\varepsilon_0)$.

En présence du plasma, le potentiel d'une charge placée à l'origine décroît exponentiellement. Ce résultat est à comparer à la décroissance en $1/r$ du potentiel de cette même charge dans le vide. La décroissance est bien plus rapide dans le plasma à cause de la présence des charges négatives attirées par l'ion Ar^+. La charge positive n'est plus seule, mais accompagnée de charges globalement de signe opposé. On parle alors d'**écrantage**. Au bout de quelques λ_D, le potentiel est quasi nul et l'influence de l'ion argon ne se fait quasiment plus ressentir.

f) L'équation de Poisson permet d'obtenir la densité volumique de charges :

$$\rho(r) = -\varepsilon_0 \Delta V = -\varepsilon_0 \frac{1}{r}\frac{d^2(rV)}{dr^2} = -\varepsilon_0 \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r \lambda_D^2}\exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right) = -\frac{e}{4\pi\lambda_D^2 r}\exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right).$$

Le résultat est bien homogène à une charge par unité de volume. Le signe négatif signifie que l'ion chargé positivement placé à l'origine attire plutôt les charges négatives que positives.

La charge contenue dans la sphère de centre O et de rayon r est la charge de l'ion Ar^+ (soit e) à laquelle on ajoute la charge volumique caractérisée par $\rho(r)$:

Erreur à éviter

Ne pas oublier la charge $+e$ à l'origine qui n'est pas prise en compte dans le terme de charge volumique.

$$Q(r) = e + \iiint_{\text{boule de rayon } r} \rho \, d\tau.$$

On intègre sur des coquilles sphériques comprises entre r' et $r' + dr'$, soit $d\tau = 4\pi r'^2 dr'$:

Erreur à éviter

ρ n'est pas uniforme : ne pas intégrer en multipliant par le volume !

$$Q(r) = e - \int_0^r 4\pi r'^2 \frac{e}{4\pi\lambda_D^2 r'}\exp\left(-\frac{r'}{\lambda_D}\right)dr'$$

$$= e\left(1 - \frac{1}{\lambda_D^2}\int_0^r r'\exp\left(-\frac{r'}{\lambda_D}\right)dr'\right).$$

© Lavoisier - La photocopie non autorisée est un délit.

On réalise une intégration par parties :

$$\int_0^r r'\exp\left(-\frac{r'}{\lambda_D}\right)dr' = \left[r'\left(-\lambda_D \exp\left(-\frac{r'}{\lambda_D}\right)\right)\right]_0^r + \int_0^r \lambda_D \exp\left(-\frac{r'}{\lambda_D}\right)dr'$$

$$= -r\lambda_D \exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right) - \lambda_D^2 \exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right) + \lambda_D^2$$

Tous calculs finis, on arrive alors à :

$$\boxed{Q(r) = e\left(1 + \frac{r}{\lambda_D}\right)\exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right)}.$$

On en déduit aisément :

- $Q(0) = e$: à l'origine se trouve une charge $+e$, c'est l'ion Ar^+,
- $Q(\infty) = 0$: l'espace est globalement neutre. La charge totale attirée par l'ion central est exactement $-e$.

g) L'application numérique donne $\lambda_D = 2.0\ 10^{-8}$ m pour $T = 10^3$ K et $\lambda_D = 8.9\ 10^{-8}$ m pour $T = 10^4$ K. L'influence d'un ion ne se fait ressentir que sur des distances très faibles (comprises entre le nanomètre et le micromètre). L'écrantage est intense.

Cette distance est à comparer à $d = (n_e)^{-1/3} = 6{,}9\ 10^{-8}$ m. λ_D est du même ordre de grandeur que d. Cela pose un problème par rapport à la modélisation car λ_D est implicitement supposée très supérieure à d (λ_D est la distance typique de variation du potentiel, c'est-à-dire la distance d'écrantage).

11. Mesure de charges — D'après Polytechnique

On cherche à détecter, par microscopie à force électrostatique, des charges électriques stockées dans un isolant déposé sur un conducteur. Deux plaques conductrices (armatures) occupent les plans $z = 0$ et $z = l$ (Fig 40). Les charges sont uniformément réparties à l'intérieur du volume défini par $0 \leqslant z \leqslant h$ (zone grisée de la figure 40). On note ρ la densité volumique de charges dans cet espace qu'on assimile au vide. Une zone d'aire S contient la charge $q = \rho Sh$. L'origine des potentiels électriques est choisie sur la surface conductrice étudiée en $z = 0$. Les deux surfaces conductrices sont liées à la masse.

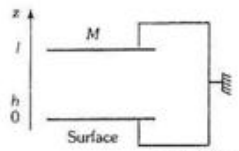


Figure 40

a) Donner les équations vérifiées par le potentiel $V(z)$ dans chacune des régions $0 \leqslant z \leqslant h$ et $h \leqslant z \leqslant l$.

b) Exprimer $V(z)$. Montrer que le champ électrostatique en $z = l$ vaut $\rho h^2/2\varepsilon_0 l$.

c) Faire un graphe du potentiel $V(z)$; on prendre $h/l = 0{,}2$.

d) Quelle est la charge surfacique portée par l'armature du haut ?

e) Quel est le principe de la mesure de la charge q ?

Conseils méthodologiques. On utilise principalement le savoir-faire 3 (maniement du potentiel).

a) Le potentiel satisfait l'équation de Poisson.

Suivant l'expression de ρ :

$$\boxed{V''(z) + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0 \text{ pour } 0 \leqslant z \leqslant l} \quad \text{et} \quad \boxed{V''(z) = 0 \text{ pour } h \leqslant z \leqslant l}.$$

b) Intégrons les équations précédentes.

Pour $0 \leqslant z \leqslant h$, $V''(z) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$, soit : $V'(z) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}z + A$ et $V(z) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}\frac{z^2}{2} + Az + B$, où A et B sont des constantes

Pour $h \leqslant z \leqslant l$, $V''(z) = 0$, soit $V'(z) = C$ et $V(z) = Cz + D$, où C et D sont des constantes.

On a quatre constantes à déterminer. Il faut trouver quatre relations fournies par des conditions de continuité aux changements de milieux. Déjà, le potentiel est nul en $z = 0$ et $z = l$, soit $B = 0$ et $Cl + D = 0$. Ensuite, le potentiel est continu en $z = h$, soit :

$$-\frac{\rho}{\varepsilon_0}\frac{h^2}{2} + Ah = Ch - Cl = C(h - l).$$

Enfin, le champ électrique est continu en $z = h$ car il n'existe pas de charges surfaciques à cet endroit. Comme $\vec{E} = -V'(z)\vec{u}_z$, on déduit que V' est continu, soit :

$$-\frac{\rho}{\varepsilon_0}h + A = C = \left(-\frac{\rho}{\varepsilon_0}\frac{h^2}{2} + Ah\right)/(h - l).$$

Ainsi : $-\frac{\rho}{\varepsilon_0}h(h - l) + A(h - l) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}\frac{h^2}{2} + Ah$.

On obtient : $A = \frac{\rho}{\varepsilon_0}h\left(l - \frac{h}{2}\right)$.

On déduit :

$$\boxed{B = 0} \quad \boxed{C = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}\frac{h^2}{2l}} \quad \boxed{D = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\frac{h^2}{2}}.$$

On évalue alors $E(l)$:

$$\boxed{E(z) = -V'(z) = -C = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\frac{h^2}{2l}}$$

conformément à l'énoncé.

Technique de calcul

$V'(z)$ est continu, ce qui implique la continuité de la pente au point de raccordement.

c) Pour $0 \leqslant z \leqslant l$, le potentiel a la forme d'une parabole de concavité tournée vers le bas.

Pour $h \leqslant z \leqslant l$, le potentiel décroît linéairement.

Sachant qu'en $z = h$, la courbe est continue avec même pente de part et d'autre, on en déduit l'allure indiquée en Fig. 41.

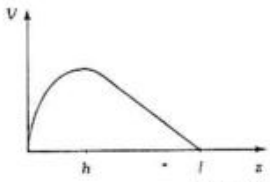


Figure 41

d) On utilise la relation de passage (ou théorème de Coulomb) pour le champ électrique au voisinage de l'armature du haut. Dans l'armature conductrice, le champ électrique est nul. Alors :

$$\vec{E}(z = l^-) - \vec{E}(z = l^+) = \vec{E}(z = l^-) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}(-\vec{u}_z).$$

On déduit :

$$\boxed{\sigma = -\varepsilon_0\frac{\rho}{\varepsilon_0}\frac{h^2}{2l} = -\rho\frac{h^2}{2l}}$$

e) L'armature du haut est chargée et soumise à un champ électrique dû à la présence de la charge q. En évaluant la force correspondante, on accédera à la valeur de q. C'est pourquoi cette méthode s'appelle microscopie à force électrostatique.

© Lavoisier – La photocopie non autorisée est un délit

12. Champ électrique créé par un cercle chargé — D'après Oral ENS

Un cercle de rayon R porte la charge Q uniformément répartie linéiquement (Fig. 42).

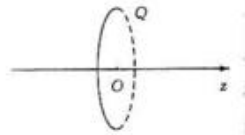


Figure 42

a) Que vaut le champ électrique en tout point de l'axe Oz ?

b) En tout point de l'espace, on pose :

$$\begin{cases} E_z(r,z) = E_z^0(z) + rE_z^1(z) + \frac{r^2}{2}E_z^2(z) + \dots \\ E_r(r,z) = E_r^0(z) + rE_r^1(z) + \frac{r^2}{2}E_r^2(z) + \dots \end{cases}$$

Expliquer précisément un tel choix.

c) Trouver l'ensemble des fonctions E_z^1 et E_r^1.

d) En déduire l'allure des lignes de champ.

On donne :

$$\begin{cases} \operatorname{div}\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\ \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\vec{u}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{u}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\vec{u}_z \end{cases}$$

Conseils méthodologiques. Utiliser les symétries (savoir-faire 1) et les équations locales (savoir-faire 2).

a) Sur l'axe, le champ électrique ne dépend évidemment que de la variable z.

Soit M un point de l'axe. Tout plan contenant l'axe est un plan de symétrie des charges. Le champ électrique est dirigé selon l'intersection de tous ces plans : $\vec{E} \parallel \vec{u}_z$.

Soit une charge élémentaire dq en P, elle crée en M le champ (Fig. 43) :

$$d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 PM^2}\vec{u}$$

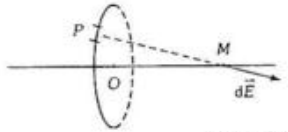


Figure 43

Comme $\vec{E} \parallel \vec{u}_z$, il est plus pertinent de s'intéresser à $dE_z = d\vec{E} \cdot \vec{u}_z$:

$$dE_z = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 PM^2}(\vec{u} \cdot \vec{u}_z) = \frac{z\,dq}{4\pi\varepsilon_0(z^2 + R^2)^{3/2}}$$

On intègre :

$$\boxed{E_z = \oint_C dE_z = \frac{zQ}{4\pi\varepsilon_0(z^2 + R^2)^{3/2}}} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{E} = E_z\vec{u}_z}.$$

b) Par invariance par rotation autour de l'axe Oz, $\|\vec{E}\|$ est indépendant de θ.

Soit M un point quelconque. Le plan contenant M et l'axe Oz est un plan de symétrie des charges. Le champ électrique est contenu dans de plan, donc est selon $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_z$.

Ainsi, $\boxed{\vec{E} = E_r(r,z)\vec{u}_r + E_z(r,z)\vec{u}_z}$

Ensuite, à z fixé, on écrit E_r sous forme de série entière de la variable r. Les coefficients dépendent alors de z, ce sont les fonctions $E_r^j(z)$. On procède de même pour E_z^j.

c) Déjà, pour $r = 0$, $E_r(r = 0, z) = 0$ car le champ est selon l'axe. Par conséquent, $E_r^0(r) = 0$.

Toujours pour $r = 0$, $\vec{E} = E_z^0 \vec{u}_z$ est connue : on l'a évalué à la question a) : $E_z^0 = \dfrac{zQ}{4\pi\varepsilon_0(z^2+R^2)^{3/2}}$.

Il reste à déterminer les autres coefficients grâce aux équations locales que le champ doit vérifier : $\operatorname{div}\vec{E} = 0$ et $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E} = \vec{0}$.

Remarque

$\rho = 0$ en dehors du cercle

$\operatorname{div}\vec{E} = 0$ donne :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(rE_r)}{\partial r} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 = \frac{1}{r}\frac{\partial\left(r^2E_r^1(z) + \frac{r^3}{2}E_r^2(z) + \ldots\right)}{\partial r} + \frac{\partial\left(E_z^0(z) + rE_z^1(z) + \frac{r^2}{2}E_z^2(z) + \ldots\right)}{\partial z}.$$

Alors :

$$2E_r^1 + \frac{3}{2}rE_r^2 + \ldots + E_z^{0\prime} + rE_z^{1\prime} + \frac{r^2}{2}E_z^{2\prime} + \ldots = 0.$$

Technique de calcul

La nullité de la série entière en r est équivalente à celle de tous ses coefficients

On arrive à :

$$\boxed{E_r^1 = -\frac{1}{2}E_z^{0\prime}}, \quad \boxed{E_r^2 = -\frac{2}{3}E_z^{1\prime}} \ldots$$

$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E} = \vec{0}$ donne :

$$\left(\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r}\right)\vec{u}_\theta = \vec{0},$$

soit :

$$\frac{\partial\left(rE_r^1(z) + \frac{r^2}{2}E_r^2(z) + \ldots\right)}{\partial z} = \frac{\partial\left(E_z^0(z) + rE_z^1(z) + \frac{r^2}{2}E_z^2(z) + \ldots\right)}{\partial r}.$$

En identifiant terme à terme :

$$\boxed{E_z^1 = 0}, \quad \boxed{E_z^2 = E_r^{1\prime}} \ldots$$

Au final, on obtient :

$$\boxed{\begin{cases} E_r(r,z) = -\dfrac{r}{2}\dfrac{dE_z^0}{dz} + O(r^3) \\ E_z(r,z) = E_z^0 - \dfrac{r^2}{2}\dfrac{d^2E_z^0}{dz^2} + O(r^4) \end{cases}}$$

De proche en proche, on calcule tous les termes en fonction de E_z^0. Notamment, les E_i^j avec i pair sont nuls ainsi que les E_z^j avec j impair.

d) Vu le plan de symétrie $z = 0$, il suffit de connaître les lignes de champ dans le demi-espace $z \geqslant 0$. On complètera ensuite par symétrie.

Vu de suffisamment loin, le cercle apparaît presque ponctuel, donc le champ électrique qu'il crée est quasiment celui d'une charge ponctuelle Q placée à l'origine : à l'infini, $\vec{E} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$.

© Lavoisier – Le photocopillage nous autorisons est un délit

Dans le plan $z = 0$, le champ est radial par raison de symétrie. Si $Q \geqslant 0$, le champ est rentrant à l'intérieur du cercle et sortant à l'extérieur.

Enfin, au voisinage de l'axe, la composante radiale vaut :

$$E_r \sim rE_r^1 = -\frac{r}{2}\frac{dE_z^0}{dz}.$$

Pour $z \leqslant R/\sqrt{2}$, $E_r \leqslant 0$: les lignes de champ convergent vers l'axe Oz et pour $z \geqslant R/\sqrt{2}$, $E_r \geqslant 0$: les lignes de champ divergent à partir de l'axe.

À partir de tous ces résultats, on en déduit l'allure donnée sur la figure 44.

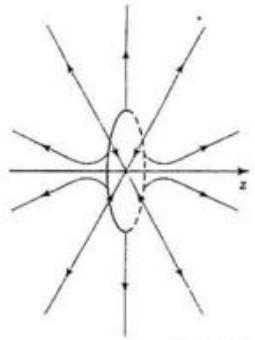


Figure 44

Magnétostatique

Méthodes

Le cours en questions

1 ■ Champ et potentiel magnétostatiques

1.1 Qu'est-ce qu'une densité volumique/surfacique de courant ?

• Dans le cas d'un courant existant en tout point d'un volume, on définit la densité volumique de courant $\vec{j}$ telle que l'intensité I_S traversant une surface S est $I_S = \iint_S \vec{j} \cdot \overrightarrow{dS}$ (unité : A · m^{-2}) (Fig. 1)

Figure 1

$\vec{j} = \sum_i n_i q_i \vec{v}_i = \sum_i \rho_i \vec{v}_i$, où la somme porte sur les différentes espèces chargées (n_i est le nombre de particules i par unité de volume, q_i la charge d'une telle particule et $\vec{v}_i$ sa vitesse).

Erreur à éviter
Attention, le courant est volumique (surfacique), mais l'intensité correspond à une intégrale surfacique (linéique) de la densité volumique de courant.

• Similairement, dans le cas d'un courant défini en tout point d'une surface, on définit la densité surfacique de courant $\vec{j}_S$ telle que l'intensité I_C traversant une ligne C est $I_C = \int_C \vec{j}_S \cdot \vec{n}\, dl$, où $\vec{n}$ est la normale à la courbe C contenue dans la surface en question (Fig. 2).

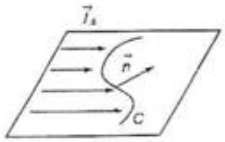


Figure 2

Erreur à éviter
Ces deux quantités ne sont pas homogènes entre elles, et il est rigoureusement impossible de substituer l'une à l'autre dans une expression ! La densité volumique intervient notamment dans les équations de Maxwell, et la densité surfacique dans les relations de passage.

© Lavoisier – La photocopie non autorisée est un délit

1.2 Énoncer les relations locales vérifiées par le champ magnétostatique.

• Le champ magnétostatique vérifie les deux équations de Maxwell (locales) :

$$\text{div}\,\vec{B} = 0 \quad (1) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad (2).$$

1.3 Quelles sont les équations intégrales correspondant aux équations locales précédentes ?

• L'équation de Maxwell-Thomson (1) exprime sous forme intégrale la nullité du flux sortant de toute surface fermée : $\oiint_{(S)} \vec{B} \cdot \overrightarrow{dS} = 0$.

Démonstration à connaître.

• L'équation de Maxwell-Ampère (2) se réécrit comme le théorème d'Ampère : $\oint_C \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 I_{enlacés}$.

1.4 Qu'est-ce que le potentiel vecteur ?

• Comme $\text{div}\,\vec{B} = 0$, $\vec{B}$ s'écrit nécessairement $\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}$. $\vec{A}$ se nomme **potentiel vecteur**.

Démonstration à connaître.

• Sous forme intégrale, en appelant C une courbe fermée et S une surface s'appuyant sur celle-ci : $\oint_C \vec{A} \cdot \vec{dl} = \iint_S \vec{B} \cdot \overrightarrow{dS}$.

1.5 Rappeler les propriétés du potentiel vecteur.

Démonstration à connaître.

• Le potentiel vecteur n'est pas unique : si $\vec{A}$ est un potentiel vecteur correspondant au champ $\vec{B}$, alors $\vec{A} + \overrightarrow{\text{grad}}\, f$ aussi, avec f une fonction quelconque.

Hors programme PT-PT*.

• Vu la non-unicité du potentiel vecteur, on impose la condition de jauge de Coulomb $\text{div}\vec{A} = 0$.

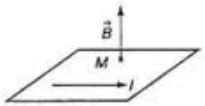
Noter le parallèle avec l'équation de Poisson de l'électrostatique :
$\vec{A} \leftrightarrow V$, $\mu_0 \leftrightarrow 1/\varepsilon_0$ et $\vec{j} \leftrightarrow \rho$.

• En jauge de Coulomb, le potentiel vecteur est lié aux sources par l'équation de Poisson $\Delta\vec{A} + \mu_0 \vec{j} = \vec{0}$.

1.6 Quelles sont les propriétés de symétrie des champ et potentiel magnétostatiques ?

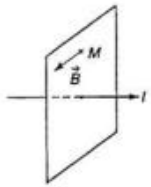
Il est beaucoup plus intéressant de trouver un plan de symétrie des courants que d'antisymétrie.
La direction de $\vec{B}$ est alors connue sans ambiguïté.

• Le champ magnétique est un pseudo-vecteur. En tout point d'un plan de symétrie des courants, il est dirigé perpendiculairement à ce plan (Fig. 3).
En tout point d'un plan d'antisymétrie des courants, il est dirigé selon ce plan (Fig. 4).



Plan de symétrie des courants

Figure 3



Plan d'antisymétrie des courants

Figure 4

• De chaque côté d'un plan de symétrie (antisymétrie) des courants, le champ magnétique se transforme en l'opposé de son symétrique (en son symétrique) (Fig. 5).

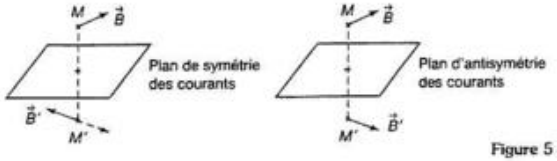


Figure 5

• Le potentiel vecteur est un vecteur (en jauge de Coulomb), il possède les mêmes propriétés de symétries que le champ électrique.

1.7 Quelles sont les expressions des champ et potentiel magnétostatiques en fonction des courants ?

• Pour un courant filiforme d'intensité I (Fig. 6) :

$$\vec{B}(M) = \int_C \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\,d\vec{\ell} \wedge \vec{u}}{PM^2}$$

$$\vec{A}(M) = \int_C \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\,d\vec{\ell}}{PM}$$

• Pour une distribution volumique de courants $\vec{j}(P)$ (Fig. 7) :

$$\vec{B}(M) = \iiint \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j}(P)d\tau \wedge \vec{u}}{PM^2}$$

$$\vec{A}(M) = \iiint \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j}(P)d\tau}{PM}$$

Les expressions concernant le potentiel ne figurent pas au programme de PT-PT*.

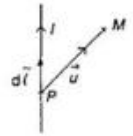


Figure 6

Loi de Biot et Savart.

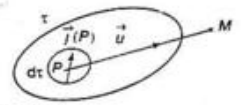


Figure 7

Pour passer de filiforme à volumique, $Id\vec{\ell} \rightsquigarrow \vec{j}\,d\tau$.

© Lavoisier – La photocopie non autorisée est un délit

On peut éventuellement procéder à l'aide des équations locales énoncées en 1.2.

1.8 Comment évaluer en pratique le champ magnétostatique ?

• Après avoir établi les propriétés d'invariance et de symétrie, il existe en pratique deux possibilités.

– Si les symétries et invarances sont suffisantes, il faut appliquer le théorème d'Ampère.

– En toute généralité, on calcule le champ magnétique à partir des expressions données en **1.7**, en projetant éventuellement sur la direction du champ si elle est connue.

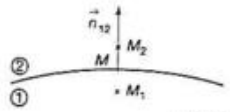


Figure 8

Erreur à éviter

Les relations de passage sont des conséquences des équations de Maxwell. L'utilisation directe des équations de Maxwell sur une surface chargée est à proscrire ; il faut se servir des relations de passage.

En effet, sa dérivée spatiale, le champ magnétique, doit rester finie.

1.9 Rappeler les relations de passage vérifiées par le champ et le potentiel.

• La composante normale du champ magnétique est toujours continue. En revanche, à la traversée d'une distribution surfacique de courants, la composante tangentielle du champ magnétique est discontinue. Au final, on obtient (Fig. 8) :

$$\vec{B}(M_2) - \vec{B}(M_1) = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{12}$$

• En revanche, le potentiel vecteur $\vec{A}$ est toujours continu.

2 ■ Dipôle magnétique

2.1 Qu'est-ce qu'un dipôle magnétique ?

• Un dipôle magnétique est constitué d'un circuit (boucle de courant) dont les dimensions sont faibles par rapport à la distance d'observation.

• On caractérise un dipôle par son moment magnétique $\vec{\mathcal{M}} = I\vec{S}$ (Fig. 9). Le sens de $\vec{S}$ est donné à partir du sens + choisi pour l'intensité et de la règle du tire-bouchon de Maxwell.

L'unité du moment magnétique est A · m².

Figure 9

Hors programme PT-PT*.

2.2 Quels sont les champ et potentiel vecteur engendrés par un dipôle magnétique ?

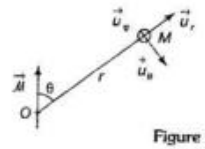


Figure 10

• Au loin, le potentiel vecteur engendré (en jauge de Coulomb) par le dipôle $\vec{\mathcal{M}}$ est (Fig. 10) :

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{u}_r}{r^2} = \frac{\mu_0 \mathcal{M} \sin\theta}{4\pi r^2} \vec{u}_\varphi$$

• Au loin, le champ magnétique engendré par le dipôle $\vec{\mathcal{M}}$ est :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi r^3}(2\cos\theta\,\vec{u}_r + \sin\theta\,\vec{u}_\theta) \; .$$

Les coordonnées utilisées sont les coordonnées sphériques, d'axe $\vec{\mathcal{M}}$.

2.3 Quelles sont les actions subies par un dipôle magnétique (permanent) dans un champ magnétique extérieur ?

Seule l'expression du couple figure au programme de PT-PT*.

• Un dipôle dans un champ magnétique subit une action qui agit sur son orientation : le couple exercé est $\vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}$.

Faire le parallèle avec le dipôle électrique :
$\vec{\mathcal{M}} \rightleftharpoons \vec{p}$, $\vec{B} \rightleftharpoons \vec{E}$.

• Un dipôle soumis à un champ magnétique inhomogène subit la force

$F_x = \vec{\mathcal{M}} \cdot \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial x}$ (id. en y et en z).

Si le champ magnétique est uniforme, la force exercée est nulle $\vec{F} = \vec{0}$.

• L'énergie potentielle d'un dipôle magnétique dans un champ magnétique extérieur est $E_p = -\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{B}$.

• Du point de vue de l'orientation, les positions d'équilibre du dipôle sont parallèles au champ (stable si de même sens, et instable si sens opposés) (Fig. 11).

Du point de vue de la position, la position d'équilibre stable se situe à l'endroit où le champ magnétique est le plus intense (en position parallèle).

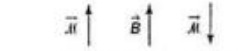


Figure 11

Les savoir-faire clefs

1 ■ Savoir utiliser les symétries et invariances pour le champ magnétique.

Conseils méthodologiques

1.1 Un fil infini est parcouru par un courant I (Fig. 12).

a) Quelles coordonnées utiliser ? De quelle(s) variable(s) dépend le module du champ magnétique ?

b) Quelle est la direction du champ magnétique ?

c) En fait, le courant I parcourt la surface d'un cylindre infini de rayon R. Répondre aux deux mêmes questions.

Figure 12

1.1.a) Appliquer les invariances.

1.1.b) Se servir de symétries.

1.2 Le plan infini $z = 0$ est parcouru par le courant surfacique $\vec{j}_S = j_S \vec{u}_x$ (Fig. 13).

a) De quelle(s) variable(s) dépend le champ magnétique ?

b) Quelle est la direction du champ magnétique ?

c) Que dire du champ magnétique de part et d'autre du plan ?

1.2.a) Appliquer les invariances.

1.2.b) Se servir de symétries.

1.2.c) Utiliser un plan de symétrie.

© Lavoisier – La photocopie non autorisée est un délit

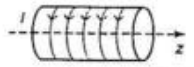


Figure 14

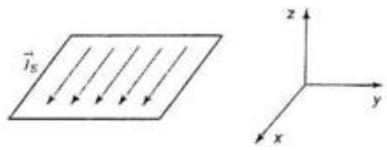


Figure 13

1.3 Un solénoïde infini comprend n spires par unité de longueur (Fig. 14) qui sont parcourues par un courant I.

a) De quelle(s) variable(s) dépend le champ magnétique ?

b) Quelle est la direction du champ magnétique ?

1.3.a) Appliquer les invariances.

1.3.b) Se servir de symétries.

Bien réfléchir aux coordonnées adaptées au problème.

1.1.a) Les coordonnées cylindriques (r, θ, z) d'axe le fil respectent naturellement la géométrie du problème.

La distribution de courants est clairement invariante par toutes les rotations autour du fil. La norme du champ magnétique est donc indépendante de l'angle θ.

De plus, il existe aussi une invariance par translation le long du fil. La norme du champ magnétique est indépendante de z.

Au final, elle ne peut dépendre que de r : $\boxed{\|\vec{B}\| = \|\vec{B}(r)\|}$.

Erreur à éviter
Attention à ne pas invoquer de plans de symétrie à ce moment du raisonnement.

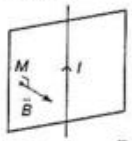


Figure 15

b) Soit M un point quelconque. Le plan passant par M et le fil (plan $(O, \vec{u}_z, \vec{u}_r)$) est un plan de symétrie des courants (Fig. 15). En conséquence, le champ magnétique est perpendiculaire à ce plan, soit $\vec{B} = B\vec{u}_\theta$.

Au final, $\boxed{\vec{B} = B(r)\vec{u}_\theta}$.

Le plan perpendiculaire au fil et passant par M est un plan d'antisymétrie des courants. Le champ magnétique est contenu dans celui-ci, mais on ne peut conclure.

c) Les arguments des questions précédentes peuvent être intégralement repris, et on a encore : $\boxed{\vec{B} = B(r)\vec{u}_\theta}$.

1.2.a) On utilise ici les coordonnées cartésiennes qui sont les plus adaptées au problème.

La situation est clairement invariante par toutes les translations de direction $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$. La norme du champ électrique ne peut donc dépendre que de z : $\boxed{\|\vec{B}\| = \|\vec{B}(z)\|}$.

Erreur à éviter
Ne pas se servir du plan $z = 0$ pour déduire la direction du champ en un point M quelconque ! En effet, ce plan ne contient généralement pas le point M.

b) Soit M un point quelconque. Le plan $(M, \vec{u}_x, \vec{u}_z)$ est un plan de symétrie des courants (Fig. 16). Ainsi, le champ magnétique lui est normal :

$$\boxed{\vec{B} = B\vec{u}_y}$$

c) Au final, $\boxed{\vec{B} = B(z)\vec{u}_y}$.

Deux point situés de part et d'autre du plan $z = 0$ sont symétriques par rapport à ce plan de symétrie des courants. Les champs en ces deux points doivent être antisymétriques l'un de l'autre. Comme le champ est selon $\vec{u}_y$, il se retourne en traversant le plan $z = 0$: ainsi, $\boxed{\vec{B}(-z) = -\vec{B}(z)}$.

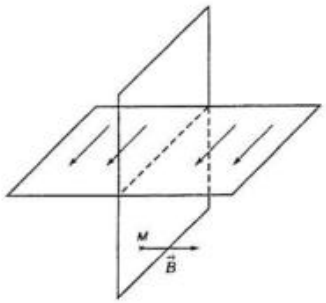


Figure 16

Le plan $(M, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ est un plan d'antisymétrie des courants. En toute généralité, $\vec{B}$ a une composante selon $\vec{u}_y$ et une selon $\vec{u}_z$: le raisonnement n'aboutit pas.

1.3.a) On emploie ici les coordonnées cylindriques (r, θ, z) d'axe celui du solénoïde.

Les invariances par rotation autour de l'axe du solénoïde ainsi que par translation le long de cet axe impliquent que $\|\vec{B}\|$ ne dépend que de r, distance à l'axe.

b) Soit M un point quelconque. On considère le plan perpendiculaire à l'axe du solénoïde et passant par M qui est un plan de symétrie des courants (Fig. 17). Alors le champ magnétique est perpendiculaire à ce plan, soit $\vec{B} \parallel \vec{u}_z$.

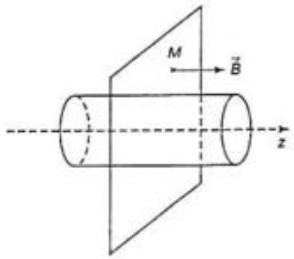


Figure 17

Le plan contenant M et l'axe est un plan d'antisymétrie des courants, $\vec{B}$ est parallèle à ce plan, mais ce raisonnement ne permet pas de conclure (en dehors de l'axe).

2 ■ Savoir utiliser une densité volumique/surfacique de courant.

Conseils méthodologiques

2.1.a) On modélise un fil par un cylindre de rayon R parcouru uniformément par un courant I (Fig. 18).

Que vaut la densité volumique de courant ?

Un câble coaxial est constitué de deux cylindres coaxiaux de rayons a et b ($a < b$) parcourus en surface respectivement par les courants I et $-I$ (Fig. 19).

Quelles sont les densités surfaciques de courant sur les deux cylindres ?

2.1.a) et b) Appliquer les définitions du Cours en questions 1.1..

© Lavoisier – La photocopie non autorisée est un délit

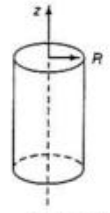


Figure 18

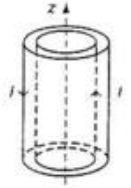


Figure 19

2.2.a) et b) Appliquer la définition du Cours en questions 1.1.

2.2 Un solénoïde de rayon R comprend n spires par unité de longueur. Ces spires sont parcourues par un courant I (Fig. 14).

a) Si les spires sont très rapprochées, quel est le type de distribution de courants ?

b) Calculer la densité de courant associée.

Le savoir-faire 2.3 est plus délicat que les deux précédents.

2.3 Dans un milieu conducteur occupant le demi-espace $z \geqslant 0$ peut exister sous certaines conditions le courant volumique $\vec{j} = j_0 \exp(-z/\delta)\vec{u}_y$, où $\delta \approx 1\ \mu m$ (Fig. 20).

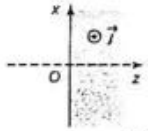


Figure 20

a) Expliquer pourquoi ce courant volumique est dit « localisé près de la surface ».

b) On désire modéliser ce courant volumique par un courant surfacique. Quelle est alors sa valeur ?

c) Donner une autre distribution volumique de courants conduisant au même courant surfacique équivalent.

d) Dans le cas du courant volumique donné par l'énoncé, le champ magnétique vaut $\vec{B} = B_0 \vec{u}_x$ pour $z \leqslant 0$ et $\vec{B} = B_0 \exp(-z/\delta)\vec{u}_x$ pour $z \geqslant 0$.

Donner la forme du champ magnétique dans le conducteur dans le cas de courants surfaciques.

2.3.a) Tracer son graphe.

2.3.b) Considérer une épaisseur dz.

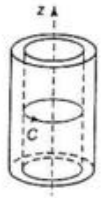


Figure 21

Le courant surfacique est selon $\vec{u}_z$, direction du courant.

Erreur à éviter
Attention à ne pas faire intervenir de surface dans ce calcul !

2.1.a) Le courant passe dans tout le volume du fil. L'intensité I est égale au flux de $\vec{j}$ au travers de n'importe quelle section du fil. On choisit une section droite S (perpendiculaire à l'axe du fil) :

$$I = \iint_S \vec{j} \cdot \overrightarrow{dS} = \iint_S j \cdot dS = j \iint_S dS = j_S .$$

Ainsi, $\boxed{\vec{j} = \frac{I}{\pi R^2}\vec{u}_z}$.

b) Considérons le cylindre intérieur. Le courant passe uniformément à travers toute la surface. L'intensité I correspond à l'intégrale du courant surfacique sur toute ligne fermée entourant le cylindre. On choisit un cercle C de rayon a (Fig. 21) et :

$$I = \int_C \vec{j}_S \cdot \vec{n}\, d\ell = \int_C j_S \cdot d\ell = j_S \int_C d\ell = j_S 2\pi a .$$

Alors, $\boxed{\vec{j}_S = \frac{I}{2\pi a}\vec{u}_z}$.

On procède de même pour le cylindre extérieur. Le rayon est désormais b, et le sens du courant est inversé : $\boxed{\vec{j}_S = -\frac{I}{2\pi b}\vec{u}_z}$.

2.2.a) Si les fils sont très serrés, on a quasiment une distribution surfacique de courants. En effet, chaque point de la surface est le siège d'un courant, de direction $\vec{u}_\theta$ en coordonnées cylindriques.

b) On va comparer les deux approches en considérant une longueur h de solénoïde.
Dans le cas de fils, la longueur h contient nh fils, soit une intensité nhI (Fig. 22).
Dans le cas d'une distribution surfacique de courants, l'intensité parcourant la longueur h est : $\int_0^h j_S \cdot dz = j_S \cdot h$.

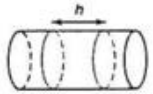


Figure 22

En égalant ces deux expressions (équivalence des deux descriptions), $nhI = j_S \cdot h$, soit $\boxed{\vec{j}_S = nI\vec{u}_\theta}$.

2.3.a) Le graphe de j est représenté sur la figure 23. On s'aperçoit qu'au-delà de quelques δ le courant est quasi nul. Ainsi, le courant volumique n'existe que près de la surface. Il est légitime de chercher à simplifier la situation et à la remplacer par un courant surfacique.

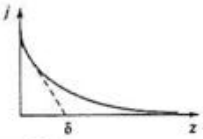


Figure 23

b) On s'intéresse à une longueur h selon $\vec{u}_x$ (Fig. 24). Le courant la traversant dans la description surfacique est $I = j_S \cdot h$.

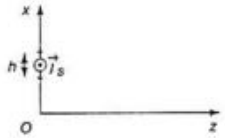


Figure 24

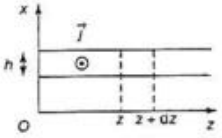


Figure 25

Dans le cas volumique, il faut considérer tout le courant traversant la surface indiquée sur la figure 25. La surface $dS = h\,dz$ est parcourue par le courant $dI = \vec{j}\,\vec{dS} = j\,dS$. Ainsi :

$$I = \int_0^{+\infty} j(z)h\,dz = h\int_0^{+\infty} j_0 \exp(-z/\delta)dz = h\delta j_0 .$$

Ainsi, $\boxed{\vec{j}_S = \delta j_0 \vec{u}_y}$.

c) Si on considère le courant volumique uniforme $\vec{j} = j_0\vec{u}_y$ circulant sur l'épaisseur δ, le même raisonnement qu'à la question précédente mène à un même courant surfacique équivalent.

d) En présence de courants volumiques, le champ magnétique est continu. Il passe de B_0 à 0 en quelques δ (tout comme le courant volumique). Si on remplace les courants volumiques par des courants surfaciques, le champ magnétique passe brusquement de B_0 (pour $z < 0$) à 0 (pour $z > 0$). Il est discontinu, et on pourrait vérifier la relation de passage.

La relation est homogène car j_S s'exprime en $A \cdot m^{-1}$ et j_0 en $A \cdot m^{-2}$.

© Lavoisier - La photocopie non autorisée est un délit

Conseils méthodologiques

3 ■ Savoir se servir des équations locales et relations de passage.

3.1 Le plan infini $z = 0$ porte le courant surfacique uniforme $\vec{j}_S = j_S\vec{u}_x$ (Fig. 13). Le champ magnétique est de la forme $\vec{B} = B(z)\vec{u}_y$, avec $B(z)$ impaire (voir le savoir-faire 1.2).

3.1.a) Utiliser Maxwell-Ampère.

a) À l'aide d'une équation locale, établir une équation différentielle satisfaite par $B(z)$.

3.1.b) Utiliser la relation de passage pour $\vec{B}$.

b) En utilisant une relation de passage, donner l'expression du champ magnétique dans tout l'espace.

c) Retrouver ce résultat grâce au théorème d'Ampère.

3.2 Un solénoïde infini comportant n spires par unité de longueur est parcouru par le courant I (Fig. 14). On rappelle que le champ magnétique est de la forme $\vec{B} = B(r)\vec{u}_z$ (voir le savoir-faire 1.3).

3.2.a) Utiliser Maxwell-Ampère.

a) À l'aide d'une équation locale, montrer que $\vec{B}$ est uniforme à l'intérieur et à l'extérieur du solénoïde.

3.2.b) Cours de première année.

b) Rappeler l'intensité du champ magnétique dans le solénoïde.

3.2.c) Utiliser le savoir-faire 2.2.

c) Grâce à une relation de passage, en déduire le champ à l'extérieur du solénoïde.
On donne en coordonnées cylindriques :

$$\begin{cases} \operatorname{div}\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\ \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\vec{u}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{u}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\vec{u}_z \end{cases}$$

3.3 Un supraconducteur se modélise comme un milieu dans lequel le potentiel vecteur vérifie $\vec{j} = -\frac{ne^2}{m}\vec{A}$, où $n = 3\,10^{28}\ m^{-3}$ pour le plomb est la densité volumique électronique, $e = 1{,}6\,10^{-19}\,C$ la charge élémentaire et $m = 9{,}1\,10^{-31}$ kg la masse d'un électron.

3.3.a) Prendre le rotationnel de Maxwell-Ampère pour éliminer $\vec{j}$.

a) À l'aide des équations locales, trouver une équation aux dérivées partielles satisfaite par $\vec{B}$. On donne $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\overrightarrow{\operatorname{rot}} = \overrightarrow{\operatorname{grad}}\operatorname{div} - \vec{\Delta}$.

b) Le supraconducteur occupe le demi-espace $z \geqslant 0$. De quelle(s) variable(s) dépendent les composantes de $\vec{B}$?

3.3.c) Utiliser Maxwell-Thomson.

c) En utilisant une equation locale, montrer que B_z est obligatoirement constante.

d) Résoudre l'équation différentielle satisfaite par B_x, B_y et B_z.

3.3.e) Utiliser les relations de passage.

e) À l'extérieur du supraconducteur, le champ magnétique est uniforme et vaut $\vec{B} = B_0\vec{u}_x$. En déduire exactement le champ magnétique dans le supraconducteur. On rappelle que la modélisation des courants est volumique et en conséquence $\vec{j}_S = \vec{0}$.

f) Faire apparaître une longueur caractéristique, l'évaluer et commenter le résultat. On rappelle $\mu_0 = 4\pi\ 10^{-7}\ H \cdot m^{-1}$.

3.1.a) On utilise l'équation de Maxwell-Ampère pour $z \neq 0$: $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \vec{0}$, car il n'y a aucun courant en dehors du plan $z = 0$. Vu la forme du champ,

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \left(\vec{u}_z \frac{\partial}{\partial z}\right) \wedge B(z)\vec{u}_y = -B'(z)\vec{u}_x = \vec{0}.$$

On en déduit : $\boxed{B'(z) = 0}$.

b) En conséquence, $\boxed{\vec{B} = B_0\vec{u}_y \text{ pour } z > 0}$ et $\boxed{\vec{B} = -B_0\vec{u}_y \text{ pour } z < 0}$.

La relation de passage en $z = 0$ s'écrit alors :

$$\vec{B}(z = 0^+) - \vec{B}(z = 0^-) = \mu_0 \vec{j}_S \wedge \vec{u}_z.$$

On en déduit $2B_0 = -\mu_0 j_S$. Le champ magnétique s'écrit donc :

$$\boxed{\vec{B} = -\frac{\mu_0 j_S}{2}\vec{u}_y \text{ pour } z > 0} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 j_S}{2}\vec{u}_y \text{ pour } z < 0}.$$

Erreur à éviter
Attention aux signes : écrire la relation de passage avec rigueur.

c) On choisit comme contour d'Ampère C un rectangle (Fig. 26).
Les côtés parallèles à $\vec{u}_y$ ont comme cote $\pm z$ et la longueur de ces côtés est notée a.

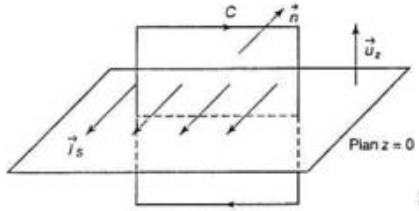


Figure 26

Erreur à éviter
Penser à orienter le contour d'Ampère pour pouvoir déterminer le signe des courants enlacés.

Le théorème d'Ampère indique $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{enlacés}}$. Sur deux des côtés, $\vec{B} \perp d\vec{\ell}$ donc leur contribution disparaît. Il reste alors :

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B(z)a - B(-z)a = \mu_0 I_{\text{enlacés}} = -\mu_0 j_S a.$$

La normale au circuit (donnée par le tire-bouchon d'Ampère) est opposée au sens du courant, ce qui explique la présence du signe moins dans les courants enlacés.

Ainsi, $\boxed{B(z) = -\mu_0 j_S/2 \text{ pour } z > 0}$. On retrouve le résultat qui précède.

3.2.a) L'équation de Maxwell-Ampère pour $r \neq R$ indique $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \vec{0}$. À l'aide de la formule donnée, $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = -B'(r)\vec{u}_\theta = \vec{0}$. On en déduit $\boxed{B' = 0}$.

L'équation $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \vec{0}$ n'est pas valable à la surface du solénoïde parcourue par un courant.

Le champ est uniforme à l'intérieur et à l'extérieur du solénoïde.

b) Le cours de première année indique : $\boxed{\vec{B}_{\text{int}} = \mu_0 n I \vec{u}_z}$.

c) La densité surfacique de courant vaut $\vec{j}_S = nI\vec{u}_\theta$.

On applique les relations de passage $\vec{B}(r = R^+) - \vec{B}(r = R^-) = \mu_0 \vec{j}_S \wedge \vec{u}_r$.

© Lavoisier – La photocopie non autorisée est un délit

Erreur à éviter
Bien identifier les milieux 1 et 2 dans la relation de passage, notamment $\vec{n}_{12} = \vec{u}_r$.

On en déduit :

$$\vec{B}_{\text{ext}} = \vec{B}_{\text{int}} + \mu_0 n I \vec{u}_\theta \wedge \vec{u}_r = \mu_0 n I \vec{u}_z - \mu_0 n I \vec{u}_z = \vec{0}.$$

Le champ magnétique est nul à l'extérieur d'un solénoïde infini.

3.3.a) On cherche à éliminer la densité volumique de courant en prenant son rotationnel, qui sera proportionnel à $\vec{B}$:

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{j} = -\mu_0 \frac{ne^2}{m}\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} = -\mu_0 \frac{ne^2}{m}\vec{B}.$$

Or, $\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \overrightarrow{\text{grad}}\,\text{div}\,\vec{B} - \Delta\vec{B}$. On en déduit l'équation :

$$\boxed{\Delta\vec{B} = \frac{\mu_0 ne^2}{m}\vec{B} = \lambda\vec{B}}.$$

avec $\lambda = \mu_0 ne^2/m$.

b) Le supraconducteur est invariant par les translations selon $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$. On en déduit au final $\boxed{B_x = B_x(z)}$. Il en va de même pour les deux autres composantes.

c) L'équation de Maxwell-Thomson permet de simplifier l'expression de B_z.

En effet, $\text{div}\,\vec{B} = 0$ devient $B_z' = 0$ car les dérivées selon x et y sont nulles.

Ainsi, $\boxed{B_z = \text{cte}}$.

d) On simplifie l'équation obtenue à la question **3.3.a)**.

Comme $\Delta\vec{B} = \Delta B_x\vec{u}_x + \Delta B_y\vec{u}_y + \Delta B_z\vec{u}_z$, l'équation devient, par exemple pour la composante x,

$$\Delta B_x = B_x''(z) = \lambda B_x.$$

et de même pour B_y.

On résout :

$$\boxed{B_x(z) = \alpha_x \exp(\sqrt{\lambda}z) + \beta_x \exp(-\sqrt{\lambda}z)}.$$

Il en va de même pour B_y.

e) On utilise les conditions aux limites. Déja le champ magnétique ne diverge pas dans le supraconducteur. Ainsi, les termes $\alpha_x \exp(\sqrt{\lambda}z)$ sont nécessairement nuls.
De plus, le champ magnétique est continu vu l'absence de courants surfaciques.

- B_z est constante et nulle par continuité.
- Pour B_y, $B_y(0) = 0$ donne $\beta_y \exp(0) = 0$, soit $\beta_y = 0$. La composante est nulle.
- $B_x(0) = B_0$, ainsi $\beta_x = B_0$. On en déduit : $\boxed{B_x = B_0 \exp(-\sqrt{\lambda}z)}$.

C'est l'effet Meissner : un supraconducteur expulse les lignes de champ.

f) On voit apparaître une quantité homogène à une longueur. L'argument d'une exponentielle étant obligatoirement sans dimension, $\boxed{\delta = 1/\sqrt{\lambda}}$ est une longueur.

L'application numérique donne : $\boxed{\delta = 3{,}1\,10^{-8}\ \text{m} = 31\ \text{nm}}$.

δ apparaît comme l'épaisseur selon laquelle le champ magnétique prend des valeurs assez importantes. Au-delà de quelques δ, il est quasiment nul.

4 ■ Savoir calculer un potentiel vecteur.

Un fil infini rectiligne est parcouru par le courant I.

a) Que vaut le champ magnétique ?

b) Quelle est la forme du potentiel vecteur ?

c) Le calculer explicitement grâce à un rectangle de hauteur h et de côté compris entre r et $r + dr$ (Fig. 27).

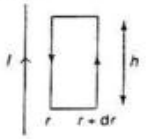


Figure 27

d) Vérifier la condition de jauge de Coulomb :

$$\operatorname{div}\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

Conseils méthodologiques

Hors programme PT-PT*.

4.1.a) Symétries et invariances, puis théorème d'Ampère.

4.1.b) Symétries et invariances.

4.1.c) Utiliser la relation entre $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sous forme intégrale.

a) La distribution de courants est invariante par les translations parallèles au fil et par les rotations autour du fil. Ainsi, en coordonnées cylindriques, $\boxed{\|\vec{B}\| = \|\vec{B}(r)\|}$.

Soit M un point quelconque. Le plan contenant le fil et le point M est un plan de symétrie des courants. $\vec{B}$ lui est orthogonal, soit $\vec{B} \parallel \vec{u}_\theta$.

Ainsi, $\vec{B} = B(r)\vec{u}_\theta$.

Appliquons le théorème d'Ampère à un cercle centré sur le fil (Fig. 28) :

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \oint B\cdot d\ell = B\oint d\ell = B\cdot 2\pi r = \mu_0 I_{enlacés} = \mu_0 I.$$

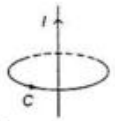


Figure 28

car $d\vec{\ell} = d\ell\,\vec{u}_\theta$. Ainsi, $\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{u}_\theta}$.

Le recours au théorème d'Ampère doit être systématique pour le fil infini.

b) On cherche un potentiel vecteur ayant les mêmes symétries que les courants. Les invariances sont les mêmes qu'à la question précédente, d'où : $\boxed{\|\vec{A}\| = \|\vec{A}(r)\|}$.

Soit un point M. Le plan perpendiculaire au fil et passant par M est un plan d'antisymétrie des courants. Le potentiel vecteur lui est perpendiculaire (en jauge de Coulomb), d'où : $\boxed{\vec{A} = A\vec{u}_z}$.

Trouver un plan de symétrie des courants.

En combinant ces résultats : $\boxed{\vec{A} = A(r)\vec{u}_z}$.

c) On applique la relation intégrale entre le champ magnétique et le potentiel vecteur : $\oint_C \vec{A}\cdot d\vec{\ell} = \iint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}$.

Erreur à éviter
Bien orienter le contour d'intégration.

On évalue le premier terme, $\oint_C \vec{A}\cdot d\vec{\ell} = A(r+dr)h - A(r)h$ car sur les deux côtés horizontaux $\vec{A} \perp d\vec{\ell}$.

Erreur à éviter
Prêter une grande attention au sens de la normale au circuit.

Pour le second : $\iint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = -B(r)h\,dr$.

On en déduit $A(r+dr) - A(r) = -B(r)dr$, soit en divisant par dr dans la limite où ce dernier $\to 0$, $A'(r) = -B$.

Cela n'est pas étonnant car en choisissant $\vec{A}$ avec les mêmes symétries que les courants, on a implicitement choisi la jauge de Coulomb.

On intègre : $A(r) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln r + \text{cte}$. Il n'existe aucune contrainte sur le choix de la constante. On peut prendre un potentiel vecteur nul à une distance r_0 de l'axe : $\boxed{\vec{A} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{r}{r_0}\vec{u}_z}$.

d) $\operatorname{div}\vec{A}$ est clairement nul d'après la formule donnée.

Conseils méthodologiques

5 ■ Savoir évaluer un moment dipolaire magnétique.

Hors programme PT-PT*.

5.1.a) Symétries.

5.1.b) Voir le Cours en questions **1.7.**

5.1 Une spire circulaire, de rayon a, est parcourue par un courant I.

a) Rappeler la forme du champ magnétique sur l'axe.

b) Le calculer explicitement à l'aide de la loi de Biot et Savart.

c) Trouver un équivalent du champ au loin.

d) Rapprocher ce résultat du champ créé par un dipôle.

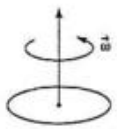


Figure 29

5.2 Un disque isolant de rayon a porte une charge surfacique uniforme σ. Le disque est mis en rotation autour de son axe Oz à la vitesse angulaire constante $\vec{\omega}$ (Fig. 29).

5.2.b) Consulter le Cours en questions **2.1.**

a) Quel est le courant élémentaire circulant dans la couronne comprise entre r et $r + dr$?

b) En déduire le moment dipolaire élémentaire de la couronne.

c) Quel est le moment dipolaire total du disque ?

d) Quel est le champ créé au loin par le disque ?

Appliquer ici les arguments d'invariance n'a aucun sens.

5.1.a) Comme on recherche le champ magnétique sur l'axe, il ne dépend évidemment que de la coordonnée z.
Soit M un point de l'axe. Tout plan contenant l'axe est un plan d'antisymétrie des courants. La direction du champ magnétique appartient donc à l'intersection de tous ces plans, c'est-à-dire est selon $\vec{u}_z$.

Le plan $z = 0$ étant un plan de symétrie des courants, on déduit que $\vec{B}(-z)$ est l'opposé du symétrique de $\vec{B}(z)$, soit B paire. Le champ magnétique ne se retourne pas en $z = 0$.

Ainsi : $\boxed{\vec{B} = B(z)\vec{u}_z}$.

b) Rappelons la loi de Biot et Savart :

$$\vec{B}(M) = \int_C \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,d\vec{\ell}\wedge\vec{u}}{PM^2}.$$

© Le vidéo - La photocopie non autorisée est un délit

Il est inutile ici de calculer $\vec{B}$, la connaissance de $\vec{B}\cdot\vec{u}_z$ est suffisante. La figure 30 indique la direction de $d\vec{\ell}\wedge\vec{u}$. Il reste à multiplier par $\sin\theta$ pour projeter :

$$B_z(M) = \int_C \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\left\|I\,d\vec{\ell}\wedge\vec{u}\right\|}{PM^2}\sin\theta\,.$$

Comme $d\vec{\ell}\perp\vec{u}$, $\left\|I\,d\vec{\ell}\wedge\vec{u}\right\| = I\,d\ell$. Alors :

$$B_z(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi PM^2}\sin\theta\int_C d\ell = \frac{\mu_0 I}{4\pi PM^2}2\pi a\sin\theta\,.$$

car PM reste constante quand P parcourt le cercle. Au final, on élimine PM par $PM=\sqrt{a^2+z^2}$ ou $\sin\theta = a/PM$, soit :

$$\boxed{\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2a}\sin^3\theta\,\vec{u}_z = \frac{\mu_0 I}{2a}\left(\frac{a}{\sqrt{z^2+a^2}}\right)^3\vec{u}_z}\,.$$

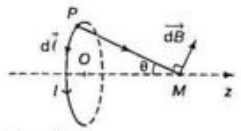


Figure 30

c) En l'infini, le champ tend clairement vers 0. Un équivalent est :

$$\boxed{\vec{B}\sim\frac{\mu_0 I a^2}{2|z|^3}\vec{u}_z}\,.$$

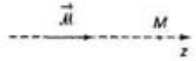


Figure 31

d) Rappelons le champ créé par un dipôle magnétique sur l'axe du dipôle, c'est-à-dire pour $\theta = 0$ (Fig. 31) :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0\mathcal{M}}{4\pi r^3}2\vec{u}_r\,,\quad \text{avec } r = |z|\,.$$

En rapprochant les deux dernière formules, on aboutit à $\boxed{\mathcal{M} = I\pi a^2 = IS}$, expression définissant le moment dipolaire.

5.2. a) La couronne comprise entre r et $r+dr$ porte la charge (Fig. 32) :

$$dq = \sigma\,dS = \sigma\,2\pi r\,dr\,.$$

Cette charge met le temps $T = 2\pi/\omega$ pour effectuer un tour.

Rappelons qu'un courant représente une charge traversant une ligne (pour un courant de surface) par unité de temps. Ainsi, pendant le temps T, l'intégralité de la charge dq contribue. Le courant parcourant la couronne est donc :

$$\boxed{dI = \frac{dq}{T} = \sigma\omega r\,dr}\,.$$

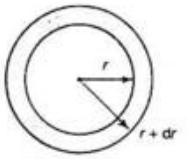


Figure 32

Il est aussi possible d'utiliser la densité surfacique de courant $\vec{j}_S = \sigma\vec{v}$.

Alors $dI = j_S\,d\ell = j_S\,dr = \sigma\omega r\,dr$.

b) La petite couronne entre r et $r+dr$ est très similaire à un circuit filiforme de surface πr^2 et parcourue par le courant dI (Fig. 32).

Son moment magnétique (élémentaire) est ainsi $\boxed{d\vec{\mathcal{M}} = dI\,\pi r^2\,\vec{u}_z}$.

c) Il suffit alors d'intégrer :

$$\vec{\mathcal{M}} = \int_0^a d\vec{\mathcal{M}} = \int_0^a \pi r^2\sigma\omega r\,dr\,\vec{u}_z = \boxed{\pi\frac{a^4}{4}\sigma\omega\,\vec{u}_z}\,.$$

d) Au loin, le champ magnétique créé par le disque s'identifie à celui d'un dipôle portant le moment dipolaire du disque.

© Lavoisier - La photocopie non autorisée est un délit

Conseils méthodologiques

6 ■ Savoir traiter un dipôle dans un champ magnétique extérieur.

Hors programme PT-PT*.

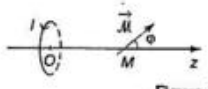


Figure 33

6.b) et 6.c) Étudier l'énergie potentielle.

Une spire circulaire, de rayon a, est parcourue par un courant I. Sur son axe, noté Oz, un dipôle magnétique est libre en translation et en rotation. On note son abscisse z et son orientation est repérée par l'angle φ (Fig. 33).

On rappelle que le champ magnétique créé par la bobine sur l'axe est :

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 I}{2a}\left(\frac{a}{\sqrt{z^2+a^2}}\right)^3\vec{u}_z\,.$$

a) Tracer le module du champ en fonction de la position sur l'axe.

b) On suppose le dipôle fixe mais libre en rotation. Quelles sont ses positions d'équilibre et leur stabilité ?

c) On suppose le dipôle orienté selon $+\vec{u}_z$ ($\varphi = 0$). Quelles sont ses positions d'équilibre en translation ainsi que leur stabilité ?

6.a) En O, $B(0) = \mu_0 I/2a$, et $B\to 0$ quand $z\to\pm\infty$. La courbe est tracée sur la figure 34.

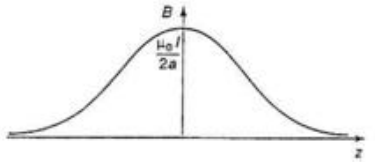


Figure 34

b) Le plus simple est de raisonner avec l'énergie potentielle. Un dipôle magnétique placé dans un champ magnétique extérieur possède une énergie potentielle :

$$E_p = -\vec{\mathcal{M}}\cdot\vec{B} = -\left\|\vec{\mathcal{M}}\right\|\cdot\left\|\vec{B}\right\|\cdot\cos(\vec{\mathcal{M}},\vec{B})\,.$$

Les positions d'équilibre correspondent à des extrema de l'énergie potentielle.

À $\left\|\vec{\mathcal{M}}\right\|$ et $\left\|\vec{B}\right\|$ fixés, l'énergie potentielle est extrémale pour $\cos(\varphi) = \pm 1$. Le moment dipolaire et le champ sont alors parallèles ou antiparallèles.

Pour la stabilité, il suffit d'étudier si l'énergie potentielle est minimale (stable) ou maximale (instable). On arrive aisément à :

- parallèle : stable ;
- antiparallèle : instable.

Comme le champ est selon $+\vec{u}_z$, on en déduit $\boxed{\varphi = 0 : \text{équilibre stable}}$ et $\boxed{\varphi = \pi : \text{équilibre instable}}$.

c) Reconsidérons l'énergie potentielle :

$$E_p = -\vec{\mathcal{M}}\cdot\vec{B} = -\mathcal{M}\cdot B = -\mathcal{M}\frac{\mu_0 I}{2a}\left(\frac{a}{\sqrt{z^2+a^2}}\right)^{3/2}\,.$$

Il s'agit là encore d'obtenir les extrema de E_p, soit de manière équivalente ceux de B. Ces derniers sont indiqués sur la figure 34. En $z = 0$, on a un maximum de B, soit un minimum de E_p : c'est un équilibre stable.

Annales

Pour maîtriser les bases

1. Champ créé par un câble coaxial — D'après Banque PT

Un câble coaxial est constitué de deux cylindres de même axe Oz, de rayons R_1 et R_2 ($R_1 < R_2$) parcourus en surface par l'intensité I montante ou descendante (Fig. 35).

a) Donner par des arguments d'invariance et de symétrie la forme du champ magnétique.

b) Expliciter exactement le champ magnétique en tout point de l'espace.

c) Tracer la norme du champ magnétique en fonction de l'éloignement à l'axe Oz.

d) Commenter précisément les discontinuités du champ magnétique.

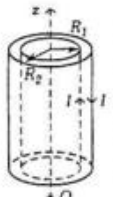


Figure 35

Conseils méthodologiques. On utilise ici les savoir-faire 1 (mise en œuvre des symétries et invariances), 2 (courants surfaciques) et 3 (relations de passage).

a) Déjà vu la géométrie cylindrique, on utilise les coordonnées cylindriques. Les courants sont invariants par les translations selon l'axe $\vec{u}_z$ et par les rotations autour de ce même axe. Ainsi, $\boxed{\|\vec{B}\| = \|\vec{B}(r)\|}$.

Ensuite, soit M un point quelconque. Considérons le plan contenant M et l'axe Oz (Fig. 36).

- C'est un plan de symétrie des courants. Le champ magnétique lui est perpendiculaire, soit $\vec{B} \parallel \vec{u}_\theta$.

En utilisant conjointement ces deux derniers résultats : $\boxed{\vec{B} = B(r)\vec{u}_\theta}$.

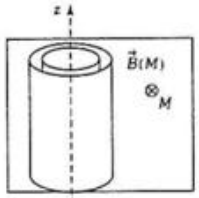


Figure 36

b) Comme les symétries sont nombreuses, on utilise le théorème d'Ampère. Le contour d'Ampère est un cercle *orienté* C centré sur l'axe Oz et de rayon r (Fig. 37).

Alors :

$$\oint_C \vec{B} \cdot \vec{d\ell} = \mu_0 I_{enlacés}.$$

Erreur à éviter

Ne pas oublier d'orienter le contour d'Ampère.

Comme $\vec{B}$ et $\vec{d\ell}$ sont parallèles à $\vec{u}_\theta$, $\vec{B} \cdot \vec{d\ell} = B \cdot d\ell$. Ensuite, le champ magnétique garde la même valeur sur tout le cercle car il n'est fonction que de r. Ainsi, le théorème d'Ampère mène à :

$$B(r)\oint_C d\ell = B(r)2\pi r = \mu_0 I_{enlacés}.$$

On distingue trois cas, selon la valeur de r :

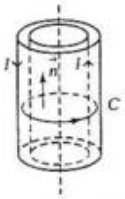


Figure 37

- $r < R_1$: très clairement, les courants enlacés sont nuls, et $\boxed{\vec{B} = \vec{0}}$;

© Lavoisier – La photocopie non autorisée est un délit

- $R_1 < r < R_2$: le contour C n'entoure que le cylindre intérieur.

Ainsi : $I_{enlacés} = +I$.

On obtient : $\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{u}_\theta}$.

Remarque

Le signe plus provient du fait que le courant parcourant le cylindre intérieur et du même sens que la normale au contour donné par la règle du tire-bouchon de Maxwell (Fig. 37).

- Cette fois, les courants enlacés sont ceux des deux cylindres. Le courant du cylindre intérieur contribue avec un signe plus, alors que celui du cylindre extérieur est doté d'un signe moins : $I_{enlacés} = +I - I = 0$.

En conséquence : $\boxed{\vec{B} = \vec{0}}$.

c) La norme du champ magnétique est tracée en fonction de la distance à l'axe sur la figure 38.

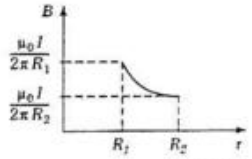


Figure 38

d) Le champ magnétique est typiquement discontinu en $r = R_1$ et $r = R_2$.

Cela correspond à la traversée des cylindres qui sont parcourus par des courants surfaciques. Or ce sont précisément les courants surfaciques qui sont la cause des discontinuités du champ magnétique.

Ces courants surfaciques ont exactement été évalués dans le savoir-faire 2.1 :

$$\vec{j}_{S1} = \frac{I}{2\pi R_1}\vec{u}_z \quad \text{et} \quad \vec{j}_{S2} = -\frac{I}{2\pi R_2}\vec{u}_z.$$

Vérifions les relations de passage :

- en $r = R_1$:

$$\vec{B}(r = R_1^+) - \vec{B}(r = R_1^-) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R_1}\vec{u}_\theta - \vec{0} = \mu_0 \vec{j}_{S1} \wedge \vec{u}_r = \mu_0 \frac{I}{2\pi R_1}\vec{u}_z \wedge \vec{u}_r ;$$

- en $r = R_2$:

$$\vec{B}(r = R_2^+) - \vec{B}(r = R_2^-) = \vec{0} - \frac{\mu_0 I}{2\pi R_2}\vec{u}_\theta = \mu_0 \vec{j}_{S2} \wedge \vec{u}_r = -\mu_0 \frac{I}{2\pi R_2}\vec{u}_z \wedge \vec{u}_r .$$

2. Champ au voisinage de l'axe — D'après Oral CCP

Une spire circulaire, de rayon a, d'axe Oz est parcourue par le courant I.

a) Quelle est la forme du champ magnétique dans tout l'espace ?

b) Quel est le champ magnétique créé sur l'axe ?

c) Évaluer la composante radiale du champ magnétique au voisinage de l'axe en utilisant l'équation $\mathrm{div}\vec{B} = 0$ sur un cylindre de rayon r faible et d'abscisse comprise entre z et $z + dz$.

d) Retrouver le résultat précédent en utilisant directement l'équation de Maxwell-Thomson. On donne en coordonnées cylindriques

$$\mathrm{div}\vec{B} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rB_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial B_z}{\partial z}.$$

Conseils méthodologiques. Cet exercice nécessite l'usage des symétries et invariances (savoir-faire 1) ainsi que la connaissance des équations locales (savoir-faire 3).

a) Commençons par l'examen des invariances. La seule est l'invariance par rotation autour de l'axe Oz.

Ainsi : $\boxed{\|\vec{B}\| = \|\vec{B}\|(r,z)}$.

Passons aux symétries. Soit M un point quelconque de l'espace. Le plan contenant l'axe Oz et le point M (Fig. 39) est un plan d'antisymétrie des courants. En M, le champ magnétique est par conséquent dirigé selon ce plan, c'est-à-dire qu'il ne peut avoir de composantes que sur $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_z$. Au final :

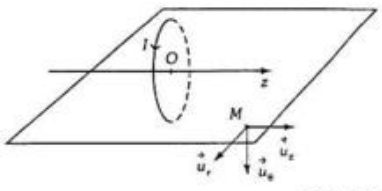


Figure 39

$$\boxed{\vec{B} = B_r(r,z)\vec{u}_r + B_z(r,z)\vec{u}_z}.$$

b) Sur l'axe, on bénéficie de symétries supplémentaires. En effet, tout plan contenant l'axe Oz est un plan d'antisymétrie des courants. Le champ magnétique est alors dirigé selon l'intersection de ces plans, il est donc parallèle à l'axe Oz.

Sur l'axe, le champ ne dépend que de la variable z, et ainsi $\boxed{\vec{B}_{axe} = B_{axe}(z)\vec{u}_z}$.

Le calcul de sa valeur a déjà été mené dans le savoir-faire 5.

On rappelle donc : $\vec{B}_{axe} = \dfrac{\mu_0 I}{2a}\dfrac{a^3}{(a^2+z^2)^{3/2}}\vec{u}_z$.

Remarque

On utilise la loi de Biot et Savart

c) On utilise l'équation de Maxwell-Thomson sous forme intégrale :

$$\Phi = \oiint_{(S)} \vec{B}\cdot\vec{dS} = 0,$$

où S est la surface indiquée sur la figure 40. Le calcul du flux comporte trois parties :

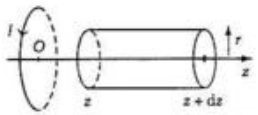


Figure 40

- la surface latérale : le vecteur surface est $\vec{dS} = dS\,\vec{u}_r$. Ainsi :

$$\vec{B}\cdot\vec{dS} = \vec{B}\cdot\vec{u}_r\,dS = B_r(r,z)dS.$$

Alors : $\delta\Phi_{lat} = 2\pi r\,dz B_r(r,z)$.

Technique de calcul

La surface latérale du cylindre de rayon r et hauteur dz est $2\pi r\,dz$.

- la section droite d'abscisse z : le vecteur surface est $\vec{dS} = dS(-\vec{u}_z)$.

Ainsi : $\vec{B}\cdot\vec{dS} = \vec{B}\cdot(-\vec{u}_z)dS = -B_z(r,z)dS$.

Ainsi : $\Phi_z = -B_z(r=0,z)\pi r^2 = -B_{axe}(z)\pi r^2$.

En effet, r est pris suffisamment faible pour que $B_z(r,z)$ soit quasiment égal à $B_z(r=0,z)$ ($B_z(r,z)$ est continue au voisinage de l'axe).

- la section droite d'abscisse $z+dz$: le vecteur surface est $\vec{dS} = dS(+\vec{u}_z)$.

Ainsi : $\vec{B}\cdot\vec{dS} = \vec{B}\cdot\vec{u}_z\,dS = B_z(r,z+dz)dS$,

et : $\Phi_{z+dz} = B_z(r=0,z+dz)\pi r^2 = B_{axe}(z+dz)\pi r^2$ pour les mêmes raisons que précédemment.

Au total : $\Phi = \delta\Phi_{lat} + \Phi_z + \Phi_{z+dz} = 0 = 2\pi r\,dz B_r(r,z) + B_{axe}(z+dz)\pi r^2 - B_{axe}(z)\pi r^2$.

On divise alors par $\pi r\,dz$ dans la limite $dz \to 0$:

$$2B_r(r,z) + rB'_{axe}(z) = 0.$$

soit : $\boxed{B_r(r,z) = -\dfrac{r}{2}\dfrac{dB_{axe}}{dz}(z)}$.

Technique de calcul

Rappelons la définition de la dérivée :

$f'(z) = \dfrac{f(z+dz)-f(z)}{dz}$ dans la limite $dz \to 0$

© Levallois – La photocopie non autorisée est un délit

d) Utilisons l'équation de Maxwell-Thomson, sachant que $B_\theta = 0$:

$$\mathrm{div}\vec{B} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rB_r)}{\partial r} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0.$$

Si on se place très près de l'axe, par continuité, $B_r(r,z) \approx B_r(0,z) = B_{axe}(z)$.

Alors : $\dfrac{\partial}{\partial r}(rB_r) = -rB'_{axe}(z)$.

Technique de calcul

L'intégration est réalisée à z fixé. La constante d'intégration dépend de ce choix. Pour s'en convaincre, dériver l'équation obtenue pour retomber sur l'expression originelle

En intégrant par rapport à r à z fixé :

$$rB_r = -\frac{r^2}{2}B'_{axe}(z) + \mathrm{cte}(z).$$

Près de l'axe, r tend vers 0 et les deux premiers termes de l'équation précédente s'annulent. On déduit $\mathrm{cte}(z) = 0$.

Au final : $\boxed{B_r(r,z) = -\dfrac{r}{2}\dfrac{dB_{axe}}{dz}(z)}$.

On obtient effectivement le même résultat qu'à la question c).

Remarque

Les question c) et d) correspondent à l'utilisation de la même loi physique (équation de Maxwell-Thomson) sous forme intégrale ou locale

3. Potentiel vecteur créé par un solénoïde — D'après Oral CCP

Un solénoïde infini comportant n spires par unité de longueur est parcouru par le courant I. On rappelle que le champ magnétique est uniforme à l'intérieur $\vec{B}_{int} = \mu_0 nI\vec{u}_z$ et nul à l'extérieur.

Remarque

Hors programme PT-PT*

a) Quelle est la forme du potentiel vecteur ?

b) Le calculer explicitement en intégrant sur un cercle bien choisi. On distinguera l'intérieur et l'extérieur du solénoïde.

c) Vérifier qu'à l'intérieur, $\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B}_{int}\wedge\vec{r}$.

d) Le potentiel vecteur est-il continu à la traversée du solénoïde ?

Conseils méthodologiques. Cet exercice met en pratique les savoir-faire 1 (utilisation des symétries et invariances) et 4 (évaluation de potentiel vecteur).

a) On utilise des coordonnées cylindriques.

On cherche un potentiel vecteur présentant les mêmes symétries que les courants.

L'invariance par translation le long de l'axe et l'invariance par rotation autour de ce même axe indiquent $\boxed{\|\vec{A}\| = \|\vec{A}(r)\|}$

Soit M un point quelconque. Le plan contenant l'axe et le point M est un plan d'antisymétrie des courants. Le potentiel vecteur lui est perpendiculaire, soit $\boxed{\vec{A} \parallel \vec{u}_\theta}$.

Ainsi, $\boxed{\vec{A} = A(r)\vec{u}_\theta}$.

b) On va utiliser la relation intégrale liant le champ magnétique au potentiel vecteur : $\oint_C \vec{A}\cdot\vec{d\ell} = \iint_S \vec{B}\cdot\vec{dS}$.

C est un cercle d'axe celui du solénoïde (Fig. 41).

Comme $\vec{A} \parallel \vec{d\ell}$: $\oint_C \vec{A} \cdot \vec{d\ell} = \oint_C A \cdot d\ell = A 2\pi r$.

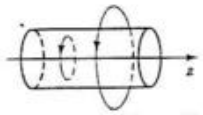


Figure 41

Pour le flux de $\vec{B}$, il faut distinguer si le cercle est inclus dans le solénoïde ou non (Fig. 41).

Dans le premier cas : $\iint_S \vec{B} \cdot \vec{dS} = \iint_S B \cdot dS = B \iint_S dS = \mu_0 n I \pi r^2$.

Dans le second cas, le flux n'est non nul qu'à l'intérieur du solénoïde, soit :

$$\iint_S \vec{B} \cdot \vec{dS} = \iint_S B \cdot dS = B \iint_{r \leqslant R} dS = \mu_0 n I \pi R^2 .$$

Au final : $\boxed{r \leqslant R : \vec{A} = \frac{\mu_0 n I r}{2} \vec{u}_\theta \qquad r \geqslant R : \vec{A} = \frac{\mu_0 n I R^2}{2r} \vec{u}_\theta}$.

c) On vérifie : $\frac{1}{2}\vec{B}_{int} \wedge \vec{r} = \frac{1}{2}\mu_0 n I \vec{u}_z \wedge (r\vec{u}_r + z\vec{u}_z) = \frac{\mu_0 n I r}{2}\vec{u}_\theta$.

d) Sur les expressions, on constate que $\vec{A}(r = R) = \frac{\mu_0 n I R}{2}\vec{u}_\theta$ quelle que soit l'expression de $\vec{A}$ choisie. Le potentiel vecteur est donc continu. Ce résultat n'est pas surprenant, c'est en fait une nécessité.

4. Entraînement du rotor d'un moteur synchrone — D'après CCP

La partie mobile d'un moteur synchrone (rotor) est constituée d'un bobinage alimenté par un courant continu et assimilable à un aimant de moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$, de module $\mathcal{M}_0$ constant. On suppose que $\vec{\mathcal{M}}$ est animé dans le plan Oxy d'un mouvement de rotation autour de l'axe Oz (Fig. 42) à la vitesse angulaire ω constante.

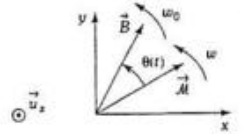


Figure 42

Le mouvement s'effectue dans une région de l'espace où règne le champ magnétique $\vec{B}$ supposé uniforme, de norme B qui lui, tourne dans le plan Oxy autour de Oz à la vitesse angulaire constante ω_0.

On note θ_0 la valeur initiale de l'angle $\theta = (\vec{\mathcal{M}}, \vec{B})$.

a) Exprimer $\theta(t)$. En déduire la valeur instantanée du couple $\vec{\Gamma}(t) = \Gamma(t)\vec{u}_z$ exercé par le champ magnétique sur le rotor.

b) Calculer la valeur moyenne $\langle\Gamma\rangle$ de ce couple.

c) Pourquoi le moteur synchrone ne peut-il fonctionner que pour une valeur bien déterminée de ω ? ω sera égale à cette valeur pour la suite. Quelle est alors la valeur Γ_0 de $\Gamma(t)$?

d) Quelle condition l'angle θ doit-il vérifier pour que cette machine fonctionne effectivement en moteur ?

e) Quelle est, dans ce cas, la puissance mécanique $P_{méca}$ que peut délivrer le moteur ?

f) On suppose que la machine, fonctionnant en moteur, entraîne une « charge » de couple résistant Γ_r (en module). Quelle condition doit vérifier Γ_r pour que le moteur puisse effectivement entraîner la charge ? Combien existe-t-il *a priori* de configurations possibles ?

g) Trouver un critère de stabilité de fonctionnement du moteur en régime permanent. Par exemple, on supposera que suite à un incident, le rotor a pris de l'avance ou du retard sur son régime permanent.

h) Ce type de moteur peut-il démarrer seul ?

© Laveur – La photocopie non autorisée est un délit

Conseils méthodologiques. L'étude du moteur synchrone ne relève pas à proprement parler de la magnétostatique, mais leurs formalismes sont identiques. Cet exercice fait appel au savoir-faire 6 (action d'un champ magnétique sur un dipôle).

a) La vitesse angulaire relative entre le rotor et le champ magnétique vaut $\dot{\theta} = \omega_0 - \omega$.

On intègre cette relation en : $\boxed{\theta(t) = (\omega_0 - \omega)t + \theta_0}$.

L'expression du couple exercé par le champ magnétique sur le rotor est $\vec{\Gamma}(t) = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}$.
On utilise la base $(\vec{u}_{\mathcal{M}}, \vec{u}'_{\mathcal{M}}, \vec{u}_z)$ (Fig. 43) et :

$$\vec{\Gamma}(t) = \mathcal{M}_0 B \vec{u}_{\mathcal{M}} \wedge (\cos\theta \vec{u}_{\mathcal{M}} + \sin\theta \vec{u}'_{\mathcal{M}}) = \mathcal{M}_0 B \sin\theta \vec{u}_z .$$

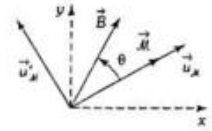


Figure 43

b) En utilisant l'expression de $\theta(t)$, on obtient : $\boxed{\Gamma(t) = \mathcal{M}_0 B \sin((\omega_0 - \omega)t + \theta_0)}$.

Pour la valeur moyenne du couple, deux cas se présentent :

- $\omega \neq \omega_0$: dans ce cas, $\langle\Gamma\rangle = 0$ car la valeur moyenne d'un sinus est nulle ;
- $\omega = \omega_0$: alors, $\langle\Gamma\rangle = \mathcal{M}_0 B \sin\theta$ car le couple est constant et égal à sa valeur moyenne.

c) Pour que le dispositif fonctionne effectivement en moteur, le rotor doit subir un couple non nul en moyenne. Si $\omega \neq \omega_0$, le rotor ne subit aucun couple en moyenne : la condition n'est pas vérifiée. Le fonctionnement moteur impose l'égalité des vitesses angulaires de rotation du rotor et du champ magnétique.

Remarque

Cette égalité explique la dénomination de « moteur synchrone ».

Alors : $\boxed{\Gamma_0 = \mathcal{M}_0 B \sin\theta}$ ($\theta(t) = \theta_0$ reste constant).

d) Plus précisément, le fonctionnement en moteur exige que le couple soit moteur, c'est-à-dire que le couple et la vitesse angulaire de rotation du rotor doivent être de même sens. Ainsi, la condition est $\Gamma \geqslant 0$ (on suppose $\omega_0 \geqslant 0$), soit $\boxed{0 \leqslant \theta_0 \leqslant \pi}$. Le rotor suit le champ.

e) La puissance reçue par le rotor de la part du champ magnétique est :

$$\boxed{P_{mot} = \Gamma_0 \omega_0 = \mathcal{M}_0 B \omega_0 \sin\theta_0}.$$

Cette puissance s'identifie en régime permanent à la puissance pouvant être délivrée par le moteur : le champ entraîne le rotor, et le rotor entraîne une charge, soit $P_{méca} = P_{mot}$.

Erreur à éviter

Ne pas confondre la puissance reçue par le rotor de la part du champ et celle délivrée par le rotor à la charge. Elles ne s'identifient qu'en régime permanent. Le théorème de la puissance cinétique pour le rotor s'écrit :

$$\frac{dE_c}{dt} = 0 = P_{mot} - P_{méca}$$

La puissance mécanique est perdue par le système, ce qui explique le signe moins.

f) En régime permanent de fonctionnement du rotor, les couples exercés par le champ et celui résistant exercé par la charge sur le rotor sont opposés.
En effet, le théorème du moment cinétique scalaire appliqué au rotor donne :

$$J\omega_0 = 0 = \Gamma_0 - \Gamma_r .$$

Comme $0 \leqslant \Gamma_0 \leqslant \mathcal{M}_0 B$, la condition est $\boxed{0 \leqslant \Gamma_r \leqslant \mathcal{M}_0 B}$.

Dans ce cas, la figure 44 sur laquelle le couple Γ est tracé en fonction de θ montre que deux angles θ sont envisageables.

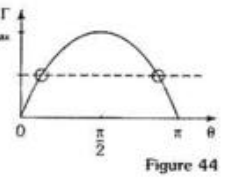


Figure 44

g) Supposons que le moteur entraîne une charge et que le régime permanent soit atteint. On note θ_0 la valeur de fonctionnement de l'angle $(\vec{\mathcal{M}}, \vec{B})$. Si un incident fait varier un peu θ autour de θ_0, le couple exercé par le champ magnétique sur le rotor varie. Cette dépendance $\Gamma = \mathcal{M}_0 B \sin\theta$ est tracée en Fig. 44.

Considérons, pour fixer les idées, que l'angle θ augmente un peu suite à l'incident.

Si $0 \leqslant \theta_0 \leqslant \pi/2$, le couple exercé par le champ magnétique sur le rotor augmente. En conséquence, la vitesse angulaire du rotor va augmenter et celui-ci va se rapprocher de la direction du champ magnétique : θ diminue.

Le même type de raisonnement peut être tenu si θ diminue un peu : la diminution du couple magnétique sur le rotor provoque une augmentation de l'angle. Ce régime est donc **stable**.

En revanche, si $\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi$, une légère diminution initiale de l'angle θ provoque sa diminution continuelle : le régime est instable.

Les valeurs $\pi \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ ne sont pas traitées car le fonctionnement ne correspond pas à un régime moteur (question **d**)).

h) Initialement, $\omega = 0$. Le couple moyen exercé par le champ sur le rotor est alors nul. Le moteur synchrone ne peut démarrer seul.

5. Sphère supraconductrice — D'après CCP

On s'intéresse à une sphère supraconductrice de centre O et rayon R placée dans un champ magnétique extérieur $\vec{B}_0 = B_0\vec{u}_z$. La sphère, siège de courants, crée à son tour un champ $\vec{B}_{sph}$. À l'intérieur d'une telle sphère supraconductrice, le champ magnétique total est nul (effet Meissner). À l'extérieur, on choisit le champ créé par la sphère $\vec{B}_{sph}$ dipolaire, de moment associé $\vec{M} = M\vec{u}_z$ tel que (Fig. 45) :

$$\vec{B}_{sph}(P) = \vec{B}_{sph}(r,\theta,\varphi) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{(3\vec{M}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{M}}{r^3}\right].$$

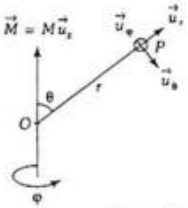


Figure 45

avec $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$. Ainsi, en tout point extérieur à la sphère, le champ magnétique vaut :

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_{sph}.$$

a) Donner la densité volumique de courant dans la sphère.

b) Montrer que la quantité $\vec{B}\cdot\vec{u}_r$ s'annule forcément à la surface de la sphère.

c) Expliciter le champ $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_{sph}$ en fonction de B_0, r, θ, M, $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$.

d) Calculer explicitement le produit scalaire $\vec{B}\cdot\vec{u}_r$ en un point à la surface de la sphère.

e) En déduire la valeur que doit nécessairement prendre $\vec{M}$.

f) Quelle est la densité surfacique de courants à la surface de la sphère ?

g) Où l'intensité du champ au voisinage de la sphère est-elle maximale ? Quelle est cette valeur en fonction de B_0 ?

h) Donner un tracé approximatif des lignes de champ magnétique à l'extérieur de cette sphère.

i) La supraconductivité cesse, à température fixée, si le champ magnétique à la surface de la sphère devient supérieur à une valeur critique $B_c = 12{,}5\,T$ (T est ici fixée à 18 K), et le matériau est le niobure d'étain). En quel endroit se produira en premier ce phénomène ? Pour quelles valeurs du champ magnétique extérieur B_0 ? Quelle est, juste à la limite, la valeur maximale du courant surfacique ? On donne $\mu_0 = 4\pi\ 10^{-7}\,H\cdot m^{-1}$.

Conseils méthodologiques. L'exercice utilise principalement le savoir-faire 3 (étude des équations locales et relations de passage).

© Lavoisier – La photocopie non autorisée est un délit

a) On utilise la formulation locale du théorème d'Ampère : $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\vec{j}$.

Comme $\vec{B} = \vec{0}$ dans la sphère, on déduit clairement $\boxed{\vec{j} = \vec{0}}$. Aucun courant volumique n'existe dans la sphère supraconductrice.

Remarque

En revanche, des courants surfaciques sont envisageables. Ces derniers engendrent en fait le champ $\vec{B}_{sph}$.

b) Utilisons la relation de passage pour la composante normale du champ magnétique à la surface de la sphère :

$$\vec{B}_{N,ext} = \vec{B}_{N,int}.$$

Sachant que $B_N = \vec{B}\cdot\vec{u}_r$ et que le champ magnétique est nul dans la sphère, on déduit :

$$\boxed{\vec{B}(r = R^+)\cdot\vec{u}_r = 0}.$$

Remarque

La normale à la sphère est en tout point colinéaire à $\vec{u}_r$.

Cette quantité s'annule ainsi juste à la surface de la sphère.

c) Alors, le champ total vaut : $\vec{B} = B_0\vec{u}_z + \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{(3\vec{M}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{M}}{r^3}\right]$.

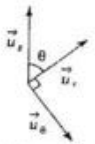


Figure 46

Sachant que $\vec{u}_z = \cos\theta\vec{u}_r - \sin\theta\vec{u}_\theta$ (Fig. 46), on réécrit cette expression sous la forme :

$$\vec{B} = B_0(\cos\theta\vec{u}_r - \sin\theta\vec{u}_\theta) + \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3M\cos\theta\vec{u}_r - M\cos\theta\vec{u}_r + M\sin\theta\vec{u}_\theta}{r^3}$$

$$= \left(B_0 + \frac{2\mu_0 M}{4\pi r^3}\right)\cos\theta\vec{u}_r + \left(-B_0 + \frac{\mu_0 M}{4\pi r^3}\right)\sin\theta\vec{u}_\theta.$$

d) L'expression précédente est valable en tout point extérieur à la sphère. Pour se placer à sa surface, on considère la limite $r \to R$. Ainsi :

$$\boxed{\vec{B}(\text{surf})\cdot\vec{u}_r = \cos\theta\left(B_0 + \frac{2\mu_0 M}{4\pi R^3}\right)}.$$

e) D'après la question **b)**, le champ magnétique normal s'annule à la surface de la sphère. Ainsi :

$$\forall\theta,\ \cos\theta\left(B_0 + \frac{2\mu_0 M}{4\pi R^3}\right) = 0.$$

On arrive alors à $M = -\frac{B_0 4\pi R^3}{2\mu_0}$, soit : $\boxed{\vec{M} = -\frac{2\pi R^3\vec{B}_0}{\mu_0}}$.

Remarque

Le signe moins traduit la loi de Lenz (voir le chapitre Induction).

f) Là encore, on utilise une relation de passage pour le champ magnétique à la surface de la sphère :

$$\vec{B}_{T,ext} - \vec{B}_{T,int} = \mu_0\vec{j}_S\wedge\vec{u}_r.$$

Déjà, $\vec{B}_{int} = \vec{0}$ car le champ est nul dans la sphère. Comme la composante tangentielle du champ magnétique est portée par le vecteur $\vec{u}_\theta$, on établit à l'aide de la question **c)** :

$$\vec{B}(r = R^+,\theta) = \left(-B_0 + \frac{\mu_0 M}{4\pi R^3}\right)\sin\theta\vec{u}_\theta = \mu_0\vec{j}_S\wedge\vec{u}_r.$$

L'expression de M a été donnée à la question précédente, soit :

$$\vec{B}(r = R^+,\theta) = -\frac{3}{2}B_0\sin\theta\vec{u}_\theta = \mu_0\vec{j}_S\wedge\vec{u}_r.$$

Les courants surfaciques sont nécessairement portés par la surface, soit :

$$\vec{j}_S = j_{S1}\vec{u}_\theta + j_{S2}\vec{u}_\varphi .$$

on déduit : $\mu_0 \vec{j}_S \wedge \vec{u}_r = \mu_0(-j_{S1}\vec{u}_\varphi + j_{S2}\vec{u}_\theta)$.

Au final : $\boxed{\vec{j}_S = -\frac{3}{2}\frac{B_0}{\mu_0}\sin\theta\,\vec{u}_\varphi}$.

Les courants s'enroulent sur la sphère autour de $-\vec{u}_z$ (Fig. 47).

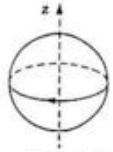


Figure 47

g) Vu l'expression établie lors de la dernière question :

$$\boxed{\vec{B}_{surf} = -\frac{3}{2}B_0\sin\theta\,\vec{u}_\theta}.$$

Le champ magnétique est maximal dans le plan équatorial ($\theta = \pi/2$) : $\boxed{B_{max} = 3B_0/2}$.

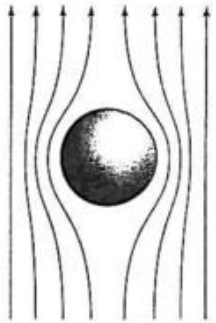


Figure 48

h) Loin de la sphère, $\vec{B}_0 = \vec{B}$ ($r \to \infty$). Près de la sphère, le champ est tangentiel. On déduit l'allure donnée en Fig. 48 (on n'oubliera pas d'orienter les lignes de champ).

i) Le lieu de la surface où le champ magnétique est maximal est le plan équatorial. C'est donc à ce niveau que la supraconductivité cessera en premier.
Le champ vaut à cet endroit $B_{max} = 3B_0/2$. À la limite, $B_{max} = B_c$, soit :

$$B_0 \geqslant \frac{2}{3}B_c = 8.3\,\text{T}.$$

Les courants surfaciques valent alors ($\theta = \pi/2$) :

$$\boxed{j_{S\,max} = \frac{B_c}{\mu_0} = 1.0\ 10^7\ \text{A}\cdot\text{m}^{-1}}.$$

6. Champ magnétique terrestre — D'après Mines-Ponts

Le repère terrestre est associé aux coordonnées sphériques (r, θ, φ) d'axe Oz orienté sud-nord (Fig. 49). Le champ magnétique terrestre est modélisé par le champ d'un dipôle permanent de moment $\vec{M} = -M\vec{u}_z$ situé au centre O de la Terre, assimilée à une sphère de rayon $R_T = 6\,400$ km (Fig. 50). Le noyau terrestre est assimilé à une sphère concentrique, conductrice, fluide et homogène, de rayon $R_N < R_T$, avec $R_N = 500$ km. L'intensité du champ magnétique $\vec{B}$ au pôle nord terrestre est notée $B_0 = 6\ 10^{-5}\,T$.

Remarque

Hors programme PT-PT*

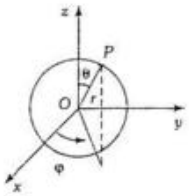


Figure 49

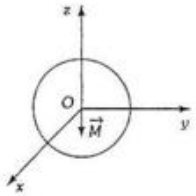


Figure 50

© Ellipses – La photocopie non autorisée est un délit

a) Trouver la valeur de M à partir de celle de B_0. On donne $\mu_0 = 4\pi\ 10^{-7}\ \text{H}\cdot\text{m}^{-1}$.

b) En admettant que ce moment magnétique soit produit par des courants volumiques de densité $\vec{j}$, avec $M = j(R_N)^4$, estimer la valeur de j. Comparer cette valeur aux densités de courant usuelles dans les circuits ordinaires (TP, électroménager...).

c) Vérifier l'homogénéité de la relation $M = j(R_N)^4$. Justifier que, en coordonnées sphériques, la direction dominante du vecteur densité de courant $\vec{j}$ est $\vec{u}_\varphi$.

d) Calculer numériquement l'intensité B_A du champ magnétique en un point A du plan équatorial situé à la distance $r_A = 6R_T$ du point O.

e) Notant $\lambda = \pi/2 - \theta$ la latitude du point d'observation, établir l'équation et tracer la représentation graphique de la ligne de champ C_A passant par A sous la forme $r = f(r_A, \lambda)$.

f) Établir l'expression de la norme de $\vec{B}$ sur C_A en fonction de λ et de B_0. Tracer l'allure de la courbe $\|\vec{B}(\lambda)\|$. Cette représentation rend-elle compte de la limite de $\|\vec{B}(\lambda)\|$ lorsque λ tend vers $\pi/2$?

g) Un électron de masse $m = 10^{-30}$ kg, de vitesse $\vec{v}$ et d'énergie constante E_A se déplace dans le plan équatorial, au voisinage de C_A, dans une région de l'espace suffisamment petite pour que l'on puisse y supposer le champ $\vec{B}$ uniforme et constant. En adoptant *a priori* les lois de la mécanique newtonienne, établir la relation entre m, $\|\vec{v}\|$ et E_A. Commenter l'application numérique pour un électron dont l'énergie serait $E_A = 1$ MeV. On rappelle $1\,\text{eV} = 1{,}6\ 10^{-19}\,\text{J}$.

Conseils méthodologiques. Cet exercice fait appel aux savoir-faire 2 (utilisation de la densité volumique de courant) et 5 (moment dipolaire magnétique).

a) Rappelons l'expression du champ magnétique engendré par le dipôle $\vec{M} = M\vec{u}_z$ ($M < 0$ d'après l'énoncé) en coordonnées sphériques :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 M}{4\pi r^3}(2\cos\theta\,\vec{u}_r + \sin\theta\,\vec{u}_\theta).$$

La norme vaut donc : $\|\vec{B}\| = \frac{\mu_0|M|}{4\pi r^3}\sqrt{4\cos^2\theta + \sin^2\theta} = \frac{\mu_0|M|}{4\pi r^3}\sqrt{1 + 3\cos^2\theta}$.

Au pôle nord, $\theta = 0$ et $r = R_T$, soit :

$$\boxed{B_0 = \frac{\mu_0|M|}{2\pi R_T^3}}.$$

On en déduit : $\boxed{|M| = 7.9\ 10^{22}\ \text{A}\cdot\text{m}^2}$.

Erreur à éviter

Rappelons une dernière fois que l'unité d'une densité volumique de courant est A · m^{-2}.

b) On obtient immédiatement : $j = \frac{M}{R_N^4} = 1.3\ \text{A}\cdot\text{m}^{-2}$.

Cette valeur est à comparer aux valeurs usuelles.

La section d'un fil électrique est de l'ordre du mm^2 pour des intensités variant entre 10 mA (TP d'électrocinétique) et 1 A (électroménager). Ainsi, usuellement, $j = 10^4 - 10^6\ \text{A}\cdot\text{m}^{-2}$.

On s'aperçoit que les courants volumiques du noyau terrestre sont de faible intensité. Cependant, le volume dans lequel ils circulent est tellement important qu'au final le champ magnétique engendré est du même ordre de grandeur que celui près d'un fil électrique.

c) D'une part, l'unité d'un moment magnétique est $A \cdot m^2$.

D'autre part, j s'exprime en $A \cdot m^{-2}$, et R_N en m, soit jR_N^4 en $A \cdot m^2$.

La relation est bien homogène.

Très globalement, de par la rotation terrestre, la vitesse d'un point P de la Terre par rapport au référentiel barycentrique terrestre est $\vec{v}(P) = \rho\omega\vec{u}_\varphi$, où ρ est la distance de P à l'axe de rotation. La vitesse des charges en mouvement du noyau terrestre et la densité volumique de courant sont dirigées selon $\vec{u}_\varphi$.

Remarque

Cette argumentation est qualitative

En effet, $\vec{j} = \sum_i n_i q_i \vec{v}_i$ indique que la densité volumique de courant est colinéaire à la vitesse des charges.

d) Reprenons l'expression rappelée en question a) pour $\theta = \pi/2$ (point du plan équatorial) et $r = r_A = 6R_T$:

$$\|\vec{B}\| = \frac{\mu_0|M|}{4\pi(6R_T)^3}.$$

soit :

$$B_A = \frac{B_0}{2 \cdot 6^3} = \frac{B_0}{432} = 1.4 \cdot 10^{-7}\,\text{T}.$$

Le champ est nettement plus faible qu'au pôle nord, vu sa décroissance avec l'éloignement $(1/r^3)$.

e) Rappelons la définition d'une ligne de champ : c'est une courbe qui est en tout point colinéaire au champ en question. Soient deux points P et P' très proches, alors $\overrightarrow{PP'} // \vec{B}$.

En coordonnées sphériques :

$$\overrightarrow{PP'} = dr\,\vec{u}_r + r\,d\theta\,\vec{u}_\theta + r\sin\theta\,d\varphi\,\vec{u}_\varphi \quad \text{et} \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 M}{4\pi r^3}(2\cos\theta\,\vec{u}_r + \sin\theta\,\vec{u}_\theta).$$

Leur colinéarité implique :

$$dr = \alpha 2\cos\theta,\ r\,d\theta = \alpha\sin\theta \text{ et } d\varphi = 0.$$

Les lignes de champ sont incluses dans les plans $\varphi = cte$, c'est-à-dire qu'en un point P, la ligne de champ est dans le plan contenant P et l'axe Oz. On déduit alors :

$$\frac{dr}{r} = \frac{2\cos\theta}{\sin\theta}d\theta.$$

qui s'intègre en :

$$\ln r = 2\ln|\sin\theta| + cte = \ln(\cos^2\lambda) + cte.$$

La ligne de champ passe par le point A ($r = r_A$ et $\lambda = 0$), d'où : $\ln r_A = cte$, d'où : $\boxed{r = r_A\cos^2\lambda}$.

Leur allure est représentée dans un plan $\varphi = cte$ en Fig. 51.

Pour avoir leur allure dans l'espace, il faut faire tourner la figure autour de l'axe Oz.

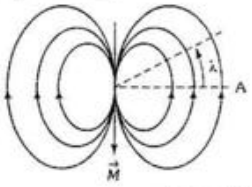


Figure 51

f) Rappelons déjà l'expression de la norme du champ magnétique :

$$\|\vec{B}\| = \frac{\mu_0|M|}{4\pi r^3}\sqrt{1+3\cos^2\theta} = \frac{\mu_0|M|}{4\pi r_A^3}\frac{\sqrt{1+3\sin^2\lambda}}{\cos^6\lambda}.$$

Alors :

$$\boxed{\|\vec{B}\| = \frac{B_0}{432}\frac{\sqrt{1+3\sin^2\lambda}}{\cos^6\lambda}}.$$

© Lavoisier – La photocopie non autorisée est un délit

$\|\vec{B}(\lambda)\|$ diverge vers l'infini quand λ tend vers $\pi/2$ (Fig. 52).

Ce résultat *a priori* étonnant s'explique par le fait que la ligne de champ C_A s'approche de plus en plus du point O quand $\lambda \to \pi/2$. Le champ prend alors des valeurs de plus en plus importantes (près de O, le champ dipolaire diverge en $1/r^3$). Cependant, il est important de noter que la valeur du champ dipolaire n'est valable qu'au « loin », pour des distances grandes par rapport à la taille du dipôle (c'est-à-dire environ R_N ici). La divergence obtenue n'a donc aucune réalité physique.

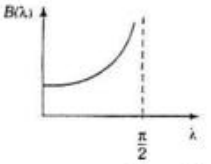


Figure 52

g) L'énergie de la particule est en fait égale à son énergie cinétique :

$$E_A = Ec_A = \frac{1}{2}m\|\vec{v}\|^2.$$

En effet, la partie magnétique de la force de Lorentz $\vec{f} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ ne travaille pas et l'énergie de la particule est constante.

Déjà, on convertit l'énergie en joules : 1 MeV = $1.6\ 10^{-13}$ J. On déduit $v \approx 5\ 10^8\ m \cdot s^{-1}$. Cette valeur est supérieure à la vitesse de la lumière dans le vide ! La mécanique classique n'est visiblement pas adaptée pour cette situation qui nécessite l'usage de la mécanique relativiste (restreinte).

7. Moment magnétique d'une sphère — D'après CCP

On considère la nappe surfacique de courant :

$\vec{j}_S = j_0\sin\theta\,\vec{u}_\varphi$ si $r = R$ et $\vec{j}_S = \vec{0}$ sinon (Fig. 53).

Remarque

Hors programme PT-PT*

a) Déterminer *a priori* la direction du champ $\vec{B}(0)$ créé par la distribution au centre de la sphère.

b) Calculer ce champ $\vec{B}(0)$. *Donnée* : $\int_0^\pi \sin^3\theta\,d\theta = 4/3$.

c) Quel est le moment magnétique $d\vec{M}(\theta)$ d'une tranche de la distribution de courant comprise entre les angles θ et $\theta + d\theta$.

d) Calculer le moment magnétique total $\vec{M}$ de la nappe de courant.

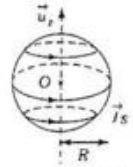


Figure 53

Conseils méthodologiques. On met en œuvre simultanément les savoir-faire 1 (usage des symétries), 2 (utilisation d'une densité surfacique de courant) et 5 (détermination d'un moment magnétique).

a) Le plan $z = 0$ est plan de symétrie des courants.

Le champ magnétique est perpendiculaire à ce plan (en tout point de ce plan, ce qui inclut O).

Ainsi :

$$\boxed{\vec{B}(O) = B(O)\vec{u}_z}.$$

Remarque

Il est aussi possible de considérer les plans contenant l'axe Oz. Ce sont tous des plans d'antisymétrie des courants. Le champ magnétique est dirigé selon leur intersection, c'est-à-dire $\vec{u}_z$.

b) On s'intéresse aux courants situés entre θ et $\theta + d\theta$ (Fig. 54).

Leur intensité est :

$$dI = j_S(\theta)dl = j_S(\theta)R\,d\theta$$

Ces courants constituent une spire de rayon $R\sin\theta$.

Le champ créé par une spire de rayon a vue sous l'angle θ est :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2a}\sin^3\theta\,\vec{u}_z .$$

Alors :

$$d\vec{B}(O) = \frac{\mu_0 j_S(\theta) R d\theta}{2R\sin\theta}\sin^3\theta\,\vec{u}_z = \frac{\mu_0 j_0 R d\theta}{2R}\sin^3\theta\,\vec{u}_z .$$

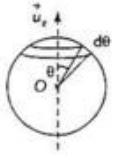


Figure 54

Pour le champ total, il faut intégrer :

$$\vec{B}(O) = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} d\vec{B} = \frac{\mu_0 j_0}{2}\int_0^{\pi}\sin^3\theta\,d\theta\,\vec{u}_z = \boxed{\frac{2}{3}\mu_0 j_0\,\vec{u}_z} .$$

Technique de calcul

Pour sommer sur toute la sphère, l'angle θ varie entre 0 et π.

Il est aussi possible d'utiliser directement la loi de Biot et Savart :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\iint_S \frac{\vec{j}_S\,dS\wedge\vec{u}}{r^2} .$$

où $\vec{u}$ est le vecteur unitaire dirigé du point courant où est le courant surfacique vers le point de calcul (O ici) : $\vec{u} = -\vec{u}_r$. Ainsi :

$$\vec{B}(O) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iint_S \frac{j_0\sin\theta\,\vec{u}_\varphi\wedge(-\vec{u}_r)}{R^2}dS = \frac{\mu_0 j_0}{4\pi R^2}\iint_S \sin\theta(-\vec{u}_\theta)\,dS .$$

Erreur à éviter

Ne pas intégrer l'expression en sortant le vecteur $\vec{u}_\theta$ de l'intégrale.

Le vecteur $\vec{u}_\theta$ n'est pas constant. On va plutôt sommer la projection de $\vec{B}(O)$ sur $\vec{u}_z$. Sachant que $\vec{u}_\theta\cdot\vec{u}_z = -\sin\theta$, on déduit :

$$\vec{B}(O)\cdot\vec{u}_z = \frac{\mu_0 j_0}{4\pi R^2}\iint_S \sin^2\theta\,dS = \frac{\mu_0 j_0}{4\pi}\int_0^{\pi}\sin^3\theta\,d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi = \boxed{\frac{2}{3}\mu_0 j_0} .$$

ce qui est bien le même résultat que précédemment.

c) Par définition, le moment magnétique d'une spire de surface $\vec{S}$ et parcourue par le courant I vaut $\vec{M} = I\vec{S}$.

Le morceau de la sphère entre θ et $\theta+d\theta$ est parcouru par le courant $dI = j_S R d\theta = j_0 R\sin\theta\,d\theta$ (voir la question b)).

Il constitue un circuit quasi circulaire de rayon $R\sin\theta$ (Fig. 55), soit de surface $\vec{S} = \pi(R\sin\theta)^2\vec{u}_z$.

Ainsi :

$$\boxed{d\vec{M} = dI\vec{S} = \pi j_0 R^3\sin^3\theta\,d\theta\,\vec{u}_z} .$$

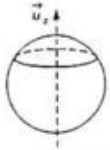


Figure 55

Remarque

On peut vérifier le sens du moment magnétique grâce à la règle du tire-bouchon de Maxwell.
Les courants s'enroulent selon $\vec{u}_\theta$, et le tire-bouchon indique la direction $+\vec{u}_z$.

d) Il reste à sommer sur tous les angles θ possibles :

$$\vec{M} = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} d\vec{M} = \pi j_0 R^3\int_0^{\pi}\sin^3\theta\,d\theta\,\vec{u}_z = \boxed{\frac{4}{3}\pi R^3 j_0\,\vec{u}_z} .$$

© Lavoisier - La photocopie non autorisée est un délit

Pour approfondir

8. Lévitation magnétique — D'après Polytechnique

Le but de ce problème est d'étudier certaines expériences de lévitation conduites récemment sur certaines substances dites diamagnétiques (eau, plastique...).

Un champ magnétique statique $\vec{B}(\vec{r})$ possède la symétrie de révolution autour de l'axe Oz dans une région sans courant. On cherche à préciser analytiquement ce champ au voisinage de Oz en utilisant les coordonnées cylindriques (r,θ,z).

a) Écrire les équations locales satisfaites par les composantes du champ magnétique.

b) Compte tenu des propriétés de symétrie du champ $\vec{B}$, quelles en sont les composantes non nulles ? De quelles variables dépendent-elles ?

c) Soit M un point de l'axe Oz, de cote z_M, et $P(r,\theta,z_M+\zeta)$ un point situé au voisinage immédiat de M. Vérifier que le développement en série de Taylor limité au deuxième ordre (inclus) en r et ζ du champ magnétique $\vec{B}(P)$:

$$B_r(P) = -a_1\frac{r}{2} - a_2 r\zeta \qquad B_z(P) = a_0 + a_1\zeta + a_2\frac{2\zeta^2 - r^2}{2}$$

satisfait aux équations du champ.

d) Exprimer les coefficients a_0, a_1 et a_2 en fonction de :

$$B_M = B_{axe}(z_M),\quad B'_M = \left.\frac{\partial B_{axe}}{\partial z}\right)_{z_M} \quad\text{et}\quad B''_M = \left.\frac{\partial^2 B_{axe}}{\partial z^2}\right)_{z_M}$$

(on note $\vec{B}_{axe}(z)$ le champ magnétique sur l'axe, et $B_{axe}(z)$ sa projection sur $\vec{u}_z$).

e) Montrer que l'expression de $B^2(P)$, en se limitant au deuxième ordre (inclus) en r et ζ, est :

$$B^2(P) = B_M^2 + 2B_M B'_M\zeta + (B'^2_M + B_M B''_M)\zeta^2 + (B'^2_M - 2B_M B''_M)\frac{r^2}{4} .$$

f) L'axe Oz est vertical. On place au point P un corps homogène de petite taille, de volume V, de masse volumique ρ et de susceptibilité magnétique χ.

Cette dernière est définie par la relation entre le moment magnétique par unité de volume $\vec{M}$ placé dans le champ magnétique extérieur $\vec{B}$:

$$\vec{M} = \chi\frac{\vec{B}}{\mu_0} .$$

Remarque

Le résultat de la question f) sera admis pour la filière PT-PT*.

L'énergie potentielle d'un tel dipôle induit dans le champ $\vec{B}$ vaut la moitié de celle usuelle qu'aurait un dipôle permanent dans le même champ $\vec{B}$. Exprimer l'énergie potentielle magnétique U_{mag}.

g) Soit U_{tot} l'énergie potentielle totale du corps. Donner son expression au deuxième ordre inclus en r et ζ.

h) On souhaite que M soit un point d'équilibre. Déduire de U_{tot} l'équation implicite permettant de déterminer z_M.

i) Écrire les conditions de stabilité en fonction de χ, B_M, B'_M et B''_M. Montrer que l'équilibre est toujours instable pour un corps paramagnétique ($\chi > 0$). Qu'en est-il pour un corps diamagnétique ($\chi < 0$) ?

On donne en coordonnées cylindriques :

$$\begin{cases} \operatorname{div}\vec{B} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial(rB_r)}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial B_\theta}{\partial \theta} + \dfrac{\partial B_z}{\partial z} \\ \overrightarrow{\operatorname{rot}}\vec{B} = \left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial B_z}{\partial \theta} - \dfrac{\partial B_\theta}{\partial z}\right)\vec{u}_r + \left(\dfrac{\partial B_r}{\partial z} - \dfrac{\partial B_z}{\partial r}\right)\vec{u}_\theta + \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial(rB_\theta)}{\partial r} - \dfrac{\partial B_r}{\partial \theta}\right)\vec{u}_z \end{cases}$$

Conseils méthodologiques. Cette introduction à la lévitation magnétique nécessite les acquis des savoir-faire 1 (invariances et symétries), 3 (équations locales) et 6 (dipôle dans un champ magnétique).

a) Le champ magnétique obéit aux deux équations locales :

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{B} = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{\overrightarrow{\operatorname{rot}}\vec{B} = \vec{0}}.$$

En effet, la région est vide, soit $\vec{j} = \vec{0}$.

b) L'invariance par rotation autour de Oz assure que $\|\vec{B}\|$ ne dépend que de r et de z.

Vu la symétrie de révolution autour de Oz pour le champ magnétique, tout plan contenant cet axe est un plan de symétrie pour $\vec{B}$ (Fig. 56).

$\vec{B}$ est nécessairement inclus dans un tel plan et n'a de composantes que selon $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_z$ (une composante selon $\vec{u}_\theta$ oriente la rotation et rompt la symétrie de révolution).

Au final : $\boxed{\vec{B} = B_r(r,z)\vec{u}_r + B_z(r,z)\vec{u}_z}$.

Notamment, par symétrie de révolution, le champ sur l'axe Oz est parallèle à $\vec{u}_z$.

Remarque

Ces plans sont donc des plans d'anti-symétrie des courants.

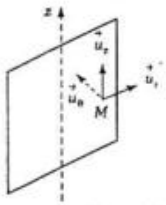


Figure 56

c) On vérifie simplement les deux équations locales :

- $\operatorname{div}\vec{B} = 0$, soit :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(rB_r)}{\partial r} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = \frac{1}{r}(-a_1 r - 2a_2 r\zeta) + (a_1 + 2a_2\zeta) = 0.$$

- $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\vec{B} = \vec{0}$, soit :

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\vec{B} = \left(\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r}\right)\vec{u}_\theta = \{(-a_2 r) - (-a_2 r)\}\vec{u}_\theta = \vec{0}.$$

Technique de calcul

Comme $z = z_M + \zeta$, avec z_M constant, dériver par rapport à z ou ζ est identique ($dz = d\zeta$).

d) Considérons P sur l'axe : P est caractérisé par $r = 0$. En ce point P, le champ magnétique est selon $\vec{u}_z$ et vaut :

$$B_z(0,\zeta) = a_0 + a_1\zeta + a_2\zeta^2.$$

On compare cette formule à un développement de Taylor du champ sur l'axe de $B_{axe}(z)$:

$$B_{axe}(z) = B_{axe}(z_m) + (z - z_M)B'_{axe}(z_M) + \frac{(z - z_M)^2}{2}B''_{axe}(z_M) + \dots$$

Avec les notations de l'énoncé, on obtient à l'ordre 2 :

$$B_z(0,\zeta) = B_M + \zeta B'_M + \frac{\zeta^2}{2}B''_M.$$

© Levallois – La photocopie non autorisée est un délit

En comparant les deux expressions, on obtient :

$$\boxed{a_0 = B_M,\ a_1 = B'_M \text{ et } a_2 = \frac{B''_M}{2}}.$$

e) On évalue le carré du module du champ magnétique :

$$B^2(P) = B_r^2(P) + B_z^2(P) = \left(-a_1\frac{r}{2} - a_2 r\zeta\right)^2 + \left(a_0 + a_1\zeta + a_2\frac{2\zeta^2 - r^2}{2}\right)^2$$

$$= \left(\frac{a_1^2}{4}r^2\right) + [a_0^2 + a_1^2\zeta^2 + 2a_0a_1\zeta + a_0a_2(2\zeta^2 - r^2)]$$

$$= B_M^2 + 2B_MB'_M\zeta + (B'^2_M + B_MB''_M)\zeta^2 + \frac{B'^2_M - 2B_MB''_M}{4}r^2$$

en négligeant les termes d'ordre supérieur à deux.

f) L'échantillon, de volume V, porte le moment magnétique : $\vec{\mathcal{M}} = \vec{M}V = \chi\dfrac{\vec{B}(P)}{\mu_0}V$.

L'énergie potentielle d'un dipôle $\vec{\mathcal{M}}$ permanent dans le champ $\vec{B}$ est $E_p = -\vec{\mathcal{M}}\cdot\vec{B}$. On déduit l'expression pour le dipôle induit :

$$\boxed{U_{mag} = -\frac{1}{2}\vec{\mathcal{M}}\cdot\vec{B}(P) = -\frac{1}{2}\chi\frac{B^2(P)}{\mu_0}V}.$$

g) Pour obtenir l'énergie potentielle totale, on rajoute l'énergie potentielle de pesanteur $mgz = \text{cte} + mg\zeta$, avec $m = \rho V$.

Ainsi, à une constante additive près :

$$\boxed{U_{tot} = V\left\{\rho g\zeta - \frac{\chi}{2\mu_0}\left(2B_MB'_M\zeta + (B'^2_M + B_MB''_M)\zeta^2 + \frac{B'^2_M - 2B_MB''_M}{4}r^2\right)\right\}}.$$

h) Un point est une position d'équilibre si l'énergie potentielle y est localement stationnaire, soit ici :

$$\frac{\partial U_{tot}}{\partial r}(0,0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial U_{tot}}{\partial \zeta}(0,0) = 0.$$

car $r = \zeta = 0$ au point M.

La première condition mène à :

$$\frac{B'^2_M - 2B_MB''_M}{2}r = 0 \quad \text{pour } r = 0$$

et est automatiquement vérifiée.

La seconde conduit à :

$$\boxed{\rho g - \frac{\chi}{\mu_0}B_MB'_M = 0}.$$

B_M et B'_M sont des fonctions de z_M. On obtient ainsi une équation implicite en z_M.

Remarque

Par exemple, dans le cas d'une énergie potentielle dépendant de x, y et z, la condition d'équilibre en (x_0, y_0, z_0) est $\vec{f} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}}E_p = \vec{0}$, soit :

$$\frac{\partial E_p}{\partial x}(x_0,y_0,z_0) = \frac{\partial E_p}{\partial y}(x_0,y_0,z_0) = \frac{\partial E_p}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) = 0$$

i) L'équilibre est stable si l'énergie potentielle est minimale, c'est-à-dire si :

$$\frac{\partial^2 U_{tot}}{\partial r^2}(0,0) \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 U_{tot}}{\partial \zeta^2}(0,0) \geqslant 0.$$

Comme :

Remarque

La troisième condition :

$$\frac{\partial^2 U_{tot}}{\partial r^2}(0,0)\frac{\partial^2 U_{tot}}{\partial \zeta^2}(0,0) \geqslant \left(\frac{\partial^2 U_{tot}}{\partial \zeta \partial r}(0,0)\right)^2$$

est automatiquement vérifiée ici.

$$\frac{\partial^2 U_{tot}}{\partial r^2}(0,0) = -\frac{V\chi}{2\mu_0}\frac{B_M'^2 - 2B_M B_M''}{2},$$

la première condition de stabilité est $\boxed{\chi(B_M'^2 - 2B_M B_M'') \leqslant 0}$.

Ensuite :

$$\frac{\partial^2 U_{tot}}{\partial \zeta^2}(0,0) = -\frac{V\chi}{\mu_0}(B_M'^2 + B_M B_M'').$$

la seconde condition s'écrit $\boxed{\chi(B_M'^2 + B_M B_M'') \leqslant 0}$.

Si le corps est paramagnétique, $\chi \geqslant 0$, et les conditions s'écrivent : $B_M'^2 \leqslant 2B_M B_M''$ et $B_M'^2 \leqslant -B_M B_M''$

$B_M'^2$ doit être inférieur à un réel et à son opposé. Il est alors nécessaire que ce réel soit nul, ainsi que B_M'. Cela contredit la condition d'équilibre de la question **h)**. Un corps paramagnétique ne peut être en équilibre stable.

Si le corps est diamagnétique, les inégalités sont opposées :

$$B_M'^2 \geqslant 2B_M B_M'' \text{ et } B_M'^2 \geqslant -B_M B_M''.$$

L'une des deux est forcément réalisée, l'autre impose une condition pouvant *a priori* être vérifiée dans certaines situations physiques.

9. Miroirs magnétiques — D'après Mines-Ponts

Quelques lignes de champ magnétostatique possédant la symétrie de révolution autour de l'axe Oz sont représentées sur la figure 57. On suppose que $B_z > 0$ et que ses variations spatiales sont lentes (on précisera à quel moment cette hypothèse est utile).

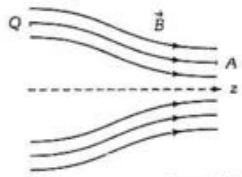


Figure 57

a) Le champ est-il plus intense en A ou en Q ?

b) Établir l'expression de la composante radiale du champ, B_r, en supposant $\frac{\partial B_z}{\partial z}$ indépendant de la coordonnée cylindrique radiale r (ce qui est acceptable au voisinage de Oz). On pourra, par exemple, utiliser l'expression de la divergence en coordonnées cylindriques :

$$\operatorname{div}\vec{B} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rB_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{B_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial B_z}{\partial z}.$$

c) Soit une particule de charge q et de masse m évoluant dans ce champ magnétostatique. On admet que le rayon de la trajectoire de la particule varie très lentement sur un tour, de telle sorte que la vitesse est de la forme hélicoïdale $\vec{v} = v_\theta\vec{u}_\theta + v_z\vec{u}_z$. Montrer que $\mu = v_\theta^2/B_z$ se conserve au cours du mouvement de la particule.

d) Expliquer sous quelles conditions des particules peuvent être réfléchies par des régions de fort champ magnétique, comme par un miroir.

e) Montrer que la trajectoire s'enroule sur un tube de flux. Un tube de flux est une surface engendrée par les lignes de champ s'appuyant sur un contour fermé simple. Illustrer ce résultat pour un champ uniforme.

Conseils méthodologiques. Ce problème s'intéresse aux trajectoires des particules chargées dans certains champs magnétiques et utilise le savoir-faire 3 (mise en œuvre des équations locales).

© Lavoisier – La photocopie non autorisée est un délit

a) Le champ magnétique $\vec{B}$ est à flux conservatif : son flux au travers de toute surface fermée est nulle. Soit la surface S représentée en Fig. 58 et qui s'appuie sur les lignes de champ.

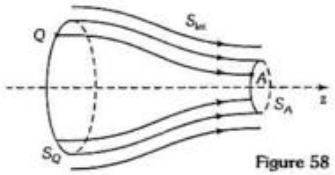


Figure 58

Alors, $\oint_{(S)} \vec{B}\cdot\vec{dS} = 0$. La surface S se décompose en la face d'entrée (sortie) passant par Q (A) : S_Q (S_A) et la surface latérale S_{lat}. Le flux sur la surface latérale est nul car $\vec{B}$ et $\vec{dS}$ y sont perpendiculaires.

On déduit que les flux sur les faces d'entrée et de sortie son égaux au signe près. Comme la surface d'entrée est plus importante que la surface de sortie, on montre donc qu'en moyenne, le champ magnétique est plus intense en A qu'en Q.

Remarque

Cette surface représente un tube de champ.

b) De par la géométrie du champ, la composante orthoradiale est nulle :

$$B_\theta = 0.$$

Alors, l'équation de Maxwell-Thomson devient :

$$\frac{\partial}{\partial r}(rB_r) = -r\frac{\partial B_z}{\partial z}.$$

On intègre, en supposant que B_z est quasi indépendant de r près de l'axe :

$$rB_r = -\frac{r^2}{2}\frac{\partial B_z}{\partial z} + \text{cte}.$$

En $r = 0$, les deux premiers termes sont nuls, soit cte $= 0$. On aboutit alors à : $\boxed{B_r = -\frac{r}{2}\frac{\partial B_z}{\partial z}}$.

c) Pour montrer que cette quantité reste constante au cours du temps, nous allons montrer que sa dérivée est nulle :

$$\frac{d\mu}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{v_\theta^2}{B_z} = \frac{2v_\theta\dot{v}_\theta}{B_z} - \frac{v_\theta^2}{B_z^2}\frac{dB_z}{dt} = \frac{2v_\theta\dot{v}_\theta}{B_z} - \frac{v_\theta^2}{B_z^2}\frac{\partial B_z}{\partial z}z.$$

Erreur à éviter

B_z ne dépend pas explicitement du temps ! Cependant, au cours du mouvement de la particule, son abscisse z varie et le champ magnétique $B_z(r,z)$ dépend effectivement du temps au travers de $z(t)$ (sa dépendance au travers de r est négligée).

On utilise la relation fondamentale de la dynamique pour la particule.

D'une part (en utilisant $v_r = \dot{r} = 0$) :

$$\vec{a} = \begin{vmatrix} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \\ \ddot{z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -r\dot{\theta}^2 \\ r\ddot{\theta} \\ \ddot{z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -v_\theta^2/r \\ \dot{v}_\theta \\ \dot{v}_z \end{vmatrix}$$

car $v_\theta = r\dot{\theta}$. D'autre part, la force de Lorentz s'écrit :

$$\vec{F} = q\vec{v}\wedge\vec{B} = q\begin{vmatrix} 0 \\ v_\theta \\ v_z \end{vmatrix}\wedge\begin{vmatrix} B_r \\ 0 \\ B_z \end{vmatrix} = q\begin{vmatrix} v_\theta B_z \\ v_z B_r \\ -v_\theta B_r \end{vmatrix},$$

Ainsi :

$$\frac{d\mu}{dt} = 2\frac{v_\theta}{B_z}\frac{q}{m}v_z B_r - \frac{v_\theta^2}{B_z^2}\frac{\partial B_z}{\partial z}v_z = -\frac{v_\theta}{B_z}\frac{\partial B_z}{\partial z}v_z\left(\frac{qr}{m} + \frac{v_\theta}{B_z}\right),$$

où l'expression de v_θ est fournie par la relation fondamentale de la dynamique et celle de B_r par la question **b)**. La composante radiale de la relation fondamentale de la dynamique fournit par ailleurs la relation :

$$-m\frac{v_\theta^2}{r} = q\,v_\theta B_z\,, \quad \text{soit :}\ \frac{v_\theta}{B_z} = -\frac{qr}{m}\,.$$

On obtient alors :

$$\frac{d\mu}{dt} = -\frac{v_\theta}{B_z}\frac{\partial B_z}{\partial z}v_z\left(\frac{qr}{m} - \frac{qr}{m}\right) = 0\,.$$

μ est une constante du mouvement.

d) Si la particule se déplace de telle manière que B_z augmente (de gauche à droite sur la figure 57), comme $\mu = v_\theta^2/B_z$ se conserve, la vitesse orthoradiale v_θ augmente.

Cependant, la vitesse totale de la particule $v^2 = v_\theta^2 + v_z^2$ est aussi une constante du mouvement.

En conséquence, v_θ^2 doit rester inférieure à v^2 et la particule ne peut pas pénétrer dans les zones où B_z est très intense (c'est-à-dire quand les lignes de champ deviennent très proches). La particule fait alors demi-tour, comme si elle était réfléchie. On parle de miroir magnétique.

e) Calculons le flux du champ magnétique au travers d'un cercle de rayon r, où r est le rayon de la trajectoire quasi circulaire à un instant donné : $\Phi = B_z(z)\pi r^2$.

Pour cela, on suppose que B_z est quasi uniforme près de l'axe et que le rayon est suffisamment faible pour permettre cette approximation.

Ensuite, la projection radiale de la relation fondamentale de la dynamique permet d'éliminer r :

$$\Phi = \pi\frac{m^2}{q^2}\frac{v_\theta^2}{B_z^2}B_z = \pi\frac{m^2}{q^2}\mu = \text{cte}\,.$$

Ainsi, le flux du champ magnétique au travers d'un cercle de la trajectoire reste constant. Comme on sait que $\vec{B}$ est à flux conservatif, son flux au travers de la section d'un tube de champ est constant (voir la question **a)**). En conséquence, la trajectoire s'enroule sur un tube de champ (voir la figure 59).

Ce résultat est particulièrement clair si $\vec{B}$ est uniforme. La trajectoire est alors une hélice (trajectoire circulaire combinée à une translation rectiligne uniforme perpendiculairement au plan du cercle.

Cette hélice est clairement inscrite sur un cylindre qui constitue un tube de champ pour $\vec{B}$ uniforme.

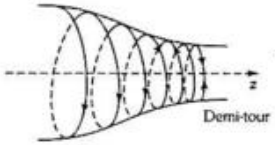


Figure 59

Remarque

Le théorème de l'énergie cinétique appliqué à la particule indique en effet $\frac{dEc}{dt} = P_{Lorentz} = (q\vec{v}\wedge\vec{B})\ \vec{v} = 0$.

Remarque

Les aurores polaires proviennent de rayonnements émis par des particules chargées ainsi piégées dans les lignes de champ du champ magnétique terrestre.

© Le vérificateur – La photocopie non autorisée est un délit

Autour des équations de Maxwell

Méthodes

Le cours en questions

1 ■ Équations de Maxwell

1.1 Rappeler les équations de Maxwell.

• On dénombre quatre équations de Maxwell, qui régissent l'électromagnétisme dans tout référentiel galiléen :

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0 \quad \text{(Maxwell-Thomson)}$$

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \text{(Maxwell-Gauss)}$$

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad \text{(Maxwell-Faraday)}$$

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\left(\vec{j} + \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) \quad \text{(Maxwell-Ampère),}$$

avec $\mu_0\varepsilon_0 c^2 = 1$, où $c = 3\,10^8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ est la vitesse de la lumière dans le vide.

$\vec{j}_D = \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ est appelée densité volumique de courant de déplacement.

μ_0 : perméabilité du vide ($\mu_0 = 4\pi\ 10^{-7}\ \text{H}\cdot\text{m}^{-1}$) ;

ε_0 : permittivité du vide ($\varepsilon_0 = 8{,}84\ 10^{-12}\ \text{F}\cdot\text{m}^{-1}$)

© Lavoisier - La photocopie non autorisée est un délit

1.2 Quelles sont les formes intégrales associées, ainsi que leur interprétation ?

$$\oiint_{(S)} \vec{B}\cdot\overrightarrow{dS} = 0 \quad \text{(nullité du flux de } \vec{B} \text{ à travers toute surface fermée).}$$

$$\oiint_{(S)} \vec{E}\cdot\overrightarrow{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \quad \text{(théorème de Gauss).}$$

$$e = \oint_C \vec{E}\cdot\vec{dl} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad \text{(loi de Faraday, } \textit{cf.} \text{ Induction électromagnétique).}$$

Contrairement au théorème de Gauss, le théorème d'Ampère n'est valable qu'en régime stationnaire.

$$\oint_C \vec{B}\cdot\vec{dl} = \mu_0\left(I_{enlacés} + \varepsilon_0\frac{d}{dt}\iint_S \vec{E}\cdot\overrightarrow{dS}\right) \quad \text{(théorème d'Ampère généralisé).}$$

1.3 Comment s'écrit localement la conservation de la charge ? Lien avec les équations de Maxwell ?

• L'équation (locale) de conservation de la charge est :

$$\operatorname{div}\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0.$$

La démonstration est à connaître.

Voir le savoir-faire 2. En fait, les équations de Maxwell sont écrites de manière à être compatibles avec la conservation de la charge.

• L'équation de conservation de la charge est une conséquence de l'équation de Maxwell-Ampère.

1.4 Énoncer les relations de passage du champ électromagnétique.

Elles doivent être appliquées en remplacement des équations de Maxwell à la traversée d'une surface chargée ou parcourue par un courant.

• Les relations de passage énoncées en statique restent en fait valables en régime variable.

• Les composantes tangentielle de $\vec{E}$ et normale de $\vec{B}$ sont toujours continues. Les composantes normale de $\vec{E}$ et tangentielle de $\vec{B}$ sont discontinues, respectivement en présence de charges surfaciques et de courants surfaciques.

• On obtient les relations suivantes (Fig. 1) :

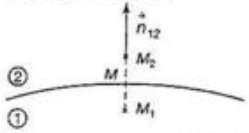


Figure 1

$$\vec{E}_T(M_2) = \vec{E}_T(M_1) \qquad \vec{E}_N(M_2) - \vec{E}_N(M_1) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}_{12}$$

$$\vec{B}_N(M_2) = \vec{B}_N(M_1) \qquad \vec{B}_T(M_2) - \vec{B}_T(M_1) = \mu_0\vec{j}_S \wedge \vec{n}_{12}$$

soit :

$$\vec{E}(M_2) - \vec{E}(M_1) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}_{12} \quad \text{et} \quad \vec{B}(M_2) - \vec{B}(M_1) = \mu_0\vec{j}_S \wedge \vec{n}_{12}.$$

1.5 Comment justifier les deux régimes statiques séparés : électrostatique et magnétostatique ?

• En régime variable, les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont couplés par les équations de Maxwell-Faraday et Maxwell-Ampère. On ne peut les étudier séparément.

• En régime statique, par définition $\frac{\partial}{\partial t} = 0$. Les équations de Maxwell se scindent naturellement en deux groupes : deux équations concernent uniquement le champ magnétique et les courants (c'est la magnétostatique), les deux autres concernent le champ électrique et les charges (c'est l'électrostatique).

1.6 D'où proviennent les potentiels scalaire et vecteur ?

• Comme $\operatorname{div}\vec{B} = 0$, $\vec{B}$ s'écrit nécessairement $\vec{B} = \overrightarrow{\operatorname{rot}}\vec{A}$. $\vec{A}$ est appelé potentiel vecteur. Son unité est le tesla · mètre (T · m).

• Comme $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = \vec{0}$, $\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ s'écrit nécessairement comme $-\overrightarrow{\operatorname{grad}}V$. Ainsi, $\vec{E} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$.

Grande différence par rapport à l'électrostatique.

1.7 Sont-ils uniques ?

• Non, si V et $\vec{A}$ mènent aux champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$, alors $\vec{A} + \overrightarrow{\operatorname{grad}}f$ et $V - \frac{\partial f}{\partial t}$ aussi ($f(M,t)$ est une fonction quelconque).

• Vu cette indétermination, on impose souvent une condition supplémentaire appelée jauge.

Les potentiels V et $\vec{A}$ ne sont que des intermédiaires de calcul. Aucune expérience physique ne permet de les mesurer.

La plus naturelle est la jauge de Lorentz :

$$\operatorname{div}\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t} = 0.$$

2 ■ Énergie électromagnétique

2.1 Quelle est la densité volumique d'énergie électromagnétique ?

• Les régions où est localisé le champ électromagnétique contiennent une énergie électromagnétique. On définit une densité volumique d'énergie électromagnétique :

$$u(M) = \varepsilon_0\frac{\vec{E}^2(M)}{2} + \frac{\vec{B}^2(M)}{2\mu_0}.$$

L'unité de u est J · m^{-3}.

© Laveltier – La photocopie non autorisée est un délit

2.2 Quel est le sens physique du vecteur de Poynting ?

• C'est un vecteur $\vec{R}$ défini en tout point de l'espace tel que son flux au travers d'une surface S soit égal à la puissance électromagnétique traversant S (on parle d'énergie rayonnée) :

Il est équivalent de dire que le flux du vecteur de Poynting est la puissance traversant la surface en question.

$$P_{ray} = \iint_S \vec{R}\cdot\overrightarrow{dS}.$$

L'unité du vecteur de Poynting est W · m^{-2}.

• Explicitement, son expression en fonction des champs est $\vec{R} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}$.

2.3 Quelle est la puissance volumique cédée par le champ magnétique à la matière ?

• Le champ électromagnétique agit sur les charges au travers de la force de Lorentz : $\vec{f} = q(\vec{E} + \vec{v}\wedge\vec{B})$.

• Le champ électromagnétique donne à la matière une énergie par unité de temps et de volume (soit une puissance volumique) :

Démonstration à connaître.

$$p = \frac{dP}{d\tau} = \vec{j}\cdot\vec{E}.$$

2.4 Comment exprimer les bilans local et global d'énergie électromagnétique ?

Tout comme des voyageurs quittent ou rentrent dans un pays par ses frontières.

• L'énergie électromagnétique contenue dans un certain volume τ varie pour deux raisons : elle rentre ou sort au travers de la surface S délimitant τ et elle est échangée avec les charges contenues dans le volume.

• Localement, cela donne :

$$\operatorname{div}\vec{R} + \frac{\partial u}{\partial t} + \vec{j}\cdot\vec{E} = 0.$$

• Pour un volume τ, on obtient :

$$\frac{dU}{dt} = -\oiint_{(S)}\vec{R}\cdot\overrightarrow{dS} - \iiint_\tau \vec{j}\cdot\vec{E}\,d\tau,$$

où $U = \iiint_\tau u(M)d\tau$ est l'énergie électromagnétique contenue dans τ, et la normale $\overrightarrow{dS}$ à la surface S est sortante.

3 ■ Approximation des régimes quasi stationnaires (ARQS)

3.1 Comment définir l'approximation des régimes quasi stationnaires ?

• Les régimes variables sont nettement plus complexes à étudier que les régimes stationnaires à cause du couplage entre les champs électrique et magnétique. Si les champs ne varient pas trop vite, on peut espérer bénéficier de certaines simplifications de la statique pour laquelle $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont totalement découplés.

• Pour être dans l'ARQS, il faut que $\tau \ll T$, où τ est le temps mis par la lumière pour aller d'un bout à l'autre du système étudié ($\tau = \ell/c$, où ℓ est l'étendue spatiale du système) et T la durée typique de variation des champs.

Cela revient à négliger le caractère ondulatoire du champ électromagnétique.

Cela revient à négliger le retard dû à la propagation intervenant dans les potentiels retardés.

Une condition équivalente est $\ell \ll \lambda$, où $\ell = c\tau$ est l'étendue spatiale du système et $\lambda = cT$ une longueur d'onde caractéristique des champs.

3.2 Que deviennent les équations de Maxwell en ARQS (magnétique) ?

• En ARQS (magnétique), la seule équation changée par rapport au régime variable est Maxwell-Ampère : $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$.

Les deux mêmes équations qu'en magnétostatique régissent $\vec{B}$: il est possible d'utiliser Biot et Savart ou le théorème d'Ampère en ARQS.

• En conséquence, les champs magnétiques se calculent de la même manière qu'en magnétostatique.

Seulement, si $\vec{B}$ dépend du temps, alors nécessairement $\vec{E} \neq \vec{0}$.

C'est une conséquence de l'équation de Maxwell-Faraday : $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$.

Les savoir-faire clefs

1 ■ Savoir passer des formes locales aux formes intégrales.

Conseils méthodologiques

1.1 On rappelle les théorèmes de Stokes : $\oint_{(C)} \vec{A}\cdot d\vec{\ell} = \iint_{(S)} \overrightarrow{\text{rot}}\vec{A}\cdot d\vec{S}$ et Green : $\oint_{(S)} \vec{A}\cdot d\vec{S} = \iiint_{(V)} \text{div}\vec{A}\, d\tau$.

Ces deux formules sont à connaître.

a) Expliquer comment passer de la forme locale à la forme intégrale pour les équations de Maxwell-Gauss et Maxwell-Faraday.

b) Quelle est la forme intégrale de l'équation de conservation de la charge ?

c) Quelle est la forme intégrale de la loi d'Ohm locale pour le conducteur de rayon R (sa section est alors $S = \pi R^2$) et longueur $\ell \gg R$ représenté en figure 2 ? On supposera que toutes les grandeurs d'intérêt restent uniformes sur une section droite.

1.1.a) Utiliser les théorèmes de Stokes et Green.

1.1.c) Faire apparaître l'intensité traversant le conducteur et sa tension.

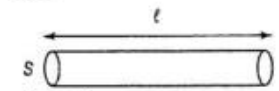


Figure 2

P. Lavoisier - La photocopie non autorisée est un délit

1.1.a) La règle générale est la suivante :

• si l'équation locale contient une divergence, on intègre sur un volume V définissant une surface fermée S (Fig. 3), la normale est sortante ;

• si elle contient un rotationnel, il faut intégrer sur une surface S s'appuyant sur un contour fermé C (Fig. 4), la normale est donnée par l'orientation de C ;

Une telle surface s'appuyant sur un contour est forcément non fermée.

Figure 3

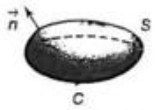


Figure 4

• Pour l'équation de Maxwell-Gauss, on choisit par conséquent un volume V délimité par la surface fermée S :

$$\iiint_V \text{div}\,\vec{E}\, d\tau = \iiint_V \frac{\rho}{\varepsilon_0} d\tau = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} .$$

D'après le théorème de Green, cette quantité s'identifie à $\oint_{(S)} \vec{E}\cdot d\vec{S}$. On en déduit l'énoncé du théorème de Gauss.

• Conformément à la règle énoncée ci-dessus, on intègre l'équation de Maxwell-Ampère sur une surface S s'appuyant sur un contour fermé C :

$$\iint_S \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B}\cdot d\vec{S} = \mu_0 \iint_S \vec{j}\cdot d\vec{S} + \frac{1}{c^2}\iint_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

$\iint_S \vec{j}\cdot d\vec{S}$ représente les courants traversant la surface S (courants enlacés par le contour C) et le théorème de Stokes identifie le premier terme à $\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{\ell}$. On retrouve le théorème d'Ampère, avec un terme supplémentaire.

Ce terme supplémentaire disparaît bien sûr en statique.

b) Commençons par rappeler l'équation de conservation de la charge : $\text{div}\,\vec{j} + \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0$.

Soit V un volume délimité par la surface fermée S :

$$\iiint_V \text{div}\,\vec{j}\, d\tau = \oint_{(S)} \vec{j}\cdot d\vec{S} = -\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau = -\frac{d}{dt}\iiint_V \rho d\tau = -\frac{dQ_V}{dt} ,$$

où $Q_V(t)$ est la charge contenue à l'instant t dans le volume V.

Erreur à éviter
On vérifie bien les signes : si $I > 0$ est entrant, Q_V augmente et $\vec{j}\cdot d\vec{S} < 0$ car la normale est prise sortante par définition dans la formule de Green.

On obtient au final : $\boxed{\dfrac{dQ_V}{dt} = -\oint_{(S)} \vec{j}\cdot d\vec{S}}$. La dérivée de la charge contenue dans V, c'est-à-dire l'intensité entrante dans V est égale à l'opposé du flux sortant du vecteur densité volumique de courant.

c) Le potentiel est de la forme $V = V(x)$, donc le champ électrique vaut $\vec{E} = E(x)\vec{u}_x$.

La loi d'Ohm locale s'écrit $\vec{j} = \gamma\vec{E}$. On l'intègre sur une section droite S : $\iint_S \vec{j}\cdot\overrightarrow{dS} = I = \gamma\iint\vec{E}\cdot\overrightarrow{dS} = \gamma ES$. On intègre sur la longueur du conducteur : $\int_A^B I\cdot d\ell = S\gamma\int_A^B E\cdot d\ell$, soit $I\ell = S\gamma(V_A - V_B)$, soit :

$$\boxed{V_A - V_B = \frac{\ell}{\gamma S} I = RI}$$

On retrouve la loi d'Ohm bien connue en électrocinétique.

Cette expression de R est à connaître.

2 ■ Savoir utiliser l'équation de conservation de la charge.

Conseils méthodologiques

2.1.a) Montrer que l'équation de conservation de la charge se déduit d'une équation de Maxwell.

b) Que devient-elle en ARQS ?

c) Intégrer cette équation sur le volume de la figure 5 où trois fils parcourus par des intensités I_1, I_2 et I_3 se rencontrent, et en déduire une loi bien connue.

2.1.a) Utiliser Maxwell-Ampère.

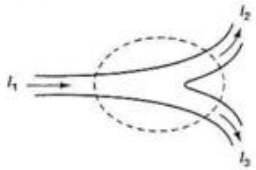


Figure 5

2.2.a) On considère un milieu conducteur de conductivité $\gamma = 10^5$ SI. Quelle est précisément son unité ?

b) Soit M_0 un point du milieu conducteur. Trouver une équation différentielle satisfaite par $\rho(M_0,t)$.

c) Obtenir un temps caractéristique d'évolution de la charge dans le milieu. Conclusion ? On rappelle $\varepsilon_0 = 8{,}84\ 10^{-12}$ F · m^{-1}.

2.2.a) À partir de $\vec{j} = \gamma\vec{E}$.

2.2.b) Utiliser la conservation de la charge.

2.1.a) On force l'apparition de $\operatorname{div}\vec{j}$ en prenant la divergence de Maxwell-Ampère :

$$\operatorname{div}\overrightarrow{\operatorname{rot}}\vec{B} = 0 = \mu_0\operatorname{div}\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\operatorname{div}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}.$$

On en déduit :

$$\operatorname{div}\vec{j} = -\varepsilon_0\frac{\partial\operatorname{div}\vec{E}}{dt} = -\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

$\operatorname{div}\overrightarrow{\operatorname{rot}}\vec{A} = \vec{0}$, quel que soit $\vec{A}$.

$\operatorname{div}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial\operatorname{div}\vec{E}}{\partial t}$ car les dérivées temporelles et spatiales commutent (elles concernent ici des variables indépendantes).

© Lavoisier – La photocopie non autorisée est un délit

L'équation de conservation de la charge est contenue dans les équations de Maxwell.

b) En ARQS, l'équation de Maxwell-Ampère devient $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\vec{B} = \mu_0\vec{j}$. Ainsi, l'équation de conservation de la charge se réduit à $\boxed{\operatorname{div}\vec{j} = 0}$. La densité volumique de courant est à flux conservatif.

c) On intègre : $\iiint_V \operatorname{div}\vec{j}\,d\tau = \oiint_{(S)}\vec{j}\cdot\overrightarrow{dS} = 0$.

Dans le vide, $\vec{j} = \vec{0}$, donc le domaine d'intégration se réduit aux sections des fils.

Sur le fil 1, $\iint_{S_1}\vec{j}\cdot\overrightarrow{dS} = -I_1$. Le signe moins provient du fait que le sens positif choisi pour le courant s'oppose à la normale sortante.

Sur les fils $i = 2$ et 3, $\iint_{S_i}\vec{j}\cdot\overrightarrow{dS} = I_i$.

On en déduit $I_1 = I_2 + I_3$. La loi des nœuds est contenue dans les équations de Maxwell.

2.2.a) On utilise $\vec{j} = \gamma\vec{E}$. Ainsi :

$$[\gamma] = \frac{[j]}{[E]} = \frac{\text{A}\cdot\text{m}^{-2}}{\text{V}\cdot\text{m}^{-1}} = \Omega^{-1}\cdot\text{m}^{-1}.$$

$\boxed{\text{La conductivité s'exprime en } \Omega^{-1}\cdot\text{m}^{-1}.}$

b) On utilise l'équation de conservation de la charge, avec la loi d'Ohm locale :

$$\operatorname{div}\vec{j} = \gamma\operatorname{div}\vec{E} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}.$$

L'équation de Maxwell-Gauss permet d'obtenir :

$$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t}(M_0,t) + \frac{\gamma}{\varepsilon_0}\rho(M_0,t) = 0}.$$

c) Comme M_0 est fixé, on intègre par rapport au temps :

$$\rho(M_0,t) = \rho(M_0,0)\exp\left(-\frac{\gamma}{\varepsilon_0}t\right).$$

La charge locale décroît exponentiellement en fonction du temps. L'argument de l'exponentielle étant forcément sans argument, $\boxed{\tau = \varepsilon_0/\gamma}$ a la dimension d'un temps. Au bout de quelques τ, la charge est localement nulle.

L'application numérique donne $\tau = 8{,}8\ 10^{-17}$ s. Cette durée est extrêmement brève, nettement inférieure aux temps caractéristiques d'importance dans les conducteurs. Ainsi, on pourra utiliser $\rho = 0$ dans les conducteurs.

3 ■ Savoir utiliser les équations de Maxwell et l'AQRS.

Conseils méthodologiques

On considère un solénoïde infini, d'axe Oz, de rayon R, comportant n spires par unité de longueur et parcouru par le courant $I(t)$ (Fig. 6). On supposera que ce problème peut se traiter dans le cadre de l'ARQS.

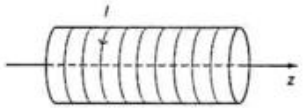


Figure 6

a) Expliquer pourquoi le régime statique est un cas particulier de l'ARQS.

b) Écrire les équations de Maxwell dans cette approximation à l'intérieur du solénoïde.

c) Que vaut le champ magnétique dans le solénoïde ?

d) Expliquer pourquoi le champ électrique est nécessairement non nul. Quelle est la forme du champ électrique ?

e) Intégrer une équation de Maxwell sur un disque de rayon $r < R$ et en déduire l'expression du champ électrique dans le solénoïde.

3.c) Utiliser les relations de la statique.

3.d) et e) Exploiter Maxwell-Faraday.

3.a) En statique, les champs n'évoluent pas temporellement. Cela revient à dire que le temps typique d'évolution des champs est quasi infini : $T \to \infty$. Ainsi, l'inégalité $\tau \ll T$ est automatiquement vérifiée.

b) À l'intérieur du solénoïde n'existent ni charges ni courants. Ainsi, $\rho = 0$ et $\vec{j} = \vec{0}$.

Les seules sources du champ électromagnétique sont ici les courants localisés dans les fils à la surface du solénoïde.

Les équations de Maxwell en ARQS donnent alors :

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{B} = 0}, \quad \boxed{\operatorname{div}\vec{E} = 0}, \quad \boxed{\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} \text{ et } \boxed{\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j}}.$$

c) Similairement à la statique, à l'intérieur, $\boxed{\vec{B} = \mu_0 n I \vec{u}_z}$.

d) D'après l'équation de Maxwell-Faraday, $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$. Si le champ magnétique dépend du temps, le champ électrique est obligatoirement non nul.

On parle alors d'induction.

On choisit naturellement les coordonnées cylindriques d'axe Oz.

La situation physique est invariante par rotation autour de Oz ainsi que par translation le long de cet axe. On en déduit : $\left\|\vec{E}\right\| = \left\|\vec{E}(r,t)\right\|$.

On remarque que le courant variable engendre un champ magnétique et un champ électrique. Il n'existe aucune charge ici.

Pour la direction, il faut s'intéresser aux symétries vérifiées par les sources du champ électromagnétique. Dans le cas présent, les sources sont les courants parcourant le solénoïde.

© Lacroix – La photocopie non autorisée est un délit

En électromagnétisme des régimes variables, les symétries des charges et courants gouvernent celles du champ électromagnétique. Il faut donc trouver des plans de symétrie ou d'antisymétrie des charges et courants.

Soit M un point quelconque. Le plan contant l'axe Oz et le point M est un plan d'antisymétrie des courants (Fig. 7). $\vec{B}$ est selon ce plan, c'est effectivement le cas car $\vec{B} \parallel \vec{u}_z$. $\vec{E}$ est perpendiculaire à ce plan, soit $\vec{E} \parallel \vec{u}_\theta$.

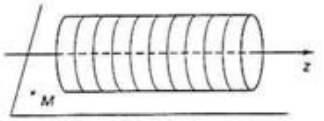


Figure 7

Au final, $\boxed{\vec{E} = E(r,t)\vec{u}_\theta}$.

On remarque que le plan passant par M et perpendiculaire à Oz est un plan de symétrie des courants : $\vec{B}$ lui est normal et $\vec{E}$ est parallèle à ce plan. C'est effectivement le cas.

e) Soit le contour C orienté de la figure 8, définissant le disque S avec sa normale associée $\vec{n}$. Alors,

$$\iint_S \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E} \cdot \vec{dS} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{dS}$$

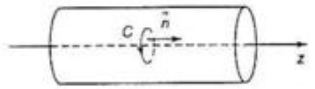


Figure 8

- D'après le théorème de Stokes, le premier terme vaut :

$$\oint_C \vec{E} \cdot \vec{dl} = 2\pi r E(r,t).$$

Le second terme est égal à $-\mu_0 n \frac{dI}{dt} \pi r^2$. Ainsi :

$$\boxed{\vec{E} = -\frac{\mu_0 n \frac{dI}{dt} r}{2} \vec{u}_\theta}.$$

Conseils méthodologiques

4 ■ Savoir réaliser des bilans d'énergie électromagnétique.

4.1 Un conducteur ohmique de conductivité γ a la forme d'un cylindre infini de rayon a et d'axe Oz (Fig. 9). Ce conducteur est parcouru dans tout son volume par un courant I. Le régime est stationnaire.

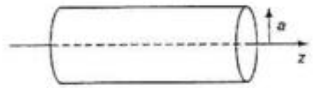


Figure 9

4.1.a) Utiliser la conductivité.

a) Calculer le champ électrique dans le conducteur.

b) Calculer le champ magnétique dans le conducteur.

c) Que vaut le vecteur de Poynting ?

On désire réaliser un bilan d'énergie électromagnétique dans un cylindre de rayon a^- et de hauteur h.

d) On appelle $U(t)$ l'énergie électromagnétique contenue dans ce système. Que vaut $\frac{dU}{dt}$?

e) Calculer la puissance électromagnétique P_{ray} entrant dans le système. Commenter.

f) Calculer la puissance $P_{charges}$ cédée par le champ électromagnétique aux charges. Que devient-elle ? Interpréter ce résultat à l'aide de l'effet Joule.

g) Vérifier le bilan global d'énergie électromagnétique dans le système.

4.2 On considère un solénoïde infini, de rayon a, comportant n spires par unité de longueur et parcouru par le courant $I(t)$ (Fig. 6). On supposera que les champs électrique et magnétique sont approximativement donnés par :

$\vec{B} = \mu_0 n I(t)\vec{u}_z$ et $\vec{E} = -\frac{\mu_0 n}{2}\frac{dI}{dt} r\,\vec{u}_\theta$ à l'intérieur du solénoïde (on utilise les coordonnées cylindriques, voir le savoir-faire 3 pour l'établissement des expressions).

a) Donner l'expression du vecteur de Poynting.

On va réaliser un bilan d'énergie électromagnétique dans un cylindre de hauteur h et de rayon $r = a^-$.

b) Quelle est l'énergie électromagnétique $U(t)$ contenue dans ce cylindre à l'instant t ?

c) Montrer que l'énergie magnétique est prépondérante par rapport à l'énergie électrique dans l'hypothèse de l'AQRS. On supposera désormais que c'est le cas.

d) Quelle est la puissance électromagnétique entrante rayonnée à l'intérieur du cylindre ?

e) Quelle est la puissance cédée par le champ électromagnétique aux charges dans le cylindre ?

f) Réaliser un bilan d'énergie sur le cylindre. Commenter notamment le sens du vecteur de Poynting.

g) Vérifier le bilan local d'énergie électromagnétique.

On donne $\mathrm{div}(f(r)\vec{u}_r) = \frac{1}{r}\frac{d(rf)}{dr}$.

4.1.b) Théorème d'Ampère.

4.1.c) Voir la définition du Cours en Questions.

4.1.e) Attention au sens de la normale.

4.2.b) u n'est pas uniforme, l'intégration n'est pas immédiate.

4.2.d) Attention au sens de la normale.

4.1.a) D'après la loi d'Ohm, la densité volumique de courant et le champ électrique sont proportionnels : $\vec{j} = \gamma\vec{E}$.

Ici, la densité volumique de courant est imposée par le courant (S est une section directe du fil) :

$$I = \iint_S \vec{j}\cdot\overrightarrow{dS}.$$

© Lavoisier - La photocopie non autorisée est un délit

Comme $\vec{j}\,//\overrightarrow{dS}//\vec{u}_z$ et dans l'hypothèse de $\vec{j}$ uniforme, $I = j\pi a^2$.

Ainsi, $\boxed{\vec{E} = \frac{I}{\gamma\pi a^2}\vec{u}_z}$.

b) Par invariance par rotation autour de Oz et translation de long de ce même axe, $\|\vec{B}\| = \|\vec{B}\|(r)$.

Soit M un point du conducteur. Comme le plan contenant M et l'axe Oz est un plan de symétrie des courants, $\vec{B}$ lui est perpendiculaire : $\vec{B}//\vec{u}_\theta$.

On applique le théorème d'Ampère sur un cercle de rayon $r \leqslant a$:

$$\oint_C \vec{B}\cdot\overrightarrow{dl} = B\cdot 2\pi r = \mu_0 I_{enlacés} = \mu_0\iint_S \vec{j}\cdot\overrightarrow{dS} = \pi r^2\frac{I}{\pi a^2}.$$

Alors : $\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2}\vec{u}_\theta}$.

c) Par définition, le vecteur de Poynting vaut :

$$\boxed{\vec{R} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0} = \frac{I\vec{u}_z\wedge\mu_0 I r\vec{u}_\theta}{\mu_0\gamma\pi a^2 2\pi a^2} = -\frac{I^2 r}{2\gamma\pi^2 a^4}\vec{u}_r}.$$

d) L'expression de la densité volumique d'énergie électromagnétique est :

$$u = \varepsilon_0\frac{E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}.$$

Comme $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont indépendants du temps, u aussi, ainsi que $U = \iiint_V u\,d\tau$.

Ainsi, $\boxed{\frac{dU}{dt} = 0}$. L'énergie électromagnétique contenue dans tout le volume est constante.

Erreur à éviter
Bien réfléchir au sens de la normale et à la convention choisie.

e) Par définition, $P_{ray} = \iint_{(S)}\vec{R}(r=a)\cdot\overrightarrow{dS}$, où S est la surface du cylindre, orientée vers l'intérieur car on désire une puissance entrante.

Le vecteur de Poynting est radial, il est donc normal à $\overrightarrow{dS}$ sur les deux surfaces droites du cylindre. Il reste à intégrer sur la surface latérale (orientée vers l'intérieur) :

$$\boxed{P_{ray} = 2\pi a h(-\vec{u}_r)\cdot\left(-\frac{I^2 a}{2\gamma\pi^2 a^4}\vec{u}_r\right) = \frac{h}{\gamma\pi a^2}I^2}.$$

Il ne faut pas confondre avec le courant d'électrons qui lui est selon l'axe Oz.

On note que le vecteur de Poynting est radial : l'énergie entre radialement dans la résistance en provenance du générateur.

f) Évaluons la puissance volumique donnée par le champ aux charges :

$$p = \vec{j}\cdot\vec{E} = \frac{j^2}{\gamma} = \frac{I^2}{\gamma\pi^2 a^4}.$$

Pour la puissance, il suffit d'intégrer sur le volume V du système,

$$\boxed{P_{charges} = \iiint_V p\,d\tau = \frac{I^2}{\gamma\pi^2 a^4}(\pi a^2 h) = \frac{h}{\gamma\pi a^2} I^2}.$$

Il s'agit d'interpréter ce terme physiquement. Dans un conducteur, le rôle du champ électrique créé par le générateur est de maintenir les charges de conduction en mouvement. Ces charges dissipent leur énergie mécanique notamment lors de chocs avec les ions du réseau métallique et de chocs électron-électron. Ce phénomène tend à augmenter la température du conducteur : c'est l'effet Joule qui dégrade l'énergie fournie par le générateur en énergie thermique. La puissance cédée aux charges doit ainsi s'identifier à RI^2, où R est la résistance du cylindre de hauteur h. C'est effectivement le cas.

g) Effectuons le bilan habituel :

$$\frac{dU}{dt} = 0 = P_{ray} - P_{charges} = RI^2 - RI^2,$$

L'énergie électromagnétique contenue dans le système est constante. Elle est apportée par rayonnement depuis le générateur et est donnée aux charges, qui la dissipent lors de chocs.

Erreur à éviter
Ici, la puissance rayonnée est affectée du signe plus car elle est entrante.

4.2. a) On utilise la définition du vecteur de Poynting :

$$\boxed{\vec{R} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0} = -\frac{n\frac{dI}{dt}r}{2}\vec{u}_\theta \wedge \mu_0 n I \vec{u}_z = -\frac{\mu_0 n^2 I \frac{dI}{dt} r}{2}\vec{u}_r}.$$

On remarque que l'énergie électromagnétique est échangée entre le reste du circuit et le solénoïde de manière radiale. Le signe n'est pas fixé : l'énergie rentre ou sort du solénoïde.

Il faut faire le lien avec la première année : une inductance peut stocker de l'énergie ou la restituer au circuit.

b) On évalue tout d'abord la densité volumique d'énergie électromagnétique :

$$\boxed{u = \varepsilon_0\frac{E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} = \varepsilon_0\frac{\mu_0^2 n^2\left(\frac{dI}{dt}\right)^2 r^2}{8} + \frac{\mu_0 n^2 I^2}{2}}.$$

L'intégration selon z est immédiate, on multiplie par h. Il reste à intégrer sur une section. Le premier terme n'est pas uniforme, on intègre sur des couronnes entre r et $r+dr$.

Pour intégrer sur un disque une fonction radiale, on intègre sur des couronnes entre r et $r+dr$ d'aire $2\pi r\,dr$.

Ainsi :

$$U = h\left(\int_0^a \frac{\mu_0 n^2\left(\frac{dI}{dt}\right)^2 r^2}{8c^2} 2\pi r\,dr + \int_0^a \frac{\mu_0 n^2 I^2}{2} 2\pi r\,dr\right)$$

$$= \mu_0\pi h n^2\left(\frac{\left(\frac{dI}{dt}\right)^2 a^4}{16c^2} + \frac{I^2 a^2}{2}\right).$$

© Lavoisier - La photocopie non autorisée est un délit

En fait, l'ARQS ne peut exister dans un système de taille infinie comme le solénoïde en question : l'intensité ne serait pas uniforme. L'énoncé a écarté ce problème et la condition d'ARQS n'intervient que radialement.

c) Étudions à quelle condition le premier terme de l'expression précédente est négligeable devant le second. On appelle T le temps caractéristique d'évolution des champs (donc de l'intensité I). Alors, $\frac{dI}{dt} = I/T$.

On étudie le cas : $\left(\frac{dI}{dt}\right)^2 a^4/16c^2 \ll I^2a^2/2$, soit $I^2a^2/c^2T^2 \ll I^2$, d'où $a^2/c^2 \ll T^2$. Cela représente une condition d'ARQS car $\tau = a/c$ est le temps mis par la lumière pour parcourir le rayon du système.

d) Par définition du vecteur de Poynting :

$$P_{ray} = \oiint_{(S)} \vec{R}\cdot\overrightarrow{dS}.$$

$\vec{R}\perp\overrightarrow{dS}$ sur les sections droites, donc on n'intègre que latéralement. On prend garde à utiliser une normale rentrante, selon $-\vec{u}_r$.

$$\boxed{P_{ray} = 2\pi a h(-\vec{u}_r)\cdot\left(-\frac{\mu_0 n^2 I\frac{dI}{dt}a}{2}\vec{u}_r\right) = \mu_0\pi a^2 h n^2 I\frac{dI}{dt}}.$$

e) Le système est vide (il ne contient pas les fils), donc la puissance cédée aux charges est évidemment nulle : $\boxed{P_{charges} = 0}$.

f) On vérifie la conservation de l'énergie électromagnétique :

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\mu_0\pi h n^2\frac{I^2a^2}{2}\right) = \mu_0\pi h n^2 I\frac{dI}{dt}a^2 = P_{ray} - P_{charges}$$

$$= \mu_0\pi a^2 h n^2 I\frac{dI}{dt} - 0$$

On reconnaît la formule bien connue pour une inductance : $U = \frac{1}{2}LI^2$.

L'énergie U emmagasinée dans le solénoïde varie : elle est proportionnelle à I^2. Quand I^2 augmente, le vecteur de Poynting est selon $-\vec{u}_r$, l'énergie rentre dans le solénoïde. Quand I^2 diminue, le vecteur de Poynting est selon $+\vec{u}_r$: l'énergie quitte le solénoïde.

g) On peut aussi vérifier la conservation locale :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{j}\cdot\vec{E} + \operatorname{div}\vec{R} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\mu_0 n^2 I^2}{2} + 0 + \operatorname{div}\left(-\frac{\mu_0 n^2 I\frac{dI}{dt}r}{2}\vec{u}_r\right)$$

$$= \mu_0 n^2 I\frac{dI}{dt} - \mu_0 n^2 I\frac{dI}{dt}\frac{2r}{2r} = 0$$

Il est équivalent de vérifier la conservation de l'énergie électromagnétique sous forme locale ou intégrale.

d'après la relation fournie par l'énoncé.

Annales

Pour maîtriser les bases

1. Interaction champs-gaz ionisé — D'après Polytechnique

Un gaz ionisé (plasma) occupe le demi-espace $x \geqslant 0$, le demi-espace $x \leqslant 0$ étant vide (Fig. 10). Un dispositif non représenté engendre le champ magnétique dépendant du temps :

$$\vec{B}(x,t) = B_0(t)\vec{u}_z \text{ pour } x \leqslant 0,$$

$$\vec{B}(x,t) = B(x,t)\vec{u}_z \text{ pour } x \geqslant 0.$$

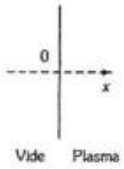


Figure 10

Le champ magnétique variable engendre un champ électrique qu'on supposera de la forme $\vec{E}(x,t) = E(x,t)\vec{u}_y$. Le champ électrique accélère les électrons libres de masse m et charge $-e$ du plasma, dont on notera la vitesse $\vec{v}(x,t)$. On note n la densité électronique qui est uniforme.

a) Trouver trois équations reliant dans le plasma $B(x,t)$, $E(x,t)$ et $\vec{v}(x,t)$.

b) Écrire les conditions aux limites vérifiées à l'interface vide-plasma en $x = 0$ en supposant que les courants du plasma sont volumiques.

c) On se place désormais dans le cadre de l'ARQS et on néglige la partie magnétique de la force de Lorentz. Montrer alors que :

$$\frac{\partial^2 E(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\lambda^2}E(x,t).$$

On exprimera λ en fonction de c (vitesse de la lumière dans le vide) et $\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m\varepsilon_0}}$, appelée pulsation plasma.

d) Exprimer $E(x,t)$, $B(x,t)$ et $\vec{v}(x,t)$ en tout point du demi-espace $x \geqslant 0$ à chaque instant en fonction de $B_0(t)$. On supposera que les champs restent nuls à l'infini dans le plasma.

e) Évaluer la longueur caractéristique des variations spatiales des champs.

Données : $e = 1{,}6\ 10^{-19}$ C, $m = 9{,}1\ 10^{-31}$ kg, $n = 10^{17}$ m^{-3}, $\varepsilon_0 = 8{,}84\ 10^{-12}$ F · m^{-1}.

Conseils méthodologiques. On utilise ici principalement le savoir-faire 3 (équations de Maxwell en ARQS).

a) En premier lieu, le champ électromagnétique doit satisfaire les équations de Maxwell. Les équations de Maxwell-Thomson $\boxed{\text{div}\vec{B} = 0}$ et Maxwell-Gauss $\boxed{\text{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0}$ sont bien vérifiées. Intéressons-nous aux deux autres :

- Maxwell-Faraday : $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$. Vu la forme du champ électrique :

© Larousse – La photocopie non autorisée est un délit

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge E(x,t)\vec{u}_y = \frac{\partial E}{\partial x}\vec{u}_z$$

soit : $\boxed{\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial t}}$;

- Maxwell-Ampère : $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$. L'expression générale de la densité volumique de courant donne ici :

$$\vec{j} = \sum_i n_i q_i \vec{v}_i = n(-e)\vec{v}.$$

Alors : $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge B(x,t)\vec{u}_z = \boxed{-\frac{\partial B}{\partial x}\vec{u}_y = \mu_0\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\mu_0 ne\vec{v} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial E}{\partial t}\vec{u}_y}$.

Enfin, la troisième équation est fournie par la relation fondamentale de la mécanique pour un électron. On lie ainsi la dérivée de la vitesse au champ électromagnétique :

$$\boxed{m\frac{d\vec{v}}{dt} = -e(E\vec{u}_y + \vec{v} \wedge B\vec{u}_z)}.$$

b) La relation de passage pour le champ électrique est :

$$\vec{E}_N(x = 0^+) - \vec{E}_N(x = 0^-) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u}_x.$$

où σ est la densité surfacique de charge à l'interface.

La relation de passage pour le champ magnétique est :

$$\vec{B}_T(x = 0^+) - \vec{B}_T(x = 0^-) = \mu_0\vec{j}_S \wedge \vec{u}_x = \vec{0},$$

car il n'existe pas de courants surfaciques à l'interface. On en déduit ainsi $\boxed{B(0,t) = B_0(t)}$.

Remarque

Cette relation ne nous servira pas dans la mesure où on n étudie par $\vec{E}$ dans la partie $x \leqslant 0$

c) Simplifions alors les trois équations précédentes :

- l'équation de Maxwell-Faraday reste inchangée : $\boxed{\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial t}}$;
- on néglige le terme de courant de déplacement dans l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\boxed{-\frac{\partial B}{\partial x}\vec{u}_y = -\mu_0 ne\vec{v}}$$;

- enfin, on néglige la partie magnétique de la force de Lorentz :

$$\boxed{m\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -eE\vec{u}_y}.$$

On constate que $\vec{v}(x,t) = v(x,t)\vec{u}_y$ et on prend la dérivée partielle de la première équation par rapport à x :

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 B}{\partial x \partial t} = -\frac{\partial^2 B}{\partial t \partial x} = -\mu_0 ne\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\mu_0 ne^2}{m}E.$$

Technique de calcul

Les dérivées secondes commutent sans problème car les variables x et t sont indépendantes

Cette équation est bien de la forme proposée par l'énoncé, avec :

$$\lambda^2 = \frac{m}{\mu_0 n e^2} = \frac{m\varepsilon_0}{\mu_0\varepsilon_0 n e^2} = \frac{m\varepsilon_0 c^2}{n e^2} = \frac{c^2}{\omega_p^2}.$$

On en déduit $\lambda = c/\omega_p$. Cette expression est homogène. En effet, $[c] = L \cdot T^{-1}$, alors que ω est une pulsation : $[\omega] = T^{-1}$, et λ est bien une longueur.

d) On résout l'expression précédente, à t fixé :

$$E(x,t) = A_1(t)\exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right) + A_2(t)\exp\left(\frac{x}{\lambda}\right).$$

Comme le champ électrique ne peut pas diverger, la partie en $\exp\left(\frac{x}{\lambda}\right)$ est nécessairement nulle : $A_2(t) = 0$.

On s'intéresse alors au champ magnétique pour faire intervenir $B_0(t)$ dans le cadre d'une condition aux limites :

$$\frac{\partial B}{\partial t} = -\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{A_1(t)}{\lambda}\exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right).$$

On intègre :

$$B(x,t) = D_1(t)\exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right) + D_2(x).$$

Utilisons la condition aux limites : $\forall t,\ B(0,t) = B_0(t)$:

$$\forall t,\ B_0(t) = D_1(t) + D_2(x).$$

La fonction D_2 est obligatoirement constante. Comme le champ magnétique reste nul quand $x \to \infty$, on en déduit immédiatement la nullité de D_2.

Alors :

$$\boxed{B(x,t) = B_0(t)\exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right)}.$$

Ensuite :

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial t} = -B_0'(t)\exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right),$$

sachant que $E(x,t) = A(t)\exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right)$. En comparant les deux expressions :

$$\boxed{E(x,t) = \lambda B_0'(t)\exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right)},$$

enfin :

$$\boxed{v(x,t) = \frac{1}{\mu_0 n e}\frac{\partial B}{\partial x} = -\frac{B_0(t)}{\mu_0 n e\lambda}\exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right)}$$

e) La longueur typique de variation des champs est λ. Les champs électrique et magnétique sont maximaux au niveau de l'interface vide-plasma en $x = 0$. Au bout de quelques λ, ils ont quasiment disparu. L'application numérique donne $\lambda = 1{,}7$ cm.

Technique de calcul

L'équation ayant été résolue pour un certain temps t fixé, les constantes d'intégration dépendent de t.

Remarque

L'argument de non-divergence d'une quantité physique permet souvent de simplifier une expression.

Technique de calcul

Comme on a intégré à x constant, la constante D_2 est en fait une fonction de x. De plus :

$$D_1(t) = \int^t A_1(t')dt'/\lambda.$$

© Lavoisier – La photocopie non autorisée est un délit

2. Milieu rendu conducteur — D'après Oral Banque PT

Une sphère métallique de rayon R_1 porte initialement une charge Q_0 uniformément répartie en surface. Une autre sphère métallique de rayon $R_2 > R_1$ est initialement non chargée (Fig. 11). Entre les deux se trouve un gaz non conducteur. Suite à un flash lumineux, ce gaz devient conducteur et est caractérisé par sa conductivité γ. On supposera que le gaz reste localement neutre.

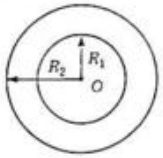


Figure 11

a) On appelle $Q(t)$ la charge portée par la sphère intérieure. Que vaut le champ électrique entre les deux sphères ?

b) En déduire la densité volumique de courant.

c) Quel est le champ magnétique engendré ?

d) Vérifier les équations de Maxwell. En déduire une équation différentielle satisfaite par $Q(t)$.

e) La résoudre et donner la charge $Q'(t)$ portée par la seconde sphère.

f) Calculer les énergies électromagnétiques initiale et finale.

g) Commenter par un bilan énergétique complet.

h) Expliquer simplement le processus d'ionisation par flash.

Conseils méthodologiques. Utiliser les symétries, similairement au savoir-faire 3. Pour le bilan d'énergie, consulter le savoir-faire 4.

a) Commençons par des considérations de symétrie. Soit M un point quelconque. Tout plan contenant l'origine O et le point M est un plan de symétrie. Le champ électrique appartient à l'intersection de ces plans : $\vec{E} \parallel \vec{u}_r$. L'invariance par toutes les rotations autour de O implique $\|\vec{E}\| = \|\vec{E}\|(r)$.

Ainsi : $\boxed{\vec{E} = E(r)\vec{u}_r}$.

Vu les symétries, on utilise le théorème de Gauss, toujours valable en régime variable.

La surface de Gauss S est une sphère de rayon r tel que $R_1 < r < R_2$ (Fig 12). Alors :

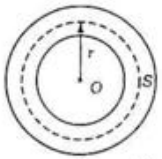


Figure 12

$$\begin{aligned}\oiint_{(S)} \vec{E}\cdot\vec{dS} &= \oiint_{(S)} E\cdot dS \\ &= E(r)\oiint_{(S)} dS \\ &= E(r)4\pi r^2 \\ &= \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \\ &= \frac{Q(t)}{\varepsilon_0}\end{aligned}$$

Alors : $\boxed{\vec{E} = \frac{Q(t)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r}$.

Erreur à éviter

Les charges sur la sphère de rayon R_2 sont en dehors de la surface de Gauss. Le milieu conducteur reste quant à lui neutre.

b) La loi d'Ohm locale donne rapidement la réponse : $\boxed{\vec{j} = \gamma\vec{E} = \gamma\frac{Q(t)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r}$.

Le courant est radial : les charges quittent la première sphère en direction de la seconde.

c) *A priori*, un champ magnétique est aussi engendré par les charges en mouvement. Soit M un point quelconque. Tout plan contenant O et M est un plan de symétrie des sources.

Le champ $\vec{B}$ est nécessairement perpendiculaire à tous ces plans, il est donc nul ! Ainsi, $\boxed{\vec{B} = \vec{0}}$.

Remarque

Les plans de symétrie doivent l'être pour toutes les sources : à la fois les charges et les courants.

d) Maxwell-Thomson : $\mathrm{div}\vec{B} = 0$ est évidemment vérifiée.

Maxwell-Faraday : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$. En effet, le champ électrique est le même que celui d'une charge ponctuelle $Q(t)$ située à l'origine. Son rotationnel est alors nul.

Maxwell-Gauss : $\mathrm{div}\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$, car le milieu conducteur n'est pas chargé. Le champ électrique ayant été évalué grâce au théorème de Gauss, l'équation de Maxwell-Gauss est vérifiée (le premier est la forme intégrale associée au second).

Maxwell-Ampère : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \vec{0} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$. Grâce à l'expression du champ électrique et la loi d'Ohm locale, on déduit :

$$\mu_0\vec{j} = \mu_0\gamma\vec{E} = \mu_0\gamma\frac{Q(t)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\dot{Q}(t)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r .$$

Alors : $\boxed{\dot{Q} + \dfrac{\gamma}{\varepsilon_0}Q = 0}$.

e) On résout, en posant $\tau = \varepsilon_0/\gamma$: $Q(t) = A\exp(-t/\tau)$. Comme $Q(0) = Q_0$:

$$\boxed{Q(t) = Q_0\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}.$$

La charge portée par la première sphère tend à s'annuler.

La charge totale se conserve. Comme elle est localisée sur les deux sphères, $Q(t) + Q'(t) = \text{cte} = Q_0 + 0 = Q_0$. Ainsi :

$$\boxed{Q'(t) = Q_0\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)}.$$

f) La densité volumique d'énergie électromagnétique est :

$$u(M) = \varepsilon_0\frac{E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} = \varepsilon_0\frac{E^2}{2}$$

ici, car $B = 0$. Alors : $U = \iiint_{\text{espace}} \varepsilon_0\dfrac{E^2}{2}\,\mathrm{d}\tau$.

Initialement :

$$U_i = \iiint_{r>R_1} \frac{Q_0^2}{32\pi^2\varepsilon_0 r^4}\,\mathrm{d}\tau$$

car à $t = 0$, $\vec{E} = \dfrac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$ pour $r > R_1$ et $\vec{E} = \vec{0}$ pour $r < R_1$. Par symétrie sphérique, on intègre sur des coquilles sphériques entre r et $r + \mathrm{d}r$:

$$U_i = \int_{R_1}^{\infty}\frac{Q_0^2}{8\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{Q_0^2}{8\pi\varepsilon_0 R_1}.$$

Technique de calcul

$\mathrm{d}\tau = 4\pi r^2\mathrm{d}r$ est le volume de la coquille sphérique entre r et $r + \mathrm{d}r$.

© Larcher – La photocopie non autorisée est un délit

Au bout d'un très long temps, la charge Q_0 se retrouve totalement localisée sur la sphère de rayon R_2. En conséquence, le théorème de Gauss montre que $\vec{E} = \vec{0}$ pour $r < R_2$ et $\vec{E} = \dfrac{Q_0}{4\pi r^2}\vec{u}_r$ pour $r > R_2$. Ainsi :

$$U_f = \iiint_{r>R_2}\frac{Q_0^2}{32\pi^2\varepsilon_0 r^4}\mathrm{d}\tau = \frac{Q_0^2}{8\pi\varepsilon_0 R_2},$$ suite à une intégration similaire au cas précédent.

La variation d'énergie électromagnétique est :

$$\boxed{\Delta U = U_f - U_i = \frac{Q_0^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) < 0}.$$

L'énergie associée au champ électromagnétique diminue lors de ce processus.

g) Prenons comme système l'espace entier. La diminution d'énergie électromagnétique du système s'identifie alors à l'énergie cédée aux charges dans le milieu conducteur (par effet Joule). En effet, il ne peut exister aucun échange d'énergie aux frontières du système car le système est infini.

La puissance volumique cédée par le champ aux charges est $p = \vec{j}\cdot\vec{E} = \gamma E^2$. Alors, la puissance totale cédée par le champ est :

$$P = \iiint_{\text{espace}} p\,\mathrm{d}\tau = \iiint_{\text{espace}} \gamma E^2\,\mathrm{d}\tau .$$

Au final, l'énergie cédée par le champ aux charges est :

$$W = \int_0^{\infty} P\,\mathrm{d}t .$$

La conservation de l'énergie impose la relation :

$$U_f - U_i = -W .$$

Remarque

De toute manière, le vecteur de Poynting est nul : l'énergie électromagnétique ne se propage pas dans ce problème.

Remarque

L'énergie cédée aux charges est perdue par le système, d'où le signe moins dans la relation ci-contre.

h) Au niveau microscopique, les électrons des atomes constituant le gaz absorbent des photons. Si ces derniers sont d'énergie suffisante, l'atome peut être ionisé et l'électron ainsi libéré peut participer à un courant macroscopique : le milieu est conducteur.

Remarque

Ce phénomène n'est que transitoire : l'électron finit typiquement par rejoindre un niveau de basse énergie en émettant un photon.

3. Champ électromagnétique dans un condensateur — D'après E3A

Un condensateur plan est constitué par des armatures métalliques circulaires de rayon R et de même axe $\Delta = z'z$, séparées d'une distance h (Fig. 13). Ce condensateur est soumis à une tension alternative donnée, de fréquence $f = \omega/2\pi$, qui produit à l'instant t dans l'espace vide entre les armatures un champ approximativement uniforme, sinusoïdal dans le temps et parallèle à l'axe Δ, qu'on écrit en notation complexe : $\underline{\vec{E}}_0 = E_0\exp(\imath\omega t)\vec{u}_z$.

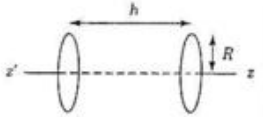


Figure 13

On adoptera une méthode perturbative pour évaluer le champ électromagnétique : au champ électrique $\underline{\vec{E}}_0$ est nécessairement associé un champ magnétique $\underline{\vec{B}}_1$, lequel « engendre » un champ électrique $\underline{\vec{E}}_2$, qui « crée » à son tour un champ magnétique $\underline{\vec{B}}_3$... Dans tout le problème, on négligera les effets de bord.

a) Les variations dans le temps du champ électrique $\underline{\vec{E}}_0$ créent un champ magnétique $\underline{\vec{B}}_1$. En un point M entre les plaques, donner l'équation de Maxwell relative à ce phénomène et relier $\underline{\vec{E}}_0$, $\underline{\vec{B}}_1$, ω, et c.

b) On se place en coordonnées cylindriques, et vu les symétries, on cherche $\vec{\underline{B}}_1(M,t) = \underline{B}_1(r,t)\vec{u}_\theta$. Soit le cercle C_1 parallèle au plan xOy, centré sur Δ et passant par M. Calculer la circulation de $\vec{\underline{B}}_1$ sur le contour C_1 qu'on orientera comme sur la figure 14. En déduire l'expression de $\vec{\underline{B}}_1$ en fonction de c, $X = r\omega/(2c)$, E_0 et ωt. Quelle est la dimension de X ?

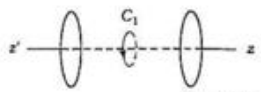


Figure 14

c) Les variations dans le temps du champ magnétique $\vec{\underline{B}}_1$ créent un champ électrique $\vec{\underline{E}}_2$. Quelle relation de Maxwell représente ce phénomène ? Relier $\vec{\underline{E}}_2$ à c, X, ω et E_0.

d) On prendra $\vec{\underline{E}}_2$ de la forme $\vec{\underline{E}}_2(M,t) = \underline{E}_2(r,t)\vec{u}_z$. Soit le contour orienté rectangulaire C_2 (Fig. 15) dans un plan méridien. Calculer la circulation de $\vec{\underline{E}}_2$ sur C_2. En déduire l'expression de $\vec{\underline{E}}_2$ en fonction de X et E_0 en prenant $\underline{E}_2(0,t) = 0$ (on inclut dans E_0 toute la partie du champ sur Δ).

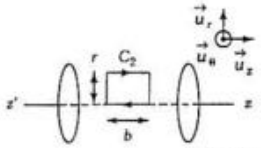


Figure 15

e) Expliquer comment obtenir le terme d'ordre suivant $\vec{\underline{E}}_4$ pour le champ électrique.

f) On se place désormais à basse fréquence ($X \ll 1$) et on néglige les termes en X de degré supérieur ou égal à 2. En utilisant les champs réels, calculer la densité volumique instantanée $u_e(t)$ d'énergie électrique et la densité volumique instantanée $u_m(t)$ d'énergie magnétique dans le condensateur en fonction de ε_0, X, ωt et E_0.

g) On note $\langle . \rangle$ la moyenne temporelle correspondante. Exprimer, en fonction de X, le rapport $\langle u_m \rangle / \langle u_e \rangle$. Que concluez-vous ?

h) Soit $\vec{R}$ le vecteur de Poynting associé à ce champ électromagnétique. Calculer sa valeur instantanée en fonction de ε_0, c, X, E_0 et ωt.

i) En déduire que les échanges par rayonnement se limitent à la surface latérale du condensateur. Calculer la puissance rayonnée instantanée rentrante $P(t)$. Comment interprétez-vous ce résultat, notamment son signe ?

Conseils méthodologiques. Le développement perturbatif du champ dans un condensateur cylindrique fait appel aux savoir-faire 1 (formes locales et formes intégrales), 3 (utilisation des équations de Maxwell) et 4 (bilans d'énergie électromagnétique).

a) À un champ électrique dépendant du temps est nécessairement associé un champ magnétique : c'est l'équation de Maxwell-Ampère : $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$. Cette équation est duale d'un champ magnétique dépendant du temps et de l'équation de Maxwell-Faraday.

Erreur à éviter

L'espace inter-armature est vide : $\rho = 0$ et $\vec{j} = \vec{0}$.

Alors : $\boxed{\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{\underline{B}}_1 = \dfrac{i\omega}{c^2}\vec{\underline{E}}_0}$.

b) On calcule la circulation de $\vec{\underline{B}}_1$:

$$\oint_{C_1} \vec{\underline{B}}_1 \cdot \overrightarrow{d\ell} = \oint_{C_1} \underline{B}_1\vec{u}_\theta \cdot d\ell\,\vec{u}_\theta = \oint_{C_1} \underline{B}_1(r,t)\cdot d\ell = B_1(r,t)2\pi r\,,$$

car $\underline{B}_1$ est uniforme sur C_1 et peut être sorti de l'intégrale.

© Ulysse – La photocopie non autorisée est un délit

On considère la forme intégrale de l'équation obtenue à la question précédente en intégrant sur le disque D_1 s'appuyant sur le contour C_1 :

$$\iint_{D_1} \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{\underline{B}}_1 \cdot \overrightarrow{dS} = \oint_{C_1} \vec{\underline{B}}_1 \cdot \overrightarrow{d\ell} = \underline{B}_1 2\pi r = \frac{i\omega}{c^2}\iint_{D_1} \vec{\underline{E}}_0 \cdot \overrightarrow{dS} = \frac{i\omega}{c^2}\pi r^2 E_0 \exp(i\omega t)\,.$$

Remarque

Voir le savoir-faire 1.

Alors :

$$\boxed{\vec{\underline{B}}_1 = \frac{ir\omega}{2c^2}E_0\exp(i\omega t)\vec{u}_\theta = \frac{iX}{c}E_0\exp(i\omega t)\vec{u}_\theta}\,.$$

Remarque

Ainsi, la relation donnant le champ magnétique est bien homogène : un champ magnétique est homogène à un champ électrique divisé par une vitesse (penser à l'expression de la force de Lorentz : $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$).

$X = r\omega/2c$ est clairement sans dimension.

c) Cette fois-ci, l'équation de Maxwell-Faraday décrit exactement ce phénomène :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{\underline{E}} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\,.$$

Ainsi, comme à ce niveau du calcul, $\vec{\underline{E}} = \vec{\underline{E}}_0 + \vec{\underline{E}}_2$:

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{\underline{E}} = \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{\underline{E}}_2 = -\frac{\partial\vec{\underline{B}}_1}{\partial t} = -\frac{i\omega iX}{c}E_0\exp(i\omega t)\vec{u}_\theta = \frac{\omega X}{c}E_0\exp(i\omega t)\vec{u}_\theta\,.$$

En effet, $\vec{\underline{E}}_0$ est uniforme et son rotationnel est nul.

d) On calcule la circulation de $\vec{\underline{E}}_2$:

$$\oint_{C_2} \vec{\underline{E}}_2 \cdot \overrightarrow{d\ell} = \oint_{C_2} \underline{E}_2 \cdot \vec{u}_z \cdot \overrightarrow{d\ell}\,.$$

Sur les deux côtés verticaux (de cote z constante), $\overrightarrow{d\ell} \parallel \vec{u}_r$, et ainsi $\vec{\underline{E}}_2 \cdot \overrightarrow{d\ell} = 0$. Alors :

$$\oint_{C_2} \vec{\underline{E}}_2 \cdot \overrightarrow{d\ell} = \int_{z=0}^{b} \underline{E}_2(r,t)\cdot dz + \int_{z=b}^{0} \underline{E}_2(0,t)\cdot dz$$
$$= \underline{E}_2(r,t)b - \underline{E}_2(0,t)b$$

Erreur à éviter

Ne pas oublier le signe moins dans la circulation.

Le signe moins provient du fait que $\vec{\underline{E}}_2$ et $\overrightarrow{d\ell}$ sont orientés dans des sens opposés sur cette portion du contour.

On passe à la forme intégrale de l'équation donnée en question c) en intégrant sur la surface S_2 du rectangle de contour C_2 :

$$\iint_{S_2} \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{\underline{E}}_2 \cdot \overrightarrow{dS} = \oint_{C_2} \vec{\underline{E}}_2 \cdot \overrightarrow{d\ell} = \iint_{S_2} \frac{\omega X}{c}E_0\vec{u}_\theta \cdot dS(-\vec{u}_\theta)\,.$$

Erreur à éviter

Par le tire-bouchon d'Ampère, on constate que la normale à S_2 est selon $-\vec{u}_\theta$.

Or, comme $dS = dr\,dz$:

$$\iint_{S_2} \frac{\omega X}{c}E_0\vec{u}_\theta \cdot dS(-\vec{u}_\theta) = -\iint_{S_2} \frac{r'\omega^2}{2c^2}E_0 dr'dz$$
$$= -E_0\frac{\omega^2}{2c^2}\int_0^b dz\int_0^r r'dr' = -E_0\frac{\omega^2}{2c^2}b\frac{r^2}{2}\,.$$

Erreur à éviter

Ne pas oublier que la distance radiale r est contenue dans la variable X.

Comme $\underline{E}_2(0,t) = 0$, on déduit :

$$\underline{E}_2(r,t)b = E_0\frac{\omega^2}{2c^2}b\frac{r^2}{2} = -E_0 bX^2\,.$$

Finalement : $\vec{\underline{E}}_2 = -X^2\vec{\underline{E}}_0$, soit : $\boxed{\vec{\underline{E}} = (1-X^2)\vec{\underline{E}}_0}$ à cet ordre.

e) On procède de la même manière que précédemment. Successivement :

• par Maxwell-Ampère : $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{\underline{B}}_3 = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{\underline{E}}_2}{\partial t}$, on calcule $\vec{\underline{B}}_3$;

• par Maxwell-Faraday : $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{\underline{E}}_4 = -\frac{\partial \vec{\underline{B}}_3}{\partial t}$, on calcule $\vec{\underline{E}}_4$.

Pour passer aux formes intégrales, on utilise les mêmes contours que précédemment. Pour information, on obtient : $\vec{\underline{E}}_4 = \frac{X^4}{4}\vec{\underline{E}}_0$.

f) On évalue $u_e = \varepsilon_0 \frac{E^2}{2}$, avec $\vec{E} = \vec{E}_0 = E_0 \cos\omega t\, \vec{u}_x$:

$$\boxed{u_e = \frac{\varepsilon_0}{2} E_0^2 \cos^2(\omega t)}.$$

De même : $u_m = \frac{B^2}{2\mu_0}$, avec $\vec{B} = \vec{B}_1 = -\frac{E_0 X}{c}\sin\omega t\, \vec{u}_\theta$:

$$\boxed{u_m = \frac{\varepsilon_0}{2} E_0^2 X^2 \sin^2(\omega t)}.$$

g) En rappelant que $\langle \cos^2(\omega t)\rangle = \langle \sin^2(\omega t)\rangle = 1/2$, il est aisé de montrer :

$$\boxed{\langle u_e\rangle = \frac{\varepsilon_0}{4} E_0^2} \quad \text{et} \quad \boxed{\langle u_m\rangle = \frac{\varepsilon_0}{4} E_0^2 X^2}.$$

Ainsi : $\boxed{\frac{\langle u_m\rangle}{\langle u_e\rangle} = X^2 \ll 1}$.

À fréquence suffisamment basse ($X \ll 1$), l'énergie contenue dans un condensateur est majoritairement de nature électrique.

h) Par définition :

$$\vec{R} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0} = E_0\cos\omega t\, \vec{u}_z \wedge -\frac{E_0 X}{\mu_0 c}\sin\omega t\, \vec{u}_\theta = \frac{X E_0^2}{\mu_0 c}\cos(\omega t)\sin(\omega t)\, \vec{u}_r .$$

i) La puissance rayonnée au travers de la surface délimitant le système est $P(t) = \oiint_{(S)} \vec{R}\cdot\overrightarrow{dS}$. Cette intégrale se réduit à celle sur la surface latérale (en effet, sur les sections droites, $\vec{R}\perp\overrightarrow{dS}$, voir la figure 16), et ainsi :

$$P(t) = \iint \vec{R}\cdot\overrightarrow{dS} = \iint \frac{X(R) E_0^2}{\mu_0 c}\cos(\omega t)\sin(\omega t)\, \vec{u}_r \cdot dS(-\vec{u}_r)$$

$$= -2\pi R h \frac{R\omega E_0^2}{2\mu_0 c^2}\cos(\omega t)\sin(\omega t).$$

Le bilan d'énergie est le suivant : l'énergie électromagnétique (électrique dans le cadre de l'approximation réalisée) contenue dans le condensateur varie à cause du rayonnement au travers des frontières latérales du condensateur.
L'énergie contenue est proportionnelle à $\cos^2(\omega t)$. Quand elle augmente, $\cos^2(\omega t)$ croît, et sa dérivée $-2\cos(\omega t)\sin(\omega t)$ est positive. Alors, la puissance rayonnée entrante dans le condensateur $P(t)$ est positive. L'énergie électromagnétique augmente grâce à l'apport par rayonnement.

Remarque

L'expression exacte du champ électrique fait appel aux fonctions de Bessel.

Erreur à éviter

Bien passer en champ électrique réel avant de calculer la densité volumique d'énergie. Celle-ci étant une grandeur quadratique du champ, ce retour aux réels est impératif.

Remarque

On se place ici dans le cadre de l'ARQS électrique.

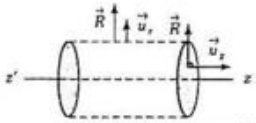


Figure 16

Erreur à éviter

Comme on recherche la puissance entrante, $\overrightarrow{dS} = dS(-\vec{u}_r)$.

Remarque

Le terme représentant la puissance cédée aux sources est nul car le condensateur est vide.

© Larvalex - La photocopie non autorisée est un délit

4. Effet de peau dans un conducteur cylindrique — D'après Centrale-Supelec

En coordonnées cylindriques locales (r,θ,z) :

$$\text{div}\,\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\vec{u}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{u}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\vec{u}_z .$$

On plonge un barreau conducteur cylindrique dans le champ magnétique créé par un solénoïde de rayon $a = 15$ cm parcouru par un courant électrique $I(t)$ de fréquence 100 kHz (Fig. 17). On utilise la notation complexe pour le courant et les champs :

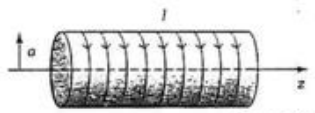


Figure 17

$$\underline{I} = I_0\exp(j\omega t), \quad \vec{\underline{B}}(r,t) = \underline{B}(r)\exp(j\omega t)\,\vec{u}_z$$

et $\vec{\underline{E}}(r,t) = \underline{E}(r)\exp(j\omega t)\,\vec{u}_\theta$.

Le solénoïde est rempli par le cylindre conducteur, de conductivité γ telle que $\vec{\underline{j}} = \gamma\vec{\underline{E}}$, où $\vec{\underline{j}}$ est la densité volumique de courant dans le cylindre en notation complexe.

a) Expliquer les formes des champs magnétique et électrique dans le conducteur qui est supposé rester localement neutre.

b) À l'aide des équations de Maxwell, déterminer deux équations différentielles du premier ordre satisfaites par $\underline{E}(r)$ et $\underline{B}(r)$ pour $r < a$.

c) Montrer qu'on peut négliger la densité de courant de déplacement devant celle de courant de conduction dans le cas d'un cylindre de cuivre ($\gamma_{Cu} = 6{,}0\ 10^7\ \text{S}\cdot\text{m}^{-1}$) ou de silicium ($\gamma_{Si} = 1{,}0\ 10^3\ \text{S}\cdot\text{m}^{-1}$) pour une fréquence de 100 kHz. Simplifier les équations précédentes.

d) Écrire l'équation différentielle (Eq) satisfaite par $\underline{E}$ seule, puis par $\underline{B}$ seule.

e) L'équation (Eq) fait apparaître une grandeur homogène à une longueur, qu'on notera λ. Donner son expression et calculer sa valeur pour le cuivre et le silicium. On rappelle $\mu_0 = 4\pi\ 10^{-7}\ \text{H}\cdot\text{m}^{-1}$.

f) La résolution de (Eq) fournit la fonction complexe $\underline{E}(r)$. On a représenté en Fig. 18 les courbes $|\underline{E}(r)|$ pour les barreaux de silicium et de cuivre. Décrire les propriétés des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ dans les barreaux. Interpréter la constante λ.

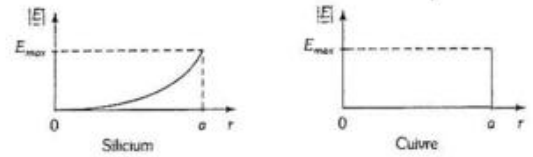


Figure 18

Conseils méthodologiques. On a ici la suite du problème Les bases 4.3. Elle fait appel aux équations de Maxwell (savoir-faire 3) et aux bilans d'énergie électromagnétique (savoir-faire 4).

a) Vu l'invariance par rotation autour de l'axe Oz et par translation selon ce même axe, $\|\vec{E}\|$ et $\|\vec{B}\|$ ne dépendent que de la distance r à l'axe.
Soit M un point quelconque. Le plan contenant l'axe Oz et le point M est un plan d'antisymétrie des sources, le champ électrique lui est perpendiculaire : $\boxed{\vec{E}\parallel\vec{u}_\theta}$.

Remarque

Les courants induits $\vec{j} = \gamma\vec{E}$ véhicules bien les mêmes symétries que le courant parcourant le solénoïde.

De plus, le plan contenant M et perpendiculaire à Oz est un plan de symétrie des sources. Le champ magnétique lui est perpendiculaire : $\boxed{\vec{B} \parallel \vec{u}_z}$.

Au final : $\boxed{\vec{E} = E(r)\vec{u}_\theta}$ et $\boxed{\vec{B} = B(r)\vec{u}_z}$.

b) Rappelons les équations de Maxwell pour un milieu localement neutre ($\rho = 0$) :

$$\text{div}\,\underline{\vec{B}} = 0\,,\quad \text{div}\,\underline{\vec{E}} = 0\,,\quad \overrightarrow{\text{rot}}\,\underline{\vec{E}} = -\frac{\partial \underline{\vec{B}}}{\partial t} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\text{rot}}\,\underline{\vec{B}} = \mu_0 \underline{\vec{j}} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t}\,.$$

Les deux premières équations sont clairement vérifiées vu les formes des champs électrique et magnétique et l'expression de la divergence en coordonnées cylindriques.

L'équation de Maxwell-Faraday mène à : $\boxed{\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}(r\underline{E}(r))}{\mathrm{d}r} = -j\omega\underline{B}}$.

Celle de Maxwell-Ampère donne : $\boxed{-\frac{\mathrm{d}\underline{B}}{\mathrm{d}r} = \left(\mu_0\gamma + \frac{i\omega}{c^2}\right)\underline{E}}$.

c) Calculons le rapport des deux termes du second membre de la dernière équation :

$$\mu_0 c^2\gamma/\omega = 1{,}1\,10^{13} \text{ pour Cu} \quad \text{et} \quad \mu_0 c^2\gamma/\omega = 1.8\,10^{8} \text{ pour Si.}$$

Dans le cas le moins favorable (Si est un semi-conducteur alors que Cu est un excellent conducteur électrique), la densité volumique de courant est 10^8 fois supérieure à la densité de courant de déplacement. On négligera donc ce terme.

L'équation de Maxwell-Ampère se simplifie alors en : $\boxed{-\frac{\mathrm{d}\underline{B}}{\mathrm{d}r} = \mu_0\gamma\underline{E}}$.

d) On reporte l'une des équations dans l'autre : $\frac{d}{\mathrm{d}r}\left(\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}(r\underline{E}(r))}{\mathrm{d}r}\right) = -j\omega\frac{\mathrm{d}\underline{B}}{\mathrm{d}r} = j\mu_0\gamma\omega\underline{E}$.

Cette équation se simplifie en :

$$\boxed{\underline{E}''(r) + \frac{\underline{E}'(r)}{r} - \left(j\mu_0\gamma\omega + \frac{1}{r^2}\right)\underline{E}(r) = 0}$$

On procède similairement pour le champ magnétique : $\frac{d}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{d\underline{B}}{\mathrm{d}r}\right) = j\mu_0\gamma\omega(r\underline{B})$.

On aboutit à :

$$\boxed{\underline{B}''(r) + \frac{\underline{B}'(r)}{r} - j\mu_0\gamma\omega\underline{B}(r) = 0}$$

e) Dans l'équation Eq apparaît naturellement le terme $j\mu_0\gamma\omega + \frac{1}{r^2}$. Ainsi, $\mu_0\gamma\omega$ est l'inverse du carré d'une longueur, soit $\mu_0\gamma\omega = 1/\lambda^2$:

$$\boxed{\lambda = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\gamma\omega}}}$$

L'application numérique donne : $\lambda_{Cu} = 0.15$ mm et $\lambda_{Si} = 3.6$ cm.

⇨ Remarque

Cela revient à se placer dans le cadre de l'ARQS.

⇨ Remarque

Ce résultat est qualitatif. La résolution exacte de cette équation différentielle fait appel aux fonctions de Bessel. Cependant, par homogénéité, la distance sur laquelle le champ pénètre dans le barreau est $\alpha\lambda$, où α est une constante numérique pure.

© Livelair – La photocopie non autorisée est un délit

λ étant la seule longueur intervenant dans l'équation différentielle (Eq), on peut déjà affirmer que c'est une longueur représentant la distance (radiale) typique de variation du champ dans le cylindre conducteur. Le champ varie donc sur des distances beaucoup plus courtes dans le cuivre que dans le silicium.

f) L'interprétation précise de λ peut être réalisée grâce à la résolution numérique de l'équation différentielle (Eq). L'amplitude du champ décroît au fur et à mesure qu'on s'enfonce dans le cylindre conducteur. λ représente donc la profondeur de pénétration du champ dans le conducteur, c'est ce qu'on appelle **l'épaisseur de peau**.

Dans le cas du cuivre, $\lambda \ll a$, et le champ devient nul à l'intérieur du cylindre après une distance très faible de l'ordre du mm. Le champ ne pénètre pas quasiment pas dans le conducteur cylindrique. Pour le silicium, cette distance est de quelques centimètres, soit $\lambda \approx a$.

Pour approfondir

5. Four à induction — D'après Centrale-Supelec

En coordonnées cylindriques locales (r, θ, z) :

$$\text{div}\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\vec{u}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{u}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\vec{u}_z\,.$$

On désire chauffer un cylindre conducteur de rayon a en le plongeant dans un solénoïde infini comportant n spires par unité de longueur et parcouru par un courant $I(t) = I_0\cos(2\pi ft)$ oscillant à la fréquence $f = 100$ kHz (Fig. 17). On note γ la conductivité du cylindre. On se placera en coordonnées cylindriques et on supposera les hypothèses de l'ARQS vérifiées. Les champs sont pris de la forme $\vec{B} = B(r,t)\vec{u}_z$ et $\vec{E} = E(r,t)\vec{u}_\theta$.

a) Expliquer qualitativement pourquoi des courants volumiques apparaissent dans le conducteur.

b) Dans le barreau, on modélise la répartition des courants volumiques de la manière suivante :

$$r < a - \lambda : \ \vec{j} = \vec{0} \qquad a - \lambda < r < a : \ \vec{j} = j_0(t)\vec{u}_\theta$$

avec $\lambda = \sqrt{2/(\mu_0\gamma\omega)} \ll a$ et $\omega = 2\pi f$.

Écrire les équations de Maxwell à l'intérieur du solénoïde.

c) Montrer que l'ensemble {barreau+solénoïde} est équivalent à un solénoïde de rayon $\approx a$ parcouru par une intensité I' qu'on exprimera en fonction de I, n, λ, et j_0.

d) Dans ce modèle, sachant que $\vec{B} = \vec{0}$ pour $r = 0$, en déduire l'expression de j_0 en fonction de I, n, λ et f.

e) Calculer la puissance élémentaire $\mathrm{d}P$ dissipée par effet Joule dans un volume $\mathrm{d}\tau$ du barreau. Quelle est sa moyenne temporelle $\langle \mathrm{d}P \rangle$?

f) En déduire la puissance moyenne $\langle P \rangle$ dissipée sur une hauteur h du barreau. Quelle est sa dépendance en la fréquence du courant alimentant le solénoïde ?

g) Calculer l'expression du champ magnétique pour $a - \lambda < r < a$. Quelle est sa valeur en $r = a^-$?

h) Que vaut le champ électrique en $r = a^-$?

i) En déduire le vecteur de Poynting $\vec{R}$ en $r = a^-$, puis sa moyenne temporelle.

j) Quel est son flux moyen rentrant Φ sur un cylindre de rayon a^- et hauteur h ? Réaliser un bilan énergétique détaillé.

Conseils méthodologiques. On s'intéresse ici au chauffage par induction. Consulter le savoir-faire 4 pour les bilans d'énergie électromagnétique. Cet exercice peut être vu comme la suite de l'exercice 4 des Bases.

a) Le champ magnétique créé par le solénoïde dépend du temps car les courants qui l'engendrent dépendent du temps. D'après l'équation de Maxwell-Faraday $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \neq \vec{0}$, un champ électrique non nul existe nécessairement. Le cylindre étant conducteur, ce champ crée un courant volumique $\vec{j} = \gamma \vec{E}$.

b) Les conducteurs restent localement neutres, ainsi $\rho = 0$.
Les équations de Maxwell sont :

$$\boxed{\text{div}\,\vec{B} = 0,\ \text{div}\,\vec{E} = 0,\ \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j}}$$

sachant que : $\vec{j} = \vec{0}$ pour $r \leqslant a - \lambda$,
$\vec{j} = j_0(t)\vec{u}_\theta$ pour $a - \lambda \leqslant r \leqslant a$.

c) Le courant volumique à l'intérieur du barreau cylindrique est situé quasiment à la surface, c'est-à-dire à proximité immédiate du courant alimentant le solénoïde.
L'ensemble (barreau + solénoïde) est alors équivalent au seul solénoïde parcouru par un courant I'.
Une longueur dz du dispositif contient $n\,dz$ spires du solénoïde.
Ainsi, une longueur dz du solénoïde hypothétique est parcourue par le courant $nI'\,dz$. Une longueur dz de l'ensemble (barreau+solénoïde) est parcourue par le courant (Fig. 19) :

$$nI\,dz + \vec{j} \cdot \vec{dS} = nI\,dz + j_0 \lambda\,dz .$$

On en déduit par l'équivalence des deux situations : $\boxed{I' = I + \dfrac{j_0 \lambda}{n}}$.

d) L'équation de Maxwell-Ampère pour $r \leqslant a - \lambda$ donne $-B'(r) = 0$.

Comme $\vec{B}(0) = \vec{0}$, on en déduit : $\boxed{\vec{B} = \vec{0} \text{ pour } r \leqslant a - \lambda}$.

Le champ créé à l'intérieur du solénoïde hypothétique parcouru par un courant I' est nul. Sachant que $B_{int} = \mu_0 nI'$, on en déduit immédiatement $I' = 0$, soit :

$$\boxed{j_0(t) = -nI(t)/\lambda = -nI_0 \cos(2\pi f t)/\lambda}.$$

e) La puissance volumique cédée par le champ électromagnétique aux sources est $p = \vec{j} \cdot \vec{E}$. Ainsi :

$$dP = p\,d\tau = \vec{j} \cdot \vec{E}\,d\tau = \frac{j_0^2}{\gamma} d\tau = \frac{n^2 I_0^2 \cos^2(2\pi f t)}{\gamma \lambda^2} d\tau .$$

En passant en moyenne temporelle :

$$\langle dP \rangle = \frac{\langle j_0^2 \rangle}{\gamma} d\tau = \frac{n^2 I_0^2 \langle \cos^2(2\pi f t) \rangle}{\gamma \lambda^2} d\tau = \frac{n^2 I_0^2}{2\gamma \lambda^2} d\tau .$$

Remarque

Les courants volumiques créent à leur tour un champ magnétique... Le problème est complexe.

Remarque

Voir le savoir-faire 2.a)

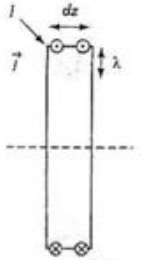


Figure 19

Remarque

Voir le savoir-faire 2.a) du chapitre Magnétostatique pour davantage de précisions.

Remarque

C'est un cas particulier du solénoïde qu'on retrouve ici : le champ est uniforme à l'intérieur d'un solénoïde infini.

Rappelons :

$\langle \cos^2(\omega t) \rangle = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T \cos^2(\omega t)\,dt = \frac{1}{2}$

avec $\omega T = 2\pi$. Voir le chapitre Ondes pour davantage de précisions.

© Lavoisier – La photocopie non autorisée est un délit

f) Pour une hauteur h de barreau, on doit intégrer sur $a - \lambda \leqslant r \leqslant a$ et $0 \leqslant z \leqslant h$ (ailleurs, $\vec{j} = \vec{0}$ ainsi que la puissance volumique cédée à la matière) :

$$\langle P \rangle = \iiint_V \langle dP \rangle = \frac{n^2 I_0^2}{2\gamma\lambda^2} \iiint_V d\tau .$$

Or, (Fig. 20) :

$$\iiint_V d\tau = \pi(a^2 - (a-\lambda)^2)h = 2\pi a \lambda h \quad \text{car } \lambda \ll a .$$

Au final :

$$\boxed{\langle P \rangle = \frac{n^2 I_0^2}{\gamma\lambda} \pi a h}.$$

Comme $\lambda \propto 1/\sqrt{f}$, on en déduit que la puissance moyenne dissipée dans le barreau est proportionnelle à la racine carrée de la fréquence.

g) Comme dans la question **d)**, on utilise Maxwell-Ampère :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad \text{donne} \quad -\frac{dB}{dr} = \mu_0 j_0 .$$

On intègre aisément :

$$B(r) = -\mu_0 j_0 r + \text{cte} = \frac{\mu_0 nI(t)}{\lambda} r + \text{cte} .$$

La distribution de courant est volumique, le champ magnétique est continu.
Comme $B(a - \lambda) = 0$, on obtient :

$$\boxed{\vec{B}(r,t) = \frac{\mu_0 nI(t)}{\lambda}(r - a + \lambda)\vec{u}_z}.$$

Par continuité :

$$\boxed{\vec{B}(r = a^-, t) = \mu_0 nI(t)\vec{u}_z}.$$

h) La densité volumique de courant en $r = a^-$ est connue :

$$\vec{j} = j_0 \vec{u}_\theta = -\frac{nI}{\lambda}\vec{u}_\theta .$$

Le caractère conducteur du barreau permet de conclure :

$$\boxed{\vec{E}(r = a^-, t) = \frac{\vec{j}}{\gamma} = -\frac{nI(t)}{\lambda\gamma}\vec{u}_\theta}.$$

i) Par définition :

$$\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = -\frac{nI}{\lambda\gamma}\vec{u}_\theta \wedge nI(t)\vec{u}_z = -\frac{n^2 I^2(t)}{\lambda\gamma}\vec{u}_r = -\frac{n^2 I_0^2 \cos^2(2\pi f t)}{\lambda\gamma}\vec{u}_r .$$

On s'aperçoit que le flux d'énergie rentre dans le barreau (la direction est $-\vec{u}_r$).
En moyenne :

$$\langle \vec{R} \rangle = -\frac{n^2 I_0^2}{2\lambda\gamma}\vec{u}_r .$$

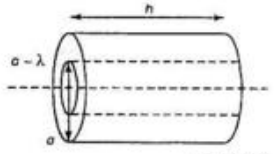


Figure 20

Technique de calcul

Ce volume est égal à l'aire de la couronne entre $a - \lambda$ et a multipliée par h.

Remarque

Ce résultat est une caractéristique de l'effet de peau.

Erreur à éviter

Le champ magnétique est en revanche discontinu entre $r = a^-$ et $r = a^+$ à cause de la présence des courants surfaciques $\vec{j}s = nI(t)\vec{u}_\theta$ à la surface du solénoïde.

Remarque

C'est exactement le champ créé par le courant $I(t)$ du solénoïde.

j) Le flux étant pris rentrant, le vecteur surface est $\overrightarrow{dS} = dS(-\vec{u}_r)$. Ainsi :

$$\Phi = \iint_S \langle \vec{R} \rangle \cdot \overrightarrow{dS} = \iint_S -\frac{n^2 I_0^2}{2\lambda\gamma}\,\vec{u}_r \cdot (-dS\,\vec{u}_r) = \frac{n^2 I_0^2}{2\lambda\gamma} \iint_S dS = \frac{n^2 I_0^2}{2\lambda\gamma}\, 2\pi a h .$$

L'intégrale ne porte que sur la partie latérale. Sur les deux sections droites, le produit scalaire $\langle \vec{R} \rangle \cdot \overrightarrow{dS}$ est nul.

On remarque immédiatement que $\boxed{\Phi = \langle P \rangle}$. Le système est le cylindre de rayon $r = a^-$ et de hauteur h. Toute l'énergie rayonnée au travers des frontières du système est rentrante et sert exactement en moyenne à combler les pertes par effet Joule (puissance cédée par le champ aux charges). Comparons ce résultat au bilan général :

$$\left\langle \frac{dU}{dt} \right\rangle = \oiint_{(S)} \langle \vec{R} \rangle \cdot \overrightarrow{dS} - \langle P \rangle .$$

Ces deux résultats sont compatibles si la moyenne de la dérivée de l'énergie électromagnétique contenue dans le système est nulle : $\left\langle \frac{dU}{dt} \right\rangle = 0$. Les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont proportionnels à $\cos(2\pi ft)$. Alors, la densité volumique d'énergie électromagnétique $u = \varepsilon_0 \frac{E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$, ainsi que son intégrale U sur le volume du système varient en $\cos^2(2\pi ft)$. dU/dt est en $\cos(2\pi ft)\sin(2\pi ft)$ et sa valeur moyenne est nulle.

Le bilan est bien vérifié : toute l'énergie rayonnée au travers des frontières du système est en moyenne dissipée par effet Joule (et sert à chauffer le barreau). L'énergie électromagnétique est dégradée en agitation thermique.

© Ellipses – La photocopie non autorisée est un délit

Ondes électromagnétiques dans le vide

Méthodes

Le cours en questions

1 ■ Équation de propagation des champs

1.1 Dans une région sans charge ni courant, quelles sont les équations locales satisfaites par le champ électromagnétique ? Peut-on les découpler ?

• Les équations de Maxwell dans le vide sans sources du champ s'écrivent :

$$\text{div}(\vec{E}) = 0\,,\quad \text{div}(\vec{B}) = 0\,,\quad \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\,,\quad \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\,.$$

• En utilisant la relation mathématique (valable pour tout champ $\vec{W}$) :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{W})) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\vec{W})) - \vec{\Delta}(\vec{W})\,.$$

⇒ Expression à connaître.

on peut établir :

$$\Delta(\vec{E}) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \Delta(\vec{B}) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}\,.$$

• On obtient ainsi pour chacun des champs un jeu de 2 équations ne faisant plus intervenir l'autre champ, on parle de découplage. Pour le champ électrique dans le vide, ces deux équations sont donc :

$$\text{div}(\vec{E}) = 0 \quad \text{et} \quad \Box(\vec{E}) = \vec{0}\,.$$

⇒ L'équation $\Box(\vec{E}) = \vec{0}$ est appelée équation de propagation.

© Ediscience - La photocopie non autorisée est un délit

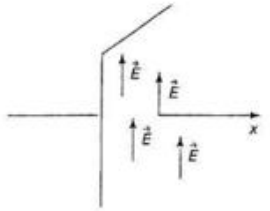
2 ■ Onde plane progressive

2.1 Comment définit-on une onde plane ?

• Toutes les ondes ne sont pas planes ; au contraire, celles-ci ne constituent qu'une famille très restrictive de solutions de l'équation de propagation. On parle d'onde plane pour une solution dont les champs peuvent s'exprimer comme fonctions d'une seule variable d'espace, en coordonnées cartésiennes, et du temps.

Uniforme signifie : invariant spatialement.

• Ainsi, si $\vec{E}(x,t)$ et $\vec{B}(x,t)$, on parle d'onde plane, dont les plans d'onde ont pour équation x = constante (Fig. 1). Le champ électromagnétique est donc uniforme dans tout plan d'onde.



Plan d'onde

Figure 1

2.2 Qu'entend-on par onde plane progressive ?

Rien n'est précisé à ce stade sur la forme des fonctions F et G, hormis leur dérivabilité.

• Toute solution de l'équation de propagation à une dimension $\Box s(x,t) = 0$ peut se mettre sous la forme d'une somme d'une fonction $s_+(x,t) = F(x-ct)$ et d'une fonction $s_-(x,t) = G(x+ct)$.

Chacun de ces termes correspond à un signal qui se propagerait sans déformation à la vitesse c, selon les x croissants (cas de s_+) ou selon les x décroissants (cas de s_-).

On aboutit à une onde électromagnétique progressive composée de $\vec{E}_+$ et $\vec{B}_+$, tous deux fonctions de $x-ct$ et une onde formée par $\vec{E}_-$ et $\vec{B}_-$, qui dépendent de $x+ct$.

• Pour l'onde plane, on applique ce raisonnement à chacune des composantes des champs, et on regroupe dans une onde progressive selon les x croissants tous les termes fonctions de $x-ct$ et dans une onde selon x décroissants tous les autres.

Une onde plane dans le vide est ainsi la somme de deux ondes progressives se propageant en sens inverses à la vitesse c.

2.3 Que signifie monochromatique ? Quelles sont les périodicités d'une onde plane progressive monochromatique ?

• Si la dépendance en la variable $x-ct$ (ou $x+ct$) évoquée précédemment est de type sinusoïdal, on parle d'onde monochromatique. Noter que par l'intermédiaire du formalisme de Fourier, il est toujours possible d'effectuer une décomposition en somme de termes monochromatiques.

• Notons ω la pulsation temporelle, chaque composante de l'onde varie alors comme $\cos\left(\omega t - \frac{\omega x}{c} + \varphi\right)$.

La période temporelle est : $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Spatialement, l'onde est également périodique et la période spatiale s'écrit :

$$\lambda = cT \ .$$

On l'appelle longueur d'onde.

En une durée égale à la période temporelle T, l'onde se propage sur une distance égale à la période spatiale λ à la vitesse c : $\lambda = cT$.

2.4 Proposer une écriture complexe du champ électrique d'une onde plane progressive monochromatique sans faire intervenir de coordonnées particulières. Quelle relation permet alors d'obtenir le champ magnétique ?

• Il est intéressant de définir le vecteur d'onde $\vec{k}$ dirigé selon la propagation et de norme :

$$k = \frac{\omega}{c} .$$

k joue le rôle d'une pulsation spatiale.

On peut alors proposer l'expression complexe générale suivante pour le champ électrique :

$$\underline{\vec{E}}_0 \exp j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) .$$

• L' amplitude complexe est donnée par le vecteur $\underline{\vec{E}}_0$, les plans d'onde sont orthogonaux à $\vec{k}$.

• La transversalité de l'onde plane, qui découle de l'équation $\mathrm{div}(\vec{E}) = 0$, impose à $\underline{\vec{E}}_0$ d'être orthogonal à $\vec{k}$.

• L'équation de Maxwell-Faraday permet alors de calculer aisément le champ magnétique complexe :

$$\underline{\vec{B}} = \frac{\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}}{\omega} .$$

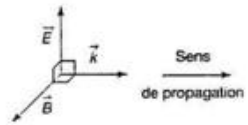


Figure 2

$\vec{k}$, $\vec{E}$ et $\vec{B}$ forment un trièdre orthonormé direct, ce qui définit une structure bien particulière pour l'onde plane progressive monochromatique (Fig. 2).

L'équation de Maxwell-Ampère devient alors redondante avec $k = \frac{\omega}{c}$.

© Ediscience - La photocopie non autorisée est un délit

2.5 Comment peut-on étudier la puissance rayonnée par une onde électromagnétique ? Quelle direction remarquable peut-on alors définir dans le cas d'une onde plane progressive monochromatique ?

Erreur à éviter

Réserver l'écriture $\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$ aux seules écritures réelles des champs !

• La densité surfacique de puissance rayonnée est donnée par le vecteur de Poynting $\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$, où les champs qui interviennent doivent nécessairement être pris réels et non complexes.

Pour une surface d'aire donnée, la puissance rayonnée à travers cette surface est maximale lorsque la normale est dirigée selon le vecteur d'onde.

• La structure de l'onde plane progressive rappelée ci-dessus impose bien au vecteur de Poynting d'être dirigé comme le vecteur d'onde : il s'agit bien de la direction de propagation de la puissance véhiculée par l'onde.

3 ▬ États de polarisation

3.1 Proposer l'écriture (champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$) d'une onde plane progressive monochromatique polarisée rectilignement. Vérifier la relation de structure.

• Considérant une onde se propageant selon les x croissants, et polarisée suivant $\vec{u}_y$, on peut envisager :

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx)\vec{u}_y$$

avec $\vec{k} = \frac{\omega}{c}\vec{u}_x$.

L'amplitude est E_0, la longueur d'onde $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$.

• Le champ magnétique a même type d'expression, mais il est polarisé selon $\vec{u}_z$; son amplitude est $\frac{E_0}{c}$ et il vibre en phase avec le champ électrique en tout point :

$$\vec{B} = \frac{E_0}{c}\cos(\omega t - kx)\vec{u}_z .$$

• La relation de structure liant ces champs est valable quel que soit le type de polarisation : $\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$, ou simplement ici :

$$\vec{B} = \frac{\vec{u}_x \wedge \vec{E}}{c} .$$

$\vec{k}$, $\vec{E}$ et $\vec{B}$ forment bien un trièdre orthonormé direct.

3.2 Écrire de même l'expression d'une onde circulaire ; puis vérifier qu'elle se décompose en une somme de deux ondes polarisées rectilignement. Toute onde polarisée rectilignement peut-elle également se décomposer en deux ondes circulaires ?

• Si le champ électrique se propage selon les x croissants, ses deux composantes selon Oy et Oz ont même amplitude mais vibrent en quadrature de phase. On peut écrire par exemple :

$$\vec{E} = E_0\cos(\omega t - kx)\vec{u}_y + E_0\sin(\omega t - kx)\vec{u}_z \quad .$$

L'onde écrite ici est circulaire gauche.

On définit le caractère gauche ou droit en examinant le sens de déplacement de l'extrémité du vecteur champ électrique, en un point fixé. La convention impose d'orienter le plan d'onde par le vecteur d'onde $\vec{k}$ (Fig. 3).

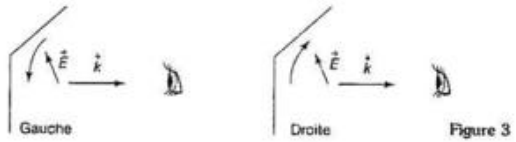


Figure 3

• La décomposition en somme de deux ondes polarisées rectilignement est immédiate : il suffit par exemple de distinguer la composante $\vec{E}_1 = E_0\cos(\omega t - kx)\vec{u}_y$ polarisée selon Oy, de celle dirigée suivant Oz : $\vec{E}_2 = E_0\sin(\omega t - kx)\vec{u}_z$:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 .$$

Par linéarité de la relation de structure $\vec{B} = \frac{\vec{k}\wedge\vec{E}}{c}$, on aura de même :

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 \quad .$$

• On procède de la même manière pour la décomposition d'une onde rectiligne en ondes circulaires. Le résultat est tout à fait général : l'onde

$$\vec{E} = E_0\cos(\omega t - kx)\vec{u}_y$$

peut s'écrire comme la somme de :

$$\vec{E}_g = \frac{E_0}{2}\cos(\omega t - kx)\vec{u}_y + \frac{E_0}{2}\sin(\omega t - kx)\vec{u}_z$$

et de :

$$\vec{E}_d = \frac{E_0}{2}\cos(\omega t - kx)\vec{u}_y - \frac{E_0}{2}\sin(\omega t - kx)\vec{u}_z$$

toutes deux circulaires.

$\vec{E}_g$ est circulaire gauche, $\vec{E}_d$ est droite.

© Larousse - La photocopie non autorisée est un délit

3.3 Toute onde plane progressive monochromatique, qui n'est ni polarisée rectilignement ni circulairement, est-elle nécessairement une onde polarisée elliptiquement ?

• Une onde plane progressive de lumière naturelle, lorsqu'elle a traversé un filtre monochromateur (ne conservant qu'un intervalle spectral très étroit) apparaît bien assimilable à une onde plane progressive monochromatique ; mais elle n'est ni polarisée rectilignement, ni circulairement, ni même elliptiquement. Cette polarisation, dite naturelle, correspondrait en fait à une décomposition en deux ondes rectilignes :

$$\vec{E} = E_0\cos(\omega t - kx)\vec{u}_y + E_0\sin(\omega t - kx + \varphi)\vec{u}_z$$

de même amplitude, mais présentant un déphasage φ variant aléatoirement dans le temps.

3.4 À partir d'une écriture des champs d'une onde plane progressive monochromatique polarisée rectilignement, exprimer la puissance moyenne rayonnée par unité de surface.

• Reprenant l'écriture de l'onde se propageant selon les x croissants et polarisée suivant $\vec{u}_y$: $\vec{E} = E_0\cos(\omega t - kx)\vec{u}_y$, on calcule $\vec{B} = \frac{E_0}{c}\cos(\omega t - kx)\vec{u}_z$ et le vecteur de Poynting :

$$\vec{R} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c}\cos^2(\omega t - kx)\vec{u}_x .$$

On retrouve la direction privilégiée de propagation de la puissance par rayonnement selon Ox, c'est-à-dire selon $\vec{k} = k\vec{u}_x$.

La valeur moyenne de $\cos^2(\omega t - kx)$ est égale à $\frac{1}{2}$.

• En valeur moyenne temporelle :

$$\langle\vec{R}\rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}\vec{u}_x .$$

Pour une surface d'aire unité et de normale dirigée selon $\vec{u}_x$, la puissance moyenne rayonnée est :

$$P_r = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}$$

qui est bien une fonction quadratique de l'amplitude.

4 ■ Rayonnement dipolaire

4.1 On considère un dipôle oscillant sinusoïdalement et on désire étudier le champ électromagnétique rayonné à grande distance dans le vide. Quelles sont les échelles de longueur caractéristiques à envisager ?

• Le milieu de propagation étant linéaire, puisqu'il s'agit du vide, le champ électromagnétique créé aura même pulsation ω que les oscillations du dipôle, on peut donc définir la longueur d'onde $\lambda = 2\pi\frac{c}{\omega}$ du rayonnement correspondant.

D'autre part, en terme d'échelles de distances :

– outre la longueur d'onde λ, qui est la période spatiale de l'onde,

– les oscillations des charges électriques du dipôle s'étendent sur une certaine portion de l'espace, dont la taille caractéristique d est à connaître,

– enfin, la distance r à laquelle seront calculés les champs est un paramètre qui intervient dans leur expression (on attend une solution atténuée au fur et à mesure que l'on s'éloigne du dipôle).

Pour une particule oscillant dans un piège, d est l'amplitude du mouvement ; pour une antenne courte, d peut être la taille de l'antenne.

• L'étude en physique non relativiste impose une extension d très inférieure à la longueur d'onde :

$$d \ll \lambda .$$

• D'autre part, l'étude en champ lointain correspond à une situation où la distance r est très supérieure à la taille d de la source d'une part, mais également très supérieure à la longueur d'onde :

$$\lambda \ll r .$$

Ainsi, on peut résumer les relations entre les différentes échelles de distance par :

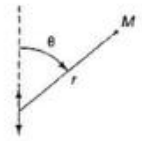
$$d \ll \lambda \ll r ,$$

un développement des expressions des champs est possible et on ne conserve que les termes de plus bas degré en $\frac{1}{r}$, c'est-à-dire ceux qui dominent à grande distance.

4.2 Le dipôle oscillant est dirigé selon l'axe *Oz*. On raisonne en coordonnées sphériques (Fig. 4). Comment les champs lointains dépendent-ils de *r* et θ ?

• L'atténuation des champs se fait en $\frac{1}{r}$ pour les termes dominants, ce qui correspond à une onde sphérique. Il est remarquable qu'en régime variable, cette atténuation est beaucoup moins rapide qu'en régime stationnaire où un dipôle électrique voit son champ $\vec{E}$ décroître en $\frac{1}{r^3}$. On dira que la portée du rayonnement est accrue en régime variable.

Erreur à éviter
La décroissance des champs n'est pas due à une absorption par le milieu, mais à une dilution dans l'espace (voir plus loin la puissance émise).



Dipôle oscillant

Figure 4

On retiendra que l'amplitude des champs varie en $\frac{\sin\theta}{r}$.

• L'émission n'est pas isotrope ! car les amplitudes des termes dominants varient comme $\sin\theta$, où θ est le paramètre angulaire de colatitude. Ainsi, l'émission est beaucoup plus intense dans le plan *xOy* qu'au voisinage de l'axe du dipôle.

4.3 L'onde rayonnée à grande distance a une structure quasi plane, quelles propriétés permettent de justifier ce qualificatif ?

• Géométriquement, les champs électrique et magnétique sont orthogonaux entre eux et tous deux sont orthogonaux au vecteur radial $\vec{u}_r$. On retrouve, comme dans l'onde plane progressive dans le vide, un trièdre direct formé par $\vec{u}_r$, $\vec{E}$ et $\vec{B}$.

• En norme, à chaque instant $\|\vec{B}\| = \frac{\|\vec{E}\|}{c}$. On peut donc poser $\vec{k} = \frac{\omega}{c}\vec{u}_r$, vecteur d'onde radial et écrire :

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$$

qui n'est autre que la relation de structure de l'onde plane progressive (Fig. 5).

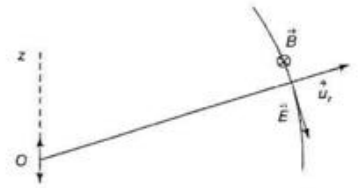


Figure 5

Par exemple, pour l'émission d'un objet stellaire, l'étude du rayonnement sur Terre peut être considéré ainsi.

• Bien entendu, la dépendance en r et θ ne doit pas être omise et cette structure quasi plane n'est utilisable que dans un domaine spatial d'extension suffisamment petite pour que ces paramètres géométriques varient peu.

À grande distance sur de petites échelles spatiales, les sphères sont assimilables à leur plan tangent.

• Enfin, les champs électrique et magnétique vibrent en phase ; ici, le terme de variation prend la forme $\cos(\omega t - kr)$ ce qui est conforme au résultat attendu pour une propagation radiale. Les surfaces d'onde, lieux où la phase est constante, sont notamment des sphères d'onde (surfaces à r constant).

© Lavoisier – La photocopie non autorisée est un délit

4.4 Montrer que les considérations sur la puissance totale rayonnée viennent conforter deux résultats précédents : la dépendance en r et la structure de l'onde.

• Si chaque champ voit son amplitude décroître en $\frac{1}{r}$, le vecteur de Poynting décroît comme $\frac{1}{r^2}$. La puissance surfacique ayant cette variation, son intégration sur une sphère entourant le dipôle, d'aire croissant comme r^2, rétablit une puissance totale rayonnée constante.

Ce résultat est vrai en valeur moyenne.

Le milieu n'étant pas absorbant, ce résultat est attendu.

• À grande distance, la propagation est radiale et on attend donc un vecteur de Poynting dirigé selon $\vec{u}_r$, la structure de l'onde est bien conforme à ce résultat puisque $\vec{E}$ et $\vec{B}$ forment, avec $\vec{u}_r$, un trièdre direct.

4.5 Rappeler la dépendance de l'amplitude des champs rayonnés par le dipôle sinusoïdal en fonction de la pulsation ω. Quelle conséquence en déduit-on ?

• Chacun des champs est proportionnel au carré de la pulsation, donc la puissance rayonnée est proportionnelle à ω^4.

• Si les molécules d'air sont excitées de la même façon par toutes les composantes spectrales du rayonnement solaire incident, leur émission est majoritaire dans le domaine des hautes fréquences (courtes longueurs d'onde). Or, dans une direction autre que celle du soleil, la lumière observée est due à la diffusion par l'atmosphère. Ainsi, le ciel est bleu.

Les savoir-faire clefs

1 ■ Savoir utiliser la notation complexe.

Conseils méthodologiques

On considère une composante du champ électrique d'une onde, mise sous la forme :

$$E = E_0\cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi)$$

(E pouvant être E_x, E_y ou E_z par exemple).

a) Mettre cette expression sous la forme complexe, en faisant apparaître le terme $\exp i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})$ et une amplitude complexe $\underline{E}_0$.

b) Quelles significations physique donne-t-on au module et à l'argument de $\underline{E}_0$?

1.a) et b) On procède comme en première année pour l'étude des signaux variant sinusoïdalement dans le temps (revoir ces notions si besoin).
On associe ainsi à $\cos(\theta)$ l'exponentielle complexe : $\exp(i\theta)$.

© Lavoisier - La photocopie non autorisée est un délit

1.c) Il suffit d'effectuer la substitution.

c) On change l'origine des temps, en posant $t' = t + t_0$. Que devient l'expression de $E(\vec{r},t')$? Peut-on choisir une valeur de t_0 telle que l'amplitude complexe $\underline{E}_0'$ ainsi définie soit réelle ?

1.d) Le vecteur d'onde indique la direction de propagation.

d) L'onde se propage selon Ox, quelle expression donne-t-on alors à $\vec{k}$ et plus généralement à $\cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi)$? Montrer qu'un changement d'origine des abscisses a un effet équivalent à un changement d'origine des temps.

$\exp(i\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$

1.a) Mettre $E = E_0\cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi)$ sous la forme complexe revient à considérer que E est la partie réelle de $\underline{E}$, où :

$$\underline{E} = E_0\exp i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi)$$

On peut alors transformer :

$$\exp i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi)$$

en :

$$\exp i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})\cdot\exp(i\varphi)$$

et poser $\underline{E}_0 = E_0\exp(i\varphi)$; on obtient alors :

$$\boxed{\underline{E} = \underline{E}_0\exp i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}$$

qui est la forme souhaitée.

b) Le module de E_0 est ainsi l'amplitude E_0 des oscillations, tandis que l'argument φ représente la phase à l'origine des temps et de l'espace :

à $t = 0$ et $\vec{r} = \vec{0}$, $\exp i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi) = \exp i(\varphi)$.

c) En posant $t' = t + t_0$, on peut obtenir une nouvelle expression de E :

$$E(\vec{r},t') = E_0\cos(\omega t' - \omega t_0 - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi)$$

qu'il est possible de réécrire :

$$\boxed{E(\vec{r},t') = E_0\cos(\omega t' - \vec{k}\cdot\vec{r} + \psi)}$$

avec $\psi = \varphi - \omega t_0$.

$\psi = \pi$ donne aussi $\underline{E}_0'$ réel, mais négatif : $\underline{E}_0' = -\underline{E}_0$.

On peut donc choisir un décalage temporel t_0 tel que $\psi = 0$, ce qui donne une amplitude complexe $\underline{E}_0'$ réelle.

d) Puisque l'onde se propage selon Ox, le vecteur d'onde a cette direction. Si le sens de propagation est en outre selon les x croissants, alors :

$$\vec{k} = \frac{\omega}{c}\vec{u}_x .$$

On obtient ainsi l'écriture $E = E_0\cos(\omega t - kx + \varphi)$, avec $k = \frac{\omega}{c}$.

Un changement d'origine des abscisses, de la forme $x' = x + x_0$ conduit à la transformation :

$$\boxed{E(x',t) = E_0\cos(\omega t - kx' + kx_0 + \varphi)}$$

qui revient à définir un déphasage à la nouvelle origine $\psi' = kx_0 + \varphi$.

L'effet est analogue à un changement d'origine des temps : c'est un déphasage.

REMARQUE – On retiendra que l'existence d'un déphasage est prise en compte dans l'argument de l'amplitude complexe ; mais qu'un choix convenable de l'origine des temps ou de l'espace permet de modifier, voire d'annuler ce terme.

Changer conjointement les origines de t et x revient à poser $\psi' = \varphi + kx_0 - \omega t_0$. Il ne se passe rien si $kx_0 - \omega t_0 = 0[2\pi]$ du fait de la périodicité.

2 ■ Savoir lier notation complexe et opérateurs.

Conseils méthodologiques

On adopte une autre définition de la notation complexe que celle envisagée dans le chapitre, en associant : $\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0 \exp i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)$ au champ réel $\vec{E}$ d'une onde plane progressive monochromatique de vecteur d'onde $\vec{k}$.

a) Le champ électrique calculé en prenant la partie réelle du champ complexe garde-t-il la même expression ?

b) Comment se traduit une dérivation partielle par rapport au temps ?

c) Même question pour une dérivation par rapport à une coordonnée d'espace x, y ou z.

Quelle traduction complexe prennent les équations de Maxwell ?

2.a) On utilise une propriété de la fonction cosinus.

2.b) et c) Il suffit d'effectuer cette dérivation sur l'expression complexe, car dériver $\exp i(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$ équivaut à dériver partie réelle et partie imaginaire.

2.d) Les opérateurs sont composés de dérivées spatiales par rapport aux différentes coordonnées.

2.a) La partie réelle de $\exp i(\theta)$ est identique à celle de $\exp(-i\theta)$: c'est dans tous les cas $\cos\theta$. Le champ réel est donc le même.

b) Dériver par rapport au temps une composante en $\exp i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)$ revient à multiplier par $-i\omega$ cette composante complexe. Par exemple :

$$\boxed{\frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t} = -i\omega\underline{\vec{E}}}.$$

En notant $\exp i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})$, on aurait obtenu $\frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t} = +i\omega\underline{\vec{E}}$.

c) $\vec{k}\cdot\vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z$ donc dériver par rapport à x revient à multiplier par ik_x etc. On constate qu'en coordonnées cartésiennes, le vecteur-opérateur Nabla peut s'écrire formellement :

$$\vec{\nabla} \left| \begin{matrix} ik_x \\ ik_y \\ ik_z \end{matrix} \right.$$

© Ellipses – La photocopie non autorisée est un délit

Avec la notation : $\exp i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})$, c'est $-i\vec{k}$ qui joue le rôle de Nabla.

Prendre la divergence revient ainsi, en notation complexe, à effectuer le produit scalaire par $i\vec{k}$, tandis que calculer le rotationnel se fait par le produit vectoriel.

d) Les équations de Maxwell peuvent être réécrites ainsi :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\vec{E}) = 0 \Rightarrow i\vec{k}\cdot\underline{\vec{E}} = 0 \\ \operatorname{div}(\vec{B}) = 0 \Rightarrow i\vec{k}\cdot\underline{\vec{B}} = 0 \\ \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{E}) = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow i\vec{k}\wedge\underline{\vec{E}} = i\omega\underline{\vec{B}} \\ \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{B}) = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow i\vec{k}\wedge\underline{\vec{B}} = -\dfrac{1}{c^2}i\omega\underline{\vec{E}} \end{cases}$$

– les deux premières équations donnent la transversalité de l'onde plane progressive et monochromatique.

– la troisième équation correspond à la structure de cette onde :

$$\underline{\vec{B}} = \frac{\vec{k}\wedge\underline{\vec{E}}}{\omega}.$$

– la quatrième équation donne alors l'équation de dispersion :

$$\omega^2 = k^2c^2.$$

On obtient rigoureusement les mêmes renseignements avec l'une ou l'autre des notations : il est heureux que le résultat de l'application des lois ne dépende pas d'un choix arbitraire fait par le physicien qui mène le calcul !

REMARQUE – Que l'on utilise l'une ou l'autre des notations complexes, le résultat ne change pas lorsqu'on l'applique à une loi physique. Il faut par contre être cohérent en effectuant un choix explicite, puis en s'y tenant dans toute la résolution.

Conseils méthodologiques

3 ■ Savoir diriger une onde plane progressive monochromatique.

Une onde plane progressive et monochromatique se propage dans le vide selon la direction de la première bissectrice du plan xOy, sa longueur d'onde est notée λ_0.

3.a) L'équation de dispersion et la direction de propagation suffisent à déterminer le vecteur d'onde

3.b) On peut prendre l'expression générale du champ en notation complexe et l'adapter au cas présent.

3.c) La polarisation détermine la direction du vecteur $\underline{\vec{E}}_0$, mais c'est la phase et l'amplitude qui en donnent les autres paramètres.

a) Exprimer son vecteur d'onde $\vec{k}$.

b) Donner l'expression du champ électrique en notation complexe $\underline{\vec{E}}$, en fonction de x, y, z et t. On utilisera une amplitude complexe $\underline{\vec{E}}_0$.

c) L'onde est polarisée rectilignement dans la direction Oz. Est-ce compatible avec la structure d'une onde plane ? Sachant que l'on considère qu'en O, le champ électrique est maximal à l'origine des temps, et que son amplitude est E_m, donner l'expression complète de $\underline{\vec{E}}$, puis celle de $\vec{E}(x,y,z,t)$.

d) Quel est le déphasage entre les champs électriques $\vec{E}(0,0,z,t)$ et $\vec{E}(l,l,z,t)$, l étant une longueur donnée ? Quelles sont les valeurs de l pour lesquelles ces champs sont en phase ?

e) Déterminer de même le déphasage entre $E(0,l,z,t)$ et $E(l,0,z,t)$, l étant à nouveau une longueur quelconque. Interpréter.

3.d) et e) On peut raisonner sur les expressions ou recourir à une formulation générale utilisant le vecteur d'onde.

3.a) Le vecteur d'onde est dirigé et orienté selon la première bissectrice du plan xOy, il s'écrit donc :

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda_0}\vec{u}$$

où $\vec{u}$ est le vecteur unitaire directeur de cet axe : $\vec{u} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{u}_x + \vec{u}_y)$.

Finalement :

$$\boxed{\vec{k} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{2\pi}{\lambda_0}(\vec{u}_x + \vec{u}_y)}.$$

$k = \frac{2\pi}{\lambda_0}$ est la relation entre pulsation et période spatiales.

b) À partir de l'expression générale du champ électrique en notation complexe pour ce type d'onde :

$$\boxed{\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0 \exp i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}$$

où la pulsation ω est liée à la longueur d'onde par $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda_0}$, on peut écrire :

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0 \exp i\left(\frac{2\pi c}{\lambda_0}t - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{2\pi}{\lambda_0}(x+y)\right) = \underline{\vec{E}}_0 \exp\left(\frac{2i\pi}{\lambda_0}\left[ct - \frac{x+y}{\sqrt{2}}\right]\right).$$

$\omega = kc$ dans le vide pour une telle onde.

c) Une polarisation rectiligne selon $\vec{u}_z$ est parfaitement compatible avec la transversalité des ondes planes.

$\vec{u}_z \perp \vec{u}$.

L'amplitude complexe $\underline{\vec{E}}_0$ s'écrit donc $\underline{\vec{E}}_0 = \underline{E}_0\vec{u}_z$, avec un argument nul (champ maximum à l'origine des temps et des axes) et un module égal à E_m (amplitude donnée) :

$$\underline{\vec{E}}_0 = E_m\vec{u}_z.$$

En prenant la partie réelle du champ complexe, on aboutit à l'expression du champ électrique :

$$\boxed{\vec{E}(x,y,z,t) = E_m\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\left[ct - \frac{x+y}{\sqrt{2}}\right]\right)\vec{u}_z}.$$

d) La différence de phase du champ électrique entre les points de coordonnées $(0,0,z)$ et (l,l,z) est donnée par :

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{2l}{\sqrt{2}}$$

ce qui correspond au produit scalaire $\vec{k}\cdot\vec{r}$, où $\vec{r}$ a pour coordonnées $(l,l,0)$.

© Le Livre – La photocopie non autorisée est un délit

Les valeurs de l pour lesquelles les champs sont en phase correspondent à $\Delta\varphi = 2n\pi$ où n est entier, c'est-à-dire :

$$\boxed{l = n\lambda_0\frac{\sqrt{2}}{2}}.$$

Les points vibrant en phase sont en fait sur des plans orthogonaux à $\vec{u}$ passant par les positions obtenues ici.

On obtient ainsi une famille de points équidistants de $\sqrt{2}l$ donc de $n\lambda_0$ (Fig. 6). Il est facile d'interpréter ce résultat, puisque λ_0 est la période spatiale du champ.

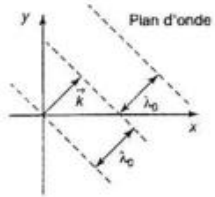


Figure 6

Utiliser z et z' ne changerait rien.

e) Aux points de coordonnées $(0,l,z)$ et $(l,0,z)$, les champs électriques sont en phase. On interprète ce résultat en remarquant que les plans orthogonaux à $\vec{k}$ sont les plans d'onde, c'est-à-dire des plans où le champ est uniforme à chaque instant. Les points choisis sont justement sur un même plan d'onde : celui dont l'équation est $x + y = l$.

Une équation linéaire en x, y et z de la forme $ax + by + cz = d$ définit un plan dans l'espace à 3 dimensions.

REMARQUE – On illustre ici, et on retiendra, quelles contraintes permettent de déterminer les différents termes de l'expression générale du champ électrique d'une onde plane progressive monochromatique : vecteur d'onde, amplitude, phase.

Conseils méthodologiques

4 ■ Savoir reconnaître et étudier une onde circulaire.

On considère une onde dont le champ électrique s'exprime de la façon suivante :

$$\vec{E}(x,y,z,t)\begin{cases} 0 \\ E_0\cos(\omega t - kx) \\ E_0\sin(\omega t - kx) \end{cases} \quad \text{avec } k = \frac{\omega}{c}.$$

4.a) et b) On doit ici s'efforcer de revenir précisément à la définition de chaque terme.

a) Cette onde est-elle plane ? Est-elle progressive ? Est-elle monochromatique ? Comment exprimerait-on son champ complexe ?

b) En un point donné, comment évolue au cours du temps l'extrémité du vecteur champ électrique dans le plan (yOz). Comment qualifie-t-on la polarisation de cette onde ?

4.c) On s'attache en premier lieu au choix de l'orientation du plan dans lequel on raisonne.

c) Quel raisonnement permet de déterminer si cette onde est droite ou gauche ?

4.d) Avant d'utiliser une formule, on doit s'assurer qu'elle est applicable dans le cas considéré.

d) Comment s'exprime son champ magnétique ?

4.a) Revenons à la définition de chaque adjectif qualificatif :

- l'onde est plane, car il existe un repère cartésien dans lequel le champ électrique ne dépend que d'une variable d'espace (x ici) et du temps ;
- l'onde est progressive, car elle ne dépend que de la variable $u = x - ct$;
- l'onde est monochromatique, car elle vaine sinusoïdalement en fonction de cette variable.

Les plans d'onde sont ici les plans d'équations x = cte.

Elle se propage selon les x croissants.

L'écriture en notation complexe du champ électrique donne :

$$\underline{\vec{E}} \begin{cases} 0 \\ E_0 \exp i(\omega t - kx) \\ -iE_0 \exp i(\omega t - kx) \end{cases}$$

$\mathrm{Re}(-i\exp i(\omega t - kx)) = \sin(\omega t - k.$

On peut donc mettre en facteur $\exp i(\omega t - kx)$ et écrire :

$$\boxed{\underline{\vec{E}} = E_0(\vec{u}_y - i\vec{u}_z)\exp i(\omega t - kx)}.$$

Le vecteur complexe $\underline{\vec{E}}_0 = E_0(\vec{u}_y - i\vec{u}_z)$ est l'amplitude complexe de cette onde.

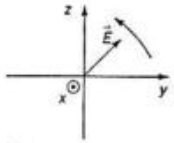


Figure 7

b) Pour une abscisse x donnée, le champ électrique décrit au cours du temps un cercle dans le plan yOz (Fig. 7). En effet, les amplitudes des composantes sont identiques et le déphasage est égal $\pi/2$. L'onde a donc une polarisation circulaire.

c) La convention d'orientation impose que l'on choisisse un plan d'onde orienté par le vecteur d'onde, ce qui revient à dire que dans la figure, le vecteur d'onde doit venir vers l'observateur. Ici, dans le plan yOz, l'extrémité du champ électrique décrit au cours du temps un cercle dans le sens trigonométrique, l'onde est donc circulaire gauche.

d) Le champ magnétique complexe d'une onde plane progressive monochromatique est lié au champ électrique complexe par :

$$\underline{\vec{B}} = \frac{\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}}{\omega}$$

qui découle de l'équation de Maxwell-Faraday. Ici, $\vec{k} = \frac{\omega}{c}\vec{u}_x$, donc l'amplitude complexe du champ magnétique est :

cf. le savoir-faire traitant de la notation complexe et des opérateurs.

$$\underline{\vec{B}}_0 = \frac{k}{\omega}E_0(\vec{u}_z + i\vec{u}_y) = \frac{E_0}{c}(\vec{u}_z + i\vec{u}_y).$$

On déduit l'expression du champ magnétique en notation complexe :

$$\underline{\vec{B}} \begin{cases} 0 \\ i\dfrac{E_0}{c}\exp i(\omega t - kx) \\ \dfrac{E_0}{c}\exp i(\omega t - kx) \end{cases}$$

En prenant la partie réelle de chacune des composantes, on aboutit à l'expression suivante :

© Le groupe - La photocopie non autorisée est un délit

$\mathrm{Re}(i\exp i(\omega t - kx)) = -\sin(\omega t - kx)$

$$\vec{B} \begin{cases} 0 \\ -\dfrac{E_0}{c}\sin(\omega t - kx) \\ \dfrac{E_0}{c}\cos(\omega t - kx) \end{cases}$$

REMARQUE – Cette étude permet de se familiariser avec des ondes de polarisation différente de la polarisation rectiligne. On retient que les modes de raisonnements sont voisins de ceux que l'on rencontre pour les ondes rectilignes (notamment l'équation de structure en notation complexe) ; mais qu'il faut faire attention à l'orientation du plan de la figure, pour se prononcer sur le caractère gauche ou droit.

Conseils méthodologiques

5 ■ Savoir effectuer un bilan d'énergie électromagnétique.

5.a) On peut proposer une expression pour le champ électrique, puis en déduire celle du champ magnétique. Le vecteur de Poynting est alors accessible.

5.b) La densité électromagnétique est composée d'un terme électrique et d'un terme magnétique, tous deux fonctions quadratiques des champs.

5.c) On compare la puissance qui transite à travers la face de sortie à la quantité d'énergie élémentaire contenue dans le cylindre.

Soit une onde plane, progressive, monochromatique, polarisée rectilignement, se propageant dans le vide ; on note E_m l'amplitude de son champ électrique.

a) Exprimer la puissance moyenne rayonnée à travers une surface d'aire S perpendiculaire à la direction de propagation.

b) Exprimer par ailleurs la densité volumique d'énergie électromagnétique localisée en tout point, puis sa moyenne temporelle. Commenter l'importance relative des contributions électrique et magnétique.

En effectuant un bilan dans un cylindre de section S et de longueur vdt, déterminer la vitesse de propagation de l'énergie. Commenter.

Dans un milieu isotrope comme le vide, aucune direction n'est privilégiée : toutes sont équivalentes.

5.a) Choisir une direction de propagation pour rendre plus aisée l'écriture n'affecte pas la portée générale du problème. On choisit donc le repère $(Oxyz)$ de telle sorte que la direction de propagation soit Ox et celle de la polarisation Oy. Ainsi,

$$\vec{E} = E_m\cos(\omega t - kx)\vec{u}_y$$

où $k = \frac{\omega}{c}$.

Le champ magnétique est ainsi obtenu par :

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{E_m}{c}\cos(\omega t - kx)\vec{u}_z}.$$

Le vecteur de Poynting s'obtient aisément :

$$\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_m^2}{\mu_0 c}\cos^2(\omega t - kx)\vec{u}_x$$

sa valeur moyenne étant :

$$\boxed{\langle \vec{R} \rangle = \frac{E_m^2}{2\mu_0 c}\vec{u}_x}.$$

Ainsi, la puissance rayonnée en moyenne par cette onde à travers la surface d'aire S est :

$$\boxed{P_r = \frac{E_m^2}{2\mu_0 c}S}.$$

Erreur à éviter
Le calcul a été mené avec les expressions réelles des champs (un produit est non linéaire).

b) La densité volumique d'énergie électromagnétique est composée d'un terme électrique u_E et d'un terme magnétique u_M, s'écrivant :

$$u_E = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \quad \text{et} \quad u_M = \frac{B^2}{2\mu_0}.$$

À partir des relations écrites ci-dessus, on peut obtenir les densités volumiques d'énergie électrique et magnétique, en fonction du temps et de l'abscisse x :

On utilise, pour les mêmes raisons que précédemment, les expressions réelles.

$$u_E = \frac{\varepsilon_0 E_m^2}{2}\cos^2(\omega t - kx) \quad \text{et} \quad u_M = \frac{E_m^2}{2\mu_0 c^2}\cos^2(\omega t - kx)$$

or la relation de Maxwell lie les constantes du vide à c par $\varepsilon_0\mu_0 c^2 = 1$, on en déduit l'égalité des densités volumiques d'énergie électrique et magnétique :

$$\boxed{u_E = u_M}.$$

L'onde est bien électro... magnétique !

En valeur moyenne, ces deux densités sont encore égales bien entendu :

$$\boxed{\langle u_E \rangle = \langle u_M \rangle = \frac{\varepsilon_0 E_m^2}{4}}.$$

$\langle \cos^2(\omega t - kx) \rangle = \frac{1}{2}$.

c) Si l'on considère que l'énergie localisée dans le volume d'aire S et de longueur $v \cdot dt$ traverse la surface en dt, on peut écrire $\langle u_{EM} \rangle Svdt = P_r dt$, c'est-à-dire :

$$\frac{\varepsilon_0 E_m^2}{2}Sv = \frac{E_m^2}{2\mu_0 c}S.$$

Après simplification, il reste :

$$\boxed{v = \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0 c} = c}.$$

L'énergie peut être vue comme transitant à la vitesse c, au même titre que les autres grandeurs.

REMARQUE – Dans diverses situations (autres milieux, présence de parois), on peut reprendre ce raisonnement en effectuant un bilan ; mais il arrive fréquemment que l'énergie n'ait pas la vitesse de propagation c, voire pas celle que l'on est amené à définir pour les champs. On définira alors des vitesses de phase et de groupe ultérieurement.

© Livrolaire – La photocopie non autorisée est un délit

Conseils méthodologiques

6 ■ Savoir calculer la puissance rayonnée par une onde de polarisation quelconque.

6.a) Il convient de s'interroger sur l'écriture de chacune des composantes, en notant que l'onde est supposée de polarisation elliptique. On adopte un système de coordonnées cartésiennes, puisqu'il s'agit d'ondes planes.
6.b) C'est une question de linéarité.
6.c) En développant l'écriture du vecteur de Poynting de l'onde résultante, on examine les différents termes.
6.d) Pour chaque terme, la puissance s'exprime aisément, il n'y a plus qu'à effectuer la sommation.

On considère une onde plane progressive monochromatique elliptique se propageant dans le vide. On effectue sa décomposition en deux ondes polarisées rectilignement dans des directions orthogonales.

a) Proposer une écriture, en notation réelle, des champs électrique et magnétique d'une telle onde.

b) Peut-on, de façon générale, ajouter les vecteurs de Poynting de deux ondes que l'on superpose ?

c) Montrer que l'orthogonalité des directions de polarisation des deux ondes permet, ici, de sommer les vecteurs de Poynting.

d) En déduire l'expression de la puissance moyenne, par unité de surface, rayonnée par l'onde elliptique.

L'onde est transversale.

6.a) On choisit par exemple la direction de propagation Ox et on exprime les composantes selon $\vec{u}_y$ et $\vec{u}_z$. Les amplitudes ne sont pas identiques *a priori* et elles présentent un déphasage, puisque la polarisation de l'onde est elliptique.

On peut supprimer l'un ou l'autre des termes φ_y ou φ_z en choisissant convenablement les origines.

$$\vec{E}\begin{cases} 0 \\ E_{0y}\cos(\omega t - kx + \varphi_y) \\ E_{0z}\cos(\omega t - kx + \varphi_z) \end{cases}$$

avec $k = \frac{\omega}{c}$, puisque l'onde se propage dans le vide.

Le champ magnétique peut être obtenu en notation complexe par la relation :

$$\underline{\vec{B}} = \frac{\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}}{\omega}$$

La relation de structure est valable, en notation complexe, quelle que soit la polarisation.

car il s'agit d'une onde plane progressive et monochromatique. Une autre méthode possible consiste en la superposition des champs magnétiques des deux ondes polarisées, considérées individuellement. On en déduit ainsi l'expression du champ magnétique :

On exploite la linéarité de la relation de structure. Le vide est un milieu linéaire, donc on peut superposer.

$$\vec{B}\begin{cases} 0 \\ B_y = -\frac{E_{0z}}{c}\cos(\omega t - kx + \varphi_z) \\ B_z = \frac{E_{0y}}{c}\cos(\omega t - kx + \varphi_y) \end{cases}$$

Erreur à éviter
De façon générale, le passage de l'amplitude à une puissance est une opération quadratique, donc non linéaire.

b) La relation entre les champs et le vecteur de Poynting n'est pas linéaire : il s'agit d'un produit. On ne peut donc pas relier *a priori* $\vec{R}$ aux vecteurs de Poynting des ondes polarisées individuelles :

$$\vec{R} \neq \vec{R}_1 + \vec{R}_2 \text{ a priori.}$$

c) Le vecteur de Poynting s'obtient en effectuant l'opération de définition :

$$\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$$

où $\vec{E}$ et $\vec{B}$ peuvent être écrits sous la forme $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ en indiçant 1 ce qui est relatif à l'onde polarisée selon $\vec{u}_y$ et 2 ce qui correspond à l'onde polarisée selon $\vec{u}_z$.

On développe le produit :

$$\vec{R} = \frac{(\vec{E}_1 + \vec{E}_2) \wedge (\vec{B}_1 + \vec{B}_2)}{\mu_0} = \frac{\vec{E}_1 \wedge \vec{B}_1}{\mu_0} + \frac{\vec{E}_1 \wedge \vec{B}_2}{\mu_0} + \frac{\vec{E}_2 \wedge \vec{B}_1}{\mu_0} + \frac{\vec{E}_2 \wedge \vec{B}_2}{\mu_0}.$$

Or $\vec{E}_1$ et $\vec{B}_2$ sont colinéaires, de même que $\vec{E}_2$ et $\vec{B}_1$, il reste donc :

$$\boxed{\vec{R} = \frac{\vec{E}_1 \wedge \vec{B}_1}{\mu_0} + \frac{\vec{E}_2 \wedge \vec{B}_2}{\mu_0}}.$$

Contre toute attente, il est possible de sommer les vecteurs de Poynting de deux ondes polarisées dans des directions orthogonales : $\vec{R} = \vec{R}_1 + \vec{R}_2$.

Erreur à éviter

$\vec{B}_1$ est dirigé selon $\vec{u}_z$ et $\vec{B}_2$ selon $\vec{u}_y$.

$\vec{u} \wedge a\vec{u} = \vec{0}$.

d) On utilise le résultat connu pour chaque onde polarisée rectilignement :

$$\vec{R}_1 = \frac{E_{0y}^2}{\mu_0 c}\cos^2(\omega t - kx + \varphi_y)\vec{u}_x \quad \text{et} \quad \vec{R}_2 = \frac{E_{0z}^2}{\mu_0 c}\cos^2(\omega t - kx + \varphi_z)\vec{u}_x.$$

En valeurs moyennes, ces puissances surfaciques s'écrivent respectivement :

$$\langle \vec{R}_1 \rangle = \frac{E_{0y}^2}{2\mu_0 c}\vec{u}_x \quad \text{et} \quad \langle \vec{R}_2 \rangle = \frac{E_{0z}^2}{2\mu_0 c}\vec{u}_x,$$

si bien que pour l'onde résultante :

$$\boxed{\langle \vec{R} \rangle = \frac{E_{0y}^2 + E_{0z}^2}{2\mu_0 c}\vec{u}_x}.$$

Le déphasage entre les composantes n'intervient pas dans l'expression de la puissance. $E_{0y}^2 + E_{0z}^2$ aurait représenté E_0^2, carré de l'amplitude d'un champ polarisé rectilignement.

Ainsi, la puissance moyenne rayonnée par unité d'aire S est :

$$\frac{P_r}{S} = \frac{E_{0y}^2 + E_{0z}^2}{2\mu_0 c}.$$

REMARQUE – Cette étude permet d'insister sur le fait que les calculs de puissance nécessitent une interrogation préalable, lorsqu'on désire superposer des résultats. Si l'on ne devait retenir qu'une idée de ce calcul, ce devrait être le fait qu'en général la superposition n'est pas possible et qu'il faut donc une justification, dans chaque situation où on souhaite l'invoquer.

© Ellipses – La photocopie non autorisée est un délit

Annales

Pour maîtriser les bases

1. Onde stationnaire — D'après Oral Banque PT

On superpose, dans le vide, deux ondes planes progressives et monochromatiques, polarisées rectilignement, dont les champs électriques s'écrivent :

$$\vec{E}_1 = E_m^1 \cos(\omega t - kx)\vec{e}_y \quad \text{et} \quad \vec{E}_2 = E_m^2 \cos(\omega t + kx)\vec{e}_y.$$

a) Quels sont les sens de propagation de ces ondes ?

b) Comment s'expriment les champs magnétiques respectifs ?

c) Déterminer le champ électrique résultant, lorsque les amplitudes E_m^1 et E_m^2 sont identiques.

- Existe-t-il des points où le champ résultant est nul à chaque instant ?
- Que peut-on dire du champ magnétique ?
- Déterminer le vecteur de Poynting de l'onde résultante et calculer sa valeur moyenne. Commenter.

d) Dans le cas où les amplitudes sont différentes $E_m^1 \neq E_m^2$, peut-on trouver des points où l'un ou l'autre champ de l'onde résultante s'annule à chaque instant ? des points où l'amplitude de l'onde résultante est minimale ?

Conseils méthodologiques. a) : On peut utiliser l'expression générale faisant intervenir le vecteur d'onde $\vec{k}$. b) : Pour chaque onde prise séparément, le vecteur $\vec{B}$ est aisément calculable, puisqu'on reconnaît des ondes planes progressives monochromatiques. c) : La superposition permet d'obtenir une amplitude de l'évolution temporelle fonction de l'abscisse x. Pour le champ magnétique, on peut superposer les résultats précédents. d) : Plutôt qu'envisager une étude générale, on peut déterminer la condition sur la phase des deux ondes qui correspond à l'obtention d'un minimum d'amplitude.

a) Pour satisfaire l'équation de propagation dans le vide, il faut choisir $k = \omega/c$.

Chaque onde peut se mettre sous la forme générale $\cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$, avec $\vec{k}_1 = k\vec{u}_x$ et $\vec{k}_2 = -k\vec{u}_x$. On retrouve bien l'expression d'ondes planes progressives et monochromatiques, se propageant dans le sens des x croissants pour l'onde 1, des x décroissants pour l'onde 2.

Remarque

$k = -\omega/c$ convient également, ce qui revient à intervertir les deux ondes.

b) Les champs magnétiques de ces deux ondes planes progressives monochromatiques sont donnés par la relation générale :

$$\vec{B}_i = \frac{\vec{k}_i \wedge \vec{E}_i}{\omega},$$

où i peut prendre la valeur 1 ou 2. On obtient ainsi :

$$\boxed{\vec{B}_1 = \frac{E_m^1}{c}\cos(\omega t - kx)\vec{e}_z} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{B}_2 = -\frac{E_m^2}{c}\cos(\omega t + kx)\vec{e}_z}$$

c) Le champ électrique résultant s'obtient par sommation vectorielle des deux champs ; notons E_m la valeur commune de l'amplitude :

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 2E_m \cos(\omega t)\cos(kx)\vec{e}_y .$$

• On obtient donc des points où le champ électrique résultant est toujours nul : ceux pour lesquels l'abscisse s'écrit $\cos(kx) = 0$. On peut traduire cette condition en introduisant un entier n tel que :

$$x = \frac{\pi}{2k} + n\frac{\pi}{k} .$$

Il s'agit par conséquent de plans parallèles à yOz, équidistants les uns des autres

La distance entre deux plans successifs est $\frac{\pi}{k} = \frac{\lambda_0}{2}$.

• Pour le champ magnétique résultant, il existe également des plans pour lesquels l'amplitude des oscillations est nulle à chaque instant ; mais ils sont situés en des abscisses x vérifiant $\sin(kx) = 0$.

Sur les plans où le champ électrique résultant est nul, le champ magnétique résultant est au contraire d'amplitude maximale : $2\frac{E_m}{c}$.

• Le vecteur de Poynting de l'onde résultante se calcule par :

$$\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = 4\frac{E_m^2}{\mu_0 c}\cos(\omega t)\cos(kx)\sin(\omega t)\sin(kx)\vec{e}_x = \frac{E_m^2}{\mu_0 c}\sin(2\omega t)\sin(2kx)\vec{e}_x .$$

Sa valeur moyenne est donc nulle en tout point.

Superposant deux ondes de même amplitude se propageant en sens contraires, on obtient une situation dans laquelle aucun sens n'est privilégié. L'onde résultante ne rayonne aucune puissance en moyenne.

On remarque que l'onde résultante a des propriétés très différentes des ondes progressives, en ce sens que le terme variable ne mêle plus les variables x et t.

On parle d'onde **stationnaire** ; ce type d'onde sera rencontré au chapitre suivant, dans une situation où il apparaîtra comme solution d'un problème.

d) Si les amplitudes sont différentes $E_m^1 \neq E_m^2$, on obtient un minimum d'amplitude résultante aux points où les champs vibrent en opposition de phase. Ainsi, si l'on s'intéresse au champ électrique, il faut se placer en des points d'abscisse x vérifiant :

$$\omega t - kx = \omega t + kx + \pi [2\pi] .$$

On trouve ainsi un entier n tel que :

$$x = \frac{\pi}{2k} + n\frac{\pi}{k} .$$

Ce sont les points où s'est produite l'annulation dans le cas des amplitudes identiques.

On ne peut donc plus trouver de points où l'annulation du champ résultant se produit en permanence.

L'amplitude minimale est :

$$E_{min} = |E_m^1 - E_m^2| .$$

Technique de calcul

On utilise l'identité trigonométrique

$$\cos p + \cos q = 2\cos\left[\frac{p+q}{2}\right]\cos\left[\frac{p-q}{2}\right]$$

Remarque

Les deux champs $\vec{E}_1$ et $\vec{E}_2$ vibrent en opposition de phase en ces points.

Technique de calcul

$$\cos p - \cos q = -2\sin\left[\frac{p+q}{2}\right]\sin\left[\frac{p-q}{2}\right]$$

Erreur à éviter

Pour une telle onde, les relations usuelles $\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$ et $\vec{R} = \frac{E^2}{\mu_0 \omega}\vec{k}$, démontrées pour des ondes planes progressives monochromatiques, ne sont plus applicables !

Remarque

Le cas $E_m^1 = E_m^2$ précédent est un cas particulier pour lequel l'amplitude minimale correspond à la valeur 0.

Remarque

Dans le cours d'optique, cette situation correspondra à un minimum d'éclairement résultant : une frange d'interférences sombre et non une frange noire.

© Ellipses - La reproduction non autorisée est un délit

REMARQUE – On retient que la recherche du champ magnétique et du vecteur de Poynting est aisée pour les ondes progressives, mais sans que les formules puissent être appliquées dans d'autres cas. On peut alors avantageusement opérer par décomposition : le champ magnétique résultant étant la superposition des champs partiels. Pour le vecteur de Poynting en revanche, il faut le calculer à partir des champs électrique et magnétique résultants.

2. Action mécanique du rayonnement — D'après Centrale-Supelec

On rappelle qu'une onde électromagnétique de fréquence ν se propageant suivant l'axe des x peut être décrite comme un faisceau de particules (photons), identiques, d'énergie $h\nu$ où h est la constante de Planck. Leur vitesse commune est alors $c\vec{u}_x$.

a) Soit un faisceau d'onde plane progressive monochromatique de section S, relier la densité volumique de photons à la puissance moyenne du faisceau.

Application numérique : puissance $\mathcal{P} = 10$ mW, $\lambda = 633$ nm, $S = 1$ mm^2 et $h = 6{,}62\ 10^{-34}$ J · s.

b) La quantité de mouvement d'un photon est égale à $\frac{h\nu}{c}\vec{u}_x$, déterminer la force exercée par ce faisceau sur une sphère totalement absorbante de rayon $R = 5$ mm.

c) Si l'onde ci-dessus est polarisée rectilignement, déterminer l'amplitude du champ électrique et celle du champ magnétique.

Conseils méthodologiques. a) : Une grandeur pertinente est ici le débit de photons par unité de temps traversant la section. **b)** : Lors de la collision d'un photon avec la cible, on peut considérer qu'il y a un transfert de quantité de mouvement. Il reste à utiliser le fait que la force peut être vue comme un débit de quantité de mouvement. **c)** : La puissance peut également s'exprimer dans le modèle ondulatoire, par l'intermédiaire du flux du vecteur de Poynting.

Remarque

La quantité d'énergie traversant S en dt est $\mathcal{P}dt$, mais c'est aussi le produit du nombre de photons Ddt par leur énergie individuelle $h\nu$.

a) Soit D le débit de photons à travers une section du faisceau, c'est-à-dire le nombre de photons traversant S par seconde, on peut écrire que la puissance $\mathcal{P}$ est égale au produit de D par $h\nu$.

Ainsi :

$$\mathcal{P} = Dh\nu .$$

D'autre part, si l'on considère un cylindre de section S et de longueur cdt (Fig. 8), les photons qu'il contient à l'instant t auront tous traversé la section S entre les instants t et $t + dt$.

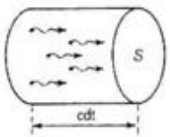
Leur nombre est le produit du volume du cylindre $Scdt$ par la densité volumique n^*.

On écrit par conséquent $n^*Scdt = D \cdot dt$, donc :

$$n^*Sc = D .$$

Finalement, la densité volumique de photons s'obtient en fonction de la puissance et de la section du faisceau par la relation :

$$n^* = \frac{\mathcal{P}}{Sch\nu}$$



Photons traversant S

Figure 8

Remarque

n^* est supposé uniforme et constant ici.

L'*application numérique* nécessite d'utiliser $\nu = \frac{c}{\lambda}$ et on trouve :

$n^* = 1{,}06\,10^{14}\ \text{m}^{-3}$.

On peut donc adopter sans hésitation un modèle dans lequel on considère un écoulement continu : les fluctuations du nombre de photons traversant la section, pendant des intervalles de temps même très courts à notre échelle, sont négligeables.

b) La cible est supposée opaque, c'est-à-dire qu'elle absorbe les photons incidents.

Leur quantité de mouvement est donc transférée intégralement à la cible et on peut estimer le débit de quantité de mouvement comme le produit du débit de photons D par la quantité de mouvement individuelle de ceux-ci : $\frac{h\nu}{c}\vec{u}_x$.

La force subie par la bille est donc :

$$\vec{F} = D \cdot \frac{h\nu}{c}\vec{u}_x = \frac{\mathcal{P}}{c}\vec{u}_x$$

Numériquement : $\|\vec{F}\| = 3{,}33\,10^{-11}\ \text{N}$.

On peut commenter ce résultat en le comparant à la force qu'exerce la pression atmosphérique $\mathcal{P} = 10^5$ Pa sur la surface S : $\|\vec{F}_{\text{Press}}\| \approx 10^{-1}\ \text{N}$.

c) Le vecteur de Poynting a une valeur moyenne qui est, à un facteur $\frac{1}{2}$ près le produit de l'amplitude E_m du champ électrique, par celle $\frac{E_m}{c}$ du champ magnétique, divisé par le facteur μ_0 :

$$\langle\vec{R}\rangle = \frac{E_m^2}{2\mu_0 c}\vec{u}_x .$$

La puissance étant le flux de ce vecteur sur la section S, on peut écrire :

$$\mathcal{P} = \frac{E_m^2}{2\mu_0 c}S$$

Numériquement : $E_m = 2{,}7\,10^3\ \text{V}\cdot\text{m}^{-1}$ et $B_m = 9{,}15\,10^{-6}\ \text{T}$.

Il est délicat de comparer ces valeurs à des champs usuels, notamment continus ou de très basse fréquence, car la fréquence d'une onde optique est si élevée qu'elle ne permet de tirer aucune conclusion.

Remarque

Pour apprécier les fluctuations statistiques d'un nombre de l'ordre de N événements aléatoires indépendants, on peut comparer $\sqrt{N}$ à N.

Remarque

Si la bille avait été réfléchissante, les photons réfléchis ayant une quantité de mouvement $-\frac{h\nu}{c}\vec{u}_x$, le transfert de quantité de mouvement à la cible aurait été $2\frac{h\nu}{c}\vec{u}_x$.

Remarque

On notera que la connaissance de la loi de Planck n'est pas indispensable ici : tout repose sur la relation entre l'énergie E d'un photon et sa quantité de mouvement p, $E = pc$.

Technique de calcul

$\langle\cos^2(\omega t - \omega x/c)\rangle = \frac{1}{2}$

Remarque

Cette description est approximative, car on suppose l'onde plane, c'est-à-dire son amplitude homogène sur toute la section du faisceau.

3. Décomposition en ondes circulaires — D'après Oral CCP

On considère une onde plane progressive monochromatique, polarisée rectilignement se propageant dans le vide. On effectue sa décomposition en deux ondes polarisées circulairement et on s'interroge sur la puissance rayonnée dans la direction de propagation.

a) La propagation a lieu dans la direction Ox et l'onde est polarisée rectilignement selon la direction Oy. Proposer une écriture, en notation réelle, des champs électrique et magnétique de chaque onde évoquée ci-dessus.

b) Déterminer le vecteur de Poynting de chaque onde et commenter les différences de comportement au cours du temps.

c) Que constate-t-on pour les valeurs moyennes des puissances rayonnées par l'onde polarisée rectilignement et par chacune des ondes circulaires ?

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit

Conseils méthodologiques. a) : On doit utiliser des composantes en quadrature de phase pour les ondes circulaires, et de même amplitude. **b)** : Pour les ondes circulaires, revenir à la définition du vecteur de Poynting. **c)** : La valeur moyenne du vecteur de Poynting représente la puissance moyenne rayonnée, on doit s'interroger sur la possibilité de sommer les puissances moyennes des ondes composant l'onde résultante.

a) La direction de propagation est définie, ainsi que la direction du champ électrique, il ne reste qu'à fixer une notation pour l'amplitude et la phase à l'origine de l'axe Ox et à l'origine des temps. On choisit d'annuler cette dernière :

$$\vec{E}\begin{cases}0\\ E_0\cos(\omega t - kx)\\ 0\end{cases}$$

Les amplitudes des ondes circulaires sont identiques sur leurs deux composantes, les déphasages sont égaux à $\pm\pi/2$. On peut donc choisir l'écriture suivante pour la première onde circulaire :

$$\vec{E}_g\begin{cases}0\\ \frac{E_0}{2}\cos(\omega t - kx)\\ \frac{E_0}{2}\sin(\omega t - kx)\end{cases}$$

La seconde onde circulaire se distingue par le signe du déphasage, ce qui revient à inverser la composante selon Oz :

$$\vec{E}_d\begin{cases}0\\ \frac{E_0}{2}\cos(\omega t - kx)\\ -\frac{E_0}{2}\sin(\omega t - kx)\end{cases}$$

Les champs magnétiques respectifs sont obtenus grâce à la relation :

$$\vec{B} = \frac{\vec{k}\wedge\vec{E}}{\omega}$$

où $\vec{k} = \frac{\omega}{c}\vec{u}_x$. Soit on raisonne en notation complexe, soit on superpose les champs magnétiques calculés pour chaque composante du champ électrique.

$$\vec{B}\begin{cases}0\\ 0\\ \frac{E_0}{c}\cos(\omega t - kx)\end{cases}$$

On obtient pour l'onde circulaire gauche :

$$\vec{B}_g\begin{cases}0\\ -\frac{E_0}{2c}\sin(\omega t - kx)\\ \frac{E_0}{2c}\cos(\omega t - kx)\end{cases}$$

Remarque

Sans restreindre la généralité de l'étude.

Remarque

$k = \frac{\omega}{c}$

Remarque

g signifie gauche.

Technique de calcul

Passer de $\pi/2$ à $-\pi/2$ revient à ajouter π donc à inverser la composante.

Remarque

Pour les champs complexes :

$$\vec{B} = \frac{\vec{k}\wedge\vec{E}}{\omega}$$

tandis que pour l'onde circulaire droite,

$$\vec{B}_d \begin{cases} 0 \\ +\dfrac{E_0}{2c}\sin(\omega t - kx) \\ \dfrac{E_0}{2c}\cos(\omega t - kx) \end{cases}$$

On constate que la superposition des champs magnétiques $\vec{B}_d$ et $\vec{B}_g$ donne bien $\vec{B}$.

Remarque

C'est la linéarité de la relation de structure qui l'explique

b) Le vecteur de Poynting de chaque onde s'obtient en effectuant le produit vectoriel : $\vec{R} = \dfrac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$. Pour l'onde polarisée rectilignement :

$$\boxed{\vec{R} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c}\cos^2(\omega t - kx)\vec{u}_x}.$$

Pour l'onde circulaire gauche :

$$\vec{R}_g = \frac{E_0^2}{4\mu_0 c}[\cos^2(\omega t - kx) + \sin^2(\omega t - kx)]\vec{u}_x,$$

ce qui correspond à un terme indépendant du temps :

$$\boxed{\vec{R}_g = \frac{E_0^2}{4\mu_0 c}\vec{u}_x}$$

Technique de calcul

$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

Chacune des composantes varie bien en tout point, mais la somme de leurs contributions au vecteur de Poynting reste constante. On comprend bien cette propriété lorsqu'on se remémore que pour une onde circulaire, le vecteur champ électrique tourne dans le plan yOz, au cours du temps, en un point fixé.

Pour l'onde circulaire droite, le calcul mène au même résultat et à la même conclusion :

$$\boxed{\vec{R}_d = \frac{E_0^2}{4\mu_0 c}\vec{u}_x}.$$

ce qui s'explique simplement par le fait que, par raison de symétrie, ces deux ondes ont même propriété vis-à-vis du rayonnement dans le sens de la propagation.

Remarque

$\vec{R}_g$ et $\vec{R}_d$ étant constants, on les confond avec leur moyenne temporelle

c) La puissance moyenne rayonnée à travers une surface $\vec{S} = S\vec{u}_x$ par l'onde polarisée rectilignement vaut :

$$\boxed{\mathcal{P}_r = \langle \vec{R} \rangle \cdot S\vec{u}_x = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}S}.$$

On calcule de même la puissance moyenne rayonnée par chacune des ondes circulaires, prise individuellement :

$$\boxed{\mathcal{P}_g = \frac{E_0^2}{4\mu_0 c}S} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathcal{P}_d = \frac{E_0^2}{4\mu_0 c}S}.$$

On constate ainsi que la puissance moyenne rayonnée par l'onde résultante polarisée rectilignement est la somme de la puissance rayonnée par les deux ondes circulaires :

$$\mathcal{P}_r = \mathcal{P}_g + \mathcal{P}_d$$

REMARQUE – On retient de cette étude la technique qui permet d'exprimer les ondes circulaires composant une onde polarisée rectilignement : expression des champs électrique et magnétique, détermination et discussion des propriétés du vecteur

© Livrolivre – La photocopie non autorisée est un délit

de Poynting. Une fois encore, on a dû faire un raisonnement complet avant de relier la puissance de l'onde résultante aux puissances des ondes partielles. La méthode utilisée repose sur le calcul du vecteur de Poynting.

Soulignons que le vecteur de Poynting dépend quadratiquement des champs : il n'est donc *a priori* pas évident que la puissance rayonnée par l'onde initiale soit la somme de celles associées aux ondes circulaires. Ce résultat n'est d'ailleurs vérifié qu'en moyenne.

Pour approfondir

4. Onde stationnaire unidimensionnelle — D'après Oral CCP

On cherche une solution de l'équation de propagation à 1 dimension : $\Box s(x,t) = 0$ sous la forme du produit de deux fonctions : $s(x,t) = X(x) \cdot T(t)$ (séparation des variables).

a) Quelles équations différentielles vérifient ces fonctions ? Proposer une classification des solutions générales possibles.

b) On désire retenir plus particulièrement les solutions périodiques du temps et on impose la condition initiale $s(x,0) = 0$ quelle que soit l'abscisse x. Donner la solution générale correspondante pour $T(t)$.

c) On adopte une telle solution et on note sa pulsation ω. Existe-t-il des positions x où la vibration est nulle à chaque instant ? Comment appelle-t-on ce type d'onde ?

d) Exemple électromagnétique. Deux ondes planes progressives monochromatiques, polarisées rectilignement dans la même direction $\vec{u}_y$, se propagent dans le vide le long de l'axe Ox en sens contraire. Elles ont même fréquence et même amplitude.

Écrire l'expression du champ électrique résultant et montrer que l'on retrouve une solution du type précédent. Déterminer alors la valeur moyenne du vecteur de Poynting et commenter.

Conseils méthodologiques. a) : La séparation des variables permet de rechercher une séparation des équations : l'une en $X(x)$, l'autre en $T(t)$. **b)** : Pour qu'une équation différentielle du second ordre admette des solutions périodiques, il faut une condition sur ses coefficients. **c)** : Le comportement de $T(t)$ impose une forme des solutions pour $X(x)$, il reste à examiner l'éventualité des annulations. **d)** : On adopte désormais la démarche inverse : les expressions des champs sont connues et on détermine les propriétés.

a) Dans ce problème à une dimension spatiale :

$$\Box s(x,t) = \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}.$$

En remplaçant $s(x,t)$ par son expression, on peut écrire, en tout point et à tout instant où s ne s'annule pas :

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{c^2}\frac{T''}{T}.$$

Remarque

On note ici f'' la dérivée seconde d'une fonction f

L'égalité obtenue fait apparaître un premier membre qui n'est fonction que de la variable d'espace x, tandis que le second membre ne dépend que du temps. Puisque x et t varient indépendamment, une telle égalité n'est possible que si les deux membres sont constants. Soit K la valeur correspondante :

$$\boxed{\frac{X''}{X} = K} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{T''}{T} = Kc^2}.$$

Selon la valeur de K, on obtient 3 types de solutions :

- $K > 0$ les solutions sont exponentielles : $\exp(\pm\sqrt{K}ct)$.
- $K = 0$ la solution est affine : $T = at + b$.
- $K < 0$ les solutions sont sinusoïdales de pulsation $\sqrt{-K}c$.

Remarque

La solution générale est une combinaison linéaire de ces exponentielles

b) L'équation différentielle en $T(t)$ n'admet de solutions périodiques que si Kc^2 est négatif, c'est-à-dire pour K négatif : $K = -k^2$. On peut alors écrire :

$$T(t) = T_p\cos(kct) + T_i\sin(kct),$$

où T_p et T_i sont des constantes d'intégration à déterminer grâce aux conditions initiales.

Remarque

p désigne le coefficient du terme pair et i celui du terme impair

La condition initiale unique proposée ne suffit pas à déterminer les deux constantes d'intégration, mais elle impose $T_p = 0$. On peut ainsi retenir la forme :

$$\boxed{T(t) = T_m\sin(kct)},$$

où $T_m = T_i$ est l'amplitude de l'oscillation.

c) $\omega = kc$, ce qui donne pour la constante K définie ci-dessus :

$$K = -k^2 = -\frac{\omega^2}{c^2}.$$

On peut donc déduire de cette relation la solution générale concernant $X(x)$:

$$X(x) = X_p\cos(kx) + X_i\sin(kx),$$

que l'on peut tout autant écrire sous la forme :

$$\boxed{X(x) = X_m\sin(kx + \varphi)}.$$

Remarque

Ces écritures sont toutes deux valables, on choisit l'une ou l'autre en fonction de la nature des relations dans lesquelles on souhaite faire intervenir X

On peut ainsi montrer qu'il existe un ensemble dénombrable de valeurs x_n de l'abscisse x, pour lesquelles $s(x_n, t)$ reste nulle à chaque instant :

$$x_n = -\frac{\varphi}{k} + n\frac{\pi}{k}.$$

Les plans $x = x_n$ correspondants sont parallèles entre eux, équidistants, la distance les séparant étant donnée par :

$$\Delta x = \frac{\pi}{k} = \frac{\pi c}{\omega}.$$

On peut aussi faire intervenir la longueur d'onde $\lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega}$:

$$\boxed{\Delta x = \frac{\lambda_0}{2}}.$$

Remarque

Il s'agit bien entendu des nœuds d'une onde stationnaire, c'est-à-dire des points où la vibration reste nulle.
L'onde est stationnaire car, par définition, $s(x,t)$ s'écrit comme produit d'une fonction de x par une fonction

d) On superpose, dans le vide, deux ondes dont les champs électriques s'écrivent :

$$\underline{\vec{E}}_+ = E_m\exp i(\omega t - kx)\vec{e}_y \quad \text{et} \quad \underline{\vec{E}}_- = E_m\exp i(\omega t + kx)\vec{e}_y.$$

Pour satisfaire à l'équation de propagation dans le vide, il faut choisir :

$$k = \omega/c.$$

Remarque

C'est par un choix judicieux d'origine des abscisses et du temps que l'on peut proposer des amplitudes réelles E_m

© Les éditions La physique non-aurifère est un délit

La superposition consiste en l'addition des champs :

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_+ + \underline{\vec{E}}_- = E_m\exp(i\omega t)(\exp(ikx) + \exp(-ikx))\vec{e}_y.$$

ce qui conduit à l'écriture :

$$\boxed{\underline{\vec{E}} = 2E_m\exp(i\omega t)\cos(kx)\vec{e}_y}.$$

Remarque

Le vide est un milieu linéaire

Technique de calcul

$\exp(i\theta) + \exp(-i\theta) = 2\cos\theta$.

L'onde a bien la forme attendue : c'est le produit de deux fonctions des variables x et t.

Les champs magnétiques respectifs des deux ondes planes progressives monochromatiques sont donnés par :

$$\underline{\vec{B}}_+ = \frac{\vec{k}\wedge\underline{\vec{E}}_+}{\omega} \quad \text{et} \quad \underline{\vec{B}}_- = \frac{-\vec{k}\wedge\underline{\vec{E}}_-}{\omega}$$

où $\vec{k} = k\vec{u}_x$.

Remarque

$-\vec{k}$ est le vecteur d'onde de l'onde progressive selon les abscisses décroissantes

C'est ainsi que l'on obtient respectivement :

$$\boxed{\underline{\vec{B}}_+ = \frac{E_m}{c}\exp i(\omega t - kx)\vec{e}_z} \quad \text{et} \quad \boxed{\underline{\vec{B}}_- = -\frac{E_m}{c}\exp i(\omega t + kx)\vec{e}_z}.$$

Le champ magnétique résultant est ainsi :

$$\underline{\vec{B}} = \underline{\vec{B}}_+ + \underline{\vec{B}}_- = \frac{E_m}{c}\exp(i\omega t)(\exp(-ikx) - \exp(ikx))\vec{e}_z$$

donc en procédant comme ci-dessus avec le champ électrique :

$$\underline{\vec{B}} = -2i\frac{E_m}{c}\exp(i\omega t)\sin(kx)\vec{e}_z.$$

Le vecteur de Poynting de l'onde résultante est défini par $\vec{R} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}$, mais sa valeur moyenne est nulle. En effet, les expressions complexes obtenues précédemment correspondent aux champs réels suivants :

$$\vec{E} = 2E_m\cos(\omega t)\cos(kx)\vec{e}_y \quad \text{et} \quad \vec{B} = 2\frac{E_m}{c}\sin(\omega t)\sin(kx)\vec{e}_z.$$

Erreur à éviter

On prend les parties réelles des champs complexes pour évaluer les grandeurs énergétiques

On aboutit donc à la propriété décisive suivante : les champs électrique et magnétique vibrent en quadrature de phase.

Remarque

Déphasage de $\pm\pi/2$

La valeur moyenne du produit est donc nulle :

$$\langle\cos(\omega t)\sin(\omega t)\rangle = \frac{1}{2}\langle\sin(2\omega t)\rangle = 0.$$

Résultante de deux ondes de même amplitude qui se propageant en sens contraires, l'onde stationnaire ne rayonne en moyenne aucune puissance.

REMARQUE – Il émane de cet exercice qu'il est possible de chercher d'emblée dans l'équation de propagation une solution à variables séparées. Cette approche amène de plain-pied dans le monde des ondes stationnaires, dont la superposition d'ondes planes progressives monochromatiques est une illustration.

5. Potentiels de l'onde plane progressive monochromatique — D'après Oral Centrale-Supelec

On considère dans l'espace vide une onde plane progressive monochromatique polarisée rectilignement.

a) Proposer une écriture des champs électrique $\underline{\vec{E}}$ et magnétique $\underline{\vec{B}}$ en notation complexe. On pourra utiliser un système de coordonnées particulier.

b) Rappeler les relations entre les champs et leurs potentiels scalaire $\underline{V}$ et vecteur $\underline{\vec{A}}$.

On précise qu'une condition, dite jauge de Lorentz, impose entre les potentiels la relation :

$$\mathrm{div}\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t} = 0,$$ qu'on ne demande pas d'établir.

c) Déterminer un jeu de potentiels scalaire $\underline{V}$ et vecteur $\underline{\vec{A}}$ qui convient.

Conseils méthodologiques. a) : C'est en coordonnées cartésiennes que l'écriture est la plus aisée. b) : Les relations à envisager ici sont bien entendu celles des régimes variables : il faut donc tenir compte de l'influence de la variation du potentiel vecteur sur le champ électrique. c) : Les potentiels ne sont pas uniques, on peut donc librement choisir des formes simples, notamment dans la variation spatio-temporelle, qui doit s'inspirer de celle des champs eux-mêmes (onde plane progressive monochromatique).

a) On choisit de travailler en coordonnées cartésiennes, puisqu'il s'agit d'une onde plane. Soit Oz la direction de propagation (dans le sens des z croissants) et Ox la direction de polarisation de l'onde. On peut proposer les écritures complexes suivantes :

$$\boxed{\underline{\vec{E}} = E_0 \exp i(\omega t - \omega z/c)\vec{u}_x} \quad \text{et} \quad \boxed{\underline{\vec{B}} = \frac{E_0}{c}\exp i(\omega t - \omega z/c)\vec{u}_y}.$$

⇨ **Remarque**

Il s'agit d'une onde dans le vide.

On posera $k = \omega/c$ dans la suite.

b) Potentiels et champs vérifient, dans une écriture en notation réelle :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \text{et} \quad \vec{B} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{A}$$

ce qui devient, dans la notation complexe adoptée ici :

$$\boxed{\underline{\vec{E}} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}(\underline{V}) - i\omega\underline{\vec{A}}} \quad \text{et} \quad \boxed{\underline{\vec{B}} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\underline{\vec{A}}}.$$

c) Puisque $\vec{B}$ ne dépend que de l'expression de $\vec{A}$, commençons par exploiter $\vec{B} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{A}$. En coordonnées cartésiennes, la composante selon $\vec{u}_y$ du rotationnel s'écrit :

$$B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}.$$

On peut donc chercher un potentiel vecteur dirigé selon $\vec{u}_x$ et fonction des variables d'espace et de temps sous la forme complexe :

$$\underline{\vec{A}} = A(x,y)\exp i(\omega t - kz)\vec{u}_x.$$

L'équation précédente devient alors :

$$\frac{\partial A_x}{\partial z} = \frac{E_0}{c}\exp i(\omega t - \omega z/c).$$

⇨ **Remarque**

On profite de l'infinité des potentiels vecteurs existants pour en chercher un qui ne comporte qu'une composante.

© Librairie – La photocopie non autorisée est un délit

qui s'intègre en :

$$\boxed{\underline{\vec{A}} = i\frac{E_0}{kc}\exp i(\omega t - kz)\vec{u}_x}$$

On s'assure tout de suite de la validité de l'équation $\vec{B} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{A}$, puisque $\vec{A}$ n'a qu'une composante A_x qui ne dépend que d'une variable spatiale z. Les autres composantes du rotationnel de $\vec{A}$ sont bien nulles.

On peut alors utiliser la relation de jauge de Lorentz, qui s'écrit ici très simplement, du fait que la divergence $\vec{A}$ est nulle :

$$\mathrm{div}\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} = 0.$$

⇨ **Remarque**

A_y et A_z sont nuls.

Ainsi, le choix d'un potentiel scalaire constant, nul par exemple, convient :

$$\boxed{V = 0}$$

⇨ **Remarque**

Finalement : $\underline{\vec{E}} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}(\underline{V}) - i\omega\underline{\vec{A}} = -i\omega\underline{\vec{A}}$

Seules les dérivées de V importent pour les champs.

si bien qu'avec l'expression précédente, et notamment la relation $\omega = kc$,

$$\underline{\vec{E}} = E_0\exp i(\omega t - kz)\vec{u}_x.$$

Le couple de potentiels ainsi obtenu est solution.

REMARQUE – On retient de cet exercice que la détermination des potentiels est considérablement simplifiée si l'on propose dès le départ une forme de solution adaptée à la nature des champs. Dans un problème à solutions non uniques, il faut faire preuve d'astuce !

6. Onde sphérique — D'après ENS

On considère une grandeur scalaire s, fonction de la variable r des coordonnées sphériques et du temps : $s(r,t)$ et solution de l'équation de propagation $\Box s(r,t) = 0$.

a) Effectuer le changement de variable $s(r,t) = \frac{1}{r}f(r,t)$ et établir une équation aux dérivées partielles pour f.

b) En déduire la solution générale $s(r,t)$. Interpréter l'existence de chaque terme de la solution et la dépendance en r.

c) Dans le cas d'une source à symétrie sphérique placée au voisinage de l'origine de l'espace, quelle forme peut-on donner à l'onde émise par la source ? Peut-on parler de directivité ?

Conseils méthodologiques. a) : On peut utiliser le formulaire pour obtenir le laplacien, puis le d'Alembertien en coordonnées sphériques. On peut aussi tenter de s'en dispenser. b) : Reconnaissant une équation de d'Alembert pour la fonction de deux variables $f(r,t)$, on peut utiliser le résultat du cours et donner la forme générale des solutions. c) : L'onde qui est émise par la source a un sens de propagation défini par la causalité : on retient de la solution générale le terme qui convient.

a) L'opérateur $\Box$ est en fait composé d'un laplacien et d'une dérivée seconde temporelle. Le laplacien est lui-même donné par la divergence d'un gradient. Or, pour une fonction de la seule variable spatiale r, le gradient s'écrit :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,s = \frac{\partial s}{\partial r}\vec{u}_r.$$

La divergence peut quant à elle être déduite du théorème d'Ostrogradski, en considérant le flux sortant du volume délimité par deux sphères de rayons voisins r et $r+\mathrm{d}r$: $\mathrm{d}(4\pi r^2 s(r,t)) = 4\pi r^2 \mathrm{div}(s)\mathrm{d}r$, ce qui donne finalement :

$$\mathrm{div}(s) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 s)}{\partial r}$$

$\Delta(s)$ s'écrit donc, en coordonnées sphériques pour un terme scalaire qui ne dépend spatialement que de r :

$$\Delta(s(r,t)) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2\dfrac{\partial s}{\partial r}\right)}{\partial r}.$$

Pour $s(r,t) = \frac{1}{r}f(r,t)$, la dérivée s'écrit $r^2\frac{\partial s}{\partial r} = r\frac{\partial f}{\partial r} - f$, donc :

$$\Delta(s(r,t)) = \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial f}{\partial r} + r\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \frac{\partial f}{\partial r}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}.$$

L'équation de d'Alembert $\Box(s) = 0$ prend donc la forme :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2}\frac{1}{r}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0,$$ c'est-à-dire, après simplification par $\frac{1}{r}$.

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0}$$

b) Le changement de variable proposé est judicieux, puisqu'il permet d'obtenir une équation aux dérivées partielles analogue à celle qui a été résolue en coordonnées cartésiennes :

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0$$

⇨ **Remarque**

On exploite ici le fait que mathématiquement les variables x ou r sont muettes : elles n'ont pas de signification propre.

On utilise donc la solution générale, sous la forme d'une somme de deux fonctions, l'une de la variable $t - \frac{r}{c}$, l'autre de la variable $t + \frac{r}{c}$:

$$f(r,t) = F_+\left(t - \frac{r}{c}\right) + F_-\left(t + \frac{r}{c}\right).$$

On revient alors à la vibration $s(r,t)$ en effectuant le changement de variable à l'envers :

$$\boxed{s(r,t) = \frac{1}{r}F_+\left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{1}{r}F_-\left(t + \frac{r}{c}\right)}.$$

Le terme $s_+(r,t) = \frac{1}{r}F_+\left(t - \frac{r}{c}\right)$ correspond à une onde sphérique, qui se propage dans le sens des r croissants, à la vitesse c.

⇨ **Remarque**

Le retard croît comme $\frac{r}{c}$.

Mais il est remarquable qu'une atténuation par un facteur en $\frac{1}{r}$ affecte l'amplitude.

On peut comprendre l'origine de cette variation, car la puissance rayonnée par cette onde se trouve répartie dans une sphère de surface $4\pi r^2$, qui croît comme r^2.

⇨ **Remarque**

La puissance est une fonction quadratique de l'amplitude.

La puissance surfacique doit donc décroître comme $\frac{1}{r^2}$, donc l'amplitude comme $\frac{1}{r}$.

Le terme $s_-(r,t) = \frac{1}{r}F_-\left(t + \frac{r}{c}\right)$ décrit une onde sphérique, qui se propage dans le sens des r décroissants, donc qui converge vers la source. La variation en $\frac{1}{r}$ de l'amplitude correspond donc à une augmentation, qui s'interprète en ce que

© Larousse - La photocopie non autorisée est un délit

l'onde se concentre sur une sphère d'aire $4\pi r^2$ décroissante. La puissance totale reste ainsi constante : il n'y a pas de contradiction avec la conservation de la puissance.

c) Si une source placée à l'origine du repère rayonne une onde, celle-ci se propage dans le sens des r croissants, donc l'amplitude instantanée se met sous la forme :

$$\boxed{s(r,t) = \frac{1}{r}F\left(t - \frac{r}{c}\right)}.$$

On constate qu'il y a isotropie de l'émission : aucune direction n'est privilégiée.

REMARQUE – On retient que la variation de la surface dans laquelle est rayonnée la puissance se traduit par une variation de l'amplitude. On en déduit que la constance de l'amplitude d'une onde plane vient de ce que chaque portion de surface couverte reste constante lors du déplacement à vitesse c (translation).

7. Directivité du rayonnement d'une antenne — D'après Centrale-Supelec

Une antenne courte, assimilée à un dipôle oscillant, rayonne dans l'espace vide une onde électromagnétique. On souhaite préciser sa directivité. On raisonne pour ce faire en coordonnées sphériques, le dipôle étant placé à l'origine et orienté selon l'axe Oz. Les angles considérés sont notés θ pour la colatitude et φ pour la longitude.

On rappelle que le champ électrique à grande distance est exprimé par :

$$\underline{\vec{E}}(r,\theta,\varphi) = \frac{A}{r}\sin\theta\exp i(\omega t - kr)\vec{u}_\theta$$

où k est défini par $\omega = kc$ et A est une constante fonction de la fréquence de l'onde et de l'amplitude de l'oscillation du moment dipolaire.

a) L'onde à grande distance a une structure quasi plane, en déduire l'expression du champ magnétique rayonné à grande distance.

b) Quelles sont les directions (θ,φ) dans lesquelles le vecteur de Poynting moyen $\langle\vec{R}\rangle$ est de norme maximale $R_M(r)$? Quelle signification donner à cette propriété ?

c) On propose de tracer un diagramme de rayonnement : nappe définie par une équation en coordonnées sphériques :

$$r = \frac{\left\|\langle\vec{R}\rangle\right\|(r,\theta,\varphi)}{R_M(r)}.$$

Proposer son allure et montrer que l'on peut se contenter de représenter son intersection avec un plan.

d) Tracer cette courbe et commenter son allure.

e) Déterminer la fraction de la puissance totale rayonnée dans la région de l'espace définie par

$$\left[\frac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \frac{3\pi}{4}\right].$$

Conseils méthodologiques. a) : On commence par identifier la nature de cette onde quasi plane, pour en déduire l'équation de structure. b) : Une fois exprimé le vecteur de Poynting par sa définition, on peut rechercher le lieu indiqué. Il faut utiliser les propriétés d'invariance en fonction d'une des coordonnées, pour définir l'allure générale et répondre à la question relative à la représentation de l'intersection avec un plan. d) : Il faut ici se placer sur une sphère de centre O et définir le secteur concerné. L'intégrale peut se ramener à une dimension, par un découpage adapté à l'invariance du problème.

a) L'onde est progressive dans le sens des r croissants et monochromatique. En l'assimilant à une onde quasi-plane, on définit un vecteur d'onde :

$$\vec{k} = \frac{\omega}{c}\vec{u}_r .$$

En outre, l'onde est polarisée rectilignement, puisque $\vec{E}$ est dirigé constamment selon $\vec{u}_\varphi$ en un point donné. On obtient l'expression du champ magnétique par la relation :

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{E_0}{c}\vec{u}_\varphi .$$

et de ce fait :

$$\boxed{\vec{B}(r,\theta,\varphi) = \frac{A\sin\theta}{c\ r}\exp i(\omega t - kr)\vec{u}_\varphi}$$

Le champ magnétique décroît donc de la même manière que le champ électrique : il est dirigé selon $\vec{u}_\varphi$ et voit son amplitude varier en $\sin\theta$.

b) Le vecteur de Poynting doit être calculé en notation réelle : $\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$ et on aboutit à l'expression de la valeur moyenne temporelle :

$$\boxed{\langle \vec{R}(r,\theta,\varphi) \rangle = \frac{A^2}{2\mu_0 c r^2}\sin^2\theta\,\vec{u}_r}$$

La valeur maximale est atteinte pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire dans le plan orthogonal à la direction d'oscillation du dipôle. Une telle antenne doit par exemple être placée verticalement pour émettre à la surface du sol. Elle a alors les mêmes propriétés d'émission dans toutes les directions horizontales, puisque la puissance moyenne surfacique émise dans ce plan ne dépend pas de φ.

Dans la suite, on note : $\boxed{R_M(r) = \frac{A^2}{2\mu_0 c r^2}}$

c) Le diagramme de rayonnement est défini par une surface décrite par son équation en coordonnées sphériques :

$$r = \sin^2\theta$$

On obtient l'allure de la figure 9, où l'on peut noter :
- la symétrie de révolution autour de l'axe Oz ;
- qu'il n'y a pas d'extension selon cet axe ($r = 0$ pour $\theta = 0$ ou π) ;
- que le plan xOy est plan de symétrie.

Le tracé en trois dimensions présente donc une invariance par rotation autour de l'axe Oz, d'après la dégénérescence en φ, c'est-à-dire la non-dépendance de $\vec{R}$ de cette coordonnée. On peut donc se contenter, pour décrire les propriétés de la variation avec l'angle θ, de représenter l'intersection du diagramme avec tout plan contenant l'axe Oz.

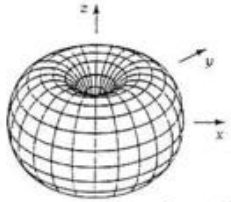


Figure 9

d) La courbe obtenue par cette intersection admet comme équation polaire (Fig. 10) :

$$r = \sin^2\theta$$

⇨ Remarque

Ceci revient à confondre localement la sphère r = cte avec son plan tangent

⇨ Remarque

L'onde n'est donc que localement plane

Technique de calcul

$\langle \cos^2(\omega t - kr) \rangle = 1/2$

⇨ Remarque

Il s'agit d'une courbe plane par définition

© Ellipses - La photocopie non autorisée est un délit

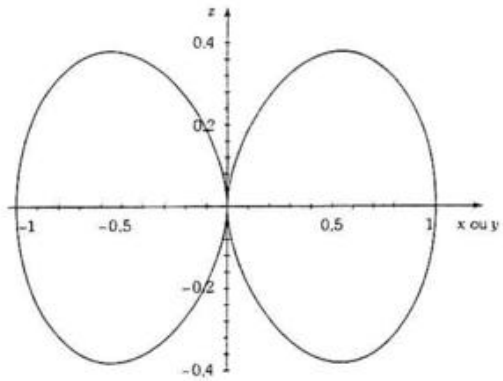


Figure 10

On retrouve bien entendu le fait que la distance à l'origine est maximale pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, qui est la direction correspondant au plan xOy du maximum d'émission.

Technique de calcul

$\sin^2\theta$ et $\sin^2\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$ sont paires

La symétrie par rapport à l'axe polaire $\theta = 0$ ou π et par rapport à l'axe $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$ émane des propriétés de $\sin^2\theta$.

Erreur à éviter

Dans les coordonnées polaires adoptées ici θ varie entre $-\pi$ et π

e) Considérons le secteur sphérique de rayon R défini par $\frac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \frac{3\pi}{4}$, on doit calculer le flux du vecteur de Poynting moyen à travers ce secteur, puis le comparer au flux obtenu à travers toute la sphère de rayon R.

Notons respectivement $\mathcal{P}_{\pi/4}$ et $\mathcal{P}$ ces deux puissances.

Un découpage en petites couronnes de sphère (Fig. 11), délimitées par les angles θ et $\theta + d\theta$ convient, du fait de l'invariance en φ.

⇨ Remarque

R est une valeur quelconque

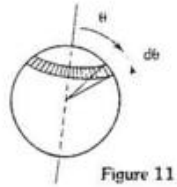


Figure 11

L'élément de surface correspondant s'écrit $dS = 2\pi R^2 \sin\theta d\theta$.

Ainsi :

$$\mathcal{P}_{\pi/4} = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \frac{A^2}{2\mu_0 c r^2}\sin^2\theta\, dS = \frac{\pi A^2}{\mu_0 c}\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \sin^3\theta\, d\theta .$$

Technique de calcul

C'est le produit du périmètre $2\pi R\sin\theta$ par la largeur $Rd\theta$

De même, $\mathcal{P}$ est donné par l'intégrale :

$$\mathcal{P} = \frac{\pi A^2}{\mu_0 c}\int_0^{\pi} \sin^3\theta\, d\theta .$$

⇨ Remarque

R disparaît : la proportion cherchée ne doit dépendre que des directions (émission sphérique)

Le rapport des puissances cherché, noté $p = \frac{\mathcal{P}_{\pi/4}}{\mathcal{P}}$, est donc fourni par le quotient des deux intégrales suivant :

$$p = \frac{\displaystyle\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \sin^3\theta \, d\theta}{\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^3\theta \, d\theta}.$$

Le changement de variable $u = \cos\theta$ permet de transformer $\sin^3\theta \, d\theta = (1 - \cos^2\theta)d(-\cos\theta)$ en $(u^2 - 1)du$.

Une primitive de $u^2 - 1$ étant $\frac{u^3}{3} - u$, le rapport s'écrit :

$$p = \frac{\left[\frac{u^3}{3} - u\right]_{\sqrt{2}/2}^{-\sqrt{2}/2}}{\left[\frac{u^3}{3} - u\right]_1^{-1}} = \frac{5\sqrt{2}}{8}$$

Numériquement, $p = 0.88$: c'est donc une proportion importante de la puissance totale qui est rayonnée dans cette portion de l'espace. Toutefois, le secteur considéré n'est pas très concentré au voisinage du plan xOy : ce type d'antenne ne permet pas une localisation importante.

Remarque

Le calcul portant sur le rapport $r(\alpha) = \mathcal{P}_{2\alpha}/\mathcal{P}$ est possible explicitement, avec la méthode précédente : il conduit à $r(\alpha) = \frac{\sin\alpha}{2}(\cos^2\alpha + 2)$.

REMARQUE – On voit ici comment interpréter et utiliser les variations du champ à grande distance en fonction des paramètres angulaires. On retiendra également la méthode du départ, qui permet d'obtenir une expression du champ magnétique et du vecteur de Poynting en utilisant la propriété, qu'il faut connaître, de structure quasi plane de l'onde.

© Laurent Izard - La photocopie non autorisée est un délit

Ondes dans les milieux

Méthodes

Le cours en questions

1 ■ Propagation dans un plasma

1.1 Quelle est la constitution d'un plasma ?

• Dans le modèle le plus simple, un plasma est un milieu ionisé suffisamment dilué pour que l'on puisse négliger les interactions des particules entre elles.

• Sous l'effet du champ électrique de l'onde, les particules chargées (électrons et ions) sont mises en mouvement ; mais du fait de leur masse très supérieure à celle des électrons, les ions peuvent être considérés comme fixes.

⇒ D'autres cas seront vus en exercices, mais il est bon de savoir proposer un jeu d'hypothèses menant à un modèle très simple.

1.2 Par quelle équation peut-on caractériser la propagation de l'onde ? Quelle est son expression dans un plasma ?

• Dans un milieu isotrope, linéaire et homogène comme l'est un plasma, on cherche des solutions sous forme d'ondes planes progressives monochromatiques d'expression générale $\underline{\vec{E}}_0 \exp j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$.

L'utilisation des équations de Maxwell dans le milieu permet d'obtenir une équation liant k à ω, appelée équation de dispersion.

⇒ Isotrope signifie qu'aucune direction n'est privilégiée. Homogène précise que les propriétés sont identiques en tous les points.

• Pour mémoire, on fait apparaître dans le cas d'un plasma une pulsation caractéristique du milieu, appelée pulsation plasma, ω_p, telle que :

© Ch. Hirlimann – La physique non juridique est un délit

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} .$$

En notant m et e masse et charge des électrons et n_0 leur densité volumique,

$$\omega_p = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{m\varepsilon_0}} .$$

1.3 On rappelle l'équation de dispersion : $k^2c^2 = \omega^2 - \omega_p^2$, comment obtient-on la bande passante du plasma ? Dans ce domaine spectral, comment définit-on les vitesses de phase et de groupe ?

• Le terme de phase d'une onde plane progressive monochromatique se propageant dans le sens des x croissants a pour expression $\exp j(\omega t - kx)$. L'amplitude de cette onde, donnée par le module, n'est constante au cours de la propagation que si k est réel. Cette condition est respectée lorsque k^2 est positif, soit :

$$\omega \geqslant \omega_p .$$

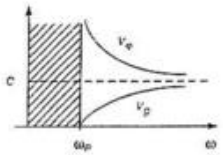
La pulsation de plasma ω_p apparaît ainsi comme une pulsation de coupure basse : le milieu joue ici le rôle de filtre passe-haut.

$v_\varphi = \frac{\omega}{k}$ est une définition générale, valable dans tout milieu. ⇐

• La vitesse de phase est la célérité $v_\varphi = \frac{\omega}{k}$ d'une onde plane progressive monochromatique de pulsation ω se propageant dans le milieu. À l'aide de la relation de dispersion, on obtient :

$$v_\varphi = c\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}} ;$$

v_φ dépend de la pulsation : le milieu est donc dispersif.



Vitesses de phase et de groupe
Figure 1

• La vitesse de groupe est définie par $v_g = \frac{d\omega}{dk}$, elle peut être facilement exprimée ici en différentiant l'équation de dispersion : $2k\,dk\,c^2 = 2\omega\,d\omega$. Ainsi,

$$v_g = \frac{c^2}{v_\varphi} = c\frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{\omega} .$$

Ces deux vitesses ne sont définies que lorsqu'il y a propagation, c'est-à-dire pour $\omega \geqslant \omega_p$ (Fig. 1).

1.4 Quelle est qualitativement la conséquence de la dispersion d'un milieu sur la propagation d'une impulsion ?

• Une impulsion peut être vue comme la superposition d'un grand nombre (une infinité en fait) de termes monochromatiques. Or les vitesses de propagation de ces différentes composantes ne sont pas identiques, du fait de la dispersion. Il s'ensuit une déformation, plus précisément un étalement, de l'impulsion.

• Le modèle du paquet d'onde est approprié pour préciser quantitativement les phénomènes. On distingue alors une enveloppe variant lentement et modulant le terme d'onde progressive (Fig. 2).

Figure 2

On montre que l'enveloppe se propage à la vitesse de groupe ; et, si la relation de dispersion n'est pas affine, qu'elle se déforme en s'étalant.

2 ■ Réflexion sur un conducteur parfait

2.1 Quelle définition donne-t-on d'un conducteur parfait ? Que peut-on en conclure pour le champ électromagnétique qui y règne ?

• Dans un milieu conducteur, on définit la conductivité γ, qui est la constante de proportionnalité entre le champ électrique et la densité de courant :

$$\vec{j} = \gamma \vec{E} \ .$$

Le modèle de conducteur parfait correspond à la limite $\gamma \to \infty$.

• La puissance volumique dissipée $\vec{j} \cdot \vec{E}$ restant finie, faire tendre γ vers l'infini impose de voir le champ électrique tendre vers 0 :

$$\vec{E} \to 0 \ .$$

Pour le champ magnétique, on peut utiliser l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = \vec{0} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} .$$

L'annulation du champ électrique entraîne la constance du champ magnétique.

Dans le cas de l'étude des ondes on ne retient pas les termes constants, donc on considère le champ électromagnétique nul dans un conducteur parfait.

© Librairie – La photocopie non autorisée est un délit

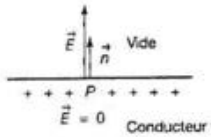


Figure 3

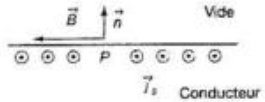


Figure 4

$\vec{n}$ est la normale orientée vers l'extérieur du conducteur.

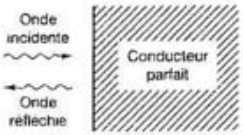


Figure 5

2.2 Comment écrit-on les relations de continuité du champ électromagnétique au voisinage d'un conducteur parfait ? Quelle conséquence peut-on en déduire vis-à-vis de l'interaction avec une onde incidente ?

• Dans le cas général, la composante tangentielle du champ électrique et la composante normale du champ magnétique sont continues. Or ces champs sont nuls dans un conducteur parfait, on en déduit que :

– la composante tangentielle du champ électrique est nulle au voisinage d'un conducteur parfait ;

– la composante normale du champ magnétique est nulle au voisinage d'un conducteur parfait.

• La composante normale du champ électrique peut être discontinue en présence d'une densité surfacique de charge électrique (Fig. 3). Ainsi, l'existence d'une composante normale du champ électrique au voisinage d'un conducteur parfait est synonyme de l'existence d'une densité surfacique de charge :

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{n} \ .$$

• Par le même raisonnement, on peut affirmer qu'en présence d'une composante tangentielle du champ magnétique au voisinage d'un conducteur parfait (Fig. 4), il existe une densité surfacique de courant :

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n} \ .$$

2.3 Quelle conséquence peut-on tirer des relations de continuité précédentes, vis-à-vis de l'interaction avec une onde incidente (on considérera l'incidence normale) ?

• Lorsqu'une onde parvient sur un plan métallique parfaitement conducteur (Fig. 5), sa seule présence ne respecterait pas les relations de continuité. En effet, la transversalité de l'onde impose au champ électrique incident d'être tangent au plan conducteur.

• Pour assurer la nullité de cette composante tangentielle, on invoque donc l'apparition d'un champ électromagnétique supplémentaire : il s'agit de l'onde réfléchie .

2.4 Une onde plane monochromatique parvient sur un plan métallique parfaitement conducteur sous incidence normale. Quel est le coefficient de réflexion en amplitude ? Qu'en déduit-on pour l'onde réfléchie et pour l'onde résultante ?

• L'isotropie dans les directions orthogonales à la propagation autorise à considérer une onde polarisée rectilignement pour raisonner. Écrivant le champ électrique incident sous la forme $\underline{\vec{E}}_i = \vec{E}_0 \exp j(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})$, on doit lui ajouter un champ réfléchi de la forme $\underline{\vec{E}}_r = \vec{E}_{0r} \exp j(\omega t + \vec{k}\cdot\vec{r})$. La condition de continuité du champ électrique tangentiel sur le plan s'écrit (on choisit de placer l'origine O sur le plan conducteur) : $(\vec{E}_0 + \vec{E}_{0r})\exp j(\omega t) = \vec{0}$, soit :

$$\vec{E}_{0r} = -\vec{E}_0 \quad .$$

Le coefficient de réflexion en amplitude est donc $\rho = -1$.

• L'onde réfléchie apparaît ainsi en opposition de phase par rapport à l'onde incidente, dans le plan du miroir parfait.

• L'onde résultante présente un nœud de vibration sur le plan conducteur.

Cette remarque sera utile en optique, lors du décompte précis du déphasage subi par une onde au cours de sa propagation.

2.5 Proposer une expression pour l'onde stationnaire résultante, lorsque le milieu conducteur est le demi-espace $x \geqslant 0$.

• Considérant le champ électrique incident polarisé selon $\vec{u}_y$, on peut proposer $\underline{\vec{E}}_i = E_0 \exp j(\omega t - kx)\vec{u}_y$.

Le champ réfléchi est alors $\underline{\vec{E}}_r = -E_0 \exp j(\omega t + kx)\vec{u}_y$.

En sommant les deux champs complexes et en en prenant la partie réelle, on obtient :

$$\vec{E} = 2E_0 \sin(\omega t)\sin(kx)\,\vec{u}_y \quad .$$

Les ondes incidente et réfléchie se propagent dans le vide : $k = \frac{\omega}{c}$.

• On calcule chaque champ magnétique en utilisant la relation de structure $\vec{B}_i = \frac{\vec{k}\wedge\vec{E}_i}{\omega}$ avec $\vec{k} = \frac{\omega}{c}\vec{u}_x$ et $\vec{B}_r = \frac{-\vec{k}\wedge\vec{E}_r}{\omega}$.

Finalement, le champ magnétique résultant devient :

$$\vec{B} = 2\frac{E_0}{c}\cos(\omega t)\cos(kx)\,\vec{u}_z \quad .$$

Erreur à éviter
Pour l'onde réfléchie, penser à utiliser $-\vec{k}$.

• Les champs électrique et magnétique de l'onde stationnaire présentent des nœuds de vibration en des points régulièrement espacés (Fig. 6) :

– $\sin(kx) = 0$ pour le champ électrique, soit avec p entier positif :

$$x = -p\frac{\lambda}{2} \quad ,$$

© Ediscience – La photocopie non autorisée est un délit

– et pour le champ magnétique $\cos(kx) = 0$:

$$x = -\frac{\lambda}{4} - p\frac{\lambda}{2} \quad .$$

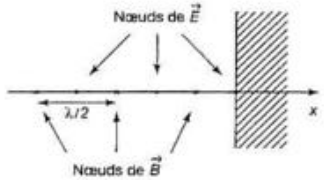


Figure 6

2.6 Quelle puissance est rayonnée en moyenne par une onde stationnaire ?

• Le vecteur de Poynting $\vec{R} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}$ s'écrit :

$$\vec{R} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c}\sin(2\omega t)\sin(2kx)\,\vec{u}_x \quad .$$

• En valeur moyenne au cours du temps, le vecteur de Poynting s'annule en tous points :

$$\langle\vec{R}\rangle = \vec{0} \quad .$$

Une onde stationnaire ne rayonne donc pas de puissance en moyenne. La présence de nœuds de champs interdit notamment une transmission d'énergie par rayonnement à travers ces plans.

3 ■ Onde guidée

3.1 Quelle est la structure d'un guide d'onde à deux plans ? Une onde plane progressive peut-elle s'y propager ?

• Il est possible de guider une onde électromagnétique entre deux parois planes et parallèles, constituées de matériaux parfaitement conducteurs. On parle alors de guide d'onde à deux plans.

• Considérons pour fixer les idées les plans d'équations $x = 0$ et $x = a$ (Fig. 7). La direction de propagation est parallèle aux plans du guide, par exemple $\vec{u}_z$. On doit envisager les deux polarisations transverses, soit $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$.

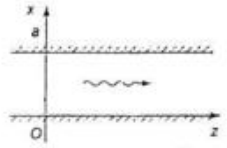


Figure 7

En pratique, un guide a des parois latérales, ce qui interdit toute solution d'onde plane.

Si le champ électrique est polarisé selon $\vec{u}_y$, il est tangent aux plans du guide et doit donc être nul sur ces plans. Puisque nous cherchons une solution de type onde plane, le champ est partout nul. En revanche, il est parfaitement envisageable de proposer une solution polarisée selon $\vec{u}_x$,

car le champ électrique est alors normal aux plans parfaitement conducteurs.

3.2 Qu'entend-on par mode de propagation ? Que signifie TE_{n0} ?

• Les ondes électromagnétiques dans un guide doivent satisfaire conjointement :

– les équations locales, c'est-à-dire les équations de Maxwell dans le vide ;

– les conditions aux limites, imposées par les relations de passage des champs sur les parois.

Ainsi apparaissent des familles de solutions, dont l'expression fait intervenir un ou plusieurs nombres entiers, chacune des ces solutions représente un mode du guide.

• On peut chercher des solutions dont le champ électrique reste orthogonal à l'axe du guide d'onde : on parle de solution TE pour transverse électrique. Si l'on impose ensuite à la solution cherchée de conserver une direction de $\vec{E}$ constamment parallèle aux faces du guide, on obtient une onde polarisée rectilignement faisant intervenir un seul nombre entier n : on aboutit pour le guide rectangulaire au mode TE_{n0} d'équation :

$$\vec{E} = E_0 \sin\left(n\frac{\pi x}{a}\right)\exp j(\omega t - kz)\vec{u}_y \quad .$$

On vérifie que $\vec{E}$ s'annule bien sur les plans $x = 0$ ou $x = a$.

Pour une telle solution, l'équation de dispersion (équation dont est solution k à ω fixé) s'écrit :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - n^2\frac{\pi^2}{a^2} \quad .$$

3.3 En régime sinusoïdal, peut-on trouver des conditions dans lesquelles un seul mode de propagation existe parmi les modes TE_{n0} (on pensera à raisonner sur la fréquence) ?

• Pour chaque valeur de fréquence, le mode TE_{n0} ne peut se propager que si la valeur k_n de k qui lui correspond est réelle. Il faut donc que la pulsation vérifie :

$$\omega \geqslant n\frac{\pi c}{a} \quad .$$

Le guide d'onde joue ainsi le rôle d'un filtre passe-haut pour le mode TE_{n0}, la fréquence de coupure basse pour ce mode est :

$$f_{c_{n0}} = n\frac{c}{2a} \quad .$$

On peut obtenir la sélection d'un unique mode par un choix de fréquence : fonctionnement mono-mode.

• Ainsi, le choix d'une fréquence dans l'intervalle $\left[\frac{c}{2a}; \frac{c}{a}\right]$ permet de ne retenir que le mode TE_{10}, les modes d'ordres supérieurs s'atténuant rapidement du fait de leur valeur imaginaire de k.

Dans un guide rectangulaire, il faut raisonner avec TE_{mn} ce qui est plus compliqué.

© Ellipses - La photocopie non autorisée est un délit

3.4 Quelle est la vitesse de propagation de l'énergie dans une onde guidée ? Cette vitesse est-elle supérieure ou inférieure à c ?

Cette propriété doit être établie pour un mode donné.

• En comparant la puissance rayonnée à travers une section du guide à la densité d'énergie localisée dans le champ, on peut montrer que la vitesse de propagation de l'énergie est la vitesse de groupe.

Les conditions aux limites sont satisfaites grâce à une interférence destructive entre les deux ondes.

• Il est possible de considérer une onde guidée se propageant sous un unique mode en une superposition de deux ondes planes subissant des réflexions multiples sur les parois du guide.

Ainsi, la propagation de l'énergie est-elle plus lente dans une onde guidée que dans une onde libre pour laquelle l'onde plane se propage en ligne droite.

3.5 Dans un guide d'onde, tous les modes ont-ils la même vitesse de propagation ? Quelle propriété en déduit-on ?

• La vitesse de phase et la vitesse de groupe du mode de rang n s'obtiennent à partir de l'équation de dispersion $k_{n0}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - n^2\frac{\pi^2}{a^2}$, donc ces quantités dépendent de la valeur de n.

Cette remarque justifie parfois le recours à un régime monomode.

• Un guide d'onde apparaît ainsi comme un milieu dispersif : dans un fonctionnement multimode, les différentes composantes d'un signal se propageant selon des modes différents ne progressent pas à la même vitesse. Il s'ensuit une déformation du signal.

Les savoir-faire clefs

Conseils méthodologiques

1 ■ Savoir utiliser l'équation de propagation.

Un milieu est défini par les équations de Maxwell suivantes, dans une région sans charges ni courants :

$$\begin{cases} \text{div}(\vec{E}) = 0 \\ \text{div}(\vec{B}) = 0 \\ \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E}) = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) = \varepsilon\mu_0\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

Les scalaires ε et μ_0 sont des constantes caractéristiques du milieu, appelées permittivité et perméabilité magnétique.

a) Établir une équation découplée, ne faisant intervenir que le champ électrique.

b) Mettre cette équation sous la forme $\Box(\vec{E}) = \vec{0}$ où on définira l'opérateur d'Alembertien à l'aide d'une autre vitesse que c, notée v :

$$\Box(\vec{E}) = \vec{\Delta}(\vec{E}) - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

c) En cherchant une solution sous la forme $\vec{E} = \vec{E}_0 \exp j(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})$, montrer qu'il existe une relation entre k et ω. Quel nom donne-t-on à cette équation ?

d) Si ε est une constante, indépendante de la pulsation, quelles sont les vitesses de phase et de groupe dans un tel milieu ?

1.a) Reprendre si besoin les notions rappelées dans le chapitre sur l'onde dans le vide : le découplage de ces équations fait intervenir une identité d'analyse vectorielle à connaître.
1.b) On doit déterminer ici la relation entre v et les constantes du milieu ε et μ_0.
1.c) En remplaçant $\vec{E}$ par son expression dans l'équation de propagation, on obtient une équation scalaire faisant intervenir $k^2 = \|\vec{k}\|^2$.
1.d) On doit utiliser ici la relation définissant chacune des vitesses en fonction de l'équation $k(\omega)$, laquelle est fournie par l'équation de dispersion.

1.a) La relation mathématique, valable pour tout champ $\vec{W}$:

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{W})) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\vec{W})) - \vec{\Delta}(\vec{W}),$$

permet, à l'aide de l'équation de Maxwell-Faraday, d'obtenir :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{E})) = -\overrightarrow{\text{rot}}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B}}{\partial t}$$
$$= -\vec{\Delta}\vec{E}.$$

Les dérivations spatiales et temporelles commutent.

On exploite alors l'équation de Maxwell-Ampère :

$$-\vec{\Delta}(\vec{E}) = -\varepsilon\mu_0\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

Finalement, outre l'équation de Maxwell-Gauss $\text{div}(\vec{E}) = 0$, on dispose d'une seconde équation ne faisant intervenir que le champ électrique :

$$\boxed{\Delta(\vec{E}) - \varepsilon\mu_0\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}}.$$

On obtiendrait de même $\Delta(\vec{B}) - \varepsilon\mu_0\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$ en inversant les rôles des équations de Faraday et Ampère.

b) On peut recourir à la notation $\Box(\vec{E}) = \vec{\Delta}(\vec{E}) - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$ définissant le d'Alembertien, sous réserve de poser $\varepsilon\mu_0 v^2 = 1$.

On retrouve bien entendu $\varepsilon\mu_0 c^2 = 1$ dans le cas du vide, où $\varepsilon = \varepsilon_0$.

c) Les équations valables dans le milieu considéré sont analogues à celles qui font intervenir le champ électrique dans une région sans charge ni courant du vide :

$$\boxed{\text{div}(\vec{E}) = 0 \quad \text{et} \quad \Box(\vec{E}) = \vec{0}}.$$

Il s'agit par exemple d'un milieu diélectrique : verre, air, eau comme ceux utilisés en optique.

On examine d'éventuelles solutions de la forme $\vec{E} = \vec{E}_0 \exp j(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})$. La dérivation temporelle de n'importe quelle composante du champ équivaut, dans cette notation complexe, à une multiplication par $j\omega$. Donc, la

Rappel :
l'équation $\Box(\vec{E}) = \vec{0}$ est appelée équation de propagation.

© Le Vallier - La photocopie non autorisée est un délit

double dérivation temporelle revient à une multiplication par $-\omega^2$: pour toute composante E_j du champ :

i désigne ici *x*, *y* ou *z*.

$$\boxed{\frac{\partial^2 E_j}{\partial t^2} = -\omega^2 E_j}.$$

Il en va de même pour la double dérivation spatiale par rapport à x, y ou z, en multipliant par $-k_x^2$, $-k_y^2$ ou $-k_z^2$ respectivement :

$$\boxed{\frac{\partial^2 E_j}{\partial i^2} = -k_i^2 E_j}.$$

Finalement, l'équation de propagation pour cette onde de structure plane, progressive et monochromatique devient très simple :

Cette forme est obtenue en effet pour chacune des composantes sur x, y ou z.

$$\Box(\vec{E}) = \left(-k^2 + \frac{\omega^2}{v^2}\right)\vec{E} = \vec{0}.$$

On en déduit qu'une onde non nulle n'est possible que si $k^2 = \frac{\omega^2}{v^2}$, c'est-à-dire :

$$\boxed{k^2 = \varepsilon\mu_0\omega^2}.$$

On parle d'équation de dispersion : en effet, il est possible de déterminer les caractéristiques de la propagation, dans le milieu considéré, de toute onde monochromatique, en fonction de sa pulsation.

d) Par exemple, une propriété caractéristique de la propagation d'une onde monochromatique est sa vitesse de phase. On peut écrire, à l'aide de la relation de définition $v_\varphi = \frac{\omega}{k}$:

$$\boxed{v_\varphi = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu_0}}}.$$

L'indice optique du milieu est $n = \frac{c}{v} = \sqrt{\varepsilon_r}$ où $\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$ est appelée permittivité relative du milieu.

On retrouve la notation $v_\varphi = v$ précédente et l'identité à c dans le cas particulier du vide.
La vitesse de groupe, qui serait celle de l'enveloppe d'un paquet d'onde, s'obtient selon $v_g = \frac{d\omega}{dk}$. En différenciant l'équation de dispersion $k^2 = \varepsilon\mu_0\omega^2$, on obtient puisque ε et μ_0 sont des constantes : $2k\cdot dk = 2\varepsilon\mu_0\omega\, d\omega$. Le produit $v_\varphi v_g = \frac{\omega}{k}\frac{d\omega}{dk} = v^2$. Finalement :

$$\boxed{v_g = v_\varphi = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu_0}}}.$$

Supposer ε indépendante de la pulsation correspond à un modèle de milieu non dispersif.

2 ■ Savoir utiliser l'équation de dispersion.

Conseils méthodologiques

On suppose que l'équation de dispersion relative à une onde progressive et monochromatique s'écrit :

$$k^2c^2 = a\omega^2 - b$$

où a et b sont des constantes positives.

a) Définir une pulsation remarquable, à partir de a et b et montrer qu'il est possible de considérer deux domaines de fréquence dans lesquels le vecteur d'onde k présente des propriétés très différentes.

2.a) Une analyse dimensionnelle peut convenir, mais il faut ensuite étudier le signe de k^2.

b) On considère le terme de phase de l'onde considérée, sous la forme :

$$\exp j(\omega t - kx).$$

2.b) Dans le cas où k est complexe, il faut développer $\exp j(\omega t - kx)$ avant de calculer la partie réelle.

Dans chacun des domaines, comment s'écrit la partie réelle de ce terme ? Quelles propriétés en déduit-on ?

c) Vérifier que cette discussion est présente dans l'étude de la propagation d'une onde dans un plasma, mais qu'elle l'est aussi dans celle d'une onde dans un guide. Dans chaque cas, quelles sont les propriétés qui déterminent la valeur de la pulsation caractéristique ?

2.c) La pulsation caractéristique est-elle liée au matériau ou à la géométrie du dispositif ?

d) Dans le domaine des pulsations très élevées, $\omega^2 >> b/a$, exprimer la vitesse de phase de l'onde. Faire de même avec la vitesse de groupe. Que peut-on en conclure ?

2.d) On obtient les vitesses de phase et de groupe à partir des relations de définition.

2.a) $a\omega^2$ ayant même dimension que b, on peut comparer ces quantités.

On obtient donc une pulsation en effectuant $\boxed{\omega_c = \sqrt{\frac{b}{a}}}$.

⇒ Cette approche aux dimensions ne fournit pas un éventuel facteur numérique.

Plus précisément, l'équation en k conduit à des solutions très différentes, selon que le second membre est positif ou négatif.

- $\omega > \omega_c$: k^2 est positif, on obtient deux solutions réelles :

$$\boxed{k = \pm\frac{\sqrt{a}}{c}\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}}$$

- $\omega < \omega_c$: k est imaginaire pur :

$$\boxed{k = \pm j\frac{\sqrt{a}}{c}\sqrt{\omega_c^2 - \omega^2}}$$

b) Le terme proposé décrit la variation de phase d'ondes progressives et monochromatiques solutions éventuelles du problème. On reprend la classification précédente :

- $\omega > \omega_c$ La solution générale devient :

$$\cos(\omega t - kx)$$

⇒ Avec un éventuel déphasage φ.

© Ellipses – La photocopie non autorisée est un délit

Le cas général est décrit par une combinaison linéaire de ces deux solutions. ⇐

dans laquelle k prend l'une ou l'autre des valeurs réelles, positive ou négative. Le cas où $k > 0$ décrit une onde se propageant selon les x croissants, l'autre solution s'applique à une onde progressive selon $-\vec{u}_x$.

- $\omega < \omega_c$ Chacune des solutions, avec k imaginaire pur $k = \pm j\frac{1}{\delta}$ fait apparaître une solution dans laquelle l'amplitude de l'onde varie avec x :

$$\exp\left(\mp\frac{x}{\delta}\right)\cos(\omega t).$$

Il n'y a plus de présence de x dans le terme variable temporellement $\cos(\omega t)$, donc plus de dépendance en $t \pm x/v$ qui correspondrait à une propagation à vitesse v selon Ox. Cette onde ne se propage pas : elle correspond seulement à une oscillation, dont l'amplitude varie avec la variable spatiale x. On parle d' onde évanescente ".

c) Cette situation se présente dans différents cas, mais pour des raisons qui peuvent être très dissemblables :

– pour un plasma, la relation de dispersion prend la forme :

$$\boxed{k^2c^2 = \omega^2 - \omega_p^2}$$

ω_p étant fonction des caractéristiques du milieu, densité d'électrons... On obtient bien un comportement de filtre passe-haut : la transmission d'ondes électromagnétiques n'intervenant que pour des pulsations suffisamment élevées ;

Les parois du guide. ⇐

– dans un guide d'onde, le milieu est le vide, il ne peut présenter de pulsation particulière. C'est alors la présence de conditions aux limites, qui sont responsables de l'existence d'une pulsation caractéristique pour chaque mode envisagé. Pour le mode TE_{n0} par exemple, l'équation prend la forme :

$$\boxed{k^2c^2 = \omega^2 - \frac{n^2\pi^2c^2}{a^2}}$$

On retrouve un filtrage passe-haut, la fréquence de coupure $\omega_c = \frac{n\pi c}{a}$ dépendant de l'entier n quantifiant le mode et de la largeur a du guide.

d) La vitesse de phase est définie par $v_\varphi = \frac{\omega}{k}$ et se calcule à partir de l'équation de dispersion. Dans le cas où $\omega >> \omega_c$, on peut utiliser une équation de dispersion simplifiée :

$$k^2c^2 \approx a\omega^2.$$

On déduit une relation simple :

On peut définir un indice de réfraction $n = \frac{c}{v_\varphi}$, egal ici à $\sqrt{a}$. ⇐

$$\boxed{v_\varphi = \frac{c}{\sqrt{a}}}$$

La vitesse de groupe s'obtient de même à partir de sa définition $v_g = \frac{d\omega}{dk}$. En différenciant la relation de dispersion approchée, on écrit :

$$2k \cdot dk\,c^2 = a2\omega \cdot d\omega.$$

Ainsi, $v_\varphi v_g = \frac{c^2}{a}$ et par conséquent :

$$\boxed{v_\varphi = v_g = \frac{c}{\sqrt{a}}}.$$

Erreur à éviter
Ce résultat n'est valable que parce que a a été considéré comme une constante.

Le présent milieu est donc non dispersif aux fréquences élevées, ce que l'on confirme par le fait que la relation de dispersion $k = f(\omega)$ est linéaire.

REMARQUE – Cet exercice permet de faire un pont entre certaines propriétés vues dans le plasma et d'autres rencontrées dans l'étude des guides d'onde. On veillera à retenir la méthode commune, mais à ne pas confondre les raisons profondes qui sont différentes entre ces deux situations. Les milieux sont notamment tout à fait différents.

3 ■ Savoir déterminer une onde réfléchie.

Conseils méthodologiques

On considère un plan métallique parfait d'équation $y = 0$ sur lequel est envoyée, sous incidence oblique d'angle θ, une onde plane progressive et monochromatique (Fig. 8). Le milieu occupant le demi-espace d'équation $y \leqslant 0$ est le vide. Les axes (Ox) et (Oz) sont choisis de telle sorte que le vecteur d'onde $\vec{k}_i$ de l'onde incidente appartienne au plan (xOy).

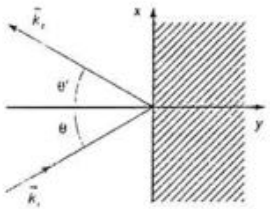


Figure 8

On se limite au cas où l'onde incidente est polarisée rectilignement selon la direction (Oz) et on souhaite déterminer les caractéristiques de l'onde réfléchie.

a) Justifier l'expression suivante, pour le champ électrique de l'onde incidente :

$$\underline{\vec{E}}_i(\vec{r},t) = E_0 \exp[i(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})]\,\vec{e}_z$$

et donner son expression en fonction des variables (x, y, z, t).

b) Les conditions de continuité relatives au champ électrique sont-elles vérifiées avec cette seule onde incidente ?

c) En s'inspirant de ce que montre l'optique géométrique, on superpose au champ incident un champ réfléchi, cherché sous la forme d'une onde plane progressive monochromatique de vecteur d'onde $\vec{k}_r$. Justifier que l'on adopte *a priori* $\vec{k}_r$ dans le plan (xOy). Proposer une écriture pour le champ électrique $\underline{\vec{E}}_r$ de l'onde réfléchie ; pour ce faire :

3.a) Il faut traduire chacun des termes définissant l'onde, puis utiliser le fait que la propagation a lieu dans le vide.

3.b) Commencer systématiquement par rappeler ces conditions de continuité.

3.c) On connaît *a priori* quelles propriétés géométriques doit avoir l'onde, il reste à les traduire dans l'écriture du champ.

© Libvinier – La photocopie non autorisée est un délit

3.d) L'élément déterminant ici est la nécessité d'assurer la condition de continuité en tout point du plan.

3.e) L'existence d'une densité surfacique de charge apparaît ici comme une conséquence de l'existence d'une discontinuité d'une composante des champs, à préciser avant tout calcul.

- on introduira un angle θ' entre le vecteur d'onde $\vec{k}_r$ et la normale au plan conducteur,
- on supposera l'onde polarisée selon (Oz) ;
- on adoptera une amplitude complexe $\underline{E}'_0$.

d) Écrire la relation de continuité imposée au champ électrique sur le plan conducteur et en déduire la valeur de l'angle θ' et celle de l'amplitude complexe.

e) Des charges surfaciques apparaissent-elles sur le plan ? Serait-ce encore le cas pour une autre polarisation de l'onde incidente ?

3.a) La forme générale d'une onde plane progressive monochromatique se propageant selon la direction repérée par le vecteur $\vec{k}_i$ est donnée par :

$$\underline{\vec{E}}_i(\vec{r},t) = \underline{\vec{E}}_0 \exp[i(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})].$$

Le vecteur complexe $\underline{\vec{E}}_0$ définit entre autre la nature de la polarisation de l'onde. Ici, il s'agit d'une onde polarisée rectilignement selon $\vec{e}_z$, donc on adopte :

$$\underline{\vec{E}}_0 = E_0 \vec{e}_z.$$

Le fait d'adopter E_0 réel correspond à un choix judicieux d'origine des temps.

On aboutit ainsi à l'expression proposée, mais on peut également détailler le terme $\vec{k}_i \cdot \vec{r}$, grâce aux coordonnées de $\vec{k}_i$:

Il s'agit d'une onde plane progressive monochromatique dans le vide, d'où $k_i = \frac{\omega}{c}$.

$$\vec{k}_i = \frac{\omega}{c}(\sin\theta\,\vec{e}_x + \cos\theta\,\vec{e}_y).$$

Finalement, le champ électrique de l'onde incidente s'écrit :

Cette expression n'est valable que pour $y < 0$.

$$\boxed{\underline{\vec{E}}_i(x,y,z,t) = E_0 \exp\left[i\left(\omega t - \frac{\omega}{c}(x\sin\theta + y\cos\theta)\right)\right]\vec{e}_z}.$$

La contrainte sur E_z n'existe pas, faute de composante selon cet axe.

b) Les conditions aux limites sont imposées par la présence du plan conducteur en $y = 0$. En effet, les champs électrique et magnétique s'annulant dans un conducteur parfait et les composantes tangentielle du champ électrique et normale du champ magnétique étant continues, on doit avoir nullité de ces termes au voisinage immédiat du plan conducteur. Pour le champ présent, il faut que la limite lorsque $y \to 0^-$ de E_z soit nulle. Cette propriété doit être vérifiée quels que soient x, z et t.

Le recours à un champ transmis n'est pas admissible, puisque le plan est parfaitement conducteur.

Or, $\underline{\vec{E}}_i(x,0^-,z,t) = E_0 \exp\left[i\left(\omega t - \frac{\omega}{c}x\sin\theta\right)\right]\vec{e}_z$ n'est pas nul à chaque instant en tout point. Il faut donc compléter le champ par l'adjonction d'un champ réfléchi.

C'est la première loi de Descartes.

c) D'après les lois de Descartes relatives à la réflexion, $\vec{k}_r$ est cherché dans le plan d'incidence, c'est-à-dire le plan (xOy) ici. On feint à ce stade de ne pas savoir quelle valeur donner à l'angle de réflexion que l'on note θ'. En revanche, l'onde est cherchée de même pulsation : c'est la linéarité du système et le caractère harmonique de l'excitation qui le justifient. Avec les suggestions faites, on peut donc écrire :

$$\boxed{\vec{k}_r = \frac{\omega}{c}(\sin\theta'\vec{e}_x - \cos\theta'\vec{e}_y)}.$$

Le champ électrique de l'onde réfléchie se présente par conséquent sous la forme :

$$\underline{\vec{E}}_r = \underline{E}'_0 \exp[i(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{r})]\vec{e}_z .$$

⇒ On ne peut présumer de l'argument de l'amplitude $\underline{E}'_0$: c'est la résolution physique du problème qui précisera s'il y a ou non un déphasage entre les ondes incidente et réfléchie.

d) Il faut annuler la composante tangentielle du champ électrique résultant sur le plan $y = 0$: on impose ainsi :

$$E_0 \exp\left[i\left(\omega t - \frac{\omega}{c}\sin\theta x\right)\right] + \underline{E}'_0 \exp\left[i\left(\omega t - \frac{\omega}{c}\sin\theta' x\right)\right] = 0 .$$

L'annulation en $x = 0$ nécessite d'une part :

$$\boxed{\underline{E}'_0 = -E_0}$$

⇒ On retrouve le coefficient de réflexion en amplitude $\underline{E}'_0 = -E_0$.

et d'autre part de rendre nul :

$$\exp\left[-i\frac{\omega}{c}\sin\theta x\right] - \exp\left[-i\frac{\omega}{c}\sin\theta' x\right]$$

ce qui revient à rendre identiques ces deux fonctions de x :

$$\exp\left[-i\frac{\omega}{c}\sin\theta x\right] = \exp\left[-i\frac{\omega}{c}\sin\theta' x\right].$$

Une condition nécessaire à l'égalité de deux fonctions périodiques est l'égalité de leur période, donc $\sin\theta' = \sin\theta$. Les définitions des angles dans l'intervalle $[0, \pi/2]$, puisque ce sont des angles non signés manipulés ici, induit de ce fait :

$$\theta' = \theta$$

⇒ Avec des angles signés, on aurait obtenu $\theta' = -\theta$.

On aboutit à la seconde loi de Descartes.

⇒ Dans le cas de l'incidence normale, la transversalité des ondes incidente et réfléchie ne laisse aucune composante normale.

e) La présence d'une densité surfacique de charge sur le plan correspond à une situation dans laquelle la composante normale du champ électrique ne s'annule pas au voisinage de celui-ci.

Le champ résultant est ici polarisé rectilignement selon $\vec{e}_z$, il ne peut donc y avoir de composante normale du champ électrique sur le plan métallique.

⇒ $\vec{E}_i$ et $\vec{E}_r$ sont dirigés selon $\vec{e}_z$.

Mais ce résultat est propre à cette polarisation, car un champ incident polarisé dans le plan d'incidence présente une composante selon $\vec{e}_z$ et une composante selon $\vec{e}_y$, du fait de la transversalité. Imposer la nullité de la composante tangentielle du champ résultant ne peut alors s'obtenir sans laisser une composante normale. On fait ainsi apparaître une densité surfacique de charge sur le plan.

REMARQUE – On voit ici que la méthode consistant à compléter un champ incident par un autre champ, afin de respecter les conditions aux limites, est une méthode qui s'applique dans d'autres situations que celle évoquée en cours. On retiendra que cette recherche est d'autant plus aisée que l'on a su, par une réflexion physique préalable, déterminer le maximum de propriétés sur les caractéristiques à donner à ce champ supplémentaire.

© Ed. Jolin – La photocopie non autorisée est un délit

Conseils méthodologiques

4 ■ Savoir déterminer les densités surfaciques de charge et courant.

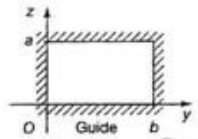


Figure 9

Dans un guide d'onde rectangulaire, délimité par les parois $y = 0$, $y = b$, $z = 0$ et $z = a$ (Fig. 9), une onde électromagnétique se propage, dont le champ électrique a l'expression :

$$\underline{\vec{E}} = E_0 \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)\exp[i(\omega t - k_g x)]\vec{e}_z .$$

a) À quel mode ce champ correspond-il ?

b) Quelles sont les parois où une densité surfacique de charge est présente ? Quelle expression a-t-elle alors ?

c) Sur quelles faces existe-t-il une densité surfacique de courant ? Déterminer son expression sur la face d'équation $y = 0$.

4.a) C'est surtout la valeur de l'entier qui quantifie ce mode qui est recherchée ici.

4.b) Les densités surfaciques de charge apparaissent dans les relations de continuité du champ électrique, rappeler préalablement pour quelle composante.

4.c) Faire de même pour la densité de courant.

Le second entier quantifierait les champs polarisés selon l'autre direction. ⇐

4.a) L'expression générale de la dépendance en y de cette onde est $\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$, car le champ électrique doit s'annuler sur les parois $y = 0$ et $y = b$ où il est tangentiel. On est donc ici dans un mode transverse électrique, pour la valeur particulière $n = 1$ du rang, avec une onde polarisée. Il s'agit du mode TE_{10}.

b) Une densité surfacique de charge est présente en tout point d'une paroi, lorsque la composante normale du champ électrique n'est pas nulle. Il ne peut s'agir des parois d'équations $y = 0$ ou $y = b$, puisque le champ proposé y est tangentiel. Seules les parois d'équations $z = 0$ et $z = a$ possèdent donc des densités surfaciques de charge.

Normale dirigée vers l'intérieur du guide. ⇐

Pour le plan $z = 0$, la normale sortant de la paroi est dirigée par le vecteur unitaire $\vec{e}_z$. La relation de passage en un point P de la paroi $z = 0$ s'écrit donc :

$$E_0 \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)\exp[i(\omega t - k_g x)] = \frac{\underline{\sigma}(P)}{\varepsilon_0}.$$

Il s'agit de l'amplitude complexe de la densité surfacique : $\sigma = Re(\underline{\sigma})$. ⇐

En notation réelle :

$$\boxed{\sigma(x,y,0,t) = \varepsilon_0 E_0 \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)\cos(\omega t - k_g x)}.$$

Sur la face d'équation $z = a$, la normale est opposée : $\vec{n}' = -\vec{e}_z$. La densité surfacique de charge est donc :

Les densités en des points se faisant face sont opposées à chaque instant. ⇐

$$\boxed{\sigma(x,y,a,t) = -\varepsilon_0 E_0 \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)\cos(\omega t - k_g x)}$$

c) La détermination des densités de courant nécessite préalablement le calcul du champ magnétique. On utilise l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\underline{\vec{E}} = -i\omega\,\underline{\vec{B}}$$

en notation complexe. En coordonnées cartésiennes, seules les composantes sur $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$ existent :

$$\begin{cases} -i\omega\,\underline{B}_x = \dfrac{\pi}{b}E_0\cos\dfrac{\pi y}{b}\exp[i(\omega t - k_g x)] \\ -i\omega\,\underline{B}_y = ik_g E_0\sin\dfrac{\pi y}{b}\exp[i(\omega t - k_g x)] \end{cases}$$

On obtient, après calcul de la partie réelle :

$$\vec{B}\begin{cases} B_x = -\dfrac{\pi}{b\omega}E_0\cos\dfrac{\pi y}{b}\sin(\omega t - k_g x) \\ B_y = -\dfrac{k_g}{\omega}E_0\sin\dfrac{\pi y}{b}\cos(\omega t - k_g x) \\ B_z = 0 \end{cases}$$

$\text{Re}[\exp(i\omega t)] = \cos(\omega t)$ et $\text{Re}[i\exp(i\omega t)] = -\sin(\omega t)$.

Puisque le champ magnétique a une composante suivant $\vec{e}_x$ et une composante suivant $\vec{e}_y$, la composante tangentielle de $\vec{B}$ n'est nulle sur aucune des faces. Une densité surfacique de courant est présente sur toutes les faces du guide.

On raisonne sur la face d'équation $y = 0$, pour laquelle la normale est $\vec{e}_y$. On peut donc déterminer la densité surfacique de courant $\vec{j}_s(x,z)$ à l'aide de la discontinuité de la composante tangentielle de $\vec{B}$:

$$\vec{B}(x,0^+,z,t) = \mu_0\,\vec{j}_s(x,z)\wedge\vec{e}_y.$$

⇨ dirigée vers l'intérieur du guide.

Or, le champ en $y \to 0$ s'écrit :

$$\vec{B}(x,0^+,z,t) = -\frac{\pi}{b\omega}E_0\sin(\omega t - k_g x)\vec{e}_x$$

donc $\vec{j}_s(x,0,z,t)$ est dirigé selon $\vec{e}_z$ et vaut :

$$\vec{j}_s(x,0,z,t) = \frac{\pi}{b\mu_0\omega}E_0\sin(\omega t - k_g x)\vec{e}_z.$$

REMARQUE – En définitive, on retiendra que la détermination des densités de charge et courant s'effectue à partir de l'expression des champs. Il suffit de procéder méthodiquement, en commençant par rappeler les équations de continuité.

© Ladebat - La photocopie non autorisée est un délit

Annales

Pour maîtriser les bases

1. Du guide d'onde à la cavité — D'après Centrale-Supelec

On ferme un guide d'onde rectangulaire, délimité par les parois $y = 0$, $y = b$, $z = 0$ et $z = a$ (Fig. 11), par deux plans conducteurs en $x = 0$ et $x = \ell$. On obtient alors une cavité électromagnétique, dont les parois sont infiniment conductrices. On souhaite déterminer des solutions valables à l'intérieur de la cavité, en partant de la forme du champ électrique solution du problème dans le guide d'onde :

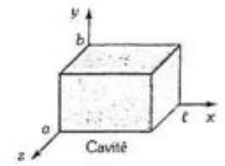


Figure 10

$$\underline{\vec{E}}_i = \underline{E}_0\sin\left(\frac{p\pi y}{b}\right)\exp[i(\omega t - k_g x)]\vec{e}_z$$

que l'on peut considérer comme le champ d'une onde incidente sur le plan $x = \ell$.

a) Expliquer sans calcul pourquoi il existe un champ réfléchi. Montrer que si on suppose un champ réfléchi de la forme :

$$\underline{\vec{E}}_0 = \underline{K}\,\underline{E}_0\sin\left(\frac{p\pi y}{b}\right)\exp[i(\omega t + k_g x)]\vec{e}_z$$

seul champ à coexister avec $\underline{\vec{E}}_i$, alors les équations de Maxwell peuvent être vérifiées. Déterminer $\underline{K}$ et montrer qu'il existe une condition de quantification sur k_g.

b) En déduire que les pulsations possibles dans le cadre des hypothèses effectuées sont de la forme :

$$\omega = \pi c\sqrt{\left(\frac{m}{\ell}\right)^2 + \left(\frac{p}{b}\right)^2}$$

où m et p sont des entiers.

c) Montrer que le champ électrique résultant peut se mettre sous la forme :

$$\underline{\vec{E}}_r = \underline{E}_r\sin\left(\frac{p\pi y}{b}\right)\sin\left(\frac{m\pi x}{\ell}\right)\exp(i\omega t)\vec{e}_z.$$

Justifier qu'il est possible, sans changer la physique du problème, d'adopter par la suite $\underline{E}_r$ réel, noté E_r.

d) On se place dans la suite dans le cas où $m = p = 1$. Quelles sont les parois de la cavité susceptibles de porter une densité surfacique de charge non nulle ? Dessiner un schéma de la cavité en indiquant avec les signes + et – les charges relatives de ces faces en espaçant d'autant plus ces signes que la densité surfacique est faible en valeur absolue (préciser les axes Ox, Oy et Oz).

e) Donner l'expression du champ magnétique $\underline{\vec{B}}$ en fonction notamment de E_r, x et y, puis préciser les faces de la cavité où apparaissent des courants surfaciques.

f) Calculer $W_e(t)$ et $W_m(t)$ les énergies électriques et magnétiques instantanées dans la cavité en fonction de $W_0 = \varepsilon_0 E_r^2 V/8$ (V étant le volume de la cavité). Représenter sur un même graphe les évolutions temporelles de W_e et W_m. Que vaut l'énergie électromagnétique totale W ? Commenter. Trouver une analogie avec un circuit électrocinétique simple.

Conseils méthodologiques. **a) :** On connaît déjà la solution pour une onde plane progressive et monochromatique. Ici l'onde n'est plus plane, il faut donc reprendre l'étude avec la même méthode. **b) :** La quantification émane de la nécessité de respecter les conditions aux limites de la cavité ; et ce, sur les deux extrémités. **c) :** Modifier l'argument d'une amplitude complexe revient à modifier la phase du signal. **d) :** Les densités surfaciques de charge apparaissent dans les relations de continuité du champ électrique, mais pour quelle composante ? **e) :** Attention à ne pas utiliser une formule liant les champs électrique et magnétique valable seulement pour une onde plane progressive. L'onde ici présente n'est pas progressive ! **f) :** On parle d'énergies électrique et magnétique, il faut donc chercher des composants (dipôles électriques) dans lesquels l'énergie emmagasinée prend l'une ou l'autre de ces formes.

a) Le seul champ incident ne permet pas de satisfaire à tout instant la continuité de la composante tangentielle du champ électrique sur la paroi d'équation $x = \ell$.

Il faut en effet assurer E_y et E_z nuls en $x = 0$ et en $x = \ell$, ce qui n'est pas vrai pour $\vec{E}_{iz}$.

On obtient une solution satisfaisante en superposant au champ incident un champ réfléchi, lui même solution des équations locales et tel que la superposition avec le champ incident vérifie les conditions aux limites. On adopte ainsi une solution d'onde guidée se propageant dans le sens des x décroissants, d'où le terme en $\omega t + k_g x$.

La nullité de la composante selon $\vec{e}_z$ du champ résultant est atteinte si $1 + \underline{K} = 0$, donc pour :

$$\boxed{\underline{K} = -1}.$$

On retrouve le coefficient de réflexion en amplitude obtenu lors de l'étude de la réflexion d'une onde plane progressive et monochromatique sur un plan parfaitement conducteur.

En outre, il faut assurer la même condition de nullité en $x = \ell$, soit :

$$\exp[i(\omega t - k_g \ell)] + \exp[i(\omega t + k_g \ell)] = 0.$$

Après mise en facteur de $\exp(i\omega t)$, on aboutit à la condition :

$$\sin(k_g \ell) = 0.$$

Il existe donc nécessairement un entier m tel que $k_g \ell$ soit un multiple de π :

$$\boxed{k_g = \frac{m\pi}{\ell}}.$$

On parle de condition de quantification, car k_g ne peut prendre que certaines valeurs, réparties de façon discrète, paramétrées par un entier.

b) La relation de dispersion du mode $TE_{0,p}$ examiné ici se déduit de celle obtenue dans le *cours en questions* pour le mode $TE_{n,0}$:

$$k_g^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - p^2\frac{\pi^2}{b^2}.$$

La relation obtenue ci-dessus pour k_g impose donc une condition de quantification pour la pulsation :

$$\frac{\omega^2}{c^2} = \frac{m^2\pi^2}{\ell^2} + \frac{p^2\pi^2}{b^2}.$$

Il s'agit bien de la condition donnée dans l'énoncé, car la pulsation est une grandeur positive.

Remarque

Le champ dans le métal parfait est nul et la composante tangentielle du champ électrique est toujours continue.

Remarque

La dépendance en y est prise identique à celle du champ incident pour satisfaire les conditions sur les plans latéraux.

Remarque

Il suffit d'examiner le cas $x = 0$.

Technique de calcul

$\exp(i\theta) - \exp(-i\theta) = 2i\sin\theta$.

Remarque

On retrouve dans cette question l'analogie avec l'apparition d'un nombre entier n (nombre quantique) dans l'énergie de l'électron dans l'atome d'hydrogène.

Remarque

Le champ électrique est polarisé ici selon $\vec{e}_z$ et dépend de y : c'est donc un mode $TE_{0,p}$.

© Libmon - La photocopie non autorisée est un délit

$$\boxed{\omega = \pi c\sqrt{\frac{m^2}{\ell^2} + \frac{p^2}{b^2}}}.$$

c) On superpose champ incident et champ réfléchi :

$$\vec{\underline{E}}_c = \vec{\underline{E}}_i + \vec{\underline{E}}_0 = E_0 \sin\left(\frac{p\pi y}{b}\right)\exp(i\omega t)[\exp(-ik_g x) - \exp(ik_g x)]\vec{e}_z.$$

La relation trigonométrique $\exp(i\theta) - \exp(-i\theta) = 2i\sin\theta$ conduit à :

$$\vec{\underline{E}}_c = -2iE_0 \sin\left(\frac{p\pi y}{b}\right)\exp(i\omega t)\sin\left(\frac{m\pi x}{\ell}\right)\vec{e}_z.$$

Telle que l'expression apparaît, l'amplitude $\underline{E}_c = -2iE_0$ n'est pas réelle : un déphasage résulte de cette propriété. Toutefois, un changement convenable de l'origine des temps permet de modifier le déphasage et pourquoi pas de le prendre nul.

On pourra donc adopter dans la suite :

$$\boxed{\vec{\underline{E}}_c = E_c \sin\left(\frac{m\pi x}{\ell}\right)\sin\left(\frac{p\pi y}{b}\right)\exp(i\omega t)\,\vec{e}_y}$$

avec E_c réel.

Remarque

Il n'est pas possible ici de translater l'origine des abscisses, car les plans délimitant la cavité sont définis.

d) Une densité surfacique de charge est présente en tout point d'une paroi, où la composante normale du champ électrique n'est pas nulle. Il ne peut s'agir des parois $x = 0$ et $x = \ell$ où le champ est tangentiel. Il en va de même pour les parois d'équations $y = 0$ ou $y = b$. Seules les parois d'équations $z = 0$ et $z = a$ possèdent donc des densités surfaciques de charge.

Pour le plan $z = 0$, la normale s'écrit $\vec{n} = \vec{e}_z$ donc :

$$\boxed{\sigma(x,y) = \varepsilon_0 E_c \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)\exp(i\omega t)}.$$

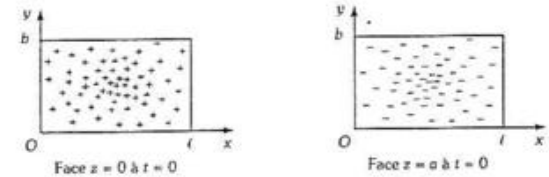
Le maximum d'amplitude pour les variations de σ est observé au milieu des faces, c'est-à-dire pour $x = \ell/2$ et $y = b/2$ (Fig. 11). Sur la face $z = a$, la densité est opposée, car le champ a même expression et la normale à la paroi est de sens contraire.

Remarque

Il s'agit de l'amplitude complexe de la densité surfacique : $\sigma = Re(\underline{\sigma})$.

Remarque

$\vec{n}' = -\vec{e}_z$.



Face $z = 0$ à $t = 0$ — Face $z = a$ à $t = 0$

Figure 11

e) Le calcul du champ magnétique peut être conduit, en notation complexe, grâce à l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{\underline{E}} = -i\omega\vec{\underline{B}}$$

On mène le calcul en coordonnées cartésiennes :

$$\begin{cases} -i\omega\underline{B}_x = E_c\dfrac{p\pi}{b}\cos\dfrac{p\pi y}{b}\sin\dfrac{m\pi x}{\ell}\exp(i\omega t) \\ -i\omega\underline{B}_y = -E_c\dfrac{m\pi}{\ell}\cos\dfrac{m\pi x}{\ell}\sin\dfrac{p\pi y}{b}\exp(i\omega t) \\ -i\omega\underline{B}_z = 0 \end{cases}$$

Erreur à éviter

Ne pas utiliser ici la relation entre $\vec{k}$, $\vec{E}$ et $\vec{B}$ valable pour une onde plane progressive.

On obtient ainsi :

$$\vec{\underline{B}}\begin{cases}\underline{B}_x = iE_c\dfrac{p\pi}{b\omega}\cos\dfrac{p\pi y}{b}\sin\dfrac{m\pi x}{\ell}\exp(i\omega t)\\ \underline{B}_y = -iE_c\dfrac{m\pi}{\ell\omega}\cos\dfrac{m\pi x}{\ell}\sin\dfrac{p\pi y}{b}\exp(i\omega t)\\ \underline{B}_z = 0\end{cases}$$

Technique de calcul

$Re[i\exp(i\omega t)] = -\sin(\omega t)$

L'obtention du champ $\vec{B}$ à partir de son amplitude complexe est effectuée en prenant la partie réelle :

$$\vec{B}\begin{cases}B_x = -E_c\dfrac{p\pi}{b\omega}\cos\dfrac{p\pi y}{b}\sin\dfrac{m\pi x}{\ell}\sin(\omega t)\\ B_y = +E_c\dfrac{m\pi}{\ell\omega}\cos\dfrac{m\pi x}{\ell}\sin\dfrac{p\pi y}{b}\sin(\omega t)\\ B_z = 0\end{cases}$$

Remarque

Le champ magnétique est en quadrature de phase par rapport au champ électrique. Le vecteur de Poynting moyen serait donc nul : il n'est pas étudié ici.

Puisque le champ magnétique a une composante suivant $\vec{e}_x$ et une composante suivant $\vec{e}_y$, la composante tangentielle de $\vec{B}$ n'est nulle sur aucune des faces. Il y a donc des courants surfaciques sur toutes les faces de la cavité.

f) La densité volumique d'énergie électromagnétique est la somme :

- de la densité d'énergie électrique $u_E = \dfrac{\varepsilon_0 E^2}{2}$
- et de la densité d'énergie magnétique $u_M = \dfrac{B^2}{2\mu_0}$.

Erreur à éviter

Ces termes sont à calculer avec les champs réels.

• Pour le terme électrique, la densité est :

$$u_E = \frac{\varepsilon_0}{2}E_c^2\sin^2\left(\frac{m\pi x}{\ell}\right)\sin^2\left(\frac{p\pi y}{b}\right)\cos^2(\omega t).$$

Il faut intégrer ce terme spatialement, sur tout le volume de la cavité. On peut alors remarquer que les fonctions $\sin^2\left(\dfrac{m\pi x}{\ell}\right)$ et $\sin^2\left(\dfrac{p\pi y}{b}\right)$ sont de valeur moyenne égale à $\dfrac{1}{2}$ sur les intervalles $[0,\ell]$ et $[0,b]$. Par conséquent, l'intégrale sur tout le volume de la cavité s'écrit simplement :

$$W_e(t) = \frac{\varepsilon_0}{2}E_c^2\frac{V}{4}\cos^2(\omega t) = W_0\cos^2(\omega t)$$

• Quant au calcul de W_m, il se conduit de la même manière, mais en ajoutant les contributions des deux composantes :

$$W_m(t) = \frac{E_c^2}{2\mu_0}\left[\left(\frac{p\pi}{b\omega}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{\ell\omega}\right)^2\right]\frac{V}{4}\sin^2(\omega t).$$

Remarque

$\varepsilon_0\mu_0 c^2 = 1$

L'utilisation de la relation de dispersion permet alors d'obtenir :

$$W_m(t) = W_0\sin^2(\omega t)$$

Il y a oscillation des termes W_e et W_m au cours du temps (Fig. 12). La somme reste constante, puisqu'aucun terme dissipatif n'a été pris en compte.

Une des constatations les plus importantes est bien que l'énergie électromagnétique est en moyenne identiquement répartie en énergie électrique et en énergie magnétique.

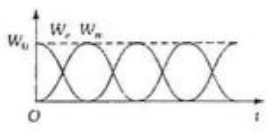


Figure 12

© Ediscience - La photocopie non autorisée est un délit

On peut donc proposer comme circuit électrique équivalent, un dipôle L-C. On le choisira exempt de résistance, pour ne pas faire apparaître de dissipation. En moyenne, les énergies emmagasinées dans la bobine et dans le condensateur sont identiques : mais de façon instantanée, elles varient en opposition de phase.

Remarque

Une cavité est un résonateur analogue à un circuit L-C

REMARQUE – On retient la méthode qui consiste à construire le champ électrique résultant à partir d'une première solution, complétée par un terme destiné à satisfaire les conditions aux limites. La suite est classique : calcul du champ magnétique à partir du champ électrique, expression des énergies emmagasinées. La conclusion de l'étude mérite d'être retenue.

2. Propagation d'une onde guidée — D'après Centrale-Supelec

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(Oxyz)$ associé à la base $(\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$. Le métal considéré dans cet exercice est parfait.

a) On considère deux plans métalliques parfaits d'équations $y = 0$ et $y = b$. De façon à éviter des pertes par rayonnement, on cherche à faire se propager selon la direction (Ox) une onde plane progressive, harmonique (monochromatique) de pulsation ω, polarisée rectilignement selon (Oz). Montrer que ceci est impossible.

On choisit alors d'envoyer cette onde en oblique entre les deux plans selon le vecteur d'onde $\vec{k}_1$ faisant l'angle $\alpha\,(0 < \alpha < \pi/2)$ avec l'axe (Ox).

Le champ électrique associé est noté :

$$\vec{\underline{E}}_1 = E_0\exp[i(\omega t - \vec{k}_1\cdot\overrightarrow{OM})]\vec{e}_z.$$

b) En utilisant notamment les lois de Descartes, déterminer l'expression du champ électrique $\vec{\underline{E}}_2$ de l'onde plane réfléchie. Déterminer les valeurs possibles de $\sin\alpha$ en fonction d'un entier p, de λ_0 (longueur d'onde dans le vide) et de b.

c) Donner l'expression de la somme $\vec{\underline{E}}$ des champs incident et réfléchi. Justifier sans calcul pourquoi ce champ est bien solution des équations de Maxwell. Dans quelle direction et quel sens y a-t-il propagation ? Déterminer en fonction de $k_0 = \omega/c$ et α le module du vecteur d'onde k_g dans le guide.

d) Exprimer en fonction de c et b la fréquence minimale f_c en-deçà de laquelle il ne peut y avoir de propagation. Quelle condition doit vérifier b pour qu'une onde de 2,5 GHz puisse se propager ?

e) Trouver la relation entre k_0 et k_g. Comment appelle-t-on cette relation ?

f) Trouver une relation entre la vitesse de phase v_φ et la vitesse de groupe v_g sans les calculer explicitement, puis donner leurs expressions en fonction de c, p et du rapport de la fréquence de l'onde sur f_c. Déterminer littéralement et numériquement la valeur de l'angle α pour lequel la vitesse de groupe est la plus grande (prendre $b = 6{,}6$ cm et $f = 2{,}5$ GHz). Quelle est la valeur de p associée ?

g) On ferme le guide par deux autres plans parallèles en $z = 0$ et $z = a$. Montrer sans calculs que cela est possible sans changer les solutions précédentes. Sur quels plans apparaissent des charges surfaciques ?

Conseils méthodologiques. a) et b) : Le champ électrique doit vérifier des conditions aux limites : ce sont elles qui vont fixer des contraintes. En cas de superposition de champs, c'est le champ résultant qui est concerné. c) : On doit reconnaître une solution classique dans un guide d'onde, c'est du cours ici. d) : À l'aide d'une inégalité portant sur le sinus de l'angle α, on peut obtenir une condition sur la fréquence. e) : Encore l'occasion de faire de la trigonométrie, mais avec cosinus et sinus maintenant ! f) : On retrouve une discussion très proche du cours. g) : Revenir à un examen des conditions aux limites, c'est ici le rôle joué par les différentes parois.

a) La forme générale d'une onde plane progressive monochromatique se propageant selon x est :

$$\vec{\underline{E}} = \vec{\underline{E}}_0 \exp[i(\omega t - kx)]$$

elle est solution de l'équation de d'Alembert si $\boxed{k = \frac{\omega}{c}}$.

Il reste à examiner les conditions aux limites.

La polarisation selon (Oz) impose $\vec{\underline{E}}_0 = \underline{E}_0 \vec{e}_z$, où $\underline{E}_0$ est une constante.

Or, le champ est tangentiel sur chacun des plans d'équation y = constante

Il doit donc être nul et par suite toute l'onde plane est nulle

b) D'après la loi de Descartes relative à la réflexion, $\vec{k}_2$ fait avec l'axe (Ox) l'angle $-\alpha$, donc :

$$\vec{k}_1 = \frac{\omega}{c}(\cos\alpha\,\vec{e}_x + \sin\alpha\,\vec{e}_y) \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{k}_2 = \frac{\omega}{c}(\cos\alpha\,\vec{e}_x - \sin\alpha\,\vec{e}_y)}$$

Le champ électrique de l'onde réfléchie s'écrit donc :

$$\vec{\underline{E}}_2 = \underline{E}_0' \exp[i(\omega t - \vec{k}_2 \cdot \overrightarrow{OM})]\vec{e}_z .$$

Annuler la composante tangentielle sur le plan $y = 0$ impose alors :

$$E_0 \exp\left[i\left(\omega t - \frac{\omega}{c}\cos\alpha x\right)\right] + \underline{E}_0' \exp\left[i\left(\omega t - \frac{\omega}{c}\cos\alpha x\right)\right] = 0 .$$

donc : $\boxed{\underline{E}_0' = -E_0}$

On en déduit l'expression du champ résultant :

$$\vec{\underline{E}} = E_0 \exp\left[i\left(\omega t - \frac{\omega}{c}\cos\alpha x\right)\right]\left[\exp\left(-i\frac{\omega}{c}\sin\alpha y\right) - \exp\left(i\frac{\omega}{c}\sin\alpha y\right)\right]\vec{e}_z$$

La relation trigonométrique $\exp(i\theta) - \exp(-i\theta) = 2i\sin\theta$ conduit à :

$$\vec{\underline{E}} = -2iE_0 \exp\left[i\left(\omega t - \frac{\omega}{c}\cos\alpha x\right)\right]\sin\left(\frac{\omega}{c}\sin\alpha y\right)\vec{e}_z .$$

La nullité du champ sur le plan d'équation $y = b$ impose maintenant une relation sur α :

$$\sin\left(\frac{\omega}{c}\sin\alpha b\right) = 0 .$$

Il existe donc un entier p tel que :

$$\boxed{\sin\alpha = \frac{p\pi c}{b\omega} = p\frac{\lambda_0}{2b}}$$

c) L'expression du champ résultant peut s'écrire ainsi :

$$\vec{\underline{E}} = -2iE_0 \sin\left(\frac{p\pi y}{b}\right)\exp\left[i\left(\omega t - \frac{\omega}{c}\cos\alpha x\right)\right]\vec{e}_z$$

Ce champ est naturellement solution des équations locales en raison de la linéarité de celles-ci. En effet, il est la superposition de deux ondes planes progressives monochromatiques, qui sont des solutions vérifiant ces équations

On reconnaît là l'expression d'une onde non plane, présentant une terme de propagation dans la direction x. Celle-ci a lieu selon les x croissants, car $\cos\alpha > 0$

⇨ **Remarque**

Dans un plan d'onde, le champ est uniforme

⇨ **Remarque**

La composante tangentielle de $\vec{E}$ s'annule sur des plans conducteurs parfaits

Technique de calcul

Une exponentielle n'est jamais nulle

⇨ **Remarque**

Examiner la condition en $y = b$ avant celle correspondant à $y = 0$ ne change rien au résultat

⇨ **Remarque**

$\lambda_0 = 2\pi\frac{c}{\omega}$

Technique de calcul

Par exemple :

$\operatorname{div}\vec{E}_1 = 0$ et $\operatorname{div}\vec{E}_2 = 0$ impose

$\operatorname{div}(\vec{E}_1 + \vec{E}_2) = 0$

© Levallois - La photocopie non autorisée est un délit

Le vecteur de l'onde guidée est par définition $\boxed{k_g = \frac{\omega}{c}\cos\alpha}$.

⇨ **Remarque**

Afin d'avoir un terme $\exp[i(\omega t - k_g x)]$.

d) En reprenant la condition du b), $\lambda_0 = \frac{2b\sin\alpha}{p}$, on montre donc que $\lambda_0 \geqslant 2b$.

⇨ **Remarque**

$\cos\alpha < 1$ et $p \geqslant 1$

Or $\lambda_0 = \frac{c}{f}$, donc la fréquence f est nécessairement supérieure à une valeur limite :

$$\boxed{f \geqslant \frac{c}{2b}}$$

Numériquement, on trouve une valeur de b minimale égale à 6 centimètres. On constate que les guides d'onde sont réservés aux hautes fréquences (voire hyperfréquences).

e) On reprend les différentes expressions faisant intervenir l'angle α et on utilise $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$.

On obtient ainsi : $k_g^2 + \frac{p^2\pi^2}{b^2} = \frac{\omega^2}{c^2}$, c'est-à-dire qu'en posant $k_0 = \frac{\omega}{c}$, on obtient l'équation de dispersion :

$$\boxed{k_g^2 + \frac{p^2\pi^2}{b^2} = k_0^2}$$

f) Par définition, la vitesse de phase s'exprime par $v_\varphi = \frac{\omega}{k_g}$ et la vitesse de groupe par $v_g = \frac{d\omega}{dk_g}$.

On peut donc différentier la relation de dispersion : $2k_g dk_g = \frac{2\omega d\omega}{c^2}$, et en déduire l'identité :

$$\boxed{v_\varphi v_g = c^2}$$

En outre, l'expression de k_g déduite de la relation de dispersion s'écrit :

$$k_g = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{p^2\pi^2}{b^2}} .$$

⇨ **Remarque**

On ne conserve que la racine positive car l'onde se propage selon les x croissants

On obtient ainsi :

$$\boxed{v_\varphi = c\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{f_{cp}^2}{f^2}}}} \quad \text{et} \quad \boxed{v_g = c\sqrt{1 - \frac{f_{cp}^2}{f^2}}}$$

où f_{cp} est la fréquence de coupure du mode de rang p : $f_{cp} = p\frac{c}{2b} = pf_c$.

La vitesse de groupe la plus grande correspond à la vitesse de phase la plus faible donc, à pulsation fixée, il s'agit du mode p tel que k_g soit le plus grand. D'après la relation de dispersion, c'est pour $p = 1$ que l'on obtient cet état de fait. Il s'agit notamment de la valeur de α la plus faible, c'est-à-dire pour α_1 donné par $\sin\alpha_1 = \frac{\lambda_0}{2b} = \frac{c}{2bf}$. On interprète ce résultat en disant que plus les ondes planes progressives monochromatiques composant l'onde résultante se propagent dans une direction proche de Ox, plus la vitesse selon cet axe est élevée.

Numériquement, avec les valeurs données, seul $p = 1$ est admissible et on trouve $\sin\alpha = 0{,}909$.

g) La solution proposée et étudiée jusqu'à présent est polarisée selon $\vec{e}_z$: elle présente donc un champ électrique orthogonal aux plans d'équations z = constante. Par conséquent, la présence des plans $z = 0$ et $z = a$ n'est pas de nature à remettre en cause les résultats précédents, car le champ y est normal. En revanche, la discontinuité de la composante normale qui apparaît sur ces plans a pour conséquence la présence d'une densité surfacique de charge

Pour approfondir

3. Onde dans un métal réel — D'après Centrale-Supelec

L'espace est muni du repère orthonormé $(Oxyz)$. Un métal remplit le milieu semi-infini $y \geqslant 0$: il constitue une modélisation d'une des parois d'un guide d'onde, délimité par des plans conducteurs distants de b. On cherche dans le métal une solution sous la forme :

$$\underline{\vec{E}} = \underline{E}(y)\exp[i(\omega t - kz)]\vec{e}_x$$

où la variation spatiale selon la direction de l'axe (Oz) est celle d'une onde plane progressive monochromatique de vecteur d'onde $\vec{k}$, mais où la présence du terme $\underline{E}(y)$ rappelle la forme des solutions dans un guide.

On considère pour les applications numériques que le milieu est en cuivre de conductivité non infinie $\gamma = 5{,}9\,10^7\ \mathrm{S\cdot m^{-1}}$. La fréquence des ondes considérées est 2,5 GHz.

1. Profondeur de pénétration

a) Montrer que dans le métal la densité volumique de charge est nulle.

b) Calculer dans le métal le rapport des ordres de grandeur du courant de déplacement $\vec{j}_d = \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ et du courant volumique de conduction $\vec{j}_v = \gamma \vec{E}$. Commenter.

c) En tenant compte de la question précédente, établir l'équation aux dérivées partielles vérifiée par le champ $\vec{E}$. En déduire l'équation vérifiée par $\underline{E}(y)$. On posera :

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}.$$

Calculer numériquement δ et comparer sa valeur à k, que l'on considérera de l'ordre de $\dfrac{\omega}{c}$.

d) En déduire l'expression de $\vec{j}_v$ en fonction de δ, ω, k, t, y, z et d'une constante que l'on notera $\vec{j}_0$.

2. Modélisation surfacique

On s'intéresse dans cette question au lien entre les représentations surfaciques et volumiques des courants. On considère un volume semi-infini selon Oy dont la base, d'aire $dS = dx\,dy$, appartient à la surface de séparation entre le vide et le métal.

a) En pratique, la profondeur de pénétration de l'onde dans le métal est faible. On peut donc modéliser les courants dans le métal par un champ de vecteur densité surfacique de courant $\vec{j}_s$. Établir la relation vectorielle entre $\vec{j}_s$ et le champ de vecteur densité volumique de courant $\vec{j}_v$.

b) On note $\langle dP_J \rangle$ la moyenne temporelle de la puissance dissipée par effet Joule dans une colonne d'aire dS. Trouver l'expression de $\langle dP_J/dS \rangle$ en fonction de γ et de $\vec{j}_v$.

c) En utilisant les résultats de la question **1.d)**, exprimer $\vec{j}_s$ et $\langle dP_J/dS \rangle$ en faisant intervenir notamment $\vec{j}_0$, δ et γ. En déduire :

$$\left\langle \frac{dP_J}{dS} \right\rangle = \frac{1}{\gamma\delta}\langle \vec{j}_s^{\,2} \rangle$$

d) Montrer que l'on pourrait considérer que la répartition surfacique $\vec{j}_s$ est équivalente énergétiquement à une densité de courant volumique uniforme sur une épaisseur δ_{eff}. Exprimer δ_{eff} en fonction de δ.

© Librairie - La photocopie non autorisée est un délit

Conseils méthodologiques. 1.a) : Il suffit ici d'analyser la forme du champ proposé, en recourant à une équation de Maxwell. **b)** : On peut en régime sinusoïdal exprimer l'amplitude de $\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ en fonction de celle de $\vec{E}$. **c)** : Pour obtenir une équation découplée en champ électrique, il faut éliminer $\vec{B}$ entre les équations de Maxwell : on procède ici comme dans le cas d'une onde dans le vide. **d)** : Pour atteindre la densité de courant, il faut d'abord déterminer l'expression du champ électrique solution. **2.a)** : Les deux distributions de courant sont équivalentes si les intensités qu'elles véhiculent s'identifient. **b)** : La puissance dissipée par effet Joule est celle qui est transférée par le champ aux porteurs de charge, c'est-à-dire celle qui correspond à la densité volumique $\vec{j} \cdot \vec{E}$. **c)** : On doit intégrer ici sur tout le domaine. **d)** : Le même calcul conduit avec la distribution équivalente proposée doit aboutir au même résultat.

1.a) D'après l'équation de Maxwell-Gauss, la densité volumique de charge s'écrit $\rho = \varepsilon_0 \operatorname{div}\vec{E}$. Or, le champ électrique n'a de composante que selon $\vec{e}_x$ et il ne dépend pas de la variable x, on en déduit : $\left\langle \dfrac{dP_J}{dS} \right\rangle = \dfrac{1}{\gamma\delta}\langle \vec{j}_s^{\,2} \rangle$

$$\boxed{\rho = \varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0}$$

Le milieu conducteur est neutre.

⇒ **Remarque**

On peut montrer plus généralement qu'un milieu conducteur perd sa charge avec une constante de temps $\dfrac{\varepsilon_0}{\gamma}$, c'est-à-dire quasi instantanément

b) L'amplitude de la variation temporelle de $\vec{j}_d = \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ est $\varepsilon_0 \omega E$, que l'on doit comparer à γE. On en déduit que la densité de courant de conduction est d'amplitude très supérieure à la densité de courant de conduction, tant que $\omega \ll \dfrac{\gamma}{\varepsilon_0}$.

Numériquement, avec la conductivité et la fréquence données :

$$\boxed{\frac{j_v}{j_d} = \frac{\gamma}{\varepsilon_0 \omega} = 4\,10^8}$$

On peut donc négliger le terme $\varepsilon_0 \mu_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ au second membre de l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B} \approx \mu_0 \vec{j}_v = \mu_0 \gamma \vec{E}$$

Il est naturel, pour un métal qui est un bon conducteur, de trouver que la densité de courant dominante est celle qui correspond au phénomène de conduction. On obtient ici l'équation de Maxwell-Ampère correspondant au régime quasi stationnaire.

⇒ **Remarque**

On a dû comparer les amplitudes, car les densités de courant $\vec{j}_v$ et $\vec{j}_d$ ne sont pas en phase, mais en quadrature. La comparaison n'est pas valable à chaque instant.

c) L'équation de Maxwell-Faraday s'écrit par ailleurs :

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Grâce à l'identité :

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{E})) = \overrightarrow{\operatorname{grad}}\left(\operatorname{div}\vec{E}\right) - \vec{\Delta}\left(\vec{E}\right)$$

on aboutit à :

$$\boxed{\vec{\Delta}(\vec{E}) = \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$$

Cette équation n'est pas à proprement parler une équation de propagation, car la dérivation temporelle est seulement d'ordre 1.

Une des conséquences est la sensibilité à un renversement formel du temps, c'est le signe de la présence d'une dissipation.

Le calcul du laplacien vectoriel en cartésiennes nécessite d'examiner successivement le laplacien scalaire de chaque composante.

Puisqu'ici le champ est polarisé selon $\vec{e}_x$, on écrit :

$$\vec{\Delta}(\underline{\vec{E}}) = \left(\frac{\partial^2 \underline{E}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \underline{E}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \underline{E}_x}{\partial z^2}\right)\vec{e}_x .$$

Avec l'expression proposée initialement, on obtient :

$$\vec{\Delta}(\underline{\vec{E}}) = \left(\frac{d^2 \underline{E}(y)}{dy^2} - k^2 \underline{E}(y)\right)\exp[i(\omega t - kz)]\vec{e}_x .$$

L'équation différentielle en $\underline{E}(y)$ déduite de l'équation de propagation précédente est ainsi :

$$\frac{d^2 \underline{E}(y)}{dy^2} - k^2 \underline{E}(y) = i\mu_0 \gamma \omega \underline{E}(y)$$

que l'on peut mettre sous la forme :

$$\boxed{\frac{d^2 \underline{E}(y)}{dy^2} = \left(k^2 + \frac{2i}{\delta^2}\right)\underline{E}(y)}$$

avec l'indication de l'énoncé, qui fait intervenir une distance caractéristique δ dont la valeur numérique est de l'ordre du micromètre.

Puisque $k = \frac{\omega}{c}$, on obtient l'inégalité :

$$\boxed{k \ll \frac{1}{\delta}}$$

d) La solution générale de l'équation différentielle précédente fait apparaître une combinaison linéaire de fonctions exponentielles $\exp(ry)$, où r est une racine carrée de $k^2 + \frac{2i}{\delta^2}$, donc de $\frac{2i}{\delta^2}$.

Deux solutions sont envisageables :

$$r = \pm\frac{1}{\delta} \pm i\frac{1}{\delta}.$$

Le milieu $y \geq 0$ est illimité, on doit par conséquent conserver le terme qui ne diverge pas : seule la solution $r = -\frac{1}{\delta} - i\frac{1}{\delta}$ est retenue.

Finalement, la solution construite ici prend la forme :

$$\boxed{\underline{\vec{E}} = \underline{E}_0 \exp\left(-\frac{y}{\delta}\right)\exp\left[i\left(\omega t - kz - \frac{y}{\delta}\right)\right]\vec{e}_x}$$

La densité volumique de courant, proportionnelle au champ électrique, s'écrit ainsi :

$$\underline{\vec{j}}_v = j_0 \exp\left(-\frac{y}{\delta}\right)\exp\left[i\left(\omega t - kz - \frac{y}{\delta}\right)\right]\vec{e}_x$$

on posera : $\vec{j}_0 = j_0\vec{e}_x$.

⇨ Remarque

L'effet Joule est dissipatif.

⇨ Remarque

En réalité, il faudrait prendre en compte la relation de dispersion correspondant au mode qui se propage dans le guide : $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{p^2\pi^2}{b^2}$

⇨ Remarque

On utilise l'approximation $k \ll \frac{1}{\delta}$

⇨ Remarque

La partie réelle de r doit être négative.

⇨ Remarque

La densité de courant s'atténue au fur et à mesure que l'on pénètre dans le métal.

© Ellipses - Le photocopillage tue l'édition et nuit à la création

2.a) Une même intensité doit circuler à travers une surface s'étendant sur une profondeur infinie, que l'on prenne en compte une modélisation volumique ou surfacique.

On obtient le respect de cette propriété en identifiant $j_s\,dz$ à $\left(\int_0^\infty \vec{j}_v\,dy\right)dz$, soit :

$$\boxed{\vec{j}_s = \int_0^\infty \vec{j}_v\,dy}.$$

b) La densité volumique de puissance dissipée par effet Joule s'écrit :

$$\vec{j}_v \cdot \vec{E} = \frac{j_v^2}{\gamma}.$$

La puissance moyenne dissipée dans le volume infini est donc :

$$\boxed{\left\langle\frac{dP_J}{dS}\right\rangle = \left\langle\int_0^\infty \frac{j_v^2}{\gamma}\,dy\right\rangle}.$$

c) On exploite l'expression de la densité volumique de courant :

$$\underline{\vec{j}}_v = j_0 \exp\left(-\frac{y}{\delta}\right)\exp\left[i\left(\omega t - kz - \frac{y}{\delta}\right)\right]\vec{e}_x$$

La relation entre les densités surfacique et volumique conduit à :

$$\underline{\vec{j}}_s = \int_0^\infty j_0 \exp\left(-\frac{y}{\delta}\right)\exp\left[i\left(\omega t - kz - \frac{y}{\delta}\right)\right]dy\,\vec{e}_x$$

avec $\int_0^\infty \exp\left(-\frac{y}{\delta}(1+i)\right)dy = \frac{\delta}{1+i}$

Finalement, l'amplitude complexe de la densité surfacique de courant est :

$$\underline{\vec{j}}_s = \frac{\delta}{1+i} j_0 \exp[i(\omega t - kz)]\vec{e}_x .$$

En notation réelle, on obtient ainsi :

$$\vec{j}_s(x,y,z,t) = \frac{j_0\delta}{\sqrt{2}}\cos\left(\omega t - kz - \frac{\pi}{4}\right)\vec{e}_x .$$

La valeur moyenne de $\vec{j}_s^{\,2}$ est calculée à partir de l'expression réelle et on aboutit à :

$$\boxed{\langle\vec{j}_s^{\,2}\rangle = \frac{j_0^2\delta^2}{4}}$$

On peut écrire de même la densité volumique de courant, à partir de la partie réelle de l'expression obtenue en **1.d)**. En valeur moyenne quadratique dans le temps :

$$\langle\vec{j}_v^{\,2}\rangle = j_0^2 \exp\left(-\frac{2y}{\delta}\right)\langle\cos^2\left(\omega t - kz - \frac{y}{\delta}\right)\rangle = \frac{j_0^2}{2}\exp\left(-\frac{2y}{\delta}\right)$$

Pour obtenir $\left\langle\frac{dP_J}{dS}\right\rangle$, l'intégration selon y fait appel au résultat :

$$\int_0^\infty \exp -2\frac{y}{\delta}\,dy = \frac{\delta}{2}$$

⇨ Remarque

Une densité surfacique de courant a pour dimension $\frac{I}{L}$ où I est une intensité et L une longueur.

Erreur à éviter

Il s'agit d'une grandeur quadratique : utiliser l'expression réelle.

⇨ Remarque

Un choix correct d'origine pour t permet d'adopter j_0 réel.

Technique de calcul

L'intégrale converge car

$$\left|\exp\left(-\frac{y}{\delta}(1+i)\right)\right| = \exp\left(-\frac{y}{\delta}\right)$$

intégrable sur $[0, \infty[$.

Technique de calcul

L'argument de $\frac{1}{1+i}$ vaut $-\frac{\pi}{4}$ le module $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

⇨ Remarque

$\vec{j}_s$ ne dépend plus de y bien entendu.

Technique de calcul

La moyenne temporelle $\langle\cos^2(\omega t + \varphi)\rangle$ est égale à $\frac{1}{2}$.

et on déduit l'expression suivante : $\langle \frac{dP_J}{dS} \rangle = \frac{j_0^2 \delta}{4\gamma}$.

Rapproché de l'expression obtenue précédemment pour $\langle \vec{j}_s^{\,2} \rangle$, ce résultat établit l'identité demandée :

$$\boxed{\langle \frac{dP_J}{dS} \rangle = \frac{1}{\gamma\delta} \langle \vec{j}_s^{\,2} \rangle}.$$

d) Considérons une densité de courant uniforme $\vec{j} = j_0 \cos(\omega t - kz)\vec{e}_x$, dans une couche d'épaisseur δ_{eff}. La dissipation surfacique de puissance serait alors égale à :

$$\langle \frac{dP_J}{dS} \rangle = \langle \frac{j^2}{\gamma} \rangle \delta_{eff} = \frac{j_0^2}{2\gamma} \delta_{eff}$$

Ainsi, en adoptant $\boxed{\delta_{eff} = \frac{\delta}{2}}$, on obtient une dissipation identique par les deux modèles.

⇨ Remarque

On choisit une amplitude égale à celle de la densité volumique en $y = 0$.

REMARQUE – Cette résolution a nécessité d'exploiter tous les éléments de théorie présentés dans le cours : des équations de propagation aux interprétations énergétiques, en passant par l'équation de dispersion et les conditions aux limites. Il montre que ces outils et méthodes sont communs à de nombreuses situations.

4. Dispersion dans un monocristal de chlorure de sodium — D'après Polytechnique

On considère un milieu dans lequel l'équation de dispersion s'écrit :

$$k^2c^2 = \varepsilon_{ef}\omega^2 \frac{\omega_L^2 - \omega^2}{\omega_T^2 - \omega^2}$$

où ω_L et ω_T sont des pulsations caractéristiques : $\omega_L = 4{,}4\ 10^{13}$ rad · s^{-1} et $\omega_T = 2{,}8\ 10^{13}$ rad · s^{-1}.

a) Montrer qu'il existe dans le domaine de fréquence une « bande interdite » pour laquelle une onde électromagnétique ne peut se propager dans le cristal ionique.

b) Quelle est, dans la bande interdite, l'allure de la dépendance spatiale de l'onde ?

c) Que peut-on prévoir lorsqu'une onde ayant une fréquence dans cette bande interdite arrive perpendiculairement sur la surface du cristal ?

d) Dans le domaine optique, $\omega^2 \gg \omega_L^2$: exprimer la vitesse de phase de l'onde en fonction de c et ε_{ef}. L'indice de réfraction est 1,55 pour $\lambda = 0{,}6$ µm. En déduire la valeur numérique de ε_{ef}.

Conseils méthodologiques. a) : Tout repose sur la nature réelle ou complexe du vecteur d'onde k. b) : Une étude de signe sur k^2 permet d'obtenir une classification des domaines de fréquence. c) : Si une onde ne pénètre pas dans le milieu, que peut devenir la puissance de l'onde incidente ? d) : On peut obtenir aisément la vitesse à partir de sa relation de définition. L'indice étant donné par un rapport de vitesses, ce n'est plus qu'une application numérique.

a) En examinant l'existence d'éventuelles solutions sous la forme d'ondes planes progressives et monochromatiques, on utilise des expressions de la dépendance spatio-temporelle du champ électrique comme :

$$\underline{\vec{E}} = \vec{E}_0 \exp j(\omega t - kx)$$

⇨ Remarque

L'axe Ox définit la direction de propagation

© Lavoisier – La photocopie non autorisée est un délit

On obtient alors les propriétés du vecteur d'onde $\vec{k}$ grâce à l'équation de dispersion. Ici, k^2 est réel, donc deux éventualités sont à considérer :

– si k^2 est positif, deux solutions réelles sont obtenues, correspondant à deux ondes progressives se propageant en sens inverses ;

– si k^2 est négatif, les solutions sont imaginaires pures, ce qui correspond à des ondes évanescentes, ne se propageant pas.

On entrevoit donc la méthode : il faut étudier selon la valeur de ω le signe de k^2 pour définir les différentes bandes spectrales : transparence ou bandes interdites.

Compte tenu de l'inégalité $\omega_L > \omega_T$, on distingue :

– $\omega < \omega_T$. Alors numérateur et dénominateur sont positifs dans l'expression de k^2, il s'agit d'une zone de transparence ;

– $\omega_T < \omega < \omega_L$. k est imaginaire pur, les ondes de la forme proposée sont évanescentes : elles ne se propagent pas dans le cristal ;

– $\omega_L < \omega$. Numérateur et dénominateur étant négatifs dans l'expression proposée, on retrouve un domaine où k est réel, c'est-à-dire une zone de transparence.

L'intervalle de pulsation correspondant à la bande interdite est $[\omega_T, \omega_L]$ (Fig. 13).

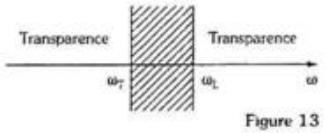


Figure 13

b) Si on considère une valeur imaginaire de k :

$$k = \pm\frac{j}{\delta}.$$

l'expression de l'onde plane recherchée devient :

$$\underline{\vec{E}} = \vec{E}_0 \exp j(\omega t - kx) = \vec{E}_0 \exp\left(\mp\frac{x}{\delta}\right)\exp(j\omega t)$$

Le signe ± est déterminé par le problème :

– si l'onde est émise depuis le plan d'équation $x = 0$ dans le domaine $x \geq 0$, seul le terme dont l'amplitude décroît avec x est physiquement acceptable :

$$\boxed{\underline{\vec{E}} = \vec{E}_0 \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)\exp(j\omega t)} ;$$

– s'il s'agit d'un milieu indéfini selon $-\vec{u}_x$ ($x \leq 0$), on adoptera l'autre signe.

– enfin, si le milieu est limité par des plans d'équations $x = x_1$ et $x = x_2$, on aura dans l'intervalle $[x_1, x_2]$ une combinaison linéaire des deux ondes solution :

$$\boxed{\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_1 \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right)\exp(j\omega t) + \underline{\vec{E}}_2 \exp\left(+\frac{x}{\delta}\right)\exp(j\omega t)}$$

⇨ Remarque

Les conditions aux limites feront $\underline{\vec{E}}_1$ et $\underline{\vec{E}}_2$.

c) L'onde incidente ne peut se propager dans le milieu : le vecteur de Poynting moyen est nul.

L'onde ne pénètre donc pas dans le milieu et se réfléchit à sa surface. Le module du coefficient de réflexion est donc attendu égal à 1 dans cette bande de fréquence.

⇨ Remarque

Le fait que k soit imaginaire pur a comme conséquence que les champs électrique et magnétique vibrent en quadrature de phase.

d) La vitesse de phase de l'onde monochromatique est $v_\varphi = \frac{\omega}{k}$ et se calcule à partir de l'équation de dispersion.

Si $\omega^2 \gg \omega_L^2$, on peut affirmer que $\omega^2 \gg \omega_T^2$, puisque $\omega_L > \omega_T$, donc une expression approchée de l'équation de dispersion est :

$$k^2c^2 \approx \varepsilon_{ef}\omega^2$$

On déduit une relation simple : $\boxed{v_\varphi = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_{el}}}}$.

L'indice de réfraction optique du milieu est par définition $n = \frac{c}{v_\varphi}$, c'est donc ici $\sqrt{\varepsilon_{el}}$. La valeur de longueur d'onde proposée correspond à une pulsation.

$$\omega = 3{,}1\,10^{15}\ \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

Ainsi, $\omega \gg \omega_L$, on peut donc utiliser l'approximation, et obtenir simplement :

$$\boxed{\varepsilon_{el} = n^2 = 2{,}40}.$$

Remarque

Dans le vide, $\omega = 2\pi\frac{c}{\lambda}$.

5. Réflexion d'une onde sur un plasma_____ D'après Oral Mines-Ponts

L'espace étant muni d'un repère orthonormé direct (Oxyz), le demi-espace $z < 0$ est vide, tandis qu'un plasma de pulsation caractéristiques ω_p occupe le demi-espace $z > 0$ (Fig. 14). Une onde plane progressive monochromatique, se propageant dans le sens des z croissants arrive en incidence normale sur le plan $z = 0$. On souhaite déterminer les propriétés de l'onde réfléchie.

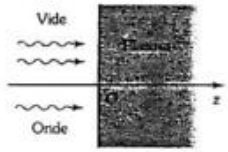


Figure 14

a) Justifier qualitativement que l'on ne restreint pas le problème en supposant l'onde incidente polarisée rectilignement dans la direction $\vec{u}_x$. On montrera pour ce faire que les propriétés d'une onde polarisée selon $\vec{u}_y$ seraient identiques.

b) On adopte dorénavant l'expression suivante pour l'onde incidente (milieu $z < 0$) :

$$\underline{\vec{E}}_i = E_0 \exp[i(\omega t - kz)]\vec{e}_x$$

rappeler l'expression de k.

En déduire l'expression du champ magnétique $\underline{\vec{B}}_i$ de l'onde incidente.

c) Une onde réfléchie se propage dans le milieu $z < 0$, on se propose de lui donner l'expression :

$$\underline{\vec{E}}_r = \rho E_0 \exp[i(\omega t + kz)]\vec{e}_x$$

où ρ est un nombre *a priori* complexe, le coefficient de réflexion en amplitude.

Donner l'expression du champ magnétique $\underline{\vec{B}}_r$ correspondant.

d) Le milieu constitué par le plasma présente une relation de dispersion qui s'écrit :

$$k^2c^2 = \omega^2 - \omega_p^2$$

Il laisse les ondes se propager, sous réserve que leur pulsation vérifie une certaine condition. Quelle est-elle ?

Préciser l'expression du champ électromagnétique qui existe dans le milieu $z > 0$, en faisant intervenir un coefficient de transmission complexe τ.

e) On admet qu'il ne peut y avoir de densité surfacique de courant dans le plan $z = 0$, en déduire un système d'équations dont sont solutions ρ et τ.

f) Quel est le coefficient de réflexion en puissance dans le cas où le plasma n'est pas transparent ? Interpréter.

© Ellipses - La photocopie non autorisée est un délit

Conseils méthodologiques. a) : Examiner les invariances du problème permet de comparer les propriétés des deux situations envisagées. b) : Dans le vide, $\vec{k}$ est lié à ω et c ; il sert à exprimer simplement le champ magnétique (structure de l'onde plane progressive monochromatique). c) : Le milieu $z < 0$ étant vide, on applique la méthode précédente en veillant à utiliser le vecteur d'onde $\vec{k}_r = -\vec{k}$. d) : La résolution de l'équation de dispersion permet d'obtenir un vecteur d'onde éventuellement complexe $\vec{k}_t$. On peut alors écrire une expression du champ électromagnétique. e) : Le champ résultant doit vérifier des conditions aux limites. f) : On peut exprimer le coefficient de réflexion en puissance R en fonction de ρ, en faisant attention au fait que ρ peut être complexe.

a) L'ensemble des deux milieux et de leur plan de séparation est un système invariant autour de l'axe (Oz). L'onde incidente étant en incidence normale, cette invariance est également présentée par la sollicitation imposée au système.

Ainsi, examiner le cas d'une onde incidente polarisée rectilignement dans la direction $\vec{u}_x$ permettra de déduire aisément le résultat obtenu pour une onde polarisée selon $\vec{u}_y$.

Remarque

En incidence oblique, le plan d'incidence aurait constitué un plan privilégié.

Une onde de polarisation quelconque pouvant toujours se décomposer en somme de deux ondes polarisées rectilignement et les milieux étant linéaires, on peut déduire de l'étude conduite ici les propriétés en présence de toute polarisation de l'onde incidente.

Remarque

Il y aurait même coefficient de réflexion.

b) Dans le vide, l'équation de dispersion s'écrit $k^2c^2 = \omega^2$, ce qui donne :

$$k = \pm\frac{\omega}{c}.$$

Ici, l'onde est progressive selon z croissant, donc :

$$\vec{k} = \frac{\omega}{c}\vec{u}_z.$$

Remarque

La linéarité est nécessaire à la superposition des solutions.

On peut alors exprimer le champ magnétique grâce à l'équation de structure $\vec{B}_i = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}_i}{\omega}$, c'est-à-dire :

$$\boxed{\underline{\vec{B}}_i = \frac{E_0}{c}\exp[i(\omega t - kz)]\vec{e}_y}$$

Remarque

Expression valable dans le milieu $z < 0$.

c) Pour l'onde réfléchie, le vecteur d'onde est :

$$\vec{k}_r = -\vec{k} = -\frac{\omega}{c}\vec{u}_z.$$

Erreur à éviter

L'onde se propage selon z décroissant d'où le signe −.

On déduit ainsi l'expression de $\vec{B}_r$ par :

$$\vec{B}_r = -\frac{\vec{k} \wedge \vec{E}_r}{\omega}.$$

En notation complexe, on obtient :

$$\boxed{\underline{\vec{B}}_r = -\rho\frac{E_0}{c}\exp[i(\omega t + kz)]\vec{e}_y}$$

où ρ est le coefficient de réflexion en amplitude.

d) Le plasma ne laisse les ondes se propager que pour une pulsation supérieure à ω_p.

Dans le cas contraire, un champ électromagnétique existe dans le plasma, mais il constitue une onde évanescente.

En notant k_t une racine éventuellement complexe de $\frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$, on peut écrire l'expression suivante :

$$\boxed{\underline{\vec{E}}_t = \tau \underline{E}_0 \exp[i(\omega t - k_t z)]\vec{e}_x}.$$

Parmi les deux valeurs de k_t, solutions de l'équation de dispersion (les deux racines opposées), on retiendra :

- si $\omega > \omega_p$, la racine positive, qui correspond à une onde se propageant selon les z croissants (onde transmise dans le milieu transparent) ;
- si $\omega < \omega_p$, la racine qui ne conduit pas à une divergence de l'amplitude du champ électrique pour z tendant vers l'infini.

La relation de structure liant les champs électromagnétiques est obtenue à partir de l'équation de Maxwell-Faraday qui, dans le plasma, a même écriture que dans le vide :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \underline{\vec{B}}_t = \frac{\vec{k}_t \wedge \underline{\vec{E}}_t}{\omega}.$$

⇨ Remarque

Si $\omega > \omega_p$, k est réel, sinon il est imaginaire pur.

⇨ Remarque

$$k_t = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c}$$

⇨ Remarque

$$k_t = -i\frac{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}{c}$$

La différence notable apparaît dans le fait que k_t est complexe. Finalement, le champ électromagnétique dans le milieu $z > 0$ prend dans tous les cas la forme :

$$\boxed{\underline{\vec{E}}_t = \tau \underline{E}_0 \exp[i(\omega t - k_t z)]\vec{e}_x} \quad \text{et} \quad \boxed{\underline{\vec{B}}_t = \frac{k_t}{\omega}\tau \underline{E}_0 \exp[i(\omega t - k_t z)]\vec{e}_y}.$$

e) Il faut examiner ici les conditions aux limites, sachant que l'absence de densité surfacique de courant ajoute la continuité de la composante tangentielle du champ magnétique à celle, toujours vraie, concernant le champ électrique.

De part et d'autre du plan $z = 0$, on trouve la superposition des champs incident et réfléchi ($z \to 0^-$) et le champ transmis ($z \to 0^+$). Ainsi :

$$\begin{cases} \underline{E}_0 + \rho \underline{E}_0 = \tau \underline{E}_0 \\ \frac{\underline{E}_0}{c} - \rho \frac{\underline{E}_0}{c} = \frac{k_t}{\omega}\tau \underline{E}_0 \end{cases}$$

⇨ Remarque

Il n'y a pas de composantes normales ici.

Les solutions de ce système sont réelles si k_t est réel ($\omega > \omega_p$), elles sont complexes sinon.

f) La résolution du système peut être obtenue en sommant membre à membre la première équation et la seconde multipliée par c :

$$2 = \tau\left(1 + \frac{k_t c}{\omega}\right)$$

elle fournit l'expression suivante du coefficient de réflexion :

$$\boxed{\rho = \frac{1 - \frac{k_t c}{\omega}}{1 + \frac{k_t c}{\omega}}}.$$

On note que numérateur et dénominateur sont des nombres complexes conjugués lorsque k_t est imaginaire pur.

Or, la puissance étant une grandeur quadratique de l'amplitude d'une onde, elle est proportionnelle au carré du module de l'amplitude complexe.

© Lavoisier – La photocopie non autorisée est un délit

Ainsi, le rapport entre la puissance de l'onde réfléchie et la puissance de l'onde incidente est :

$$R = |\rho|^2.$$

Pour $\omega < \omega_p$:

$$\boxed{R = |\rho|^2 = 1}.$$

Dans le cas où le plasma ne laisse pas pénétrer l'onde incidente, il la réfléchit intégralement. On comprend ce fait si l'on invoque la conservation de la puissance : ne pouvant transiter dans le second milieu et n'y étant pas absorbée, la puissance de l'onde incidente se retrouve intégralement dans l'onde réfléchie.

Technique de calcul

Deux nombres complexes conjugués ont même module.

Interférences optiques

Méthodes

Le cours en questions

1 ▬ Propriétés générales

1.1 Quelle propriété doivent vérifier les fréquences et phases de deux ondes monochromatiques pour produire des interférences ?

• Les fréquences des deux ondes doivent être égales.

• En un point donné, le déphasage entre les deux ondes doit conserver une valeur ne variant pas aléatoirement : on doit ainsi superposer deux trains d'onde identiques.

En pratique, les deux ondes doivent émaner d'un même point d'une unique source.

• Le déphasage est une fonction du point d'observation. Ainsi, la valeur du déphasage varie sur l'écran, ce qui provoque une variation spatiale d'intensité lumineuse ; c'est l'effet visible du phénomène d'interférences.

1.2 Qu'appelle-t-on franges sombres, brillantes et noires ?

• Les franges sombres sont des lieux à intensité minimale. Lorsque l'intensité est nulle, on parle de franges noires (l'absence de lumière donne effectivement une perception de ton noir).

• Les franges brillantes sont des lieux à intensité maximale.

© Hachette - La photocopie non autorisée est un délit

2 ▬ Formule des interférences à deux ondes

2.1 Comment s'exprime l'intensité en un point où interfèrent deux ondes monochromatiques cohérentes ?

• En notant I_1 et I_2 les intensités des deux ondes et φ leur déphasage, le calcul de la moyenne quadratique de l'amplitude résultante donne :

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos(\varphi) \quad .$$

On parle généralement de formule des interférences à 2 ondes.

2.2 Quelle est la valeur du déphasage φ sur les franges sombres et brillantes ?

Retenir qu'une frange est un lieu à déphasage φ constant.

• Les franges brillantes correspondent à un déphasage nul modulo 2π.

• Les franges sombres sont obtenues en des points où $\varphi = \pi\,[2\pi]$.

2.3 Que devient l'expression de l'intensité lorsque $I_1 = I_2 = I_0$? Préciser les valeurs extrêmes.

• $I_1 = 2I_0(1 + \cos(\varphi))$.

• $I_{max} = 4I_0$. La superposition de deux ondes de même amplitude et vibrant en phase donne une onde résultante d'amplitude double. Puisque l'intensité dépend quadratiquement de l'amplitude, il est naturel d'obtenir une intensité maximale quadruple de I_0.

Cet aspect sera repris et discuté dans le paragraphe relatif au contraste.

• L'intensité minimale est nulle : les franges sont noires .

3 ▬ Contraste

3.1 Quelle est la définition du contraste d'une figure d'interférences entre deux ondes monochromatiques cohérentes ?

• En notant I_M et I_m respectivement les intensités maximale et minimale, le contraste est défini par :

$$C = \frac{I_M - I_m}{I_M + I_m} \quad .$$

3.2 Quelles sont les valeurs extrêmes du contraste ; à quelles situations correspondent-elles ?

Le contraste est un nombre sans dimension.

• La définition donnée ci-dessus impose une valeur réelle comprise entre 0 et 1.

• La valeur maximale du contraste est 1. Les franges sombres sont alors noires (intensité nulle).

• La valeur minimale est obtenue lorsque l'intensité des franges sombres et des franges brillantes est identique. On est alors dans une situation de brouillage.

3.3 Comment s'exprime le contraste en fonction des intensités respectives des deux ondes qui interfèrent ?

• En notant I_1 et I_2 les intensités :

$$C = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2} = \frac{2\sqrt{\frac{I_1}{I_2}}}{\frac{I_1}{I_2} + 1} \quad ;$$

• Dans ce contexte où tout est idéal par ailleurs, le contraste apparaît comme une fonction du seul rapport des intensités.

⇒ Naturellement, $C(I_1/I_2) = C(I_2/I_1)$, car numéroter les ondes 1 et 2 est arbitraire.

• La situation de contraste maximal correspond à la situation d'égalité des deux intensités : $I_1 = I_2$.

4 ▬ Différence de marche

En distinguant les cas d'un milieu homogène ou d'une succession de milieux homogènes, quelle est la définition du chemin optique ?

• Lorsqu'une onde se propage dans un milieu homogène d'indice n, on définit le chemin optique le long d'un rayon rectiligne en multipliant la distance géométrique parcourue par l'indice : $[AB] = nAB$.

• Pour un parcours successif de milieux homogènes, on additionne les chemins optiques correspondants.

Lorsqu'une onde se réfracte entre deux milieux, il n'y a pas lieu d'ajouter de différence de marche supplémentaire, il en va de même dans le cas d'une réflexion sur un milieu moins réfringent (d'indice moins élevé). Par contre, lorsque le rayon subit une réflexion sur un milieu plus réfringent que celui dans lequel il se propage, ou lorsque la réflexion a lieu sur un miroir métallique, il convient d'ajouter un chemin optique égal à une demi-longueur d'onde pour rendre compte du déphasage de π qui en résulte.

⇒ Le coefficient de réflexion $\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$ est négatif si $n_2 > n_1$.

4.1 Comment définit-on la différence de marche et comment la relie-t-on au déphasage ? Quel est le lien avec la différence des temps de parcours ?

• On définit la différence de marche comme la différence des chemins optiques parcourus par deux ondes, depuis le même point source S jusqu'à un point d'observation M donné.

• En notant λ la longueur d'onde dans le vide et δ la différence de marche :

© La Librairie - La photocopie non autorisée est un délit

$$\varphi = \frac{2\pi\delta}{\lambda} \quad ;$$

L'homogénéité de ces relations doit systématiquement être examinée pour éviter les erreurs : ici le rapport d'une longueur par une vitesse donne bien un temps.

• Les ondes se propagent à vitesse c/n dans les milieux traversés, donc la différence des temps de parcours s'écrit $\Delta t = \delta/c$.

4.2 Quelle relation peut-on écrire concernant la différence de marche pour une frange brillante ou une frange sombre ?

Le rapport δ/λ est appelé ordre d'interférence. Il est entier sur une frange brillante.

• Sur une frange brillante, la différence de marche est un multiple entier de la longueur d'onde.

• En tout point d'une frange sombre, la différence de marche est congrue à une demi-longueur d'onde, modulo la longueur d'onde :

L'ordre d'interférence est dit demi-entier.

$$\delta = \frac{\lambda}{2}[\lambda] \quad ;$$

5 ▬ Interférences à deux points sources

5.1 Citer un exemple de dispositif à division du front d'onde permettant de créer deux points sources vibrant en phase

• Par un dispositif de trous d'Young on obtient, *via* le phénomène de diffraction (*cf.* chapitre Diffraction), deux points sources secondaires. Pour assurer un déphasage nul entre les vibrations émises par ces deux points, il faut les situer à égale distance optique du point source réel.

Dans le cas où l'on utilise un seul miroir (miroir de Lloyd), il faut penser à prendre en compte une différence de marche supplémentaire égale à une demi-longueur d'onde, pour tenir compte du déphasage de π à la réflexion.

• Deux miroirs (miroirs de Fresnel) formant chacun une image du point source réel permettent d'obtenir deux points sources secondaires. La présence d'une réflexion sur le trajet des deux rayons n'induit pas de différence de marche supplémentaire.

5.2 Pour deux points source S_1 et S_2 voisins de l'origine O, proposer une expression de la différence de marche en un point M très éloigné.

• Si le milieu présente un indice n homogène, la différence de marche $\delta = [S_2M] - [S_1M]$ se résume à :

$$\delta = n(S_2M - S_1M) \quad .$$

Pour l'établissement de cette expression, se reporter au savoir-faire ci-dessous : Savoir calculer une différence de marche.

• Le point M étant très éloigné, on peut écrire au premier ordre $\delta \approx n\overrightarrow{S_2S_1} \cdot \vec{u}$ où $\vec{u}$ est le vecteur unitaire $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{OM}}{OM}$.

5.3 On utilise un écran placé à grande distance pour observer les interférences. Quelle est la forme des franges selon que l'écran est orthogonal à (S_1S_2) ou parallèle à cette droite ?

• Si l'écran est orthogonal à (S_1S_2), la symétrie de révolution assure que les franges sont des cercles concentriques (Fig. 1). Le centre de ces anneaux est situé à l'intersection de l'écran et de la droite (S_1S_2).

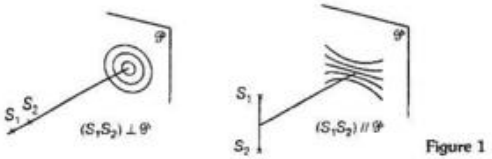


Figure 1

• Si l'écran est parallèle à la droite des sources, les franges sont de forme hyperbolique. Toutefois, si l'observation se fait dans une petite zone autour du projeté de l'origine sur le plan, les franges apparaissent rectilignes, parallèles et équidistantes.

6 ▬ Interférences en lumière polychromatique

6.1 Quelle méthode de raisonnement doit-on utiliser pour étudier des interférences en lumière polychromatique ? Quelle grandeur doit-on sommer, l'amplitude, l'intensité ?

• Des rayonnements de fréquences différentes sont incohérents et n'interfèrent donc pas : leurs intensités se somment donc tout simplement.

• La méthode qu'il convient d'utiliser est alors la suivante :

– pour chaque composante spectrale considérée comme une onde monochromatique, on additionne les amplitudes complexes des ondes qui interfèrent en un même point ;

– on calcule ensuite l'éclairement en déterminant le carré du module de l'amplitude complexe résultante.

Les éclairements ainsi obtenus pour les différents éléments spectraux sont alors sommés.

⇒ Pour le détail d'une application, se reporter au savoir-faire ci-dessous : Savoir raisonner en lumière polychromatique.

6.2 Quels sont les différents types de spectres des rayonnements disponibles au laboratoire ?

• La lumière blanche obtenue à l'aide d'une lampe à incandescence présente un spectre continu. Sa densité spectrale est donc une fonction de la longueur d'onde (ou de la fréquence) : la sommation des éclairements fait ainsi intervenir une intégrale.

© Lavoisier - La photocopie non autorisée est un délit

Une description plus fine de la structure de ces raies peut nécessiter une représentation par une densité spectrale fonction continue de la longueur d'onde.

• Les lampes à vapeur métallique émettent un rayonnement que l'on peut considérer en première approche comme constitué d'une superposition d'ondes monochromatiques de longueurs d'onde distinctes. Le spectre fait ainsi apparaître des raies, la sommation des différents éclairements associés est discrète.

• Pour générer une lumière monochromatique, on peut utiliser un LASER, assimilable en première approche à une onde composée d'une seule longueur d'onde constante. Il est également possible d'utiliser un filtre monochromateur sur un rayonnement polychromatique ; il faut alors s'assurer que la bande passante est suffisamment faible pour que la largeur du spectre puisse être négligée.

6.3 On utilise une lampe à vapeur de sodium en se limitant aux composantes jaunes. Quelle est la nature du spectre obtenu ? Qu'observe-t-on sur le contraste des interférences lorsque croît la différence de marche ?

• Le spectre du sodium contient un doublet de raies : ensemble de deux longueurs d'onde très proches et de même intensité.

• Bien que de fréquences proches, ces rayonnements sont incohérents et ce sont leurs éclairements qui se somment au point d'observation. Ainsi, si les franges brillantes données par une des raies coïncident avec les franges sombres de l'autre composante, il s'ensuit un brouillage : on ne distingue plus de franges.

Retenir qu'en lumière polychromatique, le contraste est excellent pour une différence de marche faible, donc au voisinage de la frange centrale.

• Au voisinage de la frange centrale, d'un système d'interférences, les franges brillantes données par les deux raies coïncident quasiment et le contraste est excellent. Puis, la différence de marche augmentant, on voit diminuer le contraste jusqu'à son annulation, c'est le premier brouillage.

• Pour un doublet de raies, le contraste se rétablit ensuite jusqu'à redevenir excellent, puis il décroît à nouveau : on observe des brouillages successifs (*cf.* savoir-faire).

7 ▬ Interférences avec une source étendue

7.1 Quel peut être l'intérêt d'élargir spatialement la source dans une expérience d'interférences ?

• En augmentant la taille d'une source, on accroît la quantité de lumière entrant dans l'interféromètre et ainsi la luminosité de la figure d'interférences.

7.2 Quel phénomène limite la possibilité d'étendre la source ?

• Les différents points de la source émettent des vibrations incohérentes, car déphasées les unes par rapport aux autres de façon aléatoire.

• Ainsi, on doit sommer les éclairements produits par les différents points source.

• Or, si les franges brillantes et sombres données par chacun des points de la source ne coïncident pas, le contraste va diminuer et la visibilité de la figure d'interférence deviendra insuffisante. Un brouillage peut intervenir, qu'il faut éviter.

7.3 Dans l'expérience des fentes d'Young, quelle forme peut-on donner à la source pour augmenter la luminosité sans affaiblir le contraste ?

• En adoptant pour la source une forme de fente, parallèle aux fentes diffractantes, on accroît la quantité de lumière tout en obtenant la superposition des systèmes de franges issus des différents points. La luminosité augmente et le contraste reste excellent.

• Le choix de la largeur de cette fente source résulte toutefois du compromis entre luminosité et contraste.

• Dans le cas des miroirs de Fresnel, une fente source parallèle à l'arête du dièdre formé par les miroirs est également une solution pour augmenter la luminosité sans nuire au contraste.

7.4 Dans quelle famille d'interféromètres range-t-on les miroirs de Fresnel et les fentes d'Young ? Quelle propriété présentent-ils vis-à-vis de l'élargissement de la source ?

• Les interférences sont obtenues dans ces dispositifs par division du front d'onde.

• Ces interférences sont délocalisées : en présence d'une source étendue, on peut les observer dans tous les lieux du champ d'interference (intersection des deux faisceaux produits) mais dans aucun lieu on ne peut préserver un bon contraste lorsque la source s'étend.

© Libraire - La photocopie non autorisée est un délit

Les savoir-faire clefs

Conseils méthodologiques

1 ■ Savoir calculer une différence de marche.

1.1 La différence de marche est obtenue par soustraction de deux chemins optiques parcourus dans des milieux homogènes : elle ne comporte donc que des distances. La description de la figure d'interférences s'obtient en examinant en quels points l'ordre d'interférence $p = \frac{\delta}{\lambda}$ est entier ou demi-entier.

1.1 Distances finies

Un point source ponctuel S_0 est placé à distance $d = 20\,\text{cm}$ d'un cache percé de deux trous (Fig. 2). Ces orifices quasi ponctuels constituent ce que l'on nomme des trous d'Young T_1 et T_2, ils sont placés de part et d'autre de l'axe (S_0z), à égale distance $a = 0{,}5\,\text{mm}$. On note (Ox) l'axe passant par T_1 et T_2, O étant au milieu de ces points.

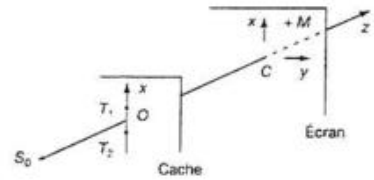


Figure 2

a) Un écran est situé à distance $D = 1\,\text{m}$ du cache, on utilise le système de coordonnées (C,x,y), où C est à l'intersection de l'axe (Oz) et de l'écran.
Soit un point M de l'écran, définir la différence de marche $\delta(M)$ en notant n l'indice du milieu dans lequel se situe l'expérience.
Dans la suite, on assimile le milieu au vide : $n = 1$.

b) Exprimer $\delta(x,y)$ à l'ordre le plus bas non nul, en $\frac{x}{D}$, $\frac{y}{D}$ et $\frac{a}{D}$. Interpréter le résultat en terme de forme et direction des franges d'interférences.

c) La longueur d'onde du rayonnement est $\lambda = 450\,\text{nm}$, préciser la valeur de l'interfrange. Quelle est la position de la frange centrale définie par $\delta = 0$?

1.2 La présence d'une lentille a pour conséquence de rendre inopérant tout calcul reposant sur des tracés, dans une figure schématique où la lentille est représentée par son symbole ↕. Il faut recourir au théorème de Malus.

1.2 Lentille d'un collimateur

La source ponctuelle S_0 est maintenant placée au foyer objet d'une lentille convergente ↕, sur l'axe de laquelle se trouve le cache percé de deux trous d'Young (Fig. 3). La distance focale est $f' = 30\,\text{cm}$.

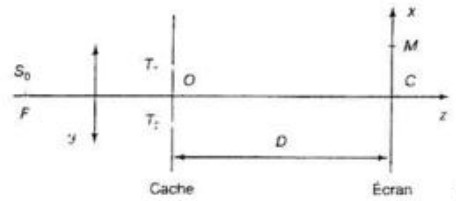


Figure 3

a) Reprendre la calcul de la différence de marche $\delta(x,y)$ en un point M de l'écran d'observation.

b) Quelle est la figure d'interférences obtenue ?

1.3 Lentille d'un objectif

La source ponctuelle S_0 est toujours placée au foyer objet d'une lentille convergente $\mathcal{L}$, mais on ajoute une lentille convergente $\mathcal{L}'$ derrière le cache percé des deux trous d'Young (Fig. 4). Les lentilles $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ ont même axe optique (Oz) qui est la médiatrice du segment $[T_1T_2]$: la distance focale de $\mathcal{L}'$ est $f' = 50$ cm.

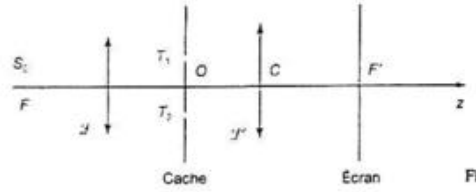


Figure 4

a) Reprendre le calcul de la différence de marche $\delta(x,y)$ en un point M de l'écran d'observation.

b) Quelle est la modification sur la figure d'interférences, par rapport aux résultats obtenus précédemment ?

c) Une configuration dans laquelle la source S_0 serait située sur l'axe (Oz) en l'absence de lentille $\mathcal{L}$ donnerait-elle des résultats différents ?

1.1.a) La différence de marche est la différence de chemin optique entre le point source S_0 et le point M, selon que l'on passe par le trou T_1 ou le trou T_2. On peut donc écrire :

$$\delta(M) = [S_0T_2M] - [S_0T_1M]$$

en notant $[S_0T_1M]$ la somme des distances optiques de S_0 à T_1 et de T_1 à M.

L'indice du milieu dans lequel se font ces deux trajets étant n,

$$\delta(M) = n(S_0T_2 + T_2M - S_0T_1 - T_1M) = n(S_0T_2 - S_0T_1) + n(T_2M - T_1M).$$

Par raison de symétrie, le point source ponctuel S_0 étant à égale distance des trous d'Young T_1 et T_2, $S_0T_2 - S_0T_1 = 0$. On aboutit à l'expression :

$$\boxed{\delta(M) = n(T_2M - T_1M)}.$$

Lorsqu'on assimile le milieu au vide, $\delta(M) = T_2M - T_1M$.

b) Un premier calcul peut être effectué en exploitant les coordonnées cartésiennes suggérées dans l'énoncé, dans le repère $(Oxyz)$:

$$T_1\begin{vmatrix} a/2 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad T_2\begin{vmatrix} -a/2 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad M\begin{vmatrix} x \\ y \\ D \end{vmatrix}$$

1.3 Il en va de même qu'à la question précédente ; mais la différence de marche mettant en jeu des trajets entre le cache et l'écran situé dans le plan focal d'une lentille, elle est obtenue par application du théorème de Malus pour le cas où une source serait placée au point d'observation.

⇒ L'indice de l'air ne diffère de celui du vide que par quelques 10^{-4} : $n = 1$.

Par le théorème de Pythagore, on obtient la distance T_2M par :

$$T_2M = \sqrt{\left(\frac{a}{2} + x\right)^2 + y^2 + D^2}.$$

La distance D étant très supérieure à x, y et a, on effectue un développement limité :

$$T_2M = D\sqrt{1 + \frac{a^2}{4D^2} + \frac{x^2}{D^2} + \frac{ax}{D^2} + \frac{y^2}{D^2}} \approx D\left[1 + \frac{a^2}{8D^2} + \frac{x^2}{2D^2} + \frac{ax}{2D^2} + \frac{y^2}{2D^2}\right].$$

Le fait d'avoir D très grand devant les autres termes est nécessaire pour pouvoir obtenir des ondes de directions voisines et permet d'augmenter l'interfrange. C'est donc une situation courante.

On obtient de même :

$$T_1M = \sqrt{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + D^2} \approx D\left[1 + \frac{a^2}{8D^2} + \frac{x^2}{2D^2} - \frac{ax}{2D^2} + \frac{y^2}{2D^2}\right].$$

Des termes d'ordres supérieurs existent, on doit se limiter au premier terme non nul : c'est la notion de développement limité.

La soustraction de T_2M et T_1M conduit à de nombreuses simplifications : seul demeure le terme en $D\frac{ax}{2D^2}$ que l'on retrouve par 2 fois, avec des signes opposés :

$$\boxed{\delta = T_2M - T_1M \approx \frac{ax}{D}}.$$

En réalité, les franges ont des formes d'hyperboles : les franges rectilignes obtenues ici sont tangentes au sommet de ces hyperboles.

La première remarque inspirée par ce résultat réside dans la seule dépendance en x : il y a, à cet ordre d'approximation, invariance en y. Les lieux à différence de marche constante sont donc des lieux à x constant, c'est-à-dire des droites parallèles à l'axe (Cy).

On a intérêt à utiliser d'emblée cette propriété de l'axe (Cy), afin d'obtenir rapidement la direction de l'une des franges. Cette précaution protège dans une certaine mesure d'une erreur fréquente sur la direction de l'ensemble des franges !

L'axe (Cy) lui-même est une frange :

c'est le lieu à différence de marche nulle.

Ce résultat pouvait être obtenu sans calcul, car le plan (Cyz) est à égale distance des points T_1 et T_2. Son intersection avec l'écran est justement l'axe (Cy).

Une autre méthode permet d'obtenir le résultat approché précédent $\delta = T_2M - T_1M \approx \frac{ax}{D}$. Elle consiste à considérer un point T qui se déplace géométriquement, passant de T_1 à T_2. Le vecteur $\overrightarrow{TM} = TM\vec{u}$ varie alors : sa différentielle s'écrit :

$|\vec{u}|^2 = 1$, donc la différentielle $2\vec{u}\cdot d\vec{u} = 0$.

$$d(\overrightarrow{TM}) = \overrightarrow{T_2M} - \overrightarrow{T_1M} = \overrightarrow{T_2T_1}.$$

La variation de la longueur TM s'obtient en différentiant $TM = \overrightarrow{TM}\cdot\vec{u}$:

$$d(TM) = \overrightarrow{TM}\cdot d\vec{u} + d(\overrightarrow{TM})\cdot\vec{u}$$

or, $\vec{u}$ étant unitaire, $\vec{u}\cdot d\vec{u} = 0$. On en déduit l'expression approchée

$$\delta = T_2M - T_1M \approx d(TM) = \overrightarrow{T_2T_1}\cdot\vec{u}.$$

$\vec{u} = \frac{\overrightarrow{TM}}{TM} \approx \frac{\overrightarrow{OM}}{OM}$ avec $OM \approx D$.

Les coordonnées de ces vecteurs sont :

$$\overrightarrow{T_2T_1}\begin{vmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \vec{u}\begin{vmatrix} x/D \\ y/D \\ \approx 1 \end{vmatrix}$$

le produit scalaire se calcule aisément et on retrouve :

© Ellipses - La photocopie non autorisée est un délit

$$\delta = T_2M - T_1M = \frac{ax}{D}.$$

L'ordre d'interférence p est un entier relatif pour les franges brillantes.

c) Les franges brillantes sont obtenues lorsque la différence de marche est un multiple entier p de la longueur d'onde. On déduit ainsi l'ensemble des valeurs x_p de l'abscisse pour les franges brillantes :

$$\frac{ax_p}{D} = p\lambda$$

ce qui donne :

$$\boxed{x_p = p\frac{\lambda D}{a}}.$$

Les franges brillantes sont donc rectilignes, parallèles et équidistantes : la distance séparant deux franges brillantes successives, appelée interfrange, est donnée par :

$$\boxed{i = x_{p+1} - x_p = \frac{\lambda D}{a}}.$$

La proportionnalité à D explique que l'on choisisse D très supérieure aux autres dimensions, notamment, et justifie l'approximation effectuée.

On peut retenir que l'interfrange est :
- proportionnelle à la longueur d'onde ;
- proportionnelle à la distance D ;
- inversement proportionnelle à a : il faut choisir deux trous d'Young très proches.

Numériquement, $i = 0{,}9$ mm, ce qui justifie qu'il faille utiliser un dispositif optique plus élaboré pour observer les franges. En pratique, on observe à travers un viseur ou une lunette, c'est-à-dire dans le plan focal image d'un objectif. L'étude qui va suivre est en partie motivée par cette nécessité.

Un viseur permet une observation d'un objet (ici, des franges) à distance finie. Une lunette permet l'observation à l'infini.

La position de la frange centrale définie par $\delta = 0$ est l'axe (Cy), comme justifié précédemment par le calcul, mais surtout les propriétés de symétrie. Ce lieu est intéressant à plus d'un titre :
- il s'obtient sans calcul ;
- il donne une frange brillante quelle que soit la longueur d'onde utilisée ;
- il conserve un statut particulier de lieu d'interférences constructives, même en rayonnement polychromatique.

Erreur à éviter
La définition d'une frange centrale est : lieu où la différence de marche est nulle. Ce n'est pas nécessairement un lieu situé au centre du champ d'observation.

1.2. a) La source ponctuelle est certes placée au foyer objet de la lentille convergente $\mathcal{L}$, elle reste néanmoins sur l'axe de symétrie du dispositif. Les deux trous d'Young sont donc à égale distance optique de la source, par raison de symétrie.

On peut également obtenir ce résultat par application du théorème de Malus : la source étant ponctuelle et placée au foyer de la lentille $\mathcal{L}$, le faisceau de lumière éclairant les trous d'Young est un faisceau de lumière parallèle à l'axe. T_1 et T_2 sont donc situés sur une même surface d'onde : ils sont donc à égale distance optique de la source.

Pour un faisceau de lumière parallèle, les surfaces d'onde sont des plans orthogonaux aux rayons.

Le calcul de la différence de marche $\delta(x,y)$ en un point M de l'écran d'observation n'est donc pas modifié :

$$\boxed{\delta = T_2M - T_1M = \frac{ax}{D}}.$$

La source placée au foyer de la lentille peut être vue comme une source rejetée à l'infini : les rayons qui en proviennent sont parallèles à l'axe et semblent émaner d'un point situé sur l'axe à une distance d infinie.

b) La figure d'interférences obtenue ici est rigoureusement la même que celle engendrée par la source S_0 placée à distance finie sur l'axe.

© Lavoisier - La photocopie non autorisée est un délit

Erreur à éviter
Ne pas faire de calcul sur une figure où la lentille est symbolisée par ↕ comme si les trajets avaient lieu dans l'air : une lentille est faite de verre d'épaisseur variable !

1.3. a) La lentille convergente $\mathcal{L}'$ permet d'effectuer une observation à l'infini. En un point M de l'écran d'observation, on peut imaginer que l'on place une source ponctuelle. Celle-ci émet des rayons qui, d'après les propriétés du plan focal, vont se propager parallèlement à (CM) après traversée de la lentille. On obtient donc, au niveau des trous d'Young, deux rayons parallèles présentant la même inclinaison θ que $\overrightarrow{CM}$ par rapport à l'axe. On peut donc tracer la surface d'onde Σ' et définir la différence de marche T_2H (Fig. 5).

M est un foyer secondaire de la lentille.
Σ' est orthogonale à $\overrightarrow{CM}$: théorème de Malus dans le cas où M est un point source.

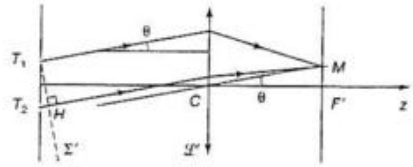


Figure 5

On obtient, dans l'approximation des petits angles,

$$\boxed{\delta = a\theta = \frac{ax}{f'}}.$$

C'est le même résultat que dans le cas d'une observation à distance D, mais en changeant D en f'.

b) Par rapport aux résultats obtenus précédemment, la plupart des constatations sont maintenues :
- les franges brillantes sont rectilignes, parallèles et équidistantes ;
- la frange centrale est la droite $(F'y)$;
- toutefois, la distance séparant deux franges brillantes successives, c'est-à-dire l'interfrange, est donnée par :

$$\boxed{i = x_{p+1} - x_p = \frac{\lambda f'}{a}}.$$

En résumé, les figures d'interférences obtenues à distance D ou à l'infini, dans le plan focal image d'une lentille de distance focale f', ne diffèrent que par la valeur de l'interfrange. Elles se déduisent l'une de l'autre par une dilatation de rapport $\frac{f'}{D}$ dans la direction x.

L'œil normal observe à l'infini sans accommoder, ainsi on utilise comme oculaire une lentille convergente dont le foyer objet se trouve dans le plan focal de l'objectif. L'ensemble est bien afocal, c'est une lunette.

Numériquement, $i = 0{,}45$ mm, ce qui poserait problème pour une observation directe à l'œil. En pratique, l'observateur utilise un oculaire, jouant le rôle de loupe, pour observer dans le plan focal image de $\mathcal{L}'$. L'ensemble constitué de l'objectif $\mathcal{L}'$ et de l'oculaire réalise un instrument optique qu'on appelle une lunette.

À distance finie signifie en l'absence de lentille $\mathcal{L}$.

c) Dans une configuration où la source S_0 serait sur l'axe (Oz), à distance finie d donne des résultats identiques, puisque les deux trous d'Young sont alors toujours sur une même surface d'onde. La différence de marche entre la source S_0 et les points de l'écran ne découle ici que des trajets entre les sources secondaires que sont les trous d'Young et le plan focal image de $\mathcal{L}'$.

Cette propriété n'est plus vraie si la source n'est pas sur l'axe.

REMARQUE – On retient que tout calcul de différence de marche est rendu plus aisé une fois tracée une figure mettant en évidence les trajets optiques. On exploite le théorème de Malus pour faire figurer les surfaces d'onde, ce

qui rend possible la visualisation des excédents de trajet d'un rayon par rapport à un autre. Éventuellement, lorsqu'il existe une lentille de projection, on raisonne transitoirement en plaçant, de façon imaginaire, un point source au niveau du point d'observation. Ceci permet de faire apparaître les longueurs équivalentes aux différences de marche entre les points sources secondaires et le point d'observation.

2 ■ Savoir prendre en compte un déphasage.

Conseils méthodologiques

On raisonne sur un interféromètre par lequel deux points sources S_1 et S_2 ont été obtenus à partir d'un unique point source S_0 (Fig. 6). Le rayonnement est monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 633$ nm.

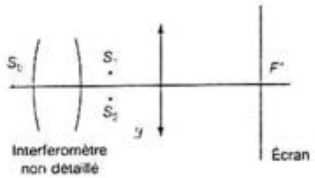


Figure 6

L'emploi d'une lentille convergente $\mathcal{L}$, située entre les sources secondaires et un écran, permet la projection des franges sur celui-ci. Sa distance focale est $f' = 50$ cm et on considère que le milieu O des sources S_1 et S_2 se trouve sur l'axe optique de $\mathcal{L}$. La droite (S_1S_2) est en revanche perpendiculaire à l'axe optique. la distance S_1S_2 vaut $a = 10^{-4}$ m.

Les dimensions transversales sont suffisamment petites pour que l'on raisonne dans les conditions de Gauss.

2.1 Conséquences d'un déphasage entre les sources

a) Si les deux sources S_1 et S_2 vibrent en phase, quelles sont les positions des franges brillantes sur l'écran ? Où se trouve la frange centrale ?

b) Quelle est la modification induite, sur la figure d'interférences, par un déphasage $\Delta\varphi$ de la vibration de la source S_1 en avance sur la vibration de S_2.

c) Vérifier ce résultat en recherchant la position sur l'écran des points qui vibrent en phase. Commenter le sens de déplacement de cette frange.

On cherche dans la suite à illustrer divers moyens permettant de produire ce déphasage $\Delta\varphi$.

2.2 Source située hors de l'axe

a) Si la source S_0 est située à distance d d'un cache percé de deux trous d'Young jouant le rôle des deux sources S_1 et S_2, ou peut-on placer la source pour obtenir $\Delta\varphi$?

On place en fait la source à l'infini, c'est-à-dire dans le plan focal objet d'une lentille convergente $\mathcal{L}_0$ de distance focale $f_0' = 30$ cm. Montrer que les rayons incidents sur les trous d'Young sont inclinés par rapport à l'axe, si la source n'est pas sur l'axe optique de $\mathcal{L}_0$.

2.1 Écrire que S_1 vibre en avance sur S_2 de $\Delta\varphi$ signifie que si la vibration scalaire en S_2 s'écrit :

$$s_2(t) = S\cos(\omega t),$$

$$s_1(t) = S\cos(\omega t + \Delta\varphi).$$

Il faut donc inclure le déphasage dans celui qui est dû à la propagation entre source et point d'observation.

2.2 La source n'est plus à égale distance optique des trous d'Young : il faut effectuer un calcul de différence de marche pour obtenir le déphasage correspondant. En présence de la lentille, c'est par le théorème de Malus qu'il faut raisonner.

© Jacquier - La photocopie non autorisée est un délit

b) En déduire une expression de la distance de la source à l'axe, pour obtenir une valeur donnée de $\Delta\varphi$.

c) Lorsque l'ensemble du dispositif interférentiel est envisagé, quelle propriété optique simple trouve-t-on entre le point source S_0 et le point de la frange centrale situé dans le plan contenant l'axe optique et S_0 ?

2.3 La lame à faces parallèles n'est placée ici que pour ralentir la lumière, par le fait que son indice est supérieur à celui de l'air.

2.3 Lame à faces parallèles

La source S_0 est maintenant située au foyer objet F_0 de la lentille convergente $\mathcal{L}_0$, c'est-à-dire sur l'axe optique. On place devant le trou inférieur S_2 une lame à faces parallèles, d'épaisseur e selon la direction de l'axe optique et d'indice n.

a) Exprimer le déphasage $\Delta\varphi$ qui s'ensuit.

b) Commenter le signe de $\Delta\varphi$.

La lentille convergente $\mathcal{L}$ permet l'observation à l'infini. ⇐ *f*

2.1.a) Notons (Oz) l'axe optique et (Ox) l'axe passant par les sources secondaires S_1 et S_2. Considérons un point M de l'écran d'observation, d'abscisse x et plaçons-y par la pensée une source ponctuelle. Celle-ci émet des rayons issus d'un point du plan focal, qui vont donc se propager parallèlement à la direction entre le centre optique et le point M. On obtient donc, au niveau des sources S_1 et S_2, deux rayons parallèles d'inclinaison (Fig. 7) :

On se place dans l'approximation des petits angles, compatible avec les conditions de Gauss. ⇐ *t*

$$\theta = \frac{x}{f'}.$$

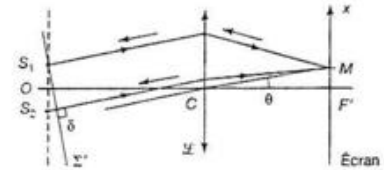


Figure 7

D'après le théorème de Malus, Σ' est orthogonale aux rayons. ⇐ *f*

où x est l'abscisse du point M, comptée depuis l'axe optique.

On trace la surface d'onde Σ' et on note l'inclinaison θ de celle-ci par rapport à l'axe Ox. La différence de marche δ apparaît alors sur la figure précédente :

La différence de marche calculée ici est $\delta = [S_2M] - [S_1M]$. ⇐ ;

$$\delta = a\theta = \frac{ax}{f'}.$$

Il découle de ce calcul les propriétés suivantes concernant les franges brillantes :

- elles sont rectilignes et parallèles à $(F'y)$,
- la frange centrale a l'abscisse $x = 0$,
- les franges sont équidistantes. l'interfrange valant :

$$i = \frac{\lambda f'}{a} = 3{,}2\text{ mm}.$$

La position de la frange centrale (lieu de différence de marche nulle) résulte de la symétrie des sources secondaires par rapport à l'axe optique.

b) Le déphasage φ correspondant à une différence de marche δ est $\varphi = 2\pi\frac{\delta}{\lambda}$. Ainsi, le calcul effectué ci-dessus a mis en évidence un déphasage φ introduit sur la vibration issue de S_2, par rapport à celle qui émane de S_1. Si on avance encore la vibration issue de S_1 d'un déphasage $\Delta\varphi$, on obtient finalement :

$$\varphi' = \frac{2\pi a x}{\lambda f'} + \Delta\varphi .$$

La figure d'interférences se trouve modifiée si $\Delta\varphi$ n'est pas multiple de 2π. On peut prendre en compte simplement cette modification, en récrivant φ' sous la forme :

$$\boxed{\varphi' = \frac{2\pi a}{\lambda f'}\left(x + \frac{\Delta\varphi \lambda f'}{2\pi a}\right)} .$$

On déduit alors la nouvelle situation de la précédente, par la transformation formelle :

$$x' = x + X_0$$

avec $\boxed{X_0 = \frac{\Delta\varphi \lambda f'}{2\pi a}}$.

La figure d'interférences est simplement translatée de $-X_0\vec{u}_x$.

Par exemple, pour retrouver des points où les deux ondes sont reçues en phase, il faut se placer à l'abscisse :

$$-X_0 = -\frac{\Delta\varphi}{2\pi}\frac{\lambda f'}{a}$$

qui est celle de la nouvelle frange centrale. On peut expliquer le sens du déplacement : en effet, avancer la phase de la vibration de S_1 nécessite, pour retrouver deux ondes en phase, d'allonger le trajet optique de l'onde qui part de S_1 vers M. Cet allongement du parcours s'obtient en éloignant le point M.

2.2. a) La source S_0 étant située sur un plan à distance d du plan des trous d'Young, on peut obtenir une différence de chemin optique :

$$\delta_0 = [S_0S_2] - [S_0S_1]$$

en plaçant la source hors de l'axe (Fig. 8). Si l'abscisse de S_0 est notée x_0, on obtient :

$$\boxed{\delta_0 = \frac{a x_0}{d}} .$$

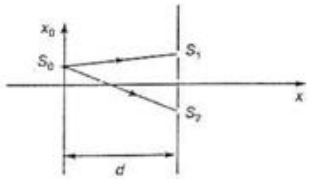


Figure 8

La différence de marche étant $\delta = [S_2M] - [S_1M]$, φ est le retard de la vibration due à S_2 sur celle due à S_1.

Erreur à éviter
La frange centrale est définie par $\delta = 0$, elle n'est pas nécessairement située au centre de l'interférogramme !

Sur la figure, on comprend que pour compenser l'avance de phase de la vibration en S_1 il faille allonger le rayon supérieur par un déplacement vers le bas du point d'observation.

Avancer la phase de s_1 impose d'adopter :
$[S_0S_2] - [S_0S_1] > 0$.

Ce calcul au premier ordre est celui d'une différence de marche à distance finie

© Luxurion – La photocopie non autorisée est un délit

En utilisant la relation entre différence de marche et déphasage, il vient :

$$\boxed{\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{a x_0}{d}} .$$

b) La source est rejetée à l'infini grâce à la lentille convergente $\mathcal{L}_0$ (Fig. 9). Les rayons issus de S_0, qui est un foyer secondaire de $\mathcal{L}_0$, sont parallèles entre eux et inclinés par rapport à l'axe de θ_0. On obtient la valeur de cette inclinaison en considérant le rayon qui passe par le centre optique de $\mathcal{L}_0$:

$$\boxed{\theta_0 = -\frac{x_0}{f_0'}}$$

où x_0 est l'abscisse de la source sur (F_0x).

Le signe de θ_0 est choisi avec la même convention que celui de θ.

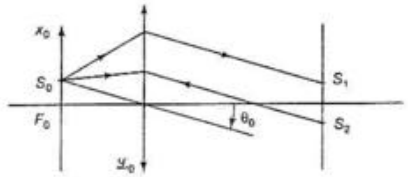


Figure 9

Le théorème de Malus permet donc le tracé de la surface d'onde Σ_0, qui est un plan orthogonal aux rayons, et conduit à l'obtention de la différence de marche :

$$\delta_0 = \frac{a x_0}{f_0'}$$

Lorsque l'inclinaison θ_0 est négative, le point S_1 est atteint par la lumière plus tôt que S_2.

d'où il découle le déphasage :

$$\boxed{\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{a x_0}{f_0'}} .$$

c) Pour obtenir une valeur donnée de $\Delta\varphi$, il faut adopter :

$$x_0 = \frac{\lambda f_0'}{a}\frac{\Delta\varphi}{2\pi} .$$

d) Le décalage de la frange centrale résultant de l'introduction du déphasage $\Delta\varphi$ a été calculé précédemment :

$$-X_0 = -\frac{\Delta\varphi}{2\pi}\frac{\lambda f'}{a} .$$

En remplaçant la valeur de $\Delta\varphi$ par $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{a x_0}{f_0'}$, on obtient une abscisse de la frange centrale :

$$\boxed{-x_0\frac{f'}{f_0'}} .$$

Le point source S_0 est l'objet associé au point de la frange centrale situé dans le plan de la figure 10. Le rapport $-\frac{f'}{f_0'} = 1{,}67$ n'est autre que le grandissement du système formé par les lentilles $\mathcal{L}_0$ et $\mathcal{L}$.

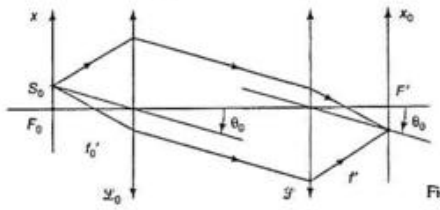


Figure 10

2.3.a) La source S_0 est replacée sur l'axe, au foyer objet F_0 de $\mathcal{L}_0$. Les rayons qui émergent de $\mathcal{L}_0$ sont donc parallèles à l'axe optique (Fig. 11). La différence de marche ne réside donc que dans le fait qu'un rayon a parcouru une distance e dans le vide, quand l'autre a parcouru la même distance dans la lame. Puisqu'on compte les distances optiques en multipliant les longueurs par l'indice, la différence de marche est :

$$\boxed{\delta_0 = e(n-1)}.$$

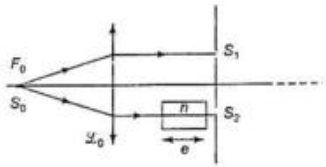


Figure 11

Le déphasage $\Delta\varphi$ qui correspond à cette différence de marche est :

$$\boxed{\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0}\delta_0 = 2\pi\frac{e}{\lambda_0}(n-1)}.$$

b) Le signe de $\Delta\varphi$ est lié à la notion d'avance ou de retard : ici on compte le déphasage de s_1 en avance par rapport à s_2, donc les retards introduits sur le parcours du rayon menant au point S_2 donnent des valeurs positives de $\Delta\varphi$.

REMARQUE – Cet exercice permet de manipuler plusieurs causes d'existence d'un déphasage entre les points sources secondaires. La conséquence en est une translation des franges, que l'on peut faire apparaître aisément grâce à la traduction géométrique de la relation entre les abscisses. Nous avons insisté plusieurs fois sur la notion de signe : on n'est jamais trop minutieux sur ce point, d'autant qu'ici les analyses qualitatives des conséquences sont faciles à effectuer.

Sans le cache contenant les trous d'Young, les rayons issus de la source émergent de $\mathcal{L}_0$ avec l'inclinaison $\theta_0 = -\frac{x_0}{f_0'}$, ils convergent dans le plan focal image de $\mathcal{L}$ à l'abscisse $-x_0\frac{f'}{f_0'}$.

C'est le trajet optique menant à S_2 qui est allongé : S_1 vibre donc en avance sur S_2.

3 ■ Savoir exploiter la physique des ondes.

Conseils méthodologiques

L'étude des ondes électromagnétiques a fourni des renseignements précis sur l'expression et l'évolution de la phase des ondes. Or, les interférences mettent à profit cette notion de phase pour déterminer l'état d'interférence en un point. Cet exercice met explicitement en place le lien que l'on peut faire entre ces deux présentations. Les questions **a)** et **b)** relèvent ainsi de la physique des ondes : on y manipule les vecteurs d'onde. La question **c)** est à l'interface etre les deux domaines. Enfin, on retrouve aux question **d)** et **f)** les termes ordre d'interférence, franges, contraste du vocabulaire de l'optique physique.

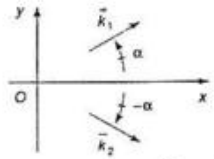


Figure 12

On suppose qu'un interféromètre a permis d'obtenir deux ondes planes progressives monochromatiques, de même pulsation, dont les vecteurs d'onde $\vec{k}_1$ et $\vec{k}_2$ sont de directions voisines. On note 2α l'angle entre ces vecteurs. Ces ondes sont cohérentes et interfèrent dans la région de l'espace considérée. On note a_1 et a_2 les amplitudes complexes respectives de la vibration scalaire associée à chaque onde. Ces amplitudes ont même expression au point O, origine de l'espace :

$$a_1(O,t) = a_2(O,t) = A_0\exp(i\omega t).$$

a) Justifier que les phases $\varphi_1(M)$ et $\varphi_2(M)$ des deux ondes s'écrivent en tout point M :

$$\varphi_1(M) = -\vec{k}_1\cdot\overrightarrow{OM} \quad \text{et} \quad \varphi_2(M) = -\vec{k}_2\cdot\overrightarrow{OM}$$

b) $\vec{k}_1$ et $\vec{k}_2$ permettent de définir un plan, que l'on assimile à (xOy) ; on fait en sorte que $\vec{k}_1$ et $\vec{k}_2$ soient symétriques par rapport à l'axe (Ox) (Fig. 12). Préciser les composantes de ces vecteurs d'onde en fonction de la longueur d'onde λ_0 et du petit angle α.

c) En déduire l'évolution du déphasage entre les deux ondes en tout point M :

$$\Delta\varphi = \varphi_2(M) - \varphi_1(M).$$

d) Exprimer l'ordre d'interférence p au point M en fonction des coordonnées cartésiennes (x,y,z).

e) Dans le plan yOz, quelle est la forme des franges brillantes obtenues ? Définir et calculer l'interfrange en fonction de la longueur d'onde λ_0 et de α.

f) Les ondes sont polarisées rectilignement, les champs électriques ayant même direction et même amplitude. Quel est le contraste de cette figure d'interférences ? Expliquer.

3.a) Les composantes des champs d'une onde plane progressive et monochromatique varient dans le temps et l'espace selon la forme générale :

$$\exp i(\omega t - \vec{k}\cdot\overrightarrow{OM}).$$

Puisque les deux ondes ont nécessairement même pulsation, pour assurer la cohérence, on peut constater que la variation de phase de chacune d'entre elles est décrite par le terme :

$$\boxed{\varphi(M) = -\vec{k}\cdot\overrightarrow{OM}}.$$

Les expressions proposées $\varphi_1(M) = -\vec{k}_1\cdot\overrightarrow{OM}$ et $\varphi_2(M) = -\vec{k}_2\cdot\overrightarrow{OM}$ relevent de ce raisonnement.

b) Le vecteur d'onde d'une onde plane progressive monochromatique se propageant dans le vide est relié à la longueur d'onde par :

$$\boxed{k = \frac{2\pi}{\lambda_0}}.$$

Seules les directions des ondes 1 et 2 diffèrent, k_1 et k_2 étant identiques. $\vec{k}_1$ et $\vec{k}_2$ sont inclinés de $\pm\alpha$ par rapport à (Ox), ils prennent ainsi l'expression cartésienne suivante :

$$\vec{k}_1 = \begin{vmatrix} \frac{2\pi}{\lambda_0}\cos\alpha = \frac{2\pi}{\lambda_0} \\ \frac{2\pi}{\lambda_0}\sin\alpha = \frac{2\pi}{\lambda_0}\alpha \\ 0 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{k}_2 = \begin{vmatrix} \frac{2\pi}{\lambda_0}\cos\alpha = \frac{2\pi}{\lambda_0} \\ -\frac{2\pi}{\lambda_0}\sin\alpha = -\frac{2\pi}{\lambda_0}\alpha \\ 0 \end{vmatrix}$$

On exploite le fait que l'angle α est petit par rapport à $\frac{\pi}{2}$: $\cos\alpha \approx 1$ et $\sin\alpha \approx \alpha$.

c) Le déphasage en tout point M est défini par :

$$\Delta\varphi = (\vec{k}_1 - \vec{k}_2)\cdot\overrightarrow{OM}.$$

En effectuant le produit scalaire avec le vecteur $\overrightarrow{OM}$ de coordonnées (x,y,z), on obtient :

$$\boxed{\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0}2\alpha y = \frac{4\pi}{\lambda_0}\alpha y}.$$

Erreur à éviter
$\Delta\varphi$ introduit ici est noté φ dans le cours en question. Ce n'est qu'une écriture différente, pour distinguer φ_1 et φ_2 de leur différence.

Les deux ondes sont donc en phase en l'origine O, ceci n'est qu'un choix arbitraire ; mais il est toujours possible de trouver un point O vérifiant cette propriété.

Dans de nombreux cas réels, des conditions de symétrie permettront d'exhiber un point où le déphasage sera assurément nul (axe d'un système centré...).

d) L'ordre d'interférence est obtenu usuellement par le rapport $\frac{\delta}{\lambda_0}$ où δ est la différence de marche au point M. Ici, c'est le déphasage qui a été obtenu directement ; on peut donc transposer la relation $p = \frac{\delta}{\lambda_0}$ en :

$$p = \frac{\Delta\varphi}{2\pi}.$$

On peut utiliser la relation :
$\Delta\varphi = 2\pi\frac{\delta}{\lambda_0}$.

On remarque qu'un ordre d'interférence entier signifie que les deux ondes sont en phase (à 2π près) ce qui correspond à des interférences constructives.

La relation cherchée se déduit immédiatement :

$$\boxed{p(M) = \frac{\Delta\varphi}{2\pi} = 2\frac{\alpha y}{\lambda_0}}.$$

e) Dans le plan yOz, les lieux correspondant à un ordre d'interférence donné sont des courbes à ordonnée y constante. Ce sont des droites parallèles à l'axe (Oz).

Cette propriété était prévisible : il y a invariance en z du problème.

Les franges brillantes correspondent aux lieux où l'ordre p est entier relatif : ce sont des franges rectilignes, parallèles à (Oz) régulièrement espacées de :

$$\boxed{i = \frac{\lambda_0}{2\alpha}}.$$

© Les auteur – La photocopie non autorisée est un délit

Ce paramètre i a la dimension d'une longueur, c'est l'interfrange de la figure.

f) Les deux ondes ont une amplitude A_0 constante dans tout l'espace, car ce sont des ondes planes. On peut donc en déduire que les amplitudes sont identiques en tout point où les deux ondes interfèrent.

Puisque, par hypothèse, les champs électriques ont même polarisation, ils ont quasiment même direction.

Soit les champs $\vec{E}_1$ et $\vec{E}_2$ sont polarisés selon $\vec{u}_z$ et ils ont rigoureusement même direction, soit ils ont une autre direction et c'est le fait que l'angle α soit petit qui leur assure la propriété d'avoir des directions voisines.

On se trouve donc dans les conditions d'interférences entre ondes de même intensité I_0, donc on obtient un contraste $C = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}$ voisin de 1.

REMARQUE – On a dû reprendre ici l'expression des phases des deux ondes qui interfèrent. L'utilisation de la forme $\exp j(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})$ donne directement le déphasage. Il n'y a plus alors qu'à traduire l'expression du déphasage dans le vocabulaire des interférences. Ce type de situation est fréquemment rencontré dans des problèmes où l'on varie les points de vue lors de l'étude d'un même dispositif.

Conseils méthodologiques

4 ■ Savoir raisonner en lumière polychromatique.

On fait interférer deux ondes issues d'une même source ponctuelle. La lampe utilisée pour produire cette lumière émet un rayonnement dont le spectre est composé de deux raies de longueurs d'onde très proches λ_1 et λ_2. Les intensités émises pour chacune de ces deux composantes sont identiques.

4.1.a) Le mot clé est ici : incohérence !

a) Lorsque deux ondes de longueurs d'onde différentes se superposent, que peut-on dire de l'intensité résultante ?

4.1.b) Il s'agit ici d'interférences à deux ondes en lumière monochromatique.

b) Si la lampe émettait un rayonnement monochromatique de longueur d'onde λ, quelle serait, en fonction de la différence de marche δ, l'expression de l'intensité résultante ? On note I_0 l'intensité reçue si une seule des deux ondes parvient sur le détecteur, I_0 est une valeur commune aux deux ondes.

Dans la suite, on se place dans le cas où δ ne dépend pas de λ.

4.1.c) Après justification, on ajoute les intensités dues aux deux composantes spectrales.

c) Dans le cas du spectre bichromatique (à deux raies), exprimer l'intensité reçue en fonction de λ_1, λ_2, I_0 et δ.

4.1.d)et e) Faire apparaître le produit de deux facteurs périodiques en δ et remarquer que l'un varie beaucoup plus lentement que l'autre.

d) On considère que les deux longueurs d'onde du doublet sont très proches et on définit :

- λ_0 la valeur moyenne de λ_1 et λ_2 ;
- $\Delta\lambda$ la largeur du doublet, différence entre λ_2 et λ_1 $(\lambda_2 > \lambda_1)$.

Mettre l'expression de $I(\delta)$ sous la forme :

$$I(\delta) = I_0\left[1 + v(\delta)\cos\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda_0}\right)\right]$$

où $v(\delta)$ est la fonction de visibilité que l'on exprimera en fonction de $\Delta\lambda$.

e) Représenter l'allure du graphe de $I(\delta)$, en prenant pour la commodité du tracé $\Delta\lambda = \frac{\lambda_0}{5}$.

f) Partant de la différence de marche nulle (frange centrale), on augmente δ jusqu'à voir disparaître les franges. Qu'advient-il alors de la fonction de visibilité $v(\delta)$? Quelle est la première valeur δ_B de δ pour laquelle ce phénomène se produit ?

Combien de franges brillantes a-t-on pu approximativement observer avant ce brouillage ? Application numérique : $\lambda_1 = 589{,}0$ nm et $\lambda_1 = 589{,}6$ nm pour le doublet du sodium.

4.1.f) La disparition des franges advient lorsque l'intensité des franges brillantes est de même valeur que celle des franges sombres.

g) On désire retrouver la valeur précédente par un raisonnement simple. Pour ce faire, on considère qu'il y a brouillage lorsque les franges brillantes produites par l'une des raies spectrales coïncident avec les franges sombres produites par l'autre composante. En notant p l'ordre d'interférence correspondant à la composante λ_2, écrire que l'ordre d'interférence pour l'autre raie diffère d'un demi-entier.

En déduire la valeur δ_B.

4.1.g) Il n'est plus besoin ici de formule donnant l'intensité, on ne traite que de la nature de l'ordre d'interférence : entier ou demi-entier.

4.a) Si la vibration due à une onde s'écrit $s(t) = S\cos(\omega t)$ tandis que l'amplitude instantanée de l'autre onde est $s'(t) = S\cos(\omega' t)$, le détecteur effectuant la moyenne quadratique de l'amplitude résultante, on peut écrire :

$$\langle (s(t)+s'(t))^2 \rangle = \langle s^2(t) \rangle + \langle s'^2(t) \rangle + 2\langle s(t)s'(t) \rangle$$

⇨ Le déphasage est facultatif ici.

car la moyenne d'une somme est la somme des moyennes. Or, $s(t)s'(t)$ est également la somme de deux fonctions sinusoïdales du temps,

- l'une de pulsation $\omega + \omega'$;
- l'autre de pulsation $\omega - \omega'$.

La moyenne temporelle du produit est donc nulle : $\langle s(t)s'(t) \rangle = 0$ et on constate que les moyennes quadratiques des deux amplitudes s'ajoutent.

Il n'y a pas d'interférences entre ondes de fréquences différentes : leurs intensités s'ajoutent.

b) Pour les interférences produites par deux ondes monochromatiques cohérentes (issues de la même source) et de même intensité, on peut écrire :

⇨ Ici, ce sont les amplitudes complexes qu'il faut ajouter avant de déterminer l'intensité par le carré du module.

$$\boxed{I = 2I_0\left[1 + \cos\left(2\pi\frac{\delta}{\lambda}\right)\right]}.$$

On obtient une évolution sinusoïdale de l'éclairement : une alternance de franges sombres et brillantes très bien contrastées.

c) Deux rayonnements de longueurs d'onde différentes n'interférant pas,

- on calcule séparément pour chaque composante spectrale l'éclairement par la formule du **b)** :

$$I_1 = 2I_0\left[1 + \cos\left(2\pi\frac{\delta}{\lambda_1}\right)\right] \quad \text{et} \quad I_2 = 2I_0\left[1 + \cos\left(2\pi\frac{\delta}{\lambda_2}\right)\right],$$

- puis on ajoute les résultats en vertu du **a)** :

$$\boxed{I = I_1 + I_2 = 2I_0\left[2 + \cos\left(2\pi\frac{\delta}{\lambda_1}\right) + \cos\left(2\pi\frac{\delta}{\lambda_2}\right)\right]}.$$

© Ediscience - La photocopie non autorisée est un délit

d) On peut transformer l'expression grâce à une manipulation trigonométrique :

$$\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right).$$

Avec les notations proposées pour la longueur d'onde centrale et la largeur, on peut écrire d'une part :

$$\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} = \frac{2}{\lambda_0}$$

et d'autre part :

$$\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2}.$$

Cette décomposition est valable même si le doublet de raies n'est pas étroit, mais elle est plus pertinente lorsque $\Delta\lambda << \lambda_0$ (doublet jaune du mercure, du sodium).

L'expression obtenue est ainsi :

$$\boxed{I = 4I_0\left[1 + \cos\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda_0}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi\delta\Delta\lambda}{\lambda_0^2}\right)\right]}.$$

On fait alors apparaître la fonction de visibilité attendue :

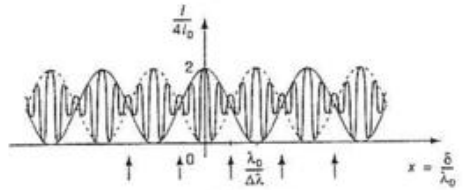
$$\boxed{v(\delta) = \cos\left(\frac{\pi\delta\Delta\lambda}{\lambda_0^2}\right)}.$$

e) L'expression de $\frac{I}{4I_0}$ en fonction de δ fait intervenir le produit de deux fonctions sinusoïdales de δ, dont les périodes sont très dissemblables :

Si le doublet est étroit.

- $\cos\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda_0}\right)$ présente une période égale à λ_0,
- $v(\delta)$ a une période sensiblement plus grande : $\frac{2\lambda_0^2}{\Delta\lambda}$.

Le graphe de l'évolution du signal fait alors apparaître une modulation d'amplitude (Fig. 13). On a choisi ici, pour que le tracé soit possible, un rapport de l'ordre de 10 entre les périodes.



Brouillages

Figure 13

Analytiquement, le contraste est $C = |v|$, c'est une fonction de la différence de marche (cohérence temporelle)

f) Lorsqu'augmente la différence de marche, le contraste entre franges brillantes et sombres s'amenuise. La disparition des franges advient lorsque l'intensité des franges brillantes est de même valeur que celle des franges sombres, c'est-à-dire lorsque v s'annule. La détermination de la différence de marche δ_B lors d'un brouillage vérifie :

$$v(\delta) = \cos\left(\frac{\pi\delta\Delta\lambda}{\lambda_0^2}\right) = 0$$

donc elle s'écrit au premier brouillage :

$$\boxed{\delta_B = \frac{\lambda_0^2}{2\Delta\lambda}}.$$

Le nombre de franges brillantes depuis la frange centrale est approximativement donné par $\frac{\lambda_0}{2\Delta\lambda}$, car la variation de δ entre deux franges est λ_0. Pour le doublet du sodium, $\lambda_0 = 589{,}3$ nm et $\Delta\lambda = 0{,}6$ nm $= \frac{\lambda_0}{1000}$, ce sont donc environ 500 franges que l'on a pu observer.

⇒ La détermination expérimentale précise de la largeur du doublet mettrait à profit la périodicité de la modulation : on compterait plusieurs brouillages successifs, pour minimiser l'incertitude de repérage d'un brouillage.

g) L'anticoïncidence des franges données par les deux composantes spectrales a lieu lorsque l'ordre d'interférence $p_2 = \frac{\delta}{\lambda_2}$ diffère d'un demi-entier de $p_1 = \frac{\delta}{\lambda_1}$, c'est-à-dire lorsque :

$$\frac{\delta}{\lambda_1} = \frac{\delta}{\lambda_2} + k + \frac{1}{2}$$

où k est entier. On en déduit la relation approchée :

$$\delta\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2} = k + \frac{1}{2}.$$

⇒ Relation valable pour un doublet étroit.

La première occurrence a lieu pour $k = 0$, donc lorsque :

$$\delta_B\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2} = \frac{1}{2},$$

c'est-à-dire $\delta_B = \frac{\lambda_0^2}{2\Delta\lambda}$. Les autres valeurs de k donnent les brouillages successifs, avec la périodicité $\frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda}$.

REMARQUE – En rayonnement polychromatique, on doit additionner les expressions des éclairements obtenus pour les différents éléments spectraux. La présence d'un décalage entre les franges brillantes et sombres pour les différentes composantes de la lumière incidente provoque des brouillages.

© Lavoisier - La photocopie non autorisée est un délit

Conseils méthodologiques

5 ■ Savoir prendre en compte une source non ponctuelle.

Dans une expérience de fentes d'Young, la source est constituée de deux points S_0 et S_0' placés à distance $d = 20$ cm du cache percé des deux fentes F_1 et F_2 (Fig. 14). Les deux points sources émettent des rayonnements de même longueur d'onde, mais sont incohérents.

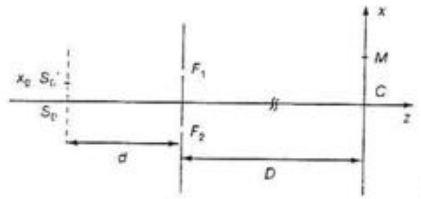


Figure 14

Les fentes sont placées symétriquement par rapport à l'axe (Oz), leur distance étant $a = 0{,}4$ mm ; on note (Ox) l'axe orthogonal à (Oz) et aux fentes. L'écran d'observation est perpendiculaire à l'axe (Oz), à distance $D = 1$ m du cache.

On limite l'étude aux phénomènes ayant lieu sur l'axe (Cx), C étant le point d'intersection de l'axe (Oz) et de l'écran.

a) Le point S_0 étant situé sur l'axe et étant le seul à éclairer le dispositif, rappeler l'expression de l'éclairement en un point M d'abscisse x sur (Cx). On notera ε_m la valeur maximale prise par $\varepsilon(x)$.

b) Le second point source S_0' est situé sur l'axe (Ox) à l'abscisse x_0. quelle est l'expression de l'éclairement sur l'axe (Cx) lorsque S_0' est seul à émettre ? On considérera que la valeur maximale est également ε_m.

c) Les deux points source étant mis en jeu, quelle est la nouvelle expression de l'éclairement ?

d) Montrer que l'on peut définir un contraste, dont la valeur est fonction de x_0.

e) Pour quelles valeurs de x_0 se produit-il un brouillage ?

f) Retrouver la première des valeurs précédentes, sans effectuer de calcul explicite d'éclairement, mais en raisonnant avec les seuls ordres d'interférence.

5.a) et b) On peut rappeler brièvement les résultats obtenus précédemment.

5.c) Il faut préciser quelle grandeur peut être sommée.

5.d) Il faut revenir ici à la définition du contraste et en déduire l'expression en fonction de l'écartement des sources.

5.e) Un brouillage advient lorsqu'on ne peut plus distinguer les franges brillantes des franges sombres.

5.f) En raisonnant sur les positions des franges des deux systèmes, on peut raisonner avec une définition simple de la notion de brouillage : il y a brouillage lorsque les franges brillantes dues à une source coïncident avec les franges noires dues à l'autre point source.

La source est à égale distance des deux fentes d'Young, par raison de symétrie. ⇐

5.a) Pour un point source unique, en considérant que les deux ondes qui parviennent sur l'écran sont cohérentes, on peut déterminer l'expression de l'éclairement à partir de celle :

– de la différence de marche δ : différence de chemin optique entre le point source S_0 et le point M, selon que le rayon passe par F_1 ou F_2. On peut écrire :

$$\delta(M) = [S_0F_2M] - [S_0F_1M] = [F_2M] - [F_1M].$$

À distance finie D et au premier ordre :

$$\boxed{\delta = \frac{ax}{D}}.$$

– du déphasage φ correspondant :

$$\varphi = 2\pi\frac{\delta}{\lambda} = 2\pi\frac{ax}{\lambda D}.$$

– de la formule des interférences pour deux ondes cohérentes de même amplitude :

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_m}{2}(1+\cos\varphi).$$

En regroupant ces résultats, on aboutit à l'expression attendue :

$$\boxed{\varepsilon(x) = \frac{\varepsilon_m}{2}\left[1+\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\frac{ax}{D}\right)\right]}.$$

b) En présence du second point source seul, on doit modifier dans ce qui précède l'expression de la différence de marche : les fentes d'Young ne sont en effet plus à égale distance de la source.

$$\begin{aligned}\delta(M) &= [S_0'F_2M]-[S_0'F_1M]\\ &= [S_0'F_2]-[S_0'F_2]+[F_2M]-[F_1M]\\ &= \frac{ax_0}{d}+\frac{ax}{D}\end{aligned}$$

$$\boxed{\varepsilon'(x) = \frac{\varepsilon_m}{2}\left[1+\cos\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{ax_0}{d}+\frac{ax}{D}\right)\right]}.$$

Le calcul de la différence de marche entre la source et les fentes d'Young est le même que celui effectué entre les fentes et le point M, en changeant D en d.

On remarque que la valeur maximale n'est plus obtenue en $x = 0$.

Il y a eu translation du système de franges.

c) Les ondes issues des deux sources ne sont pas cohérentes, on doit donc ajouter les éclairements, sans se préoccuper de termes de phase pour des ondes émanant de sources différentes.

Ainsi, par simple addition :

$$\varepsilon_T = \varepsilon(x)+\varepsilon'(x) = \frac{\varepsilon_m}{2}\left[2+\cos\left(\frac{2\pi ax}{\lambda D}\right)+\cos\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{ax_0}{d}+\frac{ax}{D}\right)\right].$$

On met à profit l'identité trigonométrique :

$$\cos p+\cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

pour obtenir l'expression :

$$\varepsilon_T = \varepsilon_m\left[1+\cos\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{ax}{D}+\frac{ax_0}{2d}\right)\cos\left(\frac{\pi}{\lambda}\frac{ax_0}{d}\right)\right].$$

On obtient dans le crochet un produit de deux facteurs, dont l'un seulement est fonction de x. Il est ainsi possible de définir v, facteur de visibilité, tel que :

$$\boxed{\varepsilon_T = \varepsilon_m\left[1+v\cos\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{ax}{D}+\frac{ax_0}{2d}\right)\right]},$$

© Larousse – La photocopie non autorisée est un délit

l'expression de v est donnée par :

$$\boxed{v = \cos\left(\frac{\pi ax_0}{\lambda d}\right)}.$$

Erreur à éviter
Le facteur de visibilité est distingué du contraste, car rien ne l'empêche d'être négatif.

d) Puisque le terme $\cos\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{ax}{D}+\frac{ax_0}{2d}\right)$ varie entre -1 et 1, l'éclairement total ε_T varie entre :

– la valeur maximale $\varepsilon_{max} = \varepsilon_m(1+|v|)$ et

– la valeur minimale $\varepsilon_{min} = \varepsilon_m(1-|v|)$.

Le contraste est ainsi :

$$\boxed{C = \frac{\varepsilon_{max}-\varepsilon_{min}}{\varepsilon_{max}+\varepsilon_{min}} = |v|}.$$

Ici, le contraste ne dépend pas de la différence de marche.

Un point mérite d'être remarqué et retenu : le contraste est constant dans toute la figure d'interférence, c'est une propriété que l'on retrouve dans les problèmes de cohérence spatiale, où l'on prend en compte l'influence de la taille de la source.

Le paramètre de dimension de la source est x_0 ici, on obtient :

$$\boxed{C = \frac{\varepsilon_{max}-\varepsilon_{min}}{\varepsilon_{max}+\varepsilon_{min}} = \left|\cos\left(\frac{\pi ax_0}{\lambda d}\right)\right|}.$$

En pratique, il est difficile d'apprécier avec précision si le brouillage est parfait : une faible valeur de contraste conduit à une disparition apparente des franges.

e) Un brouillage correspond théoriquement à une annulation du contraste : les franges brillantes et sombres ont alors même intensité : $\varepsilon_{max} = \varepsilon_{min}$. Ceci est obtenu lorsque :

$$\cos\left(\frac{\pi ax_0}{\lambda d}\right) = 0.$$

$\cos(u) = 0$ pour :
$u = \frac{\pi}{2}+k\pi$, k entier.

On n'obtient donc pas une valeur de x_0 mais un ensemble : le brouillage s'obtient lorsque :

$$\boxed{x_0 = \frac{\lambda d}{2a}+k\frac{\lambda d}{a}}$$

où k est un entier.

Le raisonnement convient aussi pour les autres valeurs x_0 annulant le contraste.

f) Il est intéressant de comparer, en un point M donné, la différence de marche obtenue pour l'un ou l'autre des points sources, lorsque $x_0 = \frac{\lambda d}{2a}$.

Pour S_0 en effet, $\delta(x) = \frac{ax}{D}$; tandis qu'au même point M avec le point source S_0'.

$$\boxed{\delta'(x) = \frac{ax}{D}+\frac{ax_0}{d} = \frac{ax}{D}+\frac{\lambda}{2}}.$$

On en déduit qu'en tout point de l'écran d'observation, les différences de marche diffèrent d'une demi-longueur d'onde :

$$\delta'(x) = \delta(x)+\frac{\lambda}{2}.$$

Si l'ordre d'interférence est demi-entier pour un point source, il est nécessairement entier pour l'autre. Ainsi, les deux systèmes de franges présentent des anti-coïncidences, puisque les franges brillantes de l'un se situent sur les franges sombres de l'autre. Le contraste est alors considérablement diminué, il est annulé dans le cas présent car les deux points de la source émettent une même intensité.

Cette approche ne montre certes pas que le contraste est nul, mais elle donne simplement les valeurs de l'écartement x_0 des points sources qui rend minimum le contraste.

⇒ C'est parce que les points sources émettent des intensités identiques que l'anti-coïncidence annule le contraste : on somme deux évolutions sinusoïdales de même amplitude en opposition de phase.

REMARQUE – La source la plus simple qui ne soit pas ponctuelle est composée de deux points. On peut déjà, avec ce modèle très élémentaire, concevoir qu'étendre la source nuit au contraste de la figure. Il faut toutefois se garder de conclure précipitamment : l'étude des interférences par division d'amplitude mettra en évidence des cas de localisation des franges, en des lieux où le contraste reste élevé en présence d'une source étendue. Ici, pour l'interféromètre à division de front d'onde que constitue le dispositif des fentes d'Young, il n'y a pas de localisation.

© Lavoisier – La photocopie non autorisée est un délit

Annales

Pour maîtriser les bases

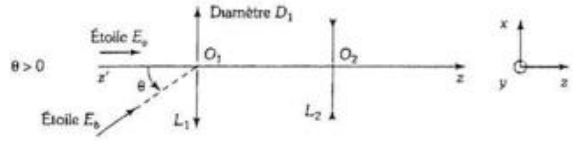
1. Interféromètre de Fizeau — D'après CCP

Ce problème traite de l'observation de deux étoiles E_a et E_b à l'aide d'une lunette astronomique munie d'un détecteur. Les deux étoiles E_a et E_b sont considérées ponctuelles et à l'infini, séparées par une distance angulaire θ, l'étoile E_a étant située dans la direction de l'axe optique de la lunette. Dans une première partie, on définit la configuration de la lunette utilisée dans les conditions de Gauss et on demande de calculer ses caractéristiques géométriques. La deuxième partie aborde le principe de la mesure de la distance angulaire entre deux étoiles, effectuée grâce aux interférences produites par deux fentes placées devant la lunette astronomique. On néglige dans cet exercice les effets de la diffraction.

1. Étude géométrique

On considère une lunette astronomique d'axe optique $z'z$ (Fig. 15) constituée :

- d'un objectif assimilé à une lentille mince convergente L_1 de diamètre $D_1 = 50$ cm et de distance focale image $f_1' = 7.5$ m ;
- associé à une lentille divergente L_2 de distance focale image $f_2' = -0,025$ m.



Lunette astronomique — **Figure 15**

On désigne respectivement par O_1 et O_2, par F_1 et F_1', F_2 et F_2', les centres optiques, les foyers objet et image des lentilles L_1 et L_2.

a) Quelle est la forme et la direction des faisceaux lumineux des ondes 1 et 2, respectivement émises par les étoiles E_a et E_b, lorsqu'elles parviennent sur la lunette ?

b) On appelle A_1 l'image de l'étoile E_a à travers la lentille L_1. De même, B_1 désigne l'image de E_b à travers L_1. Dans quel plan se situent A_1 et B_1 ? Donner la distance algébrique $\overline{A_1B_1}$.

c) La lentille L_2 est placée peu avant le plan où se forment les images A_1 et B_1. On appelle respectivement A_2 et B_2, les images de E_a et E_b à travers la lunette. Sachant que :

$$\frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_1B_1}} = 2,$$

exprimer et calculer la distance $\overline{O_2A_1}$.

d) On définit la distance focale f' de la lunette par la relation $\overline{A_2B_2} = f'\theta$. la calculer.

e) Exprimer $\overline{A_1A_2}$. Comment évolue l'encombrement de la lunette par rapport au cas où seule la lentille L_1 existerait ? Quel est l'intérêt de la lentille L_2 ?

f) On place dans le plan où se forment les images A_2 et B_2, une caméra à DTC (dispositif à transfert de charge). Ce récepteur d'images est composé d'une matrice rectangulaire de 768×512 détecteurs élémentaires, appelés pixels, de forme carrée, de côtés $a_1 = 9\ \mu m$. On suppose que la lunette est librement orientable. Une image parfaite à travers la lunette d'un point situé à l'infini, produit sur le détecteur un signal donnant une image dont la dimension ne peut être inférieure à la taille d'un pixel. Exprimer et calculer en seconde d'arc, la limite de perception angulaire θ_{min} due au récepteur d'image. Quelle est la plus grande valeur décelable θ_{max} en minute d'arc ?

2. Interférences

On considère une onde plane monochromatique de longueur d'onde λ, se propageant suivant l'axe $z'z$ en direction de la lunette. On place un écran opaque percé de 2 fentes de largeur infiniment fine, d'écartement variable d suivant x devant l'objectif de la lunette. On appelle C_1 et C_2 les centres des deux fentes (Fig. 16). L'observation est supposée effectuée dans le plan focal image de l'objectif L_1.

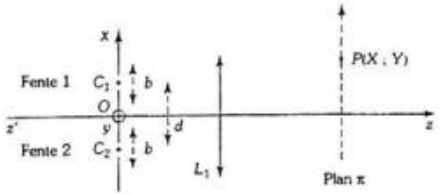


Figure 16

a) Montrer que l'on obtient des franges d'interférences. Calculer l'interfrange.

b) On observe à la lunette les étoiles voisines E_a et E_b. Quelle est la distance dans le plan focal de L_1 entre les centres des figures d'interférences données par E_a et E_b ?

c) On fait varier la distance d. Quelle est la condition pour observer le brouillage des franges ? Donner alors la relation entre θ et d.

d) Quelle est en pratique la limite de cette méthode, c'est-à-dire la contrainte qui fixe la distance angulaire θ la plus petite mesurable ?

Proposer une application numérique pour $\lambda = 0{,}68\ \mu m$ et une limite $\theta = 6\ 10^{-7}$ rad.

Conseils méthodologiques. 1. : Il faut appliquer les principes de l'optique géométrique : les notions de longueur d'onde, de déphasage ... n'ont pas leur place ici. On privilégie les constructions de rayons et l'utilisation des formules de conjugaison des lentilles. **2.** : La première question à laquelle il faut répondre est la cohérence ou l'incohérence des rayonnements. Une fois tranchée, cette question indique si l'on doit sommer les amplitudes ou les éclairements.

1.a) Les étoiles étant ponctuelles et situées à l'infini, les faisceaux de lumière qui parviennent sur l'instrument sont des faisceaux de lumière parallèle. Celui qui est dû à E_a parvient sous incidence nulle : il est parallèle à l'axe optique. Celui qui émane de E_b est en revanche composé de rayons inclinés d'un angle θ par rapport à l'axe optique de la lunette.

b) Les images par L_1 d'objets à l'infini sont par définition situés dans le plan focal image de cette lentille. A_1 est en son foyer image F_1'. B_1 constitue ce qu'il est convenu d'appeler un foyer secondaire.

⇨ **Remarque**

À distance très grande devant toute dimension caractéristique de l'instrument signifie à l'infini ici.

⇨ **Remarque**

Le plan focal image de la lentille est le plan conjugué avec l'infini.

© Ellipses – La photocopie non autorisée est un délit

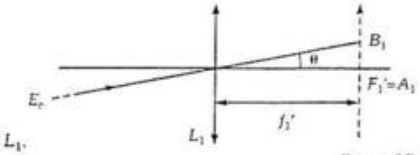


Figure 17

Le tracé du rayon incliné de θ et passant par le centre optique de L_1, donc non dévié, permet d'écrire (Fig. 17) :

$$\overline{A_1B_1} = \tan\theta f_1' \approx \theta f_1'$$

dans les conditions de Gauss.

⇨ **Remarque**

Les conditions de petits angles sont nécessaires pour pouvoir utiliser les propriétés des lentilles.

c) La lentille L_2 est placée avant le plan où se forment les images A_1 et B_1, qui constituent ainsi des objets virtuels.

A_2 et B_2 sont donc les images de A_1 et B_1 par L_2.

On peut faire une construction simple (Fig. 18) grâce à :

- un rayon passant par O_2, non dévié ;
- un rayon incident parallèle à l'axe et passant virtuellement par B_1 ; l'émergent passe virtuellement par F_2'.

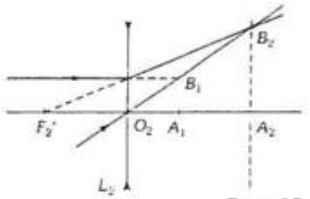


Figure 18

Utilisant la relation :

$$\frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{\overline{O_2A_2}}{\overline{O_2A_1}} = 2$$

on obtient :

$$\overline{O_2A_1} = -\frac{f_2'}{2} = 1{,}25\ \text{cm}$$

⇨ **Remarque**

On utilise le théorème de Thalès

par la relation de conjugaison $\frac{1}{\overline{O_2A_2}} - \frac{1}{\overline{O_2A_1}} = \frac{1}{\overline{O_2F_2'}}$.

d) La distance focale f' de la lunette est calculée grâce à la relation de définition : $\overline{A_2B_2} = f'\theta = f'\frac{\overline{A_1B_1}}{f_1'}$

donc : $f' = 2f_1' = 15\ \text{m}$

e) $\overline{A_1A_2}$ s'obtient par la relation de Chasles : en valeurs algébriques :

$$\overline{A_1A_2} = \overline{O_2A_2} - \overline{O_2A_1}$$

Puisque $\overline{O_2A_2} = 2\overline{O_2A_1}$, $\overline{A_1A_2} = 1.25$ cm.

L'encombrement de la lunette n'est que très légèrement plus grand que celui obtenu sans lentille L_2 : l'image n'est reculée que d'environ 1 cm à comparer à plus de 7 m. Mais un accroissement important de la distance focale équivalente est obtenu en contre-partie.

⇨ **Remarque**

L_2 devrait être étudiée comme un oculaire, si l'on faisait l'étude de l'image perçue par l'œil. Mais c'est un cas différent ici : un capteur optique est placé dans le plan de l'image.

f) La valeur minimale de $\overline{A_2B_2}$ doit excéder la taille d'un pixel, on écrit donc :

$$\overline{A_2B_2}_{2me} = 2f_2'\theta_{mn}$$

soit : $\theta_{mn} = 6\ 10^{-7}$ rad.

⇨ **Remarque**

En pratique, on doit obtenir plusieurs pixels pour pouvoir exploiter l'image.

Une seconde d'arc correspond à $\left(\frac{1}{60}\right)^2$ degré, le degré d'angle étant lui-même $\frac{\pi}{180}$ rad.

On obtient ainsi : $\theta_{min} \sim 0,1$ sec

La taille du détecteur est limitée par le nombre d'éléments d'image, on obtient ainsi une taille maximale analysable :

$$\theta_{max} = 768\,\theta_{min} \sim 77 \text{ sec} \sim 1,3 \text{ min}$$

En pratique, on doit faire pivoter la lunette, pour orienter le capteur de telle sorte que l'on bénéficie de son extension maximale.

⇒ **Remarque**

Pixel vient de « *picture element* » élément d'image

2.a) On se trouve en présence d'un système de fentes d'Young, pour lequel l'éclairage est effectué par un faisceau de lumière parallèle à l'axe, donc dans une situation telle que les vibrations au niveau des deux fentes soient synchrones. Dans cette situation, on doit sommer les amplitudes complexes dans le plan d'observation. L'éclairement n'est obtenu qu'ensuite, en prenant le carré du module de l'amplitude complexe résultante.

⇒ **Remarque**

C_1 et C_2 sont situés sur la même surface d'onde : ils vibrent en phase

L'observation est effectuée dans le plan focal image de l'objectif, on peut donc considérer qu'il s'agit d'une observation à l'infini. La différence de marche en un point P de l'axe $F_1'x$ prend l'expression :

$$\delta = \frac{x_P}{f_1'}d$$

⇒ **Remarque**

On utilise une relation au premier ordre, du fait des conditions de Gauss

où x_P désigne l'abscisse du point.

Les franges d'interférences sont donc des lieux à x_P constants, ce sont des droites parallèles à l'axe $F_1'y$. La frange centrale est obtenue pour $x_P = 0$: c'est l'axe $F_1'y$. L'interfrange s'obtient en déterminant pour quelle variation Δx_P de x_P la différence de marche varie de λ :

$$\Delta x_P = i = \frac{\lambda f_1'}{d}$$

⇒ **Remarque**

En incidence normale, la frange centrale est sur l'axe passant par le foyer, par raison de symétrie du plan yOz

b) Les centres des figures d'interférences correspondent aux images géométriques données par l'objectif pour chaque étoile :

- pour E_a, la frange centrale est située sur l'axe $F_1'y$;
- pour E_b, la figure est décalée autour du point B_1, c'est-à-dire qu'elle est translatée de $f_1'\theta$.

c) Les rayonnements issus de deux étoiles différentes sont incohérents. On additionne donc les éclairements et on superpose ainsi les figures d'interférences.

On obtient un brouillage des franges, lorsque les franges brillantes données par une étoile correspondent aux franges sombres obtenues si l'autre était seule. Or, les interfranges sont identiques pour les deux interférogrammes : il y a donc brouillage en tout point s'il y a anticoincidence des franges en un point. Il suffit donc d'obtenir l'image B_1 sur une frange sombre du système de franges dû à E_a :

$$f_1'\theta = \left(p + \frac{1}{2}\right)i$$

⇒ **Remarque**

L'interfrange est $i = \frac{\lambda f_1'}{d}$ pour chaque système de franges

avec p entier. En remplaçant i par sa valeur, on obtient la condition :

$$d = \left(p + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{\theta}$$

Lorsque d varie en partant d'une valeur nulle, le premier brouillage rencontré est obtenu pour :

$$d_{min} = \frac{\lambda}{2\theta}$$

⇒ **Remarque**

Pour $d = 0$, il n'y a pas d'interférences

© Laroque - La photocopie non autorisée est un délit

d) La distance angulaire θ la plus petite décelable par ce procédé est obtenue lorsque la première valeur de d, correspondant à un brouillage, n'excède pas la dimension de la lentille L_1. Si la valeur maximale de d est fixée à D_{max}, la valeur minimale θ_{min} de θ est :

$$\theta_{min} = \frac{\lambda}{2D_{max}}$$

⇒ **Remarque**

Les fentes d'Young doivent rester sur la surface de la lentille

Numériquement, on obtient une distance entre les deux fentes d'Young de l'ordre de 57 cm.

⇒ **Remarque**

Historiquement, la méthode a été testée sans succès par ses premiers inventeurs, faute de disposer de télescopes de diamètres suffisants

REMARQUE – Dans ce petit problème, on voit se mêler des raisonnements d'optique géométrique et d'optique physique. Il faut aborder chaque question par une réflexion préalable, pour déterminer si la problématique relève de l'un ou l'autre des aspects. Notamment, dans la question relative au brouillage des franges, on a été amené à utiliser l'image géométrique comme le centre de la figure d'interférence. Ce raisonnement a permis de faire l'économie d'un calcul de contraste, beaucoup plus long et sans intérêt ici.

Pour approfondir

2. Modèle des trains d'onde — D'après ENS

On fait interférer deux ondes issues d'une même source. La modélisation utilisée pour cette étude est celle d'une émission par trains d'onde monochromatiques : successions de séquences de durée τ, au cours desquelles la vibration scalaire a l'expression d'une sinusoïde de fréquence ν et d'amplitude S (Fig. 19).

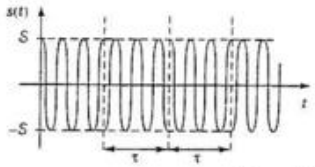


Figure 19

D'un train d'onde au suivant, l'amplitude et la fréquence restent inchangées (modèle simplifié) mais un déphasage aléatoire Φ est introduit :

$$s(t) = S\cos(\omega t + \Phi)$$

où $\omega = 2\pi\nu$.

On considérera que la valeur de Φ est tirée au hasard, sans corrélation d'un train d'onde au suivant, et qu'elle est uniformément répartie sur l'intervalle $[0, 2\pi]$.

a) Lorsque deux ondes issues de la même onde source, mais ayant parcouru des distances optiques différant de δ se superposent, quelle est l'expression de la vibration scalaire résultante ? On négligera l'existence d'une éventuelle atténuation de l'amplitude.

b) On rappelle que les capteurs de lumière effectuent une mesure qui équivaut à une moyenne quadratique de la vibration scalaire reçue :

$$\mathcal{E} = \langle s(t)^2 \rangle$$

Quelle forme prend le résultat, lorsqu'on superpose deux ondes de vibrations $s_1(t)$ et $s_2(t)$ de même fréquence ν, mais déphasées de φ par le jeu de la différence de marche ? On fera apparaître une expression fonction de la valeur moyenne d'un terme ne comprenant que des phases, dont l'évaluation est étudiée par la suite.

c) Quelle condition sur la différence de marche δ correspond à une superposition, à chaque instant, de vibrations issues de trains d'onde différents ? Que peut-on dire de l'éclairement résultant ? Déduire une longueur de cohérence L_c à partir de ce résultat.

Application numérique : $\tau = 10^{-10}$ s.

d) On se place dans le cas où la différence de marche est inférieure à la longueur de cohérence. Proposer une expression de l'éclairement en fonction de la différence de marche et en déduire celle d'un facteur de visibilité $\mathcal{V}(\delta)$.

e) Tracer le graphe donnant le contraste en fonction de la différence de marche.

f) Partant d'une valeur nulle de la différence de marche, on l'augmente jusqu'à voir disparaître le phénomène d'interférences. Commenter.

Conseils méthodologiques. a) : L'existence d'une différence de marche implique celle d'un retard, proportionnel à δ. b) : Il s'agit ici d'interférences à deux ondes en lumière non rigoureusement monochromatique, du fait de la présence du déphasage aléatoire. Il faut reprendre l'étude. c) : Dès que le retard est suffisamment grand, on peut considérer les ondes décorrélées. d) : Il faut distinguer, au cours du temps, les laps de temps au cours desquels les ondes superposées présentent un déphasage lié à δ, et les durées au cours desquelles le déphasage prend une valeur quelconque. e) : La relation entre contraste et facteur de visibilité est usuelle, ne pas être gêné par la dépendance en δ.

a) Si la vibration due à une des ondes reçues s'écrit :

$$s_1(t) = S\cos(\omega t + \Phi_1)$$

celle qui correspond à la seconde onde est retardée de $\Delta t = \frac{\delta}{c}$.

On peut donc écrire :

$$s_2(t) = S\cos(\omega(t-\Delta t)+\Phi_2) = S\cos(\omega t - \omega\Delta t + \Phi_2).$$

Notons φ le terme de déphasage $\varphi = \omega\Delta t$.

$$s_2(t) = S\cos(\omega t - \varphi + \Phi_2).$$

– Φ_1 et Φ_2 désignent les phases que prennent à chaque instant les trains d'onde considérés. On raisonnera par la suite en les comparant : c'est notamment leur différence qui est pertinente.

– φ n'est autre que le déphasage pris en compte habituellement, qui est lié à la différence de marche δ par :

$$\varphi = 2\pi\frac{\delta}{\lambda_0}.$$

b) La vibration instantanée résultante s'écrit : $s(t) = s_1(t) + s_2(t)$. Le détecteur effectuant la moyenne quadratique de l'amplitude résultante, on peut écrire :

$$\mathcal{E} = \langle (s_1(t)+s_2(t))^2 \rangle = \langle s_1^2(t)\rangle + \langle s_2^2(t)\rangle + 2\langle s_1(t)s_2(t)\rangle$$

car la moyenne d'une somme est la somme des moyennes.

Les premiers termes $\langle s_1^2(t)\rangle$ et $\langle s_2^2(t)\rangle$ sont égaux à $\frac{S^2}{2}$, dès lors que la moyenne est effectuée sur une durée comprenant un très grand nombre de périodes.

⇨ Remarque

La distance optique parcourue tient compte de l'indice. Puisque la célérité des ondes dans le milieu est c/n, une différence de chemin optique δ induit un retard δ/c.

⇨ Remarque

La présence de Φ_2 dans l'expression provient d'un éventuel changement de train d'onde, cet aspect est examiné ensuite.

⇨ Remarque

λ_0 est la longueur d'onde dans le vide :

$$\lambda_0 = \frac{c}{\nu} = 2\pi\frac{c}{\omega}$$

⇨ Remarque

Dans un milieu linéaire comme le vide, les amplitudes instantanées s'ajoutent lorsque les ondes se superposent.

⇨ Remarque

La durée caractéristique pendant laquelle est calculée la moyenne dépend du capteur, on la considère très grande devant la période $1/\nu$ et devant τ ici.

© Livresse – La reproduction non autorisée est un délit

D'autre part, le produit $s_1(t)s_2(t)$ peut se mettre sous la forme d'une somme de deux fonctions du temps :

– l'une s'écrit :

$$\frac{S^2}{2}\cos(2\omega t + \Phi_1 + \Phi_2 - \varphi)$$

elle a une fréquence 2ν très élevée, sa moyenne est nulle ;

– l'autre s'écrit :

$$\frac{S^2}{2}\cos(\Phi_1 - \Phi_2 + \varphi).$$

Sa fréquence est quasi-nulle à l'échelle de quelques périodes $1/\nu$, mais ce terme varie par le jeu de $\Phi_1 - \Phi_2$. La moyenne temporelle du produit $s_1(t)s_2(t)$ est donc donnée par :

$$\boxed{\langle s_1(t)s_2(t)\rangle = \langle\frac{S^2}{2}\cos(\Phi_1 - \Phi_2 + \varphi)\rangle}.$$

Finalement, l'éclairement détecté par le capteur s'écrit :

$$\mathcal{E} = S^2 + S^2\langle\cos(\Phi_1 - \Phi_2 + \varphi)\rangle.$$

On retrouve le résultat usuel, dans le cas où il n'y a pas de terme Φ :

$$\mathcal{E} = S^2(1+\cos\varphi),$$

car alors φ est une constante.

Erreur à éviter

Il faut distinguer plusieurs échelles de temps : celle de la période de l'onde électromagnétique $1/\nu$, celle des trains d'onde et celle de la réponse du capteur.

⇨ Remarque

φ est liée à la seule différence de marche, donc en un point d'observation donné, φ ne varie pas dans le temps.

c) Si le décalage temporel entre les signaux s_1 et s_2 excède la durée d'un train d'onde, c'est-à-dire si $|\Delta t| > \tau$, la différence $\Phi_1 - \Phi_2$ prend des valeurs aléatoires, au fur et à mesure de l'arrivée des trains d'onde.

En effet, à aucun instant on ne voit se superposer des périodes de signal émanant d'un même train d'onde initial.

Or, la moyenne d'une fonction sinusoïdale d'un terme équiréparti dans $[0,2\pi]$ est nulle :

$$\langle\cos(\Phi_1 - \Phi_2 + \varphi)\rangle = 0.$$

On en déduit que les deux rayonnements n'interfèrent pas, leurs éclairements s'ajoutent :

$$\boxed{\mathcal{E} = S^2}$$

quel que soit φ.

La relation $|\Delta t| > \tau$ équivaut à :

$$|\delta| > c\tau$$

On obtient ainsi la définition d'une longueur $L_c = c\tau$, telle que si $|\delta| > L_c$, les interférences disparaissent. On parle de longueur de cohérence.

Application numérique :

Pour $\tau = 10^{-10}$ s, $\boxed{L_c = 3\text{ cm}}$.

⇨ Remarque

Il s'agit d'une situation d'incohérence temporelle, au même titre que la superposition d'ondes de fréquences différentes.

⇨ Remarque

Une telle valeur de différence de marche n'est pas obtenue avec des fentes d'Young, mais elle peut aisément être atteinte avec un interféromètre de Michelson (cf. chapitre suivant).

d) Dans le cas où $|\delta| < c\tau$, on peut distinguer dans chaque train d'onde deux séquences (Fig. 20) :

– l'une de durée $\Delta t = \frac{\delta}{c}$, au cours de laquelle les périodes qui se superposent appartiennent à des trains d'ondes différents, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de valeur stable du déphasage durant ce laps de temps. D'un train d'onde au suivant, la phase varie aléatoirement : $\Phi_1 - \Phi_2$ prend une valeur équirépartie sur $[0,2\pi]$;

– l'autre dure le reste de la période, soit $\tau - \Delta t$. Les signaux qui se superposent ont été émis dans le même train d'onde, les phases Φ_1 et Φ_2 sont donc identiques et on peut écrire $\Phi_1 - \Phi_2 = 0$.

Le calcul de la valeur moyenne $\langle \cos(\Phi_1 - \Phi_2 + \varphi) \rangle$ peut ainsi être effectué en considérant un grand nombre de trains d'onde. En moyenne, sur une durée τ.

- le déphasage $\Phi_1 - \Phi_2 + \varphi$ prend une valeur équirépartie sur $[0, 2\pi]$ pendant la durée $\frac{\delta}{c}$, il contribue donc à la moyenne $\langle \cos(\Phi_1 - \Phi_2 + \varphi) \rangle$ par un terme nul ;
- tandis que durant $\tau - \Delta t$, $\Phi_1 - \Phi_2 + \varphi = \varphi$, qui contribue à la moyenne de $\langle \cos(\Phi_1 - \Phi_2 + \varphi) \rangle$ par $\frac{\tau - \Delta t}{\tau} \cos(\varphi)$.

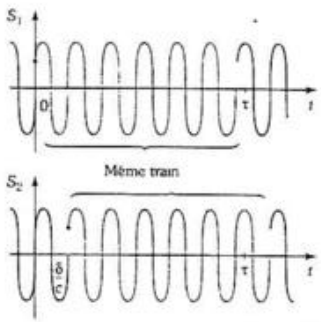


Figure 20

Finalement :

$$\langle \cos(\Phi_1 - \Phi_2 + \varphi) \rangle = \frac{\tau - \Delta t}{\tau} \cos(\varphi)$$

et on obtient l'expression de l'éclairement :

$$\mathcal{E} = S^2 + S^2 \left[1 - \frac{|\delta|}{c\tau} \right] \cos(\varphi)$$

Le facteur de visibilité $\mathcal{V}$ apparaît ainsi comme une fonction de la différence de marche et, en regroupant les deux résultats précédents, on peut écrire :

- si $|\delta| \geq L_c$, $\mathcal{V} = 0$,
- si $|\delta| < L_c$,

$$\mathcal{V} = 1 - \frac{|\delta|}{c\tau}$$

Le contraste s'identifie ici au facteur de visibilité car celui-ci est toujours positif :

$$C = |\mathcal{V}| = \mathcal{V}.$$

On obtient la représentation de la figure 21 où l'on remarque que lorsqu'augmente la différence de marche, le contraste entre franges brillantes et sombres s'amenuise.

La disparition des franges advient lorsque la différence de marche atteint la longueur de cohérence. Le nombre de franges observables est donc dû au rapport entre la longueur de cohérence et la longueur d'onde : c'est aussi le rapport entre la durée des trains d'onde et la période.

REMARQUE – Comme pour un rayonnement polychromatique, l'augmentation de la différence de marche conduit au brouillage. le raisonnement conduit ici a nécessité de reprendre la formule des interférences à deux ondes. On doit faire intervenir les propriétés du capteur : c'est-à-dire la notion de moyenne quadratique.

⇨ **Remarque**

Le contraste est fonction de la différence de marche, ce qui est usuel pour un problème de cohérence temporelle

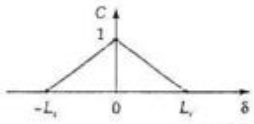


Figure 21

⇨ **Remarque**

En pratique, le contraste diminue selon une loi qui n est pas affine. le modèle très simplifié utilisé ici n en rend pas compte

© Nathan – La photocopie non autorisée est un délit

Interféromètre de Michelson

Méthodes

Le cours en questions

1 ■ Constitution de l'interféromètre

1.1 Dans un interféromètre de Michelson, quel est l'élément opérant une division d'amplitude de l'onde incidente ?

• Une lame séparatrice comporte une face traitée sur laquelle l'onde incidente se divise pour moitié en une onde transmise et une onde réfléchie.

Il s'agit de division par moitié pour l'intensité.

• On obtient ainsi deux ondes issues de la même onde incidente, donc les conditions de cohérence sont satisfaites.

1.2 Quel est le rôle de la lame compensatrice ?

• La lame séparatrice a nécessairement une épaisseur de verre qui se trouve être traversée un nombre inégal de fois par chacune des deux ondes qui interfèrent en sortie de l'interferomètre. Or, pour pouvoir obtenir une configuration dans laquelle la différence de marche est nulle quelle que soit la longueur d'onde, il faut éviter de faire intervenir l'indice du verre dans l'expression de la différence de chemin optique suivi par les rayons.

Sans compensatrice, il n'y a pas de réglage donnant $\delta = 0$ (frange centrale) quelle que soit la longueur d'onde.

• On doit ainsi compenser les parcours effectués dans le verre, en faisant en sorte que les deux ondes aient traversé la même épaisseur. Ceci est possible en plaçant une lame de même indice et même épaisseur que la lame séparatrice. Les deux rayons ont ainsi des chemins optiques qui ne diffèrent que par les longueurs parcourues dans l'air (Fig. 1).

© La chute - La photocopie non autorisée est un délit

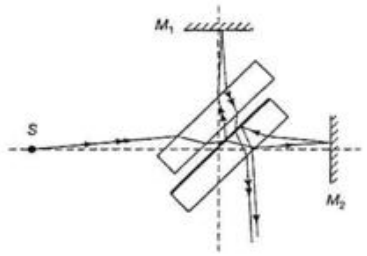


Figure 1

1.3 Comment l'opérateur peut-il agir sur la position des miroirs ?

• L'un des miroirs est translatable :

il est monté sur un chariot mobile en translation et dont on peut connaître avec précision les déplacements.

L'orientation d'un miroir nécessite deux vis de réglage, agissant selon deux axes orthogonaux.

• Les deux miroirs peuvent pivoter autour de deux axes orthogonaux, ce qui permet pour chacun d'eux de modifier l'inclinaison par rapport à la séparatrice. En outre, comme un élément déterminant du réglage de l'interférornètre réside dans l'orientation relative des deux miroirs, l'un d'entre eux a ses vis de réglage qui effectuent des rotations de grande ampleur, l'autre se prêtant à des ajustements fins.

1.4 Quels sont les ordres de grandeur des tolérances sur les épaisseurs des lames et la planéité des miroirs ?

• En matière d'interférence, la distance caractéristique est la demi-longueur d'onde, puisqu'une variation de différence de marche de cette valeur amène un changement complet de la nature d'une frange. En outre, les rayons effectuent un aller-retour entre lame et miroir, donc toute déformation conduit à une variation de chemin parcouru doublée.

On en déduit, dans le domaine visible situé entre 400 nm et 800 nm, qu'un défaut de l'ordre de quelques centaines de nanomètres est sensible.

• Cet ordre de grandeur justifie le soin qu'il faut apporter aux manipulations, le coût de l'instrument, mais également la très grande sensibilité des mesures que l'on peut espérer.

2 ■ Différentes configurations

2.1 Dans un schéma idéalisé où les lames séparatrice et compensatrice sont identiques, d'épaisseur négligeable et confondues, représenter les positions des miroirs au contact optique.

• Géométriquement, si l'on place les miroirs de telle manière qu'ils fassent un angle de $\frac{\pi}{2}$ avec la lame (Fig. 2) et soient symétriques par rapport à celle-ci, on obtient la configuration du contact optique.

• En pratique, il est avantageux de raisonner non pas à l'aide des miroirs M_1 et M_2, mais de M_1 et M_2', image de M_2 par la séparatrice. Le mot contact vient de ce que M_1 et M_2' sont confondus dans l'espace.

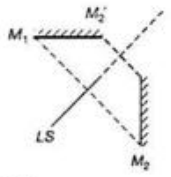


Figure 2

⇒ On note M_2' le symétrique de M_2 par la séparatrice compensée.

2.2 Partant de la situation précédente, on translate un miroir, quelle est la configuration obtenue ?

• La translation de l'un des miroirs a pour effet de former entre M_1 et M_2' une lame d'air fictive dont les faces sont parallèles (Fig. 3).

• L'épaisseur « e » de la lame d'air est égale au déplacement du miroir, mesuré dans une direction perpendiculaire à sa surface.

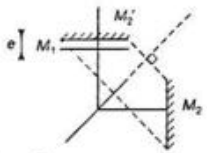


Figure 3

2.3 On revient au contact optique, puis on opère une rotation d'un miroir autour d'un axe inclus dans celui-ci. Quel nom donne-t-on à ce nouvel état de l'interféromètre ?

• La rotation d'un miroir se répercute dans le système de M_1 et M_2' par la formation d'un dièdre (Fig. 4), dont l'arête est l'axe de rotation utilisé.

• L'angle α dont on fait pivoter le miroir devient l'angle α du coin d'air ainsi formé.

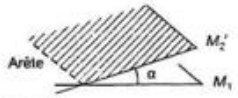


Figure 4

3 ■ Interférences en lame d'air

3.1 On place une source ponctuelle devant l'interféromètre réglé en lame d'air et on observe les franges sur un écran placé dans le plan focal d'une lentille mince convergente. Quelle est la forme des franges observées ?

• Le dispositif formé de l'image S_0' de la source par rapport à la lame séparatrice, de la lame d'air et du système de projection est invariant par rotation autour de l'axe. Les franges présentent donc cette invariance : ce sont des anneaux.

• Si l'on considère un point d'observation M sur l'écran, l'angle θ entre l'axe optique de la lentille et l'axe (OM), où O est le centre optique de celle-ci, est un paramètre essentiel. En effet, dans cette configuration de projection à l'infini, on retrouve l'angle θ comme angle d'incidence des rayons sur les miroirs (Fig. 5).

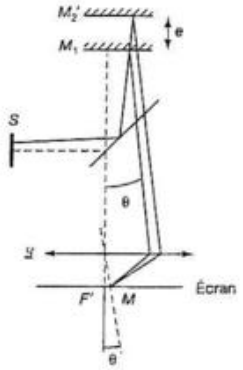


Figure 5

3.2 Dans le réglage précédent, quelle est l'expression de la différence de marche δ ?

• Les sources secondaires obtenues en effectuant les symétries successives du point source par la lame séparatrice et un des miroirs sont situées sur l'axe optique de la lentille et sont distantes de 2e.

• La différence de marche est obtenue grâce à la loi de Malus et au principe du retour inverse de la lumière :

$$\delta = 2e\cos\theta$$

Démonstration à connaître.

3.3 Que peut-on dire de l'ordre d'interférence au centre de la figure ? Comment varie-t-il lorsqu'on s'éloigne du centre ?

• Le centre de la figure (foyer de la lentille) correspond à $\theta = 0$, il est atteint par des rayons ayant suivi l'axe. La différence de marche est donc égale à $2e$, elle représente l'aller-retour supplémentaire qu'a suivi un rayon dans la lame.

• L'ordre d'interférence n'est donc pas nul au centre (sauf contact optique), il sera entier si 2e est un multiple de λ, mais pourra être demi-entier ou quelconque.

Noter l'extrême sensibilité !

• Ainsi l'état d'interférence au centre est variable en lame d'air : on peut d'ailleurs aisément passer d'un centre brillant à un centre sombre en modifiant de $\frac{\lambda}{4}$ l'épaisseur de la lame d'air.

• L'ordre d'interférence est maximal au centre.

3.4 Justifier l'appellation franges d'égale inclinaison.

• Sur une frange donnée, l'ordre d'interférence reste constant, donc la différence de marche. Or celle-ci ne dépend que de l'angle θ puisque l'épaisseur e est une constante dans une lame d'air. Les franges sont donc des lieux à inclinaison θ constante .

• On retrouve ainsi la forme d' anneaux de centre F' .

3.5 La translation d'un miroir fait varier une caractéristique de la lame d'air, laquelle ? Comment évolue l'interférogramme ?

• Par translation d'un miroir, on fait varier l'épaisseur de la lame d'air. Par exemple, si l'on diminue celle-ci, l'ordre d'interférence au centre diminue.

• Cette modification affecte aussi les anneaux qui s'engloutissent au centre lorsque l'épaisseur de la lame d'air est réduite. L'ordre au centre diminuant, ce sont les anneaux situés autour du centre qui viennent les uns après les autres occuper le centre avant de disparaître.

3.6 Quel est l'avantage des conditions d'éclairage et d'observation proposées ci-dessus lorsqu'on élargit la source ?

• Lorsque la source s'élargit, on peut craindre comme dans les dispositifs interférométriques ordinaires, notamment à division de front d'onde (fentes d'Young, miroirs de Fresnel), que le contraste ne se détériore. Or ici, dans cette configuration d'observation à l'infini, il n'en est rien.
En effet, pour un point M d'observation donné, la différence de marche ne dépend que de l'angle θ définissant l'inclinaison des rayons, indépendamment de la position de la source. Ainsi, pour tous les points source considérés, l'ordre d'interférence en M reste identique.

⇒ La notion de localisation des franges n'a de sens qu'en source étendue.

• Il n'y a donc pas de brouillage lorsqu'on élargit la source, pour l'interféromètre réglé en lame d'air avec observation à l'infini. On dit que les franges d'égale inclinaison sont localisées à l'infini .

⇒ En configuration de lame d'air, les anneaux sont localisés à l'infini.

• Pour que l'anneau défini par l'angle θ se forme sur l'écran, il faut que les rayons présentant cette inclinaison soient presents à l'entrée de l'interféromètre. La source doit donc être suffisamment proche de l'entrée de celui-ci. En pratique, un ensemble diaphragme - condenseur permet de contrôler ce point.

© Ellipses - La photocopie non autorisée est un délit

4 ■ Interférences en coin d'air

4.1 Par quel dispositif peut-on effectuer l'observation des franges du coin d'air au voisinage des miroirs ?

• On peut utiliser un viseur (appareil permettant une observation dans un plan situé à distance finie).

• On peut également projeter les franges sur un écran à l'aide d'une lentille convergente, en veillant à conjuguer le plan des miroirs avec l'écran .

• Enfin, sauf dans le cas d'un éclairement par LASER, on peut observer à l'œil nu, celui-ci accommodant afin d'observer à distance finie.

4.2 Pour un éclairage du coin d'air en incidence quasi normale, quelle est approximativement l'expression de la différence de marche en un point M du coin d'air ?

• Si l'on note $e(M)$ l'épaisseur du coin d'air dans le voisinage de M, la différence de marche correspond au parcours d'un aller-retour pour l'un des rayons, donc à :

$$\delta = 2e(M) .$$

La définition de $e(M)$ n'a de sens que parce que l'angle du coin est très petit.

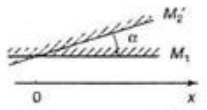


Figure 6

4.3 Dans les conditions d'éclairage et observation définies ci-dessus, quelle est la forme des franges ? Comment s'exprime l'interfrange ?

• Les franges sont rectilignes et parallèles à l'arête. Elles sont équidistantes les unes des autres.

• Pour les franges brillantes, $\delta = p\lambda$, avec p entier et $\delta = 2e(M)$. En utilisant une abscisse x, sur le coin d'air, dirigée perpendiculairement à l'arête, on peut écrire (Fig. 6) :

$$\alpha \approx \tan\alpha = \frac{e(M)}{x} .$$

Ainsi, les lieux pour lesquels $\delta = p\lambda$ sont tels que :

$$x_p = p\frac{\lambda}{2\alpha} .$$

L'interfrange sépare deux franges de même nature successives :

$$i = \frac{\lambda}{2\alpha} .$$

Retenir que l'interfrange est d'autant plus grande que l'angle est faible.

4.4 Justifier l'appellation de franges d'égale épaisseur.

• En tout point d'une même frange, la différence de marche reste constante ($p\lambda$ avec p donné). Or la différence de marche n'est fonction que de l'épaisseur. On constate donc que l'épaisseur du coin d'air est une constante sur une frange donnée.

4.5 Quelle est la modification de l'interférogramme consécutive à la translation d'un miroir, dans une configuration de coin d'air ?

⇒ Examiner le sort réservé à l'arête du coin d'air est facile et instructif.

• La réponse à cette question s'obtient aisément en utilisant le fait que les franges sont des lieux d'égale épaisseur. Si l'on effectue une translation d'un miroir, l'arête (lieu d'épaisseur nulle) se trouve translatée dans une direction qui lui est orthogonale (Fig. 7).

• Il en va de même pour toutes les autres franges. Si l'on note d la distance dont a été translaté un miroir et t la distance dont se sont déplacées les franges, on peut écrire :

$$\tan\alpha = \frac{d}{t} .$$

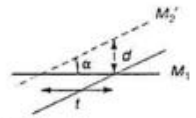


Figure 7

4.6 Même question pour une rotation d'un miroir autour de l'arête du coin d'air.

• La rotation ayant pour effet de modifier l'angle α sans déplacer l'arête, on obtient les deux propriétés suivantes :

– la frange brillante (frange centrale) correspondant à l'arête n'est pas déplacée, donc les franges conservent la même direction ;

– l'interfrange $\frac{\lambda}{2\alpha}$ varie, ce qui provoque un resserrement des franges si α croît, ou un éloignement si α décroît.

4.7 En lumière polychromatique, quelle est la frange qui présente une teinte identique à celle de la source ?

• L'arête du coin d'air est le lieu à différence de marche nulle (frange centrale), elle correspond donc à une frange brillante quelle que soit la longueur d'onde.

• La superposition de toutes les composantes spectrales émises par la source sur la frange centrale donne une lumière de composition identique à celle de la source, donc une même teinte.

© Les auteurs - La photocopie non autorisée est un délit

4.8 Quelle est la figure observée au contact optique ?

Le contact optique peut être vu comme un coin d'air dont l'épaisseur est nulle en tout point.

• Le raisonnement tenu précédemment pour l'arête du coin d'air est transposable à tous les points des miroirs, puisqu'au contact optique la différence de marche est nulle partout.

• Les miroirs sont donc des lieux à différence de marche nulle donc à interférence constructive (frange brillante) quelle que soit la longueur d'onde.

• En lumière polychromatique, la superposition de toutes les composantes spectrales de la source donne aux miroirs une teinte identique à celle de la source. Toutefois, toute modification du réglage (toute translation de quelques centaines de nanomètres) suffit à modifier la teinte : on parle de teinte sensible.

5 ■ Procédure de réglage

5.1 Partant d'un interféromètre déréglé, quelle lampe faut-il choisir en premier lieu pour observer les franges, parmi LASER, lampe à vapeur métallique, lampe à incandescence ?

• L'interféromètre étant initialement déréglé, la probabilité est faible qu'il existe dans le champ d'observation une zone à faible différence de marche, permettant d'observer des franges en lumière polychromatique.

Une lampe à vapeur de sodium peut également convenir : le doublet jaune est spectralement très étroit.

• On doit donc éviter d'utiliser un rayonnement à large spectre, mais bien au contraire choisir celui qui se rapproche le mieux d'une lumière monochromatique. On utilise donc le LASER.

5.2 Par quelle suite d'opérations peut-on atteindre le contact optique ?

• On effectue successivement des réglages de plus en plus minutieux :

– Un réglage géométrique (par recouvrement d'images obtenues à l'aide d'un LASER) du parallélisme des lames compensatrice et séparatrice.

– Un réglage géométrique de la position des miroirs, de telle sorte que l'on s'approche d'une configuration en lame d'air (parallélisme d'un miroir et de l'image donnée par la séparatrice de l'autre miroir).

– Les premières interférences en lame d'air étant obtenues, on translate un miroir de telle manière que l'on observe un engloutissement des anneaux au centre (l'épaisseur de la lame d'air diminue).

– Lorsque les miroirs deviennent très voisins, le dièdre qu'ils forment peut présenter un petit angle, on obtient des franges du coin d'air dont on augmente l'interfrange par rotation d'un miroir (l'angle du dièdre décroît alors).

• Au fur et à mesure de la progression dans ces réglages, il est possible, et souhaitable pour obtenir une meilleure précision, d'utiliser un rayonnement de spectre de plus en plus large.

Les savoir-faire clefs

1 ■ Savoir identifier et préciser le rôle des éléments.

Conseils méthodologiques

On donne ci-dessous le schéma d'un interféromètre (Fig. 8) ; les faces en trait gras sont traitées par un dépôt métallique.

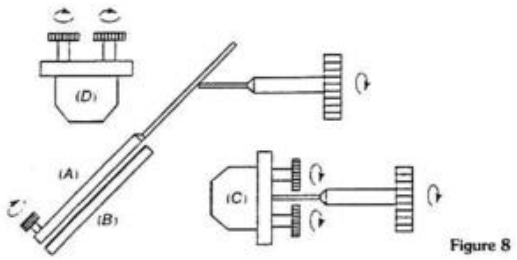


Figure 8

a) Nommer et préciser en une ligne environ le rôle et les possibilités de réglage (rotation, translation) de chaque élément repéré par la lettre *A*, *B*, *C* ou *D*.

b) Pour un rayon incident, tracer le(s) trajet(s) suivi(s) par la lumière en précisant le sens de parcours. La tolérance sur la différence de largeur des lames *A* et *B* est-elle de l'ordre du millimètre, du micromètre, du nanomètre ou du picomètre ? Justifier.

c) En l'absence d'une de ces lames, pourrait-on observer :
– les anneaux à l'infini en lumière monochromatique ?
– les franges rectilignes en lumière monochromatique ?
– les franges rectilignes pour un rayonnement incident polychromatique à spectre large (lumière blanche) ?

d) Quel intérêt y a-t-il à faire interférer des ondes d'égale intensité ? Justifier en exprimant un coefficient caractérisant la visibilité de la figure d'interférence en fonction du rapport des intensités des deux ondes. La face traitée de la lame B présente un coefficient de réflexion en énergie noté *R*. Préciser le coefficient de transmission en énergie si on néglige l'absorption de la lame. Les ondes qui interfèrent en sortie de l'interféromètre ont-elles même amplitude quel que soit R ?

e) Quelle valeur donne-t-on à R et pourquoi ?

1.a) et b) Il est utile de revoir le cours avant d'aborder ces questions, qui visent à contrôler que les notions essentielles sont comprises.

1.c) Il convient de se demander en premier lieu de quels paramètres dépend la différence de marche. Si l'un d'entre eux est lui-même fonction de la longueur d'onde, certaines observations ne pourront pas avoir lieu.

1.d) et e) On retrouve une discussion faite en cours : contraste et luminosité sont les caractéristiques de la figure d'interférence que l'on cherche à parfaire.

© La Librairie – La photocopie non autorisée est un délit

La compensatrice n'a pas de face traitée.

L'orientation d'un plan requiert deux paramètres angulaires.

1.a) A – La lame *A* est la compensatrice, son rôle est de permettre une compensation de la différence de parcours de la lumière dans le verre entre les deux bras de l'interféromètre.

Elle est réglable en rotation (selon deux axes).

B – La lame *B* est la séparatrice : c'est sur sa face traitée que s'effectue la division d'amplitude.

Dans le dispositif présenté, elle est fixe : on effectue en réalité tous les réglages par rapport à elle.

C – Le miroir *C* appartient à un des bras de l'interféromètre : il renvoie la lumière vers la séparatrice.

La translation et la rotation doivent être indépendantes.

Il est mobile en rotation (deux axes) et en translation.

D – Le miroir *D* réfléchit la lumière dans le second bras de l'interféromètre.

On est amené à comparer les positions du miroir *D* et de l'image du miroir *C* par rapport à la séparatrice.

Il est mobile en rotation seulement, car la translation du miroir C permet de modifier les positions relatives des deux miroirs par rapport à la séparatrice, ce qui est suffisant.

Une réflexion sur une face non traitée s'accompagne d'une atténuation de plus de 90 % de l'intensité : on ne représente pas le rayon correspondant.

b) Le tracé des rayons (Fig. 9) respecte les règles de changement de direction lors de la traversée des dioptres air-verre et verre-air. On n'a représenté ici que les rayons qui contribueront de façon significative à l'interférence lumineuse observée en sortie de l'interféromètre. Deux rayons repartent également en direction de la source et de multiples rayons ayant subi plusieurs réflexions sur les différentes faces existent également.

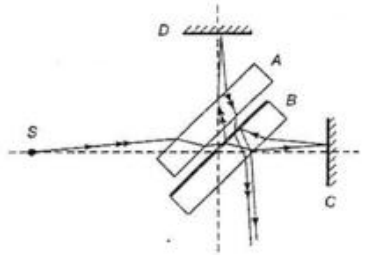


Figure 9

c) Sans séparatrice, on ne peut pas observer d'interférences par division d'amplitude.

La différence de marche comprend un terme lié à la différence de chemin optique dans le verre : $n(\lambda)\Delta d$.

Sans compensatrice par contre, on peut observer des interférences en lumière monochromatique. Ce n'est qu'en lumière polychromatique à spectre large (lumière blanche par exemple), que l'on ne pourra obtenir de lieux où la différence de marche sera quasi nulle pour toutes les longueurs d'onde. Il y aura donc brouillage des franges, par le fait de la superposition de rayonnements de longueurs d'onde différentes, dans des états d'interférences (constructive ou destructive) non identiques.

En lumière polychromatique, les franges ne sont observables qu'au voisinage de la frange centrale définie par $\delta = 0$.

d) Pour chaque composante monochromatique du rayonnement incident, en notant I_1 et I_2 les intensités des deux ondes obtenues en sortie de l'interféromètre, on peut écrire :

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\left(2\pi\frac{\delta}{\lambda}\right)$$

où δ désigne la différence des distances optiques parcourues par les rayons.

Le contraste $\boxed{C = \frac{I_M - I_m}{I_M + I_m}}$ prend ainsi l'expression :

$$C = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2} = \frac{2\sqrt{\frac{I_1}{I_2}}}{\frac{I_1}{I_2} + 1}$$

qui atteint sa valeur maximale, c'est-à-dire 1, lorsque les deux intensités sont égales : $\boxed{I_1 = I_2}$.

En transmission, le coefficient énergétique est $T = 1 - R$, chaque onde ayant subi une réflexion et une transmission sur la face traitée, a vu son intensité multipliée par $RT = R(1-R)$. Les ondes obtenues en sortie de l'interféromètre ont même intensité.

e) Pour rendre maximal le coefficient $RT = R(1-R)$, on adopte :

$$\boxed{R = 0{,}5}.$$

À somme constante, le produit de deux termes est maximal lorsque ces termes sont égaux.

REMARQUE – Cet exercice n'a pas d'autre but que de proposer une interrogation sur les principes mis en jeu et les raisons des choix effectués.

2 ▬ Savoir présenter le réglage géométrique

Conseils méthodologiques

Le choix d'un éclairage adéquat de l'interféromètre est une condition *sine qua non* de succès de l'expérimentation. Cet exercice propose une révision des choix à effectuer pour produire un faisceau de lumière parallèle. Si besoin, revoir le cours/TP de première année sur le collimateur.

On désire dans un premier temps régler approximativement la position des miroirs en vue d'obtenir des franges d'interférence. Pour ce faire, on réalise un collimateur à l'aide des éléments suivants : lampe, diaphragme et lentille mince.

a) Indiquer sur un schéma les positions respectives de ces éléments. Quelle condition sur ces positions permet d'obtenir un faisceau de lumière parallèle ?

b) On place également un condenseur (lentille de courte distance focale) dans le dispositif précédent, préciser son rôle et sa position par rapport aux autres éléments.

c) On place ce dispositif en entrée de l'interféromètre, indiquer par quel(s) réglage(s) (rotation ou translation) et sur quel(s) élément(s) on peut agir pour obtenir la superposition des faisceaux en sortie de l'interféromètre.

2.a) Sur la figure 10, on schématise l'association lampe, diaphragme et lentille dans l'ordre correspondant aux positions adéquates.

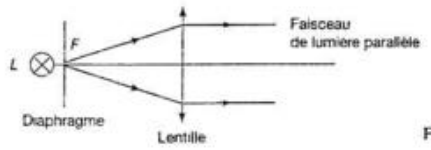


Figure 10

© La Librairie - La photocopie non autorisée est un délit

En pratique, les miroirs de l'interféromètre peuvent réaliser cette fonction.

Le diaphragme ayant pour rôle de réaliser une source quasi ponctuelle, on doit le placer au foyer objet de la lentille. L'opération de réglage de la distance diaphragme-lentille s'effectue par autocollimation, à l'aide d'un miroir placé derrière la lentille : on forme l'image de l'orifice du diaphragme sur lui-même.

La courte distance focale du condenseur permet de placer celui-ci près de la source et de rendre la distance source-diaphragme petite.

b) Pour accroître la quantité de lumière émise par la lampe collectée dans l'expérience, on place entre la source et le diaphragme un condenseur.

Un rayon LASER peut être utilisé ici.

c) Le diaphragme est pour l'instant de petites dimensions : l'interféromètre est donc éclairé par un faisceau de lumière parallèle. On obtient alors, après réflexions multiples sur les miroirs et les lames, un ensemble de faisceaux parallèles qu'il est possible de projeter sur un écran, afin d'obtenir deux groupes d'images alignées.

– On agit sur l'orientation de la lame compensatrice pour obtenir la superposition des images multiples de chaque groupe. À ce stade, les lames séparatrice et compensatrice sont parallèles.

On choisit le réglage qui permet une rotation la plus rapide.

– On agit sur l'orientation des miroirs jusqu'à obtenir la superposition des deux images restantes.

Ces actions n'ayant fait intervenir que des aspects géométriques, on peut utiliser tout type de lumière.

Conseils méthodologiques

3 ▬ Savoir décrire une configuration de coin d'air.

On raisonne sur l'interféromètre réglé de telle sorte que l'on observe, avec une source étendue, des franges rectilignes. La lumière utilisée est monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 589$ nm.

3.a) et b Il s'agit de connaissances exigibles, aucune justification n'est demandée.

a) Quelle est la teinte (couleur) de ce rayonnement ?

b) Préciser la position relative des miroirs (on pourra donner la position d'un miroir par rapport à l'image de l'autre miroir par l'ensemble des lames A et B de la figure 8).

3.c) La première question à laquelle il faut répondre est le lieu de localisation des franges.

c) On veut observer ces franges sur un écran placé à 1,5 m des miroirs, à l'aide d'une lentille placée à la sortie de l'interféromètre.

– La lentille doit-elle être convergente ou divergente ? Quelle relation doit vérifier sa distance focale ?

– On désire que l'interfrange sur l'écran soit 9 fois supérieur à celui obtenu dans le plan des miroirs ; déterminer la distance focale à utiliser.

– L'interfrange sur l'écran est égale à 1 cm, préciser par un paramètre géométrique la position relative des miroirs.

3.d) Représenter géométriquement le coin d'air et préciser quels paramètres le caractérisent ; parmi ceux-ci, quels sont ceux qui sont modifiés par la translation d'un miroir ?

d) On translate l'un des miroirs d'une longueur D, quelle modification peut-on observer sur la figure d'interférences ? Comment peut-on alors mesurer la distance D ?

3.a) La longueur d'onde donnée correspond à celle du doublet jaune du sodium.

Arête : intersection des plans des miroirs.

b) Les franges rectilignes sont obtenues dans une configuration de coin d'air : le miroir D et l'image C' du miroir C par la lame séparatrice forment un dièdre, caractérisé par son arête et l'angle du dièdre.

c) En présence d'une source étendue, le lieu d'observation des franges de meilleur contraste est situé au voisinage des miroirs. La lentille doit donc former l'image des miroirs sur l'écran de projection.

– Objet et image étant tous deux réels, la lentille doit être convergente. Sa distance focale est nécessairement inférieure au quart de la distance entre objet et image, c'est-à-dire au quart de la distance entre les miroirs et l'écran :

$$f' < 37 \text{ cm}.$$

On dit que les franges du coin d'air sont localisées au voisinage des miroirs.

– Le rapport entre l'interfrange mesurée sur l'écran et celle qui se trouve sur le coin d'air correspond au grandissement, soit $|\gamma| = 9$. Si l'on note O le centre optique de la lentille, M et E le centre des miroirs et de l'écran la relation de conjugaison s'écrit :

$$\frac{1}{\overline{OE}} - \frac{1}{\overline{OM}} = \frac{1}{f'}.$$

intersections des miroirs ou de l'écran avec l'axe optique

Le grandissement est, en valeur absolue :

$$|\gamma| = \left|\frac{\overline{OE}}{\overline{OM}}\right|.$$

Il s'agit de valeurs algébriques : $\overline{OE} > 0$ et $\overline{OM} < 0$.

Après résolution, $\overline{OE} = 1{,}35$ m et $\overline{OM} = -15$ cm. La distance focale est $f' = 13{,}5$ cm.

– L'interfrange sur l'écran est liée à la valeur de l'angle α du dièdre : en effet, la différence de marche est $\delta = 2e$ où e désigne l'épaisseur du coin d'air à l'abscisse considérée :

$$\delta = 2\alpha x.$$

α est très petit : on confond α et $\tan(\alpha)$.

Les franges brillantes correspondant à une différence de marche égale à un multiple de la longueur d'onde, on écrit :

$$2\alpha x = p\lambda$$

avec l'ordre d'interférence p entier. L'équation des franges brillantes est ainsi :

$$\boxed{x_p = p\frac{\lambda}{2\alpha}}$$

ce qui correspond à des franges rectilignes, parallèles et équidistantes.

Les franges sont parallèles à l'arête, qui est l'une d'entre elles ($x = 0$).

L'interfrange a pour valeur $\frac{\lambda}{2\alpha}$ dans le plan du coin d'air ; elle est multipliée par 9 sur l'écran.

Numériquement, on aboutit à une valeur de l'angle $\alpha = 2{,}65\ 10^{-4}$ rad. Il est bien légitime de confondre $\tan(\alpha)$ et α. Cet angle très petit n'est pas perceptible à l'œil.

d) En translatant un des miroirs, on modifie le dièdre sans affecter la valeur de son angle α. La direction des franges et leur écartement restent inchangés. Par contre, l'arête est translatée d'une longueur l liée à D par la relation trigonométrique :

$$\frac{D}{l} = \tan(\alpha) \approx \alpha.$$

L'ensemble de la figure d'interférences subit donc une translation de :

$$\boxed{l = \frac{D}{\alpha}}.$$

Sur l'écran, cette distance est multipliée par le grandissement : 9

© Larousier – La photocopie non autorisée est un délit

Pour mesurer la distance D, on compte le nombre de franges correspondant à la translation, c'est-à-dire que l'on compte I en nombre d'interfranges.

Si N est ce nombre, $I = N\frac{\lambda}{2\alpha}$, donc :

$$\boxed{D = N\frac{\lambda}{2}}.$$

Contrairement à α.

On obtient une mesure de D en longueurs d'onde, cette dernière étant connue généralement avec une très grande précision.

REMARQUE – Dans cette étude du coin d'air, aucun raisonnement ne dépasse les principes élémentaires ; mais l'enchaînement requiert une bonne connaissance des propriétés de ce type de configuration.

Conseils méthodologiques

4 ■ Savoir étudier la configuration de lame d'air.

On raisonne sur l'interféromètre réglé de telle sorte que l'on observe, avec une source étendue, des anneaux. La lumière utilisée est monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 589$ nm.

4.a) On reconnaît la schématisation de l'interféromètre, qui consiste à effectuer des transformations géométriques simples pour passer d'une représentation réelle à un schéma permettant une étude simple.

a) Préciser la position relative des miroirs. Quelle est la distance entre les deux points sources secondaires, obtenus en formant l'image de la source par la séparatrice et le miroir D d'une part, par le miroir C et la séparatrice d'autre part ?

On veut observer ces franges sur un écran placé à 1.5 mètre des miroirs, à l'aide d'une lentille placée à la sortie de l'interféromètre.

4.b) La source est étendue, il faut donc éviter le brouillage.

b) Comment doit-on positionner l'écran par rapport à la lentille ?

4.c) À partir de l'expression de la différence de marche, on doit déterminer quel paramètre (angle, coordonnée...) permet le repérage d'un point sur l'écran de projection et définit la nature de la frange.

c) On dispose de lentilles convergentes de distance focale 10 cm, 50 cm et 1 m. Laquelle permettra d'obtenir les anneaux projetés de plus grande taille ?

4.d) L'indication fixe l'épaisseur de la lame d'air. On peut donc mener l'étude de l'interférogramme.

d) Partant du réglage pour lequel la figure observée est uniforme, de même couleur que la source (teinte plate), on translate l'un des miroirs de 1 mm. Calculer le rayon sur l'écran des 5 premiers anneaux.

La distance entre l'objet et le miroir s'accroît de e de même que la distance entre l'image et le miroir. Au total, on obtient un déplacement de $2e$.

4.a) L'image C' du miroir C par la lame séparatrice est parallèle au miroir D : l'ensemble de ces deux surfaces délimite une lame d'air. Puisque, pour un objet fixe, reculer le miroir d'une distance e provoque une translation de l'image dans le même sens de $2e$, la distance entre les points source est égale à $2e$.

C'est dans ce plan qu'il n'apparaît pas de diminution du contraste lorsqu'on ouvre le diaphragme source.

b) Les franges de la lame d'air, en source étendue, sont localisées à l'infini, c'est-à-dire dans le plan focal image d'une lentille.

c) La différence de marche dépend de l'angle i que fait, avec l'axe, le rayon de construction passant par le centre optique de la lentille et le point d'observation. L'expression de cette différence de marche est :

$$\delta = 2e\cos i.$$

Pour un ordre d'interférence entier donné, $\delta = p\lambda$ garde une valeur constante, la frange correspondante est donc un lieu à i constant. On obtient ainsi un anneau de même axe de symétrie que la lentille de projection. Le rayon de l'anneau projeté sur l'écran est obtenu par la relation trigonométrique suivante :

$$\rho = f' \tan i \approx f' i$$

Il est donc d'autant plus grand que la distance focale de la lentille est importante. On utilise la lentille de distance focale égale à 1 m pour obtenir les anneaux de plus grand rayon.

⇒ L'épaisseur e de la lame d'air est une constante

d) L'épaisseur de la lame d'air est $e = 1$ mm. Une première question consiste à déterminer l'ordre d'interférence au centre :

⇒ Le contact optique correspond à une épaisseur de lame d'air nulle.

$$\boxed{p_0 = \frac{2e}{\lambda} = 3395{,}6}.$$

Cet ordre n'est pas entier, il est même proche d'une valeur demi-entière : le centre n'est pas brillant.

La première frange brillante rencontrée en partant du centre est un anneau dont l'ordre d'interference est égal à $p_1 = 3395$. On effectue un calcul en développant $\cos i$ au deuxième ordre, compte tenu des conditions de Gauss :

$$\delta_1 = 2e(1 - i_1^2/2) = p_1\lambda.$$

On obtient ainsi i_1 puis $\rho_1 = f' i_1$. Numériquement, $\rho_1 = 1{,}88$ cm.

On recommence avec les 2e, 3e, 4e et 5e anneaux, pour les ordres diminuant de 3394 à 3391. On obtient les valeurs :

$$\rho_2 = 3{,}07 \text{ cm}, \ \rho_3 = 3{,}91 \text{ cm}, \ \rho_4 = 4{,}6 \text{ cm} \text{ et } \rho_5 = 5{,}2 \text{ cm}$$

Ces valeurs croissent moins rapidement que la suite arithmétique de raison $\rho_2 - \rho_1$, donc ils se resserrent lorsqu'on s'éloigne du centre.

REMARQUE – On retiendra les notions de localisation et le mode de détermination géométrique des franges. La construction des rayons est primordiale, pour étayer la notion de franges observées à l'infini.

Erreur à éviter
L'ordre d'interférence décroît lorsqu'on s'éloigne du centre, comme $\cos i$.

5 ■ Savoir exploiter un détecteur à l'infini.

Conseils méthodologiques

On realise l'enregistrement du signal lumineux reçu par un détecteur de lumiere, quasi ponctuel, placé au foyer image d'une lentille convergente (Fig. 11). Ce détecteur délivre un signal électrique $s_E(t)$ proportionnel à l'éclairement reçu à l'instant t.

À partir de la configuration de l'interféromètre en lame d'air, avec un eclairage en lumière parallèle a l'axe, un des miroirs est animé d'un mouvement de translation à vitesse constante V. On enregistre l'evolution du signal s_E au cours du temps.

© Lavoisier – La photocopie non autorisée est un délit

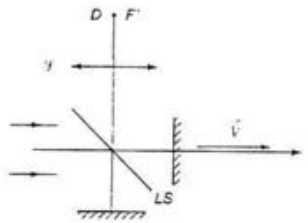


Figure 11

5.a) La première détermination concerne la différence de marche, donc le déphasage entre les ondes reçues par le détecteur.

a) Si la lumière est monochromatique, exprimer $s_E(t)$, puis tracer l'allure du graphe du signal enregistré. On introduira une constante de proportionnalité s_0 correspondant a la valeur du signal pour $\delta = 0$. Peut-on, à l'examen de ce signal, repérer la position de la frange centrale (point de différence de marche nulle) ?

5.b) Après justification, on ajoute les éclairements dus aux deux composantes spectrales.

b) La lampe utilisée pour produire cette lumière est bichromatique : son spectre est composé de deux raies de longueurs d'onde très proches : λ_1 et λ_2. On considérera les intensités respectives de ces deux composantes identiques.

Exprimer le signal reçu par le détecteur en fonction de λ_1, λ_2, V et t. On pourra choisir l'origine des temps de telle sorte que l'expression se simplifie.

5.c) Il est souvent judicieux d'exhiber un produit de deux facteurs périodiques en δ, l'un variant beaucoup plus lentement que l'autre : on considère alors qu'il module l'amplitude des variations.

c) On considere que les deux longueurs d'onde du doublet sont très proches et on définit :

- λ_c : valeur moyenne de λ_1 et λ_2 ;
- $\Delta\lambda$: différence entre λ_1 et λ_2.

Tracer l'allure du graphe de $\dfrac{s_E(t)}{s_0}$.

5.d) Dans l'expression obtenue, on doit chercher où se logent les informations relatives à λ_c et $\Delta\lambda$.

d) Montrer que l'expérience effectuee permet de déterminer les caractéristiques du doublet.

Il s'agit de l'expression $2e\cos i$ valable pour une lame d'air d'épaisseur e dans le cas d'un angle i nul. ⇐

5.a) Les deux ondes qui se superposent sur le détecteur ont parcouru les deux bras en restant parallèles à leurs axes (Fig. 12), la différence de chemin optique réside donc dans la différence de longueur des allers-retours. Si L_1 est la longueur d'un bras et L_2 la longueur de l'autre, lorsqu'une des ondes a traversé une longueur $2L_1$ dans l'air, l'autre a franchi $2L_2$ dans l'air : la différence de marche s'écrit :

$$\delta = 2(L_1 - L_2).$$

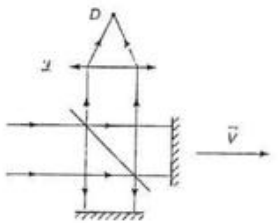


Figure 12

Considérons que c'est le miroir situé dans le bras correspondant à l'indice 1 qui se translate : $dL_1/dt = V$; en notant L_0 la valeur de $L_1 - L_2$ à l'origine des temps, on obtient :

$$\boxed{\delta = 2(L_1 - L_2) = 2L_0 + 2Vt}.$$

Pour ces interférences produites par deux ondes de même intensité, on peut écrire l'expression de l'éclairement reçu par le détecteur sous la forme :

$$\mathcal{E} = 2\mathcal{E}_0\left[1 + \cos\left(2\pi\frac{\delta}{\lambda}\right)\right]$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{s_E = \frac{s_0}{2}\left[1 + \cos\left(4\pi\frac{L_0 + Vt}{\lambda}\right)\right]}.$$

⇒ On utilise une loi de proportionnalité et on choisit la constante de telle sorte que $s_{E\max}$ soit s_0.

On obtient ainsi une évolution sinusoïdale du signal, sans valeur remarquable atteinte au contact optique, les maxima du signal étant tous de même ampleur.

b) Deux rayonnements de longueurs d'onde différentes n'interfèrent pas, on peut donc additionner leurs éclairements :

⇒ Ils sont incohérents.

$$s_E = \frac{s_0^1}{2}\left[1 + \cos\left(4\pi\frac{L_0 + Vt}{\lambda_1}\right)\right] + \frac{s_0^1}{2}\left[1 + \cos\left(4\pi\frac{L_0 + Vt}{\lambda_2}\right)\right].$$

⇒ s_0^1 et s_0^2 désignent les valeurs maximales atteintes pour chaque composante spectrale prise seule. Ici, $s_0^1 = s_0^2$.

Puisque les intensités des deux composantes spectrales sont identiques, on obtient simplement :

$$s_E = \frac{s_0^2}{2}\left[2 + \cos\left(4\pi\frac{L_0 + Vt}{\lambda_1}\right) + \cos\left(4\pi\frac{L_0 + Vt}{\lambda_2}\right)\right].$$

En choisissant l'origine des temps de telle manière que L_0 soit nulle, c'est-à-dire au contact optique, on obtient après une manipulation trigonométrique élémentaire :

$\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

$$\boxed{s_E = s_0\left[1 + \cos 2\pi Vt\left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}\right)\cdot\cos 2\pi Vt\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right)\right]}.$$

c) En utilisant les notations proposées, on peut écrire d'une part :

$$\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} = \frac{2}{\lambda_c}$$

et d'autre part :

$$\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_c^2}.$$

L'expression obtenue ainsi :

$$\boxed{s_E = s_0\left[1 + \cos\left(\frac{4\pi Vt}{\lambda_c}\right)\cdot\cos\left(\frac{2\pi Vt\Delta\lambda}{\lambda_c^2}\right)\right]}$$

met en évidence deux fonctions sinusoïdales du temps, dont les périodes sont très dissemblables :

© Laurivan - La photocopie non autorisée est un délit

– $\cos\left(\frac{4\pi Vt}{\lambda_c}\right)$ est périodique en t, avec une période égale à :

$$T_0 = \frac{\lambda_c}{2V}.$$

– tandis que $\cos\left(\frac{2\pi Vt\Delta\lambda}{\lambda_c^2}\right)$ varie beaucoup plus lentement, avec la période :

$$T_m = \frac{\lambda_c^2}{V\Delta\lambda}.$$

Le graphe de l'évolution du signal fait alors intervenir une modulation d'amplitude (Fig. 13). On a choisi ici, pour que le tracé soit possible, un rapport de l'ordre de 10 entre les périodes T_0 et T_m.

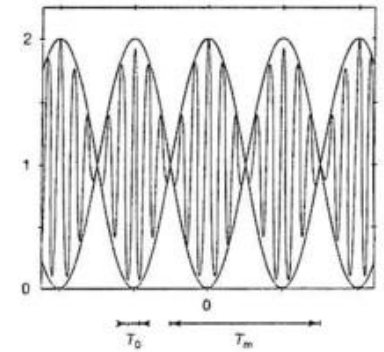


Figure 13

Le choix de N élevé permet d'augmenter la précision. ⇐

d) La détermination de la longueur d'onde centrale peut être effectuée en mesurant la durée de N périodes d'oscillation rapide, c'est-à-dire l'intervalle de temps NT_0 correspondant à N passages du signal détecté par sa valeur maximale.

Ce sont des brouillages de franges. ⇐

La détermination de la largeur du doublet met à profit la modulation : on constate périodiquement que l'amplitude des variations s'annule, ce qui permet de déterminer T_m. On attend en pratique plusieurs événements de ce type pour obtenir une détermination de T_m plus précise.

En pratique, on peut construire un moteur assurant la translation à vitesse V constante ; la détermination du rapport $\frac{T_m}{T_0}$ est donc précise et elle permet la mesure du facteur de finesse du doublet :

Nombre sans dimension. ⇐

$$\boxed{\frac{T_m}{T_0} = 2\frac{\lambda_c}{\Delta\lambda}}.$$

REMARQUE – On a pu ramener ici l'étude d'interférences à celle d'un graphe temporel. Cette configuration de l'interféromètre est fréquemment utilisée lorsqu'on désire déterminer le spectre d'un rayonnement.

Annales

Pour maîtriser les bases

1. Détection du contact optique — D'après CCP

Un interféromètre de Michelson, en configuration lame d'air, est éclairé en lumière parallèle ; un de ses miroirs est animé d'un mouvement de translation à vitesse constante V. On enregistre l'évolution, au cours du temps, du signal délivré par un capteur de lumière ponctuel. Celui-ci est placé au foyer image d'une lentille convergente, en sortie de l'interféromètre, comme dans l'exercice du savoir-faire : savoir exploiter un détecteur à l'infini.

On précise que le signal électrique délivré, noté $s(t)$, est proportionnel à l'éclairement reçu à l'instant t par le capteur.

a) La lumière utilisée est blanche et on suppose que la répartition de la puissance de la source en fonction de la fréquence est uniforme entre les fréquences ν_1 et ν_2 délimitant le spectre. Évaluer les fréquences ν_1 et ν_2 délimitant le domaine du visible.

Justifier qu'il revient au même d'étudier l'évolution du signal détecté au cours du temps, ou sa dépendance avec la différence de marche.

b) Le détecteur est supposé présenter une sensibilité identique pour toutes les fréquences et n'être sensible qu'aux ondes dont la fréquence est dans la bande passante $[\nu_1, \nu_2]$. Exprimer l'éclairement E reçu en fonction de δ, ν_1 et ν_2, où δ est la différence de marche. On introduira une constante de proportionnalité $E(0)$ correspondant à la valeur de l'éclairement pour $\delta = 0$.

c) Tracer le graphe de $\frac{E}{E(0)}$ en fonction de δ, en prenant en compte les valeurs numériques proposées précédemment.

d) Peut-on déterminer la position du passage par la frange centrale, à l'examen de l'évolution du signal issu du détecteur D lorsque le miroir se translate ? Si oui, donner un ordre de grandeur de l'incertitude de cette détermination.

Conseils méthodologiques. a) : On connaît généralement l'intervalle de longueurs d'onde, on en déduit celui des fréquences. L'expression de la variation de la différence de marche avec le temps prend une forme très simple. **b) :** On doit ajouter les contributions dues aux différentes composantes spectrales. **c) :** Il est une nouvelle fois judicieux de faire apparaître un produit de deux facteurs fonction de δ, l'un variant beaucoup plus lentement que l'autre. **d) :** Dans l'expression obtenue, on doit chercher ce qui peut caractériser le passage par la différence de marche nulle.

a) L'intervalle [400 nm, 800 nm] correspond à $[3.8\ 10^{14}\ \text{Hz}, 7.5\ 10^{14}\ \text{Hz}]$.

Les deux ondes qui ont parcouru les deux bras de l'interféromètre en restant parallèles aux axes présentent une différence de chemin optique égale à $\delta = 2(L_1 - L_2)$, où L_1 et L_2 sont les longueurs des bras.

Pour le bras contenant le miroir en translation, $L_1 = Vt$, donc en notant L_0 la valeur de $L_1 - L_2$ à l'origine des temps, on obtient :

$$\delta = 2(L_1 - L_2) = 2L_0 + 2Vt$$

⇨ **Remarque**

$\lambda = \frac{c}{\nu}$

⇨ **Remarque**

Ce résultat est valable quels que soient les rayons parvenant sur le détecteur.

En choisissant l'origine des temps au contact optique, on obtient une proportionnalité de la différence de marche avec le temps : $\delta = 2(L_1 - L_2) = 2Vt$.

Ainsi, repérer les propriétés remarquables, comme le passage par un maximum ou par un minimum, sur la loi $E(t)$ ou sur la loi $E(\delta)$ revient formellement au même.

b) Les interférences étant produites par des ondes de même intensité, on peut écrire pour chaque élément spectral :

$$dE = 2dE_0\left[1 + \cos\left(2\pi\frac{\nu\delta}{c}\right)\right]$$

Deux rayonnements de longueurs d'onde différentes n'interférant pas, on peut additionner leurs éclairements :

$$\boxed{E = 2K\int_{\nu_1}^{\nu_2}\left[1 + \cos\left(2\pi\frac{\nu\delta}{c}\right)\right]d\nu}$$

K est considérée comme constante ici, pour traduire l'hypothèse selon laquelle la répartition de la puissance de la source est uniforme entre ν_1 et ν_2.

On notera par exemple E_0 l'intégrale $K(\nu_2 - \nu_1)$.

Le calcul de l'intégrale $\int_{\nu_1}^{\nu_2} K\left[1 + \cos\left(2\pi\frac{\nu\delta}{c}\right)\right]d\nu$ s'effectue en décomposant en une somme de deux termes :

$$\int_{\nu_1}^{\nu_2} K\,d\nu = E_0 \quad \text{et} \quad \int_{\nu_1}^{\nu_2} K\cos\left(2\pi\frac{\nu\delta}{c}\right)d\nu = K\frac{c}{2\pi\delta}\left[\sin\left(2\pi\frac{\nu\delta}{c}\right)\right]_{\nu_1}^{\nu_2}.$$

Dans ce dernier terme, on peut utiliser l'identité trigonométrique :

$$\sin p - \sin q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

pour obtenir :

$$\int_{\nu_1}^{\nu_2} K\cos\left(2\pi\frac{\nu\delta}{c}\right)d\nu = K\Delta\nu\,\text{sinc}\left(\frac{\pi\Delta\nu\delta}{c}\right)\cos\left[\frac{2\pi\nu_c\delta}{c}\right]$$

où ν_c désigne la fréquence centrale : $\nu_c = \frac{\nu_1 + \nu_2}{2}$

et $\Delta\nu$ la largeur du spectre : $\Delta\nu = \nu_2 - \nu_1$.

Finalement, l'éclairement varie en fonction de la différence de marche selon l'expression :

$$\boxed{E(\delta) = \frac{E(0)}{2}\left[1 + \text{sinc}\left(\frac{\pi\Delta\nu\delta}{c}\right)\cos\left(\frac{2\pi\nu_c\delta}{c}\right)\right]}$$

avec $E(0)$ qui désigne la valeur prise au niveau de la frange centrale $\delta = 0$.

c) Pour le tracé (Fig. 14), il faut veiller à respecter le rapport $\frac{\Delta\nu}{\nu_c}$.

Puisque, pour le spectre visible, $\nu_2 \approx 2\nu_1$, on peut évaluer $\frac{\Delta\nu}{\nu_c}$ à $\frac{2}{3}$.

⇨ **Remarque**

À $t = 0$, L_0 est nul.

⇨ **Remarque**

dE_0 représente l'éclairement dû à un élément spectral s'il n'y avait qu'un miroir.

⇨ **Remarque**

Les rayonnements de fréquences différentes sont incohérents.

⇨ **Remarque**

La constante de proportionnalité K a la dimension d'une densité spectrale d'éclairement.

Technique de calcul

$\text{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$

Erreur à éviter

Distinguer E_0 et $E(0)$.

⇨ **Remarque**

Nombre sans dimension caractérisant la largeur relative du spectre : on est ici en présence d'un spectre large.

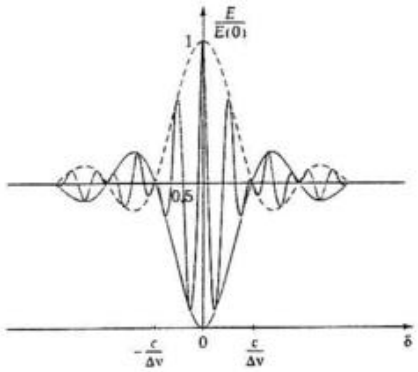


Figure 14

d) Le maximum absolu est atteint pour la différence de marche nulle, c'est-à-dire au contact optique. Ce résultat n'est pas surprenant, car sur la frange centrale, toutes les composantes spectrales interfèrent de façon constructive.

⇨ Remarque

$\delta = 0$ est multiple de toutes les longueurs d'onde.

Une détection de passage par le niveau maximum permet ainsi de localiser le contact optique ; mais cette détermination n'est pas infiniment précise. De façon générale, détecter la position d'un maximum est moins précis que détecter sa valeur (tangente horizontale). On peut estimer un ordre de grandeur de l'incertitude de cette détermination en calculant la position des deux minima entourant le pic central. L'abscisse correspondante est $\pm\delta_0$ avec $\frac{2\pi v_c \delta_0}{c} = \pi$.

On obtient un intervalle encadrant le maximum :

$$\left[-\frac{c}{2v_c}, \frac{c}{2v_c}\right] = [-3\,10^{-7}\text{ m}, 3\,10^{-7}\text{ m}]$$

cet encadrement étant pessimiste.

REMARQUE – On aborde dans cet exercice une application des interférences en lumière polychromatique : un spectre large permet une bonne localisation de la frange centrale. La méthode suivie pour conduire l'étude repose sur la sommation des expressions d'éclairement pour les différents éléments spectraux. Il est important de la connaître.

2. Interféromètre à prisme de mélange — D'après Oral Centrale-Supelec

On considère un prisme ABC équilatéral, de côté a, en quartz d'indice $n' = 1{,}53$ (Fig. 15) contenant une lame semi-réfléchissante AD. Une lame à faces parallèles d'épaisseur e est collée sur le prisme ; de l'autre côté, deux tubes 1 et 2 de longueur L contiennent de l'air à température constante et à pression p_1 et p_2 respectivement. Deux miroirs M_1 et M_2 sont fixés sur les extrémités des ces tubes.

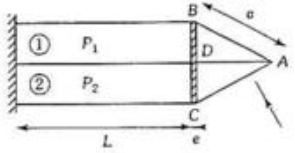


Figure 15

a) Tracer la marche d'un rayon arrivant perpendiculairement à AC à une distance $\frac{a}{4}$ de A et montrer que deux faisceaux s'étant réfléchis sur un des miroirs M_1 et M_2 sortent perpendiculairement de la face AB.

b) Calculer la différence de marche de ces faisceaux en fonction de L et des indices n_1 et n_2 de l'air dans les tubes.

c) En quoi ce dispositif est-il analogue à un interféromètre de Michelson ? Quelle en serait la configuration ?

d) On admet que pour un gaz parfait, l'indice n varie de telle sorte que $n - 1$ soit proportionnel à la masse volumique μ. Montrer que ce dispositif permet la mesure de la différence des pressions p_1 et p_2 ; préciser la nature de la loi reliant l'éclairement du faisceau émergent par la face BA à n_1 et n_2.

e) Si une des pressions est constante et si l'autre varie continûment au cours du temps. Quel moyen peut-on envisager pour effectuer une mesure automatique, c'est-à-dire avec un capteur, sans intervention humaine ? Comment déterminerait-on la résolution de l'instrument ?

Conseils méthodologiques. a) : Il suffit de s'appliquer à faire une figure respectueuse des angles. b) : On est conduit à un recensement des différentes parties du chemin optique parcouru par les faisceaux. c) : Cette question amène à s'interroger sur les spécificités de l'interférométrie dans un Michelson ; on peut alors effectuer les comparaisons. d) : La question précédente peut permettre de court-circuiter les calculs. e) : Les mesures les plus commodes consistent à comptabiliser les variations d'éclairement, notamment les annulations.

a) Suivons pas à pas la marche du rayon incident.

– Le rayon entrant par le point I situé sur la face AC n'est pas dévié, puisqu'il pénètre sous incidence normale.

– Parvenu sur la lame séparatrice, il se divise en deux parties : l'une qui se transmet sans déviation, l'autre qui se réfléchit une première fois, puis une seconde fois sur la face AC.

⇨ Remarque

Lors de la traversée d'une lame séparant deux milieux de même indice, il n'y a pas de déviation.

• Considérons tout d'abord le rayon qui se réfléchit sur la lame séparatrice.

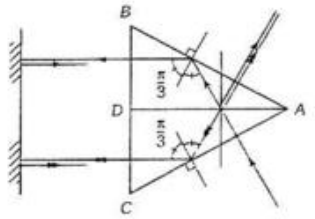


Figure 16

Il parvient sur la face AC (Fig. 16).

En ce point, un calcul s'impose pour savoir s'il y a réflexion totale ou non.

L'angle d'incidence est $\frac{\pi}{3}$ et le produit $n' \sin\frac{\pi}{3}$ est supérieur à 1.

La réflexion est totale.

Erreur à éviter

L'angle d'incidence est défini à partir de la normale.

– Ce rayon est alors réfléchi parallèlement à l'axe de symétrie (AD), il traverse la lame à faces parallèles sans déviation, puis parvient sur le miroir M_2.

⇨ Remarque

$n' \sin\frac{\pi}{3} = 1{,}32 > 1$: il n'y a pas de rayon réfracté.

– Arrivant sur M_2 sous incidence normale, il est réfléchi et emprunte le trajet inverse. Après réflexion sur AC, il regagne la lame séparatrice.

⇨ Remarque

Les conditions de la nouvelle réflexion sur la face AC correspondent à une réflexion totale : $n' \sin i > 1$.

– Une réflexion et une transmission ont alors lieu et on ne s'intéresse dans la suite qu'à la partie transmise, qui parvient sur la face AB sous incidence normale. Une partie du rayon émergent cherché est alors obtenue.

• Considérons maintenant le rayon transmis lors de la première rencontre avec la lame séparatrice.

– Il subit une réflexion sur la face AB, dans les conditions d'une réflexion totale, puis se propage parallèlement à l'axe (AD) jusqu'au miroir M_1.

– Réfléchi en incidence normale, il rejoint la séparatrice.

– Enfin, la part qui se réfléchit permet l'obtention d'un rayon émergent perpendiculaire à la face AB.

⇒ **Remarque**

Angle d'incidence $\frac{\pi}{3}$.

Les réflexions sur les faces du prisme n'engendrent pas de perte d'intensité (réflexions totales). Les divisions d'amplitude sont accompagnées d'une diminution de l'intensité des faisceaux, mais on remarque que les deux rayons qui sont superposés *in fine* ont subi le même nombre de réflexion et transmission, donc ont subi la même atténuation de ce fait. Il reste les transmissions entre la lame à faces parallèles et les tubes. Lorsque les indices dans les tubes diffèrent un peu, les conditions dans lesquelles se font ces transmissions ne sont pas tout à fait identiques, ce qui peut causer une légère différence.

En pratique, on peut vraisemblablement admettre que ces transmissions n'affectent que très peu l'intensité ou que les indices sont voisins dans les tubes, les ondes ont alors conservé la même intensité.

⇒ **Remarque**

Cette propriété est nécessaire à l'obtention d'un bon contraste.

b) Les trajets dans le verre, les réflexions sur les miroirs, et les réflexion ou transmission sur la lame séparatrice ont été effectués en même nombre par les deux faisceaux. Les trajets optiques et déphasages correspondants se sont donc compensés.

Ne demeure que la différence due à l'inégalité des indices dans les deux tubes :

$$\boxed{\delta = 2(n_1 - n_2)L}.$$

⇒ **Remarque**

Le facteur 2 provient d'un aller-retour dans les tubes.

c) Plusieurs analogies peuvent être soulignées :

– il s'agit tout d'abord de l'interférence d'ondes obtenues à partir d'un unique faisceau, par division d'amplitude ;

– les trajets dans le quartz ont été compensés par des distances identiques parcourues dans ce milieu. De ce fait, seuls demeurent les trajets dans l'air ;

– enfin, on notera que deux rayons repartent vers la source et qu'ils ne sont pas considérés ici : on suppose qu'ils sont absorbés par la source ou des montures d'instruments...

⇒ **Remarque**

Une lame séparatrice atteste de la présence d'une division d'amplitude.

Si l'on voulait se ramener à une configuration connue, on devrait former l'image des miroirs par les différentes faces sur lesquelles ont eu lieu des réflexions. On aboutirait à un parallélisme des miroirs fictifs obtenus. On peut donc parler de configuration équivalente à une lame d'air.

⇒ **Remarque**

Les indices ne sont toutefois pas les mêmes dans les deux bras !

d) Chaque indice est fonction de la masse volumique : or, pour un gaz parfait, il y a proportionnalité de la masse volumique à la pression à température constante :

$$\boxed{p = \frac{nRT}{V} = \frac{m}{V}\frac{RT}{M} = \mu\frac{RT}{M}}$$

où M désigne la masse molaire du gaz. On en déduit que la différence des indices est proportionnelle à la différence des pressions.

⇒ **Remarque**

Ce ne peut être que $n - 1$ et non n qui soit proportionnel à la masse volumique (c'est-à-dire à la densité du gaz), car $n = 1$ correspond au vide.

L'éclairement étant celui obtenu pour des interférences entre ondes de même intensités, on peut écrire :

$$\mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}_0}{2}(1 + \cos\varphi) \quad \text{où } \varphi \text{ est lié à la différence de marche par : } \varphi = 2\pi\frac{\delta}{\lambda}.$$

⇒ **Remarque**

$\mathcal{E}_0$ désigne ici l'éclairement maximum.

Finalement, l'éclairement dépend de la différence des indices selon la loi :

$$\boxed{\mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}_0}{2}\left(1 + \cos 4\pi\frac{(n_1 - n_2)L}{\lambda}\right)}.$$

© Ellipses – La photocopie non autorisée est un délit

e) Si la différence des pressions évolue continûment dans le temps, ces variations occasionnent des modification de φ, que l'on pourra apprécier par des annulations successives de l'éclairement.

⇒ **Remarque**

Un capteur peut être lié à un compteur qui enregistre le nombre de ces annulations.

La différence la plus élémentaire que l'on peut ainsi mesurer correspond à celle qui occasionne une variation de l'ordre d'interférence de $\frac{1}{2}$.

Ceci correspond à une variation d'indice :

$$\boxed{\Delta n = \frac{\lambda}{4L}}.$$

REMARQUE – La méthode suivie ici pour résoudre le problème s'est en partie inspirée des connaissances acquises lors de l'étude de l'interféromètre de Michelson. Procéder par analogies permet de connaître la marche à suivre : tracés des rayons, détermination de la différence de marche, puis du déphasage. Enfin, les discussions sur la forme que peut prendre une mesure et sa résolution ont également déjà été rencontrées. Ce fut en effet le cas lorsqu'un capteur était placé au foyer d'une lentille située en sortie de l'interféromètre réglé en lame d'air, dont un miroir se translatait.

3. Mesure de la courbure d'un miroir ___ D'après Oral Centrale-Supelec

Un miroir plan se déforme en un miroir sphérique convexe sous l'effet d'une contrainte mécanique. On note C le centre du miroir, S son sommet, R le rayon de courbure et A_0 une source ponctuelle sur l'axe du miroir.

a) Soit A' le symétrique de A_0 par rapport à S et A l'image de A_0. Exprimer $A'A$ en fonction de R et SA_0, lorsque $R \gg A_0S$.

b) Montrer que l'on peut considérer A comme une source, dont on précisera le déphasage par rapport à A_0.

c) On utilise ce miroir déformable dans un interféromètre de Michelson (Fig. 17), avec un autre miroir plan M_1. On notera M_2 le miroir courbé (sommet S_2) et on se place dans la configuration :

$$OS_1 = OS_2.$$

Décrire ce que l'on observe sur l'écran en présence et en l'absence de déformation.

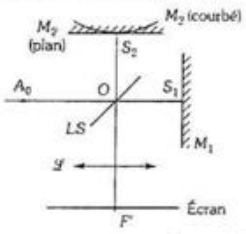


Figure 17

d) On adopte les valeurs numériques suivantes : $D = A_0S_1 = 20$ cm, $\lambda_0 = 540$ nm. Déterminer la première valeur du rayon de courbure R qui change la nature de l'état d'interférence au foyer image de la lentille de projection, lorsque l'on part d'un miroir M_2 plan et que l'on commence à le courber progressivement. Commenter.

Conseils méthodologiques. a) : C'est une question d'optique géométrique, que l'on peut résoudre à l'aide des formules de conjugaison. b) : Assimiler une image à une source secondaire est monnaie courante en optique physique, il faut revenir à la notion de stigmatisme. c) : Chaque état (miroir courbé ou non) correspond à une configuration de l'interféromètre à identifier avant de décrire les franges. d) : Le rayon de courbure est une grandeur qui décroît ici depuis l'infini, on s'intéresse à l'évolution de l'ordre d'interférence au centre.

a) La relation de conjugaison des miroirs s'écrit :

$$\frac{1}{\overline{SA_0}} + \frac{1}{\overline{SA}} = \frac{2}{\overline{SC}}.$$

⇒ **Remarque**

Il s'agit de la relation avec origine au sommet, manifestement plus adaptée ici.

D'autre part, la relation définissant le symétrique A' est :

$$\boxed{\overline{SA'} = -\overline{SA_0}}$$

et on note que A' est l'image de A_0 lorsque le miroir n'est pas courbé.
On substitue dans l'équation de conjugaison $\overline{SA_0}$ par $-\overline{SA'}$, il vient :

$$\overline{AA'} = \overline{SA'} - \overline{SA} = 2\frac{\overline{SA}\ \overline{SA'}}{R}.$$

Au premier ordre, on peut assimiler $\overline{SA} \cdot \overline{SA'}$ à $\overline{SA_0}^2$ et obtenir ainsi :

$$\boxed{\overline{AA'} = 2\frac{\overline{SA_0}^2}{R}}.$$

b) Considérons dans un premier temps le miroir non courbé.

Le chemin optique $[A_0M]$ obtenu lorsqu'un rayon émis par la source A_0 se réfléchit sur le miroir au point I (Fig. 18) et parvient en M, se décompose en :

$$[A_0M] = A_0I + \Delta_R + IM$$

où Δ_R est une différence de marche qu'il faut introduire pour rendre compte du déphasage de π apparaissant à la réflexion :

$$\boxed{\Delta_R = \frac{\lambda_0}{2}}.$$

REMARQUE – Dans la suite, on retrouvera une différence de marche additionnelle de même type, rendant compte de la réflexion sur l'autre miroir de l'interféromètre. On peut ainsi omettre dorénavant ce terme supplémentaire.

Or, par raison de symétrie, les trajets A_0I et $A'I$ ont même longueur, et on peut par conséquent assimiler $[A_0M]$ à $[A'M]$, en considérant le trajet virtuel $[A'I]$ effectué dans l'air. Cette relation traduit le fait que A' est l'image de A_0, c'est-à-dire le stigmatisme rigoureux de A' et A_0 pour le miroir.

Dans le cas du miroir courbé, le stigmatisme n'est plus rigoureux mais seulement approché la relation $[A_0M] = [A'M]$ devient $[A_0M] \approx [AM]$: on parle de stigmatisme approché. On peut donc considérer le point image A comme une source, dont la phase de la vibration est identique à celle qui est réellement présente en A_0.

REMARQUE – En réalité, elle ne diffère de celle-ci que du terme π rendant compte de l'opposition de phase due à la réflexion.

c) Sans déformation du miroir M_2, la configuration de l'interféromètre est celle du contact optique : l'écran est uniformément éclairé avec une teinte qui est celle de la source. Lorsque le miroir M_2 est courbé, deux points sources secondaires peuvent être construits (Fig. 19),

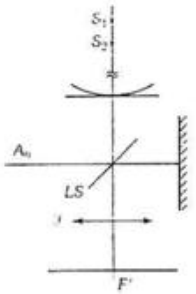


Figure 19

⇒ Remarque

L'image d'un point par un miroir plan est son symétrique orthogonal : c'est un cas de stigmatisme rigoureux.

Erreur à éviter

On note qu'un miroir faiblement courbé présente un rayon de courbure très grand !

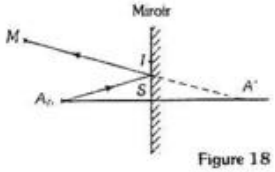


Figure 18

⇒ Remarque

On considère l'indice du milieu (air) égal à 1.

⇒ Remarque

On doit se limiter aux rayons proches de l'axe (conditions de Gauss).

⇒ Remarque

On suppose ici que l'éclairage est non parallèle, c'est-à-dire que les rayons incidents présentent une grande variété d'inclinaisons.

– S_1 obtenu par symétrie du point A_0 par rapport à M_1 puis par rapport à la séparatrice ;

– S_2 qui est l'image dans le miroir M_2 du symétrique de A_0 par la lame séparatrice.

On obtient ainsi deux points sources situés sur l'axe de la lentille de projection : par raison de symétrie, les franges d'interférence sont des anneaux sur l'écran. On obtient une configuration des points sources secondaires identique à celle obtenue en lame d'air.

d) Le rayon de courbure décroît depuis une valeur infinie, au fur et à mesure que la courbure du miroir augmente. On s'intéresse à l'évolution de l'ordre d'interférence au foyer de la lentille de projection. En ce point, la différence de marche est uniquement due à la distance entre les points sources secondaires S_1 et S_2 :

$$\boxed{\delta = S_1S_2 \approx 2\frac{D^2}{R}}.$$

Pour avoir une frange sombre, l'ordre d'interférence doit être demi-entier ; partant de la valeur $p = 0$, on l'obtient pour $p = \frac{1}{2}$:

$$\delta = \frac{\lambda_0}{2}.$$

On aboutit ainsi à la plus faible courbure donnant un centre sombre, lorsque le rayon de courbure prend la valeur très élevée :

$$\boxed{R = 4\frac{D^2}{\lambda_0}}.$$

Numériquement, le rayon de courbure correspondant est $R \sim 3\ 10^5$ m. Cette valeur extrêmement élevée n'est que la limite de détection du principe mis en œuvre : elle met en évidence l'extrême sensibilité du dispositif interférentiel.

En pratique, pour un miroir se courbant jusqu'à atteindre un rayon de quelques dizaines de mètres, on peut envisager de compter les changements d'état d'interférence au foyer pendant la phase de déformation. On détermine ainsi l'ordre d'interférence au centre, dont on déduit la mesure du rayon de courbure avec une très grande précision.

REMARQUE – Cet exercice mêle des notions d'optique géométrique, puis fait appel aux connaissances sur la notion d'objet-image en exploitant la différence de marche. Il aboutit à une étude d'un interféromètre dans une configuration non usuelle, mais aisément modélisable par la méthode des sources secondaires. Toutes ces notions doivent être prises, les unes après les autres, en situant bien le champ de connaissances dans lequel se situe la problématique. Il faut donc de la clairvoyance, mais aussi une connaissance précise du cours, clef pour aborder les situations les plus diverses.

⇒ Remarque

Dans le cas où M_2 est plan, ces points sont confondus.

⇒ Remarque

La source en A_0 est ponctuelle ici : on ne se préoccupe pas des aspects de localisation.

⇒ Remarque

En utilisant ici le résultat de la première question, pour une distance entre objet et sommet du miroir égale à D. L'objet est le symétrique de A_0 par rapport à la séparatrice, à distance D de S_2.

Pour approfondir

4. Mesure d'indice par immersion — D'après Banque PT

La méthode d'immersion est utilisée pour mesurer l'indice de réfraction de certains solides transparents qui ont des formes extérieures irrégulières (pièces de verre brut, éclats de cristaux...). Cette méthode consiste à comparer l'indice de réfraction du solide avec celui du milieu liquide dans lequel l'objet solide transparent est immergé. L'indice du milieu liquide, quant à lui, peut être mesuré par une méthode interférométrique étudiée ici.

© Librairie Vuibert – La photocopie non autorisée est un vol

1. Méthode d'immersion

Sur la figure 20 est représenté le schéma de principe de la méthode d'immersion. L'objet solide transparent, dont l'indice est à mesurer, est placé dans une cuve transparente dont les faces sont parallèles et de bonne qualité optique afin d'éviter des diffusions optiques parasites. Sur la face avant de la cuve, on place une grille faite de motifs rectilignes et qui sert d'objet à observer. La cuve est ensuite remplie d'un mélange liquide transparent à deux ou plusieurs composants miscibles. L'indice de réfraction absolu du liquide varie en fonction de la proportion des composants dans ce mélange. Un observateur se met derrière la face arrière de la cuve et observe les motifs rectilignes de la grille à travers le mélange liquide et l'objet solide transparent. La proportion des liquides dans le mélange est modifiée jusqu'à ce que l'indice du mélange soit égal à celui de l'objet transparent.

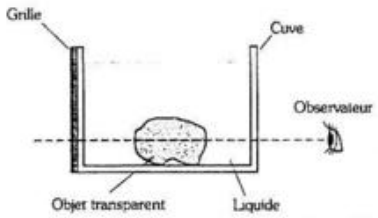


Figure 20

a) Comment l'observateur arrive-t-il, par observation de l'image de la grille, à détecter le moment où l'indice du liquide est égal à celui de l'objet solide transparent ?

b) Qu'observe-t-il tant que cette égalité n'est pas vérifiée ? Justifier qualitativement vos réponses.

On peut repérer de façon encore plus précise le passage par l'égalité des indices en plaçant l'ensemble de la cuve contenant le liquide et l'objet solide transparent, dans un interféromètre de Michelson (Fig. 21).

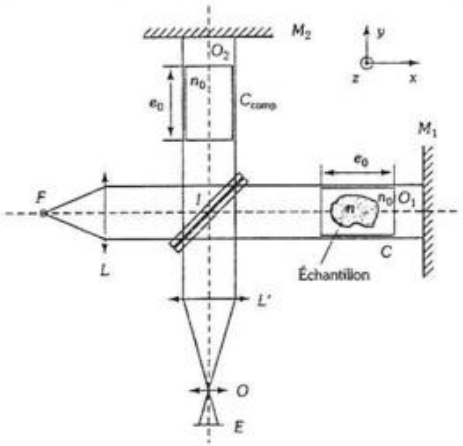


Figure 21

Dans tout ce qui suit, les longueurs IO_1 et IO_2 des deux bras sont supposées égales. (M_2) est perpendiculaire à IO_2, et (M_1) est initialement perpendiculaire à IO_1.

2. Phase de préréglage de l'interféromètre en coin d'air

L'interféromètre est éclairé par une source légèrement étendue, centrée sur F, foyer objet de la lentille collimatrice (L). Les rayons incidents issus de F donnent, après (L), des émergents qui éclairent l'interféromètre en incidence normale. L'ensemble des lames séparatrice et compensatrice est réglé de telle sorte que la différence de marche supplémentaire introduite par la lame séparatrice est complètement compensée, et ces lames sont inclinées de 45°

sur le faisceau émergent de (L). La lentille (L') disposée à la sortie de l'interféromètre, parallèle au miroir (M_2), forme l'image de la source sur l'objectif (O) de la caméra d'observation ou d'enregistrement. Les images des points O_1 et O_2 se forment dans le plan E, où se trouve un récepteur d'image. Dans un premier temps, on ne place aucune des deux cuves sur les voies de l'interféromètre.

La source (S) est monochromatique. Pour faire apparaître un réseau de franges interférentielles rectilignes bien contrastées sur l'écran (E), l'interféromètre est préalablement réglé en coin d'air par rotation du miroir (M_1) autour de l'axe O_1z perpendiculaire au plan de la figure ci-dessus.

On note (Fig. 22) ε l'angle positif, mais très petit devant un radian, que fait M_2 avec l'image M_1' de M_1 par la séparatrice ; O_2z est donc l'arête du coin d'air ainsi formé. On observe, dans le plan E du récepteur, l'image des franges d'interférences localisées sur le coin constitué par M_2 et M_1'. On supposera, pour simplifier, que le grandissement est égal à -1.

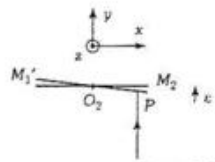


Figure 22

a) Déterminer, en un point P de M_1' d'abscisse x (l'origine des abscisses étant choisie en O_2) la différence de marche $\delta(P) = [FP]_2 - [FP]_1$ en fonction de x et du petit angle ε. En déduire la valeur de l'ordre d'interférence en ce point P en fonction de x, de l'angle ε et de la longueur d'onde λ_0.

b) Exprimer l'interfrange en fonction de la longueur d'onde λ_0, et de l'angle ε. Que pourrait-on dire de l'interfrange si cet angle n'était pas très petit ? Application numérique : la longueur d'onde est $\lambda_0 = 628$ nm et l'angle ε vaut $5\ 10^{-4}$ radian.

c) Prouver sans calcul pourquoi l'ordre d'interférence au point P' image de P dans le plan E est le même qu'au point P.

3. Évaluation interférométrique de l'écart $(n - n_0)$

L'ensemble de la cuve (C), remplie du mélange liquide et contenant l'échantillon, est introduit dans le bras du miroir M_1 de telle manière que celle-ci soit éclairée entièrement et uniformément. Dans ce qui suit, on considère que les parois de la cuve sont parallèles et d'épaisseurs nulles. Les faisceaux incidents sont normaux aux parois de la cuve contenant l'échantillon. L'épaisseur de la cuve est e_0 et l'indice du mélange liquide est n_0. On introduit dans le bras du miroir (M_2) une cuve (C_{comp}) identique à la cuve (C), de même épaisseur e_0, contenant le même mélange liquide d'indice n_0. On suppose que, les indices n_0 et n étant très proches (on supposera que l'écart est de l'ordre de 10^{-3}), on peut négliger le phénomène de réfraction des rayons lumineux aux entrée et sortie de l'échantillon ; en outre, on note e l'épaisseur traversée dans l'échantillon d'indice n, épaisseur qui n'est pas nécessairement uniforme.

a) Étudier, sans calcul fastidieux, l'effet de la présence de la cuve compensatrice sur le contraste.

L'angle ε étant très petit, on peut considérer, à l'ordre 1, que l'épaisseur traversée dans la cuve de compensation vaut toujours e_0.

b) Déterminer la nouvelle valeur de la différence de marche au point P' du plan E, en fonction de la valeur trouvée précédemment, de $(n - n_0)$ et de e, qui est *a priori* fonction de la position du point P introduit précédemment. On suppose que l'échantillon est un biprisme de largeur $2L$, d'arête parallèle à (O_1y) ; l'épaisseur traversée e ne dépend ici que de la coordonnée z et vérifie l'équation (Fig. 23) :

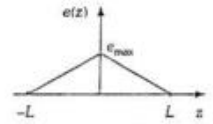


Figure 23

$$\frac{e}{e_{max}} + \frac{|z|}{L} = 1$$

avec $L = 1$ cm.

c) Quelle est l'image de ce biprisme par la séparatrice ? Représenter alors l'allure des franges, et montrer qu'elles ne peuvent redevenir véritablement rectilignes que si n et n_0 sont égaux.

d) Quelle valeur de la différence entre les indices du liquide et de l'échantillon peut-on déceler, si le détecteur d'image est capable de détecter un déplacement de frange de l'ordre de 0,1 mm ? On donne : $e_{max} = 5$ mm.

© Librairie - La photocopie non autorisée est un vol

Conseils méthodologiques. 1. : Ce préambule relève de l'optique géométrique, on se contente d'une analyse qualitative. **2. :** On peut utiliser les résultats du cours relatifs à l'étude d'un interféromètre de Michelson en coin d'air. **3. :** La cuve compensatrice agit sur l'intervalle de variation de la différence de marche, il faut faire le lien avec le contraste, puis avec l'expression de la différence de marche et enfin avec la forme des franges. Dans tous les cas, on est amené à additionner la différence de marche due à la cuve et celle qui est liée au biprisme et à retrancher la distance optique parcourue dans la cuve compensatrice.

1.a) L'égalité des indices du liquide et de l'objet a pour conséquence l'absence de déviation des rayons lumineux lors du changement de milieu. Optiquement, ces deux milieux sont indifférenciés et l'image de la grille n'est pas déformée.

b) Tant que cette égalité n'est pas vérifiée, la présence d'irrégularités dans les surfaces de séparation entre l'objet et le milieu liquide jouent le rôle de dioptres non plans. Par analogie avec le rôle des miroirs déformants, on obtient en présence de dioptres non plans une déformation, on peut dire également une distorsion de l'image de la grille.

⇨ **Remarque**

On parle de dioptre lorsque les milieux n'ont pas même indice optique

2.a) La différence de marche correspond à la longueur parcourue lors d'un aller-retour dans le coin d'air : $\delta(P) = 2e(P)$
L'épaisseur $e(P)$ s'exprime en fonction de l'abscisse x, mesurée depuis l'arête dans une direction perpendiculaire à celle-ci, par $e(P) = x\tan\varepsilon \approx x\varepsilon$:

$$\delta(P) = 2x\varepsilon .$$

L'ordre d'interférence étant défini comme $p = \frac{\delta}{\lambda_0}$, on obtient l'expression approchée suivante (pour l'angle petit) :

$$\boxed{p(P) = \frac{2x\varepsilon}{\lambda_0}}.$$

b) Les franges brillantes sont obtenues pour une valeur entière de l'ordre d'interférences, ce qui donne l'expression des abscisses correspondantes sous la forme d'une suite arithmétique :

$$x_p = p\frac{\lambda_0}{2\varepsilon}$$

⇨ **Remarque**

Les franges sont rectilignes parallèles entre elles et à l'arête du coin d'air

la raison de cette suite est la distance entre deux franges successives, c'est l'interfrange :

$$\boxed{i = \frac{\lambda_0}{2\varepsilon}}$$

Si l'angle n'est pas suffisamment petit, l'interfrange devient trop faible pour permettre une observation des franges. C'est ce qui se passe lors des premiers réglages d'un interféromètre.

⇨ **Remarque**

On justifie ainsi la nécessité d'un réglage géométrique préalable

Numériquement, l'interfrange est $\boxed{i = 0{,}63\ \text{mm}}$.

c) La lentille de projection a pour rôle de former, dans le plan de l'écran, l'image de la figure que nous avons étudiée dans le plan du coin d'air. Dans la situation supposée ici, le grandissement est égal à -1. Ainsi, tout ce qui concerne l'état interférentiel en P s'applique en P', puisque le stigmatisme entre P et P' impose une égalité des chemins optiques (PP') quels que soient les rayons.

⇨ **Remarque**

C'est une disposition $4f'$: la lentille est à $2f'$ de l'écran et du coin d'air

3.a) La distance optique parcourue dans le bras contenant la cuve et l'objet comprend un terme dû au trajet dans l'air et un terme dû à la traversée de la cuve. Or, on connaît la propriété générale, qui veut que le contraste soit d'autant plus grand que la différence de chemin optique diminue. Il faut donc compenser les distances optiques qui ne correspondent pas à une grandeur utile à la mesure. On place donc sur l'autre bras un trajet dans l'air du même ordre que le précédent et une cuve de même dimension que la cuve de mesure, remplie d'un liquide d'indice voisin.

⇨ **Remarque**

Pour de grandes valeurs de différence de marche, les franges disparaissent (brouillage)

© Larousse – La photocopie non autorisée est un délit

b) Le terme présent dans la différence de marche et rendant compte des trajets dans les liquides n'est plus $2ne$, mais $2(n_0 - n)e$. Il demeure un terme correspondant à la différence de parcours dans l'air, du fait de la présence d'un angle ε permettant à M_2 et M_1' de former un dièdre (coin d'air). On obtient, par superposition des termes $2\varepsilon x$ et $2(n_0 - n)e$:

$$\boxed{\delta = 2\varepsilon x + 2(n_0 - n)e}.$$

c) L'image du biprisme par la séparatrice est donnée par le symétrique orthogonal, c'est-à-dire un biprisme de mêmes caractéristiques géométriques, dont l'arête est parallèle à (O_2x). L'épaisseur de verre traversée par un rayon lumineux contribuant aux interférences en P de cote z est fonction de $e(z)$:

$$\delta = 2\varepsilon x + 2(n_0 - n)e_{max}\left(1 - \frac{|z|}{L}\right).$$

Les franges brillantes sont obtenues pour un ordre d'interférence p entier relatif :

$$2\varepsilon x + 2(n_0 - n)e_{max}\left(1 - \frac{|z|}{L}\right) = p\lambda_0 .$$

⇨ **Remarque**

On note que pour $n = n_0$, l'équation devient $x = 0$ qui nous ramène au cas du coin d'air habituel (frange centrale = arête)

La frange d'ordre $p = 0$ est ainsi obtenue pour :

$$x_0(z) = \frac{(n_0 - n)e_{max}}{\varepsilon}\left(\frac{|z|}{L} - 1\right).$$

La frange d'ordre $p \neq 0$ a pour équation :

$$x_p(z) = \frac{(n_0 - n)e_{max}}{\varepsilon}\left(\frac{|z|}{L} - 1\right) + p\frac{\lambda_0}{2\varepsilon} = x_0(z) + pi$$

où i est l'interfrange précédente.

⇨ **Remarque**

On trouve des franges parallèles dans chaque demi-espace $z < 0$ ou $z > 0$

Les franges obtenues (Fig. 24) ne sont pas rectilignes, sauf si le terme en facteur de $|z|$ s'annule, c'est-à-dire pour $n = n_0$.

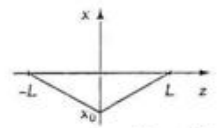


Figure 24

d) Raisonnons sur la frange centrale, puisqu'il y a parallélisme pour toutes les autres.
Par rapport à la frange obtenue lorsqu'il y a identité des indices, la frange centrale s'écarte le plus pour la cote nulle : $z = 0$.

On peut donc évaluer à $\frac{(n - n_0)e_{max}}{\varepsilon}$ l'écart géométrique correspondant à un déplacement de frange. Il excède la valeur minimale décelable, lorsque :

$$\boxed{|n - n_0| \geq \frac{0{,}1}{5}\,5\,10^{-4} = 10^{-5}}.$$

⇨ **Remarque**

Pour $|z| = L$, les franges avec et sans différence d'indice se rejoignent : l'épaisseur d'objet traversée est nulle

Le dispositif est sensible, assurément plus que ce que permet d'obtenir la méthode géométrique du préambule, fondée sur la perception d'une déformation d'une image obtenue par l'optique géométrique.

REMARQUE – L'étude de l'interféromètre en coin d'air menée ici a été finalement très proche, dans son déroulement, de celle qui est conduite en cours. Le point important à bien entendu été l'établissement de l'expression de la différence de marche, qui conduit à une loi fonction des coordonnées (x,z) que l'on exploite ensuite de façon traditionnelle. Il est important donc de noter que la démarche du cours permet d'aborder des problématiques très différentes.

5. Mesure de variation d'indice (suite) — D'après Banque PT

On souhaite ici effectuer la mesure de l'indice du mélange liquide de la cuve de mesure, par une seconde méthode interférométrique. À cette fin, on utilise un interféromètre de Mach-Zehnder dont le schéma est représenté sur la figure 25, ci-dessous.

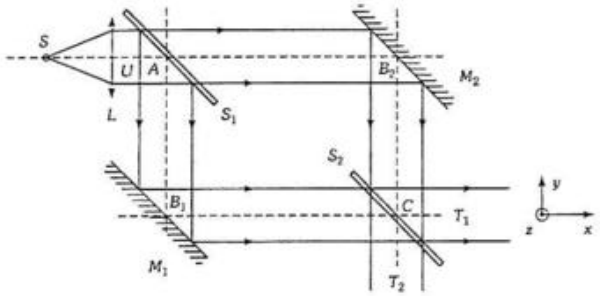


Figure 25

L'interféromètre est constitué par deux lames séparatrices S_1 et S_2 et deux miroirs M_1 et M_2 disposés aux quatre sommets A, C, B_1 et B_2 d'un rectangle. Une source ponctuelle de lumière est placée au foyer objet de la lentille (L) pour éclairer l'interféromètre en lumière parallèle.

Les deux lames séparatrices et les deux miroirs sont initialement inclinés de 45° par rapport aux faisceaux incidents. La séparatrice S partage le faisceau incident en un faisceau transmis et un faisceau réfléchi ; le premier se réfléchit sur le miroir M_2 et le second sur le miroir M_1 avant d'atteindre la séparatrice S_2 qui les recombine, dans le faisceau interférentiel (T_2) d'une part, et dans le faisceau interférentiel (T_1) d'autre part.

Les coefficients de réflexion r' et de transmission t' pour les amplitudes de chacune des deux lames séparatrices S_1 et S_2 valent :

$$r' = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad t' = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

De plus le phénomène de réflexion sur chaque séparatrice introduit un déphasage de $\frac{\pi}{2}$, de l'onde réfléchie par rapport à l'onde incidente. Pour les miroirs M_1 et M_2, on suppose que les coefficients de réflexion pour les amplitudes valent 1. L'amplitude complexe du faisceau incident (U) au point A est notée a_0, la grandeur lumineuse complexe instantanée en A valant :

$$\underline{s}_0(A,t) = a_0 \exp(i\omega t).$$

Les amplitudes complexes des faisceaux transmis (T_1) et (T_2) sont respectivement notées a_1 et a_2.

a) L'interféromètre est tout d'abord réglé sans aucune cuve. Exprimer les amplitudes complexes a_1 et a_2 en fonction de a_0 et du déphasage φ_0 correspondant à chacun des bras $S_1M_1S_2$ et $S_1M_2S_2$, de chemins optiques égaux. En déduire les intensités I_1 et I_2 des faisceaux (T_1) et (T_2). Commenter le résultat.

L'interféromètre est encore utilisé sans aucune cuve, et on souhaite obtenir des franges interférentielles rectilignes. On effectue une petite rotation des deux miroirs (M_1) et (M_2), d'un même petit angle ε dans le sens trigonométrique autour de leurs axes respectifs B_1z et B_2z, perpendiculaires au plan de la figure.

On ne s'intéresse dans la suite qu'au faisceau interférentiel (T_1).

b) On nomme O un point du champ d'interférence où le déphasage est nul ; expliquer pourquoi les phases $\varphi_1(P,t)$ et $\varphi_2(P,t)$ en un point P quelconque du champ d'interférence sont de la forme :

$$\varphi_1(P,t) = \omega t - \vec{k}_1 \cdot \overrightarrow{OP} \quad \text{et} \quad \varphi_2(P,t) = \omega t - \vec{k}_2 \cdot \overrightarrow{OP}$$

© Librairie – La photocopie non autorisée est un délit

Préciser ensuite les composantes cartésiennes des vecteurs d'onde $\vec{k}_1$, $\vec{k}_2$ en fonction de la longueur d'onde λ_0 et du petit angle ε de rotation des miroirs.

c) En déduire les valeurs du déphasage $\Delta\varphi = \varphi_2(P,t) - \varphi_1(P,t)$ et de l'ordre d'interférence p au point P en fonction de ses coordonnées cartésiennes (x,y,z).

Dans toute la suite, on place un écran dans le plan yOz.

d) Trouver la valeur de l'interfrange en fonction de la longueur d'onde λ_0 et du petit angle ε.

Application numérique : $\lambda_0 = 628$ nm ; $\varepsilon = 5\ 10^{-4}$ rad. Calculer l'interfrange.

e) On introduit maintenant, sans modifier la valeur de l'angle ε, la cuve de mesure (C) et la cuve de référence (C_{ref}) dans les bras de l'interféromètre de manière qu'elles occupent le même emplacement dans le champ interférentiel (Fig. 26). On considère que, sur chacune des deux voies, la longueur de liquide traversé vaut $e_0 = 5$ cm.

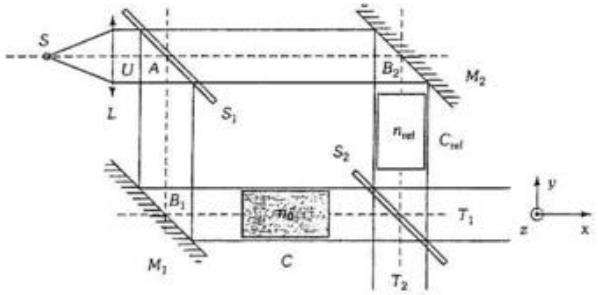


Figure 26

Y a-t-il, par rapport à la situation précédente, déplacement des franges si $n_0 = n_{ref}$?

f) Les deux cuves sont initialement toutes deux remplies par le même liquide (celui de référence, d'indice n_{ref} supposé connu avec une très grande précision) ; à l'aide d'une pompe et d'un circuit mélangeur, on fait passer très progressivement l'indice dans la cuve de mesure de la valeur n_{ref} à la valeur finale n_0 à mesurer. Le liquide de la cuve de référence reste inchangé.

Montrer, en raisonnant sur l'ordre d'interférence, que le décompte du nombre de franges qui défilent entre le début et la fin de cette expérience et le repérage du sens de ce défilement permettent de mesurer la valeur de l'écart d'indice $n_0 - n_{ref}$.

g) $\lambda_0 = 628$ nm et $e_0 = 1$ cm. Sachant qu'on peut arriver à détecter un déplacement de 1/10 de frange, quelle est la plus petite variation d'indice détectable *a priori* ?

L'indice de réfraction d'un milieu varie en fonction de la température. Pour les liquides usuels, le coefficient de température $\frac{dn}{dT}$ se situe entre $4\ 10^{-4}\ K^{-1}$ et $8\ 10^{-4}\ K^{-1}$. Pour obtenir une bonne exactitude de mesure d'indice, le milieu est stabilisé en température. Quelle doit être la stabilité de la température de l'enceinte contenant le liquide, si l'on veut assurer des mesures d'indice à 10^{-5} près ?

Conseils méthodologiques. a) : On aborde ici une situation nouvelle : il faut donc utiliser, comme le suggère l'énoncé, une démarche partant des principes de physique des ondes, pour établir les relations fondamentales. Ici, c'est la notion d'amplitude complexe qui gouverne le formalisme. **b)** : On reconnaît une expression de la phase d'une onde électromagnétique de caractéristiques bien précises. Il faut donc identifier ce type d'onde.

c) : Les lois de la réflexion permettent, avec une figure soignée, de déterminer les directions des ondes qui contribuent au faisceau (T_1), il n'en faut pas plus pour trouver les vecteurs d'onde demandés. d) : On est ramené finalement à l'examen d'une figure d'interférences. e), f) et g) : On revient à une expérience dans laquelle on peut faire varier la différence de chemin entre les deux bras. A situation habituelle, méthode de raisonnement habituelle !

a) L'amplitude de l'onde ayant suivi le parcours $S_1M_1S_2$ pour contribuer à (T_1) doit prendre en compte chacun des évènements : propagation, réflexion, transmission par le jeu d'un facteur multiplicatif complexe. Une réflexion sur S_1 suivie d'une propagation, puis une réflexion sur M_1, une nouvelle propagation et enfin une transmission par S_2 correspondent à :

$$a_0 r' \exp(j\pi/2) \exp(j\varphi_0) t' .$$

On ajoute le terme dû à l'onde qui contribue également à (T_1), mais est passée par l'autre bras : elle a connu le même type d'évènements, sauf que l'ordre dans lequel ils sont apparus a changé.

$$a_1 = 2a_0 r' \exp(j\pi/2) \exp(j\varphi_0) t' = a_0 \exp(j\pi/2) \exp(j\varphi_0)$$

Pour (T_2), il n'en va pas tout à fait de même, car si un des trajets ne comprend que des transmissions à travers les lames, l'autre comprend deux réflexions.

On en déduit l'expression :

$$\boxed{a_2 = a_0 r' \exp(j\varphi_0) r' (1 + \exp(j\pi)) = 0}$$

L'intensité I_2 est nulle (il y a interférences destructives) et l'intensité I_1 est égale à l'intensité entrant dans l'interféromètre.

b) Les expressions proposées pour les phases $\varphi_1(P,t)$ et $\varphi_2(P,t)$ sont celles d'ondes planes progressives et monochromatiques. Or, l'onde incidente a ces propriétés par hypothèse, et elle ne subit que des réflexions sur des miroirs plans, qui n'altèrent pas les caractéristiques, hormis la direction qui se trouve modifiée en vertu des lois de Descartes.

On peut donc écrire : $\boxed{\varphi_1(P,t) = \omega t - \vec{k}_1 \cdot \overrightarrow{OP}}$

où $\vec{k}_1$ est le vecteur d'onde d'une onde plane progressive se propageant dans le vide : il est relié à la longueur d'onde par :

$$k_1 = \frac{2\pi}{\lambda_0} .$$

Il en va de même pour k_2.

Seules les directions sont affectées : chaque miroir pivotant d'un angle égal à ε, l'angle d'incidence s'accroît de cette valeur. D'après la loi de Descartes, l'angle d'émergence varie d'autant : si bien que la rotation de la direction de l'émergent, pour une réflexion, a pour mesure 2ε.

On constate sur la figure 27 que les directions de $\vec{k}_1$ et $\vec{k}_2$ pivotent de $\pm 2\varepsilon$ par rapport à (Cx).

En coordonnées cartésiennes,

$$\vec{k}_1 = \frac{2\pi}{\lambda_0} \begin{vmatrix} \cos 2\varepsilon = 1 \\ \sin 2\varepsilon = 2\varepsilon \\ 0 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{k}_2 = \frac{2\pi}{\lambda_0} \begin{vmatrix} \cos 2\varepsilon = 1 \\ -\sin 2\varepsilon = -2\varepsilon \\ 0 \end{vmatrix}$$

⇨ Remarque

On ne prend pas en compte de terme d'inversion de phase lors de la réflexion sur les miroirs, car chaque onde subit cette réflexion, donc les déphasages se compensent.

⇨ Remarque

Le produit est commutatif : l'ordre des évènements est indifférent.

Technique de calcul

$\exp(j\pi/2) \cdot \exp(j\pi/2) = \exp(j\pi) = -1$

⇨ Remarque

$I_1 = I_0$ car aucune perte n'a été prise en compte dans les éléments.

Technique de calcul

$\exp(j\pi/2) \cdot \exp(j\pi/2) = \exp(j\pi) = -1$

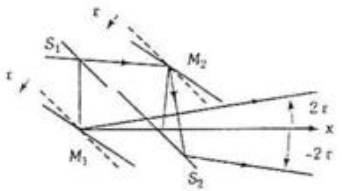


Figure 27

© Larousse – La photocopie non autorisée est un délit

c) Ayant adopté une origine O telle que les deux ondes y soient en phase, on peut écrire :

$$\Delta\varphi = (\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot \overrightarrow{OP}$$

c'est-à-dire, avec les expressions approchées précédentes :

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0} 4\varepsilon y .$$

L'ordre d'interférence s'en déduit aisément :

$$\boxed{p(P) = \frac{\Delta\varphi}{2\pi} = \frac{4\varepsilon y}{\lambda_0}} .$$

⇨ Remarque

On peut affirmer qu'il existe un point O où le déphasage s'annule, car les deux faisceaux ont des directions différentes : $(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \perp \overrightarrow{OP}$ varie donc avec P.

d) Les franges brillantes correspondent aux lieux d'ordre p entier.
On obtient des franges rectilignes, parallèles à (Oz) régulièrement espacées de :

$$\boxed{i = \frac{\lambda_0}{4\varepsilon}}$$ interfrange de valeur numérique $i = 314\ \mu\text{m}$.

⇨ Remarque

On place un écran dans le plan yOz, on paramètre donc la figure par y puisqu'il y a invariance en z.

e) Si les cuves de mesure (C) et de référence (C_{ref}) ont même longueur et même indice, leur présence ne change pas le déphasage entre les ondes qui interfèrent : aucune modification du système de franges n'apparaît. On pose $n_{ref} = n$.

f) Lorsqu'en revanche les indices des liquides diffèrent, une différence de chemin parcouru égale à $(n - n_0)e_0$ apparaît. Elle correspond à une augmentation du déphasage et de l'ordre d'interférence ayant même valeur en tout point du plan (yOz) :

$$\Delta p = \frac{(n_0 - n)e_0}{\lambda_0} .$$

Or, ajouter Δp à p, est formellement identique à modifier la valeur de y :

$$p(P) + \Delta p = \frac{4\varepsilon y}{\lambda_0} + \frac{(n_0 - n)e_0}{\lambda_0} = \frac{4\varepsilon y + (n_0 - n)e_0}{\lambda_0} .$$

On en déduit donc une translation du système de frange de vecteur :

$$\boxed{\vec{t} = \frac{(n - n_0)e_0}{4\varepsilon} \vec{e}_y}$$

Au fur et à mesure que varie l'indice, les franges défilent. Le sens de défilement renseigne sur le sens de variation. Le décompte ne se fait pas en mesurant la longueur, ce qui ne serait pas précis, mais en comptant le nombre de franges qui ont défilé. Ceci revient à mesurer le rapport entre la variation totale de y et l'interfrange i :

$$\boxed{N = \frac{(n_0 - n_{ref})e_0}{\lambda_0}}$$

⇨ Remarque

Par ex., la frange centrale n'est plus en $y = 0$ mais en $y = \frac{(n - n_0)e_0}{4\varepsilon}$.

⇨ Remarque

La translation est orientée en fonction du signe de $n - n_0$.

g) Pour 1/10 d'interfrange la variation d'indice est :

$$\boxed{\Delta n = \frac{\lambda_0}{10 e_0} = 6\ 10^{-6}}$$ ce qui est une très grande sensibilité.

On se place dans le cas le plus défavorable, c'est-à-dire pour un coefficient de température maximal. On obtient une variation intempestive d'indice égale à 10^{-5}, lorsque la température est modifiée de $1{,}25\ 10^{-2}$ K. Il faut donc contrôler la température avec une tolérance plus exigeante que cette valeur, ce qui n'est pas aisé.

REMARQUE – Sur le plan de la méthode, on a dû reprendre ici l'examen des deux ondes qui interfèrent, en revenant à l'expression des phases sous la forme $\exp(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$. Ensuite, dès que possible, on a repris une discussion en terme d'ordre d'interférence, d'interfrange, plus traditionnelle.

Diffraction des ondes

Méthodes

Le cours en questions

1 ▬ Principe d'Huygens-Fresnel à l'infini

1.1 Pour étudier l'onde diffractée par une ouverture, doit-on sommer les amplitudes, les amplitudes complexes ou les éclairements des ondes réémises par les différents points ?

Dans tout ce chapitre, la lumière considérée est une onde plane monochromatique de longueur d'onde λ.

• Chaque point de l'ouverture vibre, du fait de la présence de l'onde incidente. Le principe d'Huygens-Fresnel consiste alors à le considérer comme une source ponctuelle.

• Les différentes ondes émises sont cohérentes, car elles émanent d'une même onde incidente : elles sont donc monochromatiques de même fréquence et leur déphasage ne varie pas aléatoirement dans le temps. Ainsi, on doit traiter la détermination de l'onde résultante comme un problème d'interférences d'une infinité d'ondes cohérentes.

• Il convient donc d'ajouter les amplitudes complexes afin de prendre en compte les termes de déphasage. Ce n'est qu'une fois obtenue l'amplitude complexe résultante que l'on peut accéder à l'éclairement, *via* un calcul de carré du module.

© Ellipses – La photocopie non autorisée est un délit

1.2 Pour quelle incidence de l'onde plane initiale les divers points de l'ouverture rectangulaire vibrent-ils en phase ?

• L'onde incidente est plane, les lieux équiphase sont donc des plans perpendiculaires à la direction de propagation. Ainsi, ce n'est qu'en incidence normale que tous les points de l'ouverture appartiennent à une même surface d'onde et vibrent donc en phase.

1.3 On place derrière l'ouverture rectangulaire un écran au foyer d'une lentille convergente de focale f'. Quelle est l'expression du déphasage, en un point P de coordonnées (x,y), entre l'onde issue du point Q de l'ouverture de coordonnées (X,Y) et celle issue du point $O(X = 0,Y = 0)$? On pourra détailler le raisonnement menant à la différence de marche $\delta = [OP] - [QP]$

• On peut déterminer la différence de marche en considérant un point source placé en P et en invoquant le retour inverse de la lumière. Après la lentille, l'onde ainsi émise est plane de direction de propagation définie par le vecteur unitaire $-\vec{u}$ (Fig. 1).

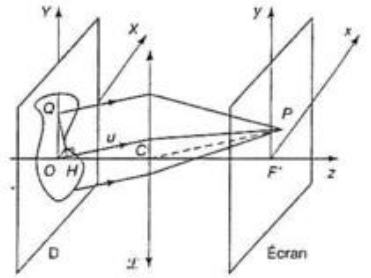


Figure 1

cf. le chapitre sur les interférences à l'infini. On utilise le théorème de Malus, dans le cas d'une source placée en P (retour inverse de la lumière).

Il est alors possible d'exprimer la différence de marche par $\delta = OH$, où H est le projeté orthogonal de Q sur le rayon issu de O dirigé selon $\vec{u}$.

$$\delta = \vec{u} \cdot \overrightarrow{OQ} \quad .$$

Dans les conditions de Gauss requises pour utiliser la lentille, les angles par rapport à l'axe sont nécessairement petits.

• Si l'on note C le centre de la lentille, $\vec{u} = \dfrac{\overrightarrow{CP}}{CP}$, d'après la construction de rayons. En se limitant à des rayons paraxiaux on aboutit à :

$$\delta = \frac{xX + yY}{f'} \quad .$$

• Le déphasage recherché est ainsi $\varphi = 2\pi\frac{\delta}{\lambda}$, soit :

$$\varphi = 2\pi\frac{xX + yY}{\lambda f'} .$$

1.4 Quelle forme prend l'amplitude complexe reçue au point *P* (on pourra recourir à une expression intégrale) ?

• L'application du principe d'Huygens-Fresnel amène directement à une intégrale, qui revient à sommer les différents termes, en tenant compte du déphasage par des facteurs de la forme $\exp(j\varphi)$.

Puisque l'ouverture a deux dimensions, l'intégrale est double :

$$\underline{A}(x,y) = K\iint_{-\infty}^{+\infty} t(X,Y)\exp\left(j\frac{2\pi(xX+yY)}{\lambda f'}\right)dX \cdot dY$$

où $t(X,Y)$ est un coefficient de transparence valant 1 sur les points de l'ouverture, 0 en dehors.

⇒ Le facteur de proportionnalité K présent dans l'expression n'a pas à être déterminé : en définitive seules les variations relatives d'éclairement sur l'écran seront accessibles ainsi.

1.5 Pour une ouverture rectangulaire de dimensions *a* et *b* selon *OX* et *OY* respectivement, déterminer l'amplitude complexe $\underline{A}(x,y)$. On pourra faire intervenir l'amplitude correspondant au point de coordonnées $x = 0$ et $y = 0$.

• En décomposant l'exponentielle, il est possible de se ramener au produit de deux intégrales simples.

Ainsi :

$$\underline{A}(x,y) = K\int_{-a/2}^{+a/2}\exp\left(j\frac{2\pi xX}{\lambda f'}\right)dX\int_{-b/2}^{+b/2}\exp\left(j\frac{2\pi yY}{\lambda f'}\right)dY .$$

L'intégration séparée en X et Y est justifiée mathématiquement par le théorème de Fubini.

Après calcul de chacune des intégrales :

$$\int_{-a/2}^{+a/2}\exp\left(j\frac{2\pi xX}{\lambda f'}\right)dX = \sin\left(\frac{\pi xa}{\lambda f'}\right)\frac{\lambda f'}{\pi x}$$

$$\text{et}\quad \int_{-b/2}^{+b/2}\exp\left(j\frac{2\pi yY}{\lambda f'}\right)dY = \sin\left(\frac{\pi yb}{\lambda f'}\right)\frac{\lambda f'}{\pi y},$$

on en vient à poser :

$$\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

qui est la fonction sinus cardinal.

Ainsi, en exploitant le fait que $\operatorname{sinc}(0) = 1$, on peut aboutir à l'expression finale :

$$\underline{A}(x,y) = \underline{A}(0,0)\operatorname{sinc}\left(\frac{\pi ax}{\lambda f'}\right)\operatorname{sinc}\left(\frac{\pi by}{\lambda f'}\right) .$$

⇒ On multiplie numérateur et dénominateur par a ou b.

© J. Jandeau – La photocopie non autorisée est un délit

1.6 Pour l'ouverture rectangulaire précédente, quelles dimensions peut-on attribuer à la tache centrale de diffraction ?

• La fonction $\operatorname{sinc}^2(\omega)$ a le graphe indiqué sur la figure 2, elle fait donc apparaître un lobe central de largeur 2π en coordonnée ω.

Pour les termes en x et y respectivement, on peut donc attribuer les largeurs $2\frac{\lambda f'}{a}$ et $2\frac{\lambda f'}{b}$.

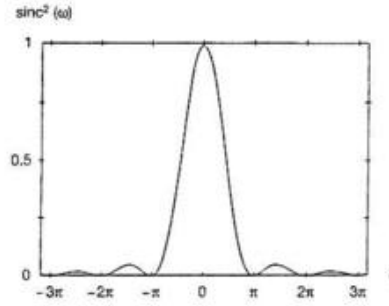


Figure 2

• L'éclairement diffracté est obtenu par le carré du module de l'amplitude :

$$\mathcal{E}(x,y) = \mathcal{E}(0,0)\operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi ax}{\lambda f'}\right)\operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi by}{\lambda f'}\right) .$$

Numériquement :

$$\frac{\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{sinc}^2(x)\,dx}{\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{sinc}^2(x)\,dx} \approx 0.9 .$$

On peut considérer que la majeure partie de l'éclairement diffracté est rayonnée dans les directions correspondant au lobe central de diffraction.

1.7 Quelles sont les conséquences d'une dilatation de l'ouverture dans l'une des dimensions ?

• Multiplier la largeur a par un facteur α a pour conséquence de diviser la largeur selon Ox de la tache centrale de diffraction du même facteur : elle devient $\frac{1}{\alpha}\left(2\frac{\lambda f'}{a}\right)$.

• La dimension selon y du diffractogramme n'est pas affectée par la dilatation de l'ouverture selon OX.

Cette observation est caractéristique de la diffraction à l'infini : elle découle des propriétés de la transformation de Fourier.

• En revanche, multiplier la largeur b par le facteur α contracterait la largeur selon Oy dans la proportion $\frac{1}{\alpha}$.

2 ■ Ouverture unidimensionnelle

2.1 Si l'on considère une fente comme une ouverture rectangulaire dont la longueur *b* est très supérieure à la largeur *a*, comment peut-on obtenir l'expression de l'intensité diffractée ?

• Selon la direction *y*, la largeur angulaire de la tache centrale de diffraction est λ/b, on constate donc qu'elle tend à s'annuler lorsque croît la longueur de la fente.

• Au passage à un modèle de fente infiniment longue, on obtient de la lumière diffractée seulement dans les directions faisant une angle nul avec le plan *xOz*. Sur l'écran, le diffractogramme est donc situé sur l'axe *Ox*.

• Si l'on se restreint ainsi à $y = 0$, on obtient une expression de l'intensité diffractée fonction de la seule variable *x*, sous la forme :

$$I(x) = I(0)\mathrm{sinc}^2\left(\frac{\pi a x}{\lambda f'}\right) .$$

⇒ En réalité, le terme $I(0)$ est fonction de *b* : il y a d'autant plus de lumière traversant l'ouverture que celle-ci est longue.

2.2 Comment s'écrit alors l'amplitude diffractée dans la direction $\alpha = \frac{x}{f'}$ en fonction du coefficient de transparence $t(X)$?

• L'intégrale double précédente est devenue une intégrale simple

$$\underline{A}(x) = K\int_{-\infty}^{+\infty} t(X)\exp\left(j\frac{2\pi x X}{\lambda f'}\right)\mathrm{d}X .$$

⇒ Seules les variations selon la direction Ox sont considérées, au prix d'une restriction à $y = 0$.

2.3 Que deviennent les variations de l'amplitude et de l'éclairement diffractés sur l'écran par une unique fente de longueur infinie et largeur *a* ?

• Il est possible de répondre de deux manières différentes. La première consiste à utiliser l'expression établie ci-dessus pour l'ouverture rectangulaire, mais se placer dans le cas $y = 0$ pour assimiler $\mathrm{sinc}\left(\frac{\pi b y}{\lambda f'}\right)$ à 1. On obtient alors :

$$\underline{A}(x) = \underline{A}(0)\mathrm{sinc}\left(\frac{\pi a x}{\lambda f'}\right) .$$

Le facteur $\underline{A}(0)$ n'est volontairement pas explicité : on cherche en effet une expression des variations de l'amplitude avec la variable *x*.

⇒ De toutes les façons, le facteur *K* de l'expression issue du principe d'Huygens-Fresnel n'était pas non plus explicite.

• La seconde méthode consiste en un calcul de l'intégrale :

$$\int_{-a/2}^{+a/2}\exp\left(j\frac{2\pi x X}{\lambda f'}\right)\mathrm{d}X .$$

© Lavoisier – La photocopie non autorisée est un délit

À l'aide de l'identité trigonométrique $\sin\theta = \frac{\exp(j\theta) - \exp(-j\theta)}{2j}$, on obtient comme résultat de cette intégrale :

$$\sin\left(\frac{\pi x a}{\lambda f'}\right)\frac{\lambda f'}{\pi x} .$$

En faisant apparaître $\underline{A}(0)$, on obtient bien le même résultat que précédemment.

Pour un terme réel, le carré du module s'identifie au carré du nombre. ⇐ *f*

• Le calcul de l'éclairement résulte d'une élévation au carré :

$$I(x) = I(0)\mathrm{sinc}^2\left(\frac{\pi a x}{\lambda f'}\right) .$$

2.4 Quelles sont les propriétés caractéristiques de la figure de diffraction obtenue ?

• L'éclairement n'a de variations sensibles qu'autour de l'abscisse $x = 0$, qui n'est autre que l'image géométrique.

Ces propriétés caractéristiques doivent impérativement être mémorisées. ⇐ *f*

• L'étalement de la lumière diffractée est d'autant plus large que la fente est étroite. Le lobe central de diffraction occupe en effet l'intervalle $\left[-\frac{\lambda f'}{a}, \frac{\lambda f'}{a}\right]$, sa largeur croît lorsque *a* décroît.

• La tache centrale de diffraction est de largeur $2\frac{\lambda f'}{a}$, double de celle des taches latérales. La fonction sinc(*x*) s'annule en effet lorsque *x* est multiple de π, sauf en 0.

3 ■ Cas de deux fentes parallèles (fentes d'Young)

3.1 Dans une expérience de fentes d'Young éclairées en incidence normale (Fig. 3), peut-on considérer que les points des deux ouvertures vibrent en phase ?

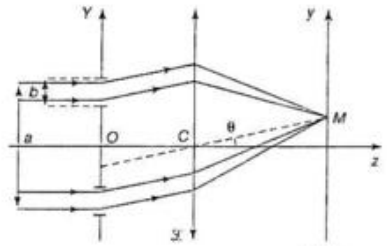


Figure 3

• Tous les points de l'ouverture appartiennent à la même surface de l'onde incidente, ils vibrent donc en phase.

• Pour ce qui est des ondes réémises par ces différents points, les vibrations sont également en phase dans le plan de l'ouverture. L'apparition d'un éventuel déphasage ne se fait qu'entre l'ouverture et un point d'observation.

3.2 On somme séparément les ondes réémises par chacune des fentes d'Young, peut-on considérer comme dans l'étude des interférences que les deux ondes résultantes sont cohérentes ?

• Les deux ondes réémises par les deux fentes d'Young sont bien de même fréquence et leur déphasage ne varie pas dans le temps : elles proviennent d'une unique onde source. Ainsi, on peut considérer ces ondes comme cohérentes.

• On doit par conséquent sommer leurs amplitudes complexes avant de calculer l'éclairement résultant (carré du module).

3.3 Dans une expérience de fentes d'Young éclairées en incidence normale, existe-t-il une direction d'observation où l'on soit certain d'obtenir un maximum de lumière ?

• Dans la direction de la lumière incidente (suivant l'axe) toutes les ondes reemises par les points de l'ouverture ont parcouru le même chemin optique et sont donc en phase. On retrouve ainsi un maximum de lumière.

• Cette direction correspond à l'image géométrique, c'est-à-dire la direction empruntée par la lumière s'il n'y avait pas d'ouverture. Il est donc normal d'y trouver un maximum de lumière diffractée.

• En incidence non normale, la réponse est moins simple. En effet, pour chaque fente prise séparément, l'amplitude diffractée dans la direction de la lumière incidente est maximale. Mais rien n'impose la valeur du déphasage entre les deux ondes ainsi créées.

⇒ La direction de l'image géométrique pour chaque fente ne coïncide pas nécessairement avec une frange brillante d'interférence.

3.4 On éclaire deux fentes d'Young en incidence normale, quel est l'effet sur le diffractogramme d'une augmentation de l'écartement entre les fentes ? Quel est l'effet d'une augmentation de la largeur des fentes ?

• Le diffractogramme est constitué :

– de la figure de diffraction correspondant à l'une des fentes lorsqu'elle est prise seule ;

– dans laquelle s'inscrivent les franges d'interférences régulièrement espacées.

Le graphe de l'intensité (Fig. 4) fait apparaître une modulation des variations dues aux interférences, par le terme de diffraction.

⇒ Le terme de modulation est justifié par la différence de période caractéristique des deux termes.

© La classe - La photocopie non autorisée est un délit

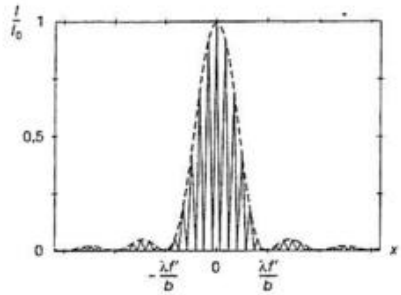


Figure 4

Si l'on note a l'écartement des fentes, b leur largeur et f' la distance focale de la lentille de projection, la distance entre deux franges brillantes (interfrange) est $\lambda f'/a$. La largeur de la tache centrale de diffraction est $2\lambda f'/b$.

⇐ f

• Augmenter l'écartement des fentes a pour effet de réduire l'interfrange des interférences. Il y a donc plus de franges brillantes et sombres dans la tache principale de diffraction.

• Élargir simultanément les deux fentes d'Young a pour effet de rétrécir la figure de diffraction (une dilatation de l'ouverture d'un facteur h provoque une contraction du diffractogramme du facteur $1/h$). Il y a donc moins de franges d'interférences dans le lobe central de diffraction.

4 ▬ Ouvertures multiples : réseau de fentes

4.1 Lorsqu'un réseau de fentes est éclairé en incidence normale, peut-on considérer que les points des différentes ouvertures émettent des vibrations cohérentes ?

Le déphasage est nul en incidence normale.

⇐ f

• Les ondes réémises par chacune des fentes sont bien de même fréquence et leur déphasage relatif ne varie pas dans le temps :

elles sont cohérentes. Notons d'ailleurs qu'elles proviennent bien d'une unique onde source.

• On doit par conséquent sommer leurs amplitudes complexes avant de calculer l'éclairement résultant (carré du module).

4.2 Comment fait-on alors pour obtenir les directions de maximum de lumière (maxima principaux de diffraction) ?

L'image géométrique, pour laquelle le déphasage entre chaque onde est nul, est un des maxima de lumière.

⇐ f

• Il y aura un maximum de lumière dans les directions telles que toutes les ondes vibrent en phase. L'une d'entre elles est bien entendu la direction de la lumière incidente.

• D'autre part, l'équidistance entre les fentes du réseau permet de trouver une expression commune de la différence de marche entre deux ondes successives emises dans la direction θ (Fig. 5)

$$\delta = a\sin\theta \ .$$

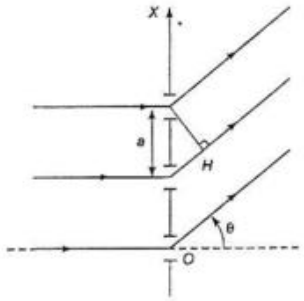


Figure 5

Ainsi, le déphasage entre deux ondes émises par des fentes successives est un multiple de 2π si :

$$2\pi\frac{a\sin\theta}{\lambda} = 2\pi p$$

avec l'ordre d'interférence p entier.

On en déduit les valeurs θ_p des maxima principaux de diffraction en incidence normale :

$$\sin\theta_p = \frac{p\lambda}{a}.$$

4.3 Si le réseau est éclairé par une onde plane sous incidence i, comment se modifie la formule des réseaux précédente ?

• Il faut tenir compte d'une différence de marche supplémentaire en amont : les différents motifs du réseau ne sont plus atteints simultanément par la lumière (Fig. 6). Par le raisonnement précédent, la différence de marche totale devient $\delta = O_1H_1 - O_2H_2$, soit :

$$\delta = a(\sin\theta - \sin i).$$

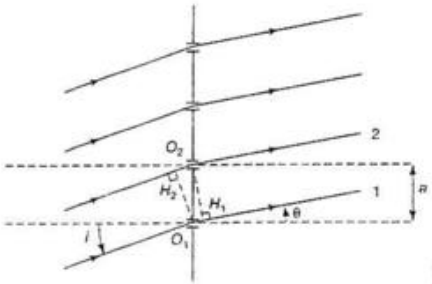


Figure 6

© Lavoisier - La photocopie non autorisée est un délit

La formule donnant les directions θ_p des maxima principaux de diffraction est alors :

$$\sin\theta_p = \sin i + \frac{p\lambda}{a}.$$

4.4 La formule des réseaux précédente ne fait pas intervenir le nombre total de fentes. Est-ce un paramètre sans influence sur le diffractogramme ?

• Plus le nombre de fentes est élevé, plus la condition de mise en phase des ondes réémises par les différentes fentes devra être respectée avec précision, pour obtenir un maximum de lumière.

• La conséquence en est une finesse des maxima principaux de diffraction d'autant plus grande que le nombre de fentes du réseau sera élevé. C'est pourquoi on utilise ce dispositif pour réaliser des spectroscopes à grande résolution.

Pour N très grand, la largeur d'un pic est très inférieure à la largeur du trait du tracé.

• À titre d'illustration, la figure 7 représente l'évolution de l'intensité diffractée dans le cas $N = 10$ fentes. En pratique, N est considérablement plus élevé et la finesse est telle qu'une représentation graphique réaliste n'est plus possible.

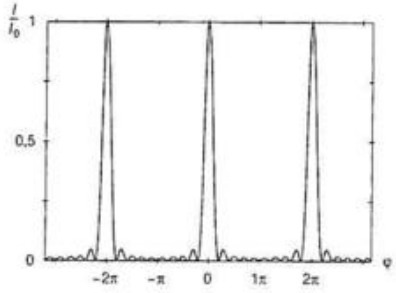


Figure 7

Les savoir-faire clefs

Conseils méthodologiques

1 ■ Savoir décrire un diffractogramme.

Sur un écran matérialisant le plan (xOy), l'amplitude complexe présentée par une figure de diffraction prend l'expression :

$$\underline{A}(x,y) = \underline{A}_0\,\mathrm{sinc}(k_1(x - x_0))\,\mathrm{sinc}(k_2 y).$$

a) Quelle est la dimension de k_1 et de k_2 ?

b) Comment s'exprime l'éclairement sur le plan d'observation ? On fera intervenir sa valeur ε_{max} dans l'expression.

c) Où se trouve(nt) le(s) point(s) d'éclairement maximal ? d'éclairement nul ?

d) Par quelle transformation géométrique peut-on déduire ce diffractogramme de celui obtenu, à l'infini, par une ouverture rectangulaire éclairée en incidence normale ?

1.a) k_1 et k_2 sont homogènes à l'inverse d'une longueur, car l'argument de chaque fonction sinc doit être sans dimension.

On retrouve la dimension d'un vecteur d'onde k utilisé pour les ondes électromagnétiques, d'où la notation k_1 et k_2.

b) L'éclairement ε se déduit de l'amplitude complexe par :

$$\varepsilon(M) = \frac{1}{2} Re(\underline{A}(M)\underline{A}^*(M)),$$

c'est-à-dire qu'il est proportionnel au carré du module de l'amplitude. Ainsi,

$$\boxed{\varepsilon(x,y) = \varepsilon_{max}\,\mathrm{sinc}^2(k_1(x-x_0))\,\mathrm{sinc}^2(k_2 y)}.$$

En effet, la valeur maximale prise par $\mathrm{sinc}^2(u)$ est 1.

Il s'agit probablement de l'image de la source donnée par l'optique géométrique, c'est-à-dire en traçant les rayons.

c) Le maximum de chacune des fonctions $\mathrm{sinc}(\theta)$ est atteint lorsque $\theta = 0$, donc pour le point de coordonnées $(x_0, 0)$.

En toute rigueur, les points d'éclairement nul correspondent à ceux pour lesquels $k_1(x-x_0)$ ou $k_2 y$ est multiple non nul de π.

$\mathrm{sinc}(\theta) = 0$ pour $\theta = n\pi$ avec n entier.

On obtient ainsi les points dont les coordonnées vérifient :

$$\boxed{x = x_0 + n\frac{\pi}{k_1} \text{ ou } y = m\frac{\pi}{k_2}}.$$

avec n et m entiers non nuls.

On rappelle que :
$\mathrm{sinc}(0) = 1$.

En réalité, pour une abscisse ou une ordonnée très supérieure à $\frac{\pi}{k_1}$ ou $\frac{\pi}{k_2}$ respectivement, l'éclairement devient très inférieur à ε_{max}. Loin de l'image géométrique, on considère généralement qu'il n'y a plus de lumière.

Un capteur enregistrant les variations de l'éclairement finirait par ne plus détecter de lumière loin de la zone centrale du diffractogramme, car sa sensibilité n'est pas illimitée.

d) De l'expression de l'amplitude complexe obtenue dans le plan focal image d'une lentille :

$$\underline{A}(x,y) = \underline{A}(0,0)\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\pi a x}{\lambda f'}\right)\mathrm{sinc}\left(\frac{\pi b y}{\lambda f'}\right)$$

on déduit par la même méthode que ci-dessus l'éclairement :

$$\boxed{\varepsilon(x,y) = \varepsilon_{max}\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{\pi a x}{\lambda f'}\right)\mathrm{sinc}^2\left(\frac{\pi b y}{\lambda f'}\right)}.$$

Pour les détails, revoir le cours en questions : a et b sont les dimensions de l'ouverture, f' la distance focale.

On peut donc proposer une relation entre les dimensions de l'ouverture et les valeurs k_i :

$$\frac{\pi a}{\lambda f'} = k_1 \quad \text{et} \quad \frac{\pi b}{\lambda f'} = k_2.$$

L'expression est bien de même forme, à une translation près selon l'axe des abscisses : translation de vecteur $\vec{t} = x_0\vec{u}_x$.

Translater $f(x)$ de x_0 équivaut à définir $g(x) = f(x-x_0)$.

© Larousse – La photocopie non autorisée est un délit

Conseils méthodologiques

2 ■ Savoir prendre en compte un angle d'incidence.

On place derrière un diaphragme rectangulaire (plan XOY) une lentille convergente de focale f' et d'axe (Oz), puis un écran au foyer image. On éclaire le diaphragme par une onde plane monochromatique dont le vecteur d'onde fait un angle α avec l'axe (Fig. 8). On considère que le plan d'incidence correspond au plan (xOz) et on note respectivement a et b les dimensions de l'ouverture dans les directions (OX) et (OY) respectivement.

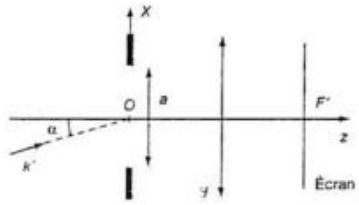


Figure 8

2.a) Utiliser l'expression générale d'une onde plane progressive monochromatique, en notation complexe.

2.b) On pourra utiliser un raisonnement mettant en œuvre la différence de marche.

2.c) Il s'agit bien de la traduction du principe d'Huygens-Fresnel. On utilisera une constante non déterminée, qui s'éliminera lorsqu'on exprimera la valeur de l'amplitude en un point bien choisi, comme constante de proportionnalité.

2.d) Après calcul, on peut chercher quelle transformation géométrique permet de déduire cet éclairement de celui obtenu en incidence normale.

a) Soient deux points O et O' du diaphragme, exprimer le déphasage de l'onde incidente entre ces deux points en fonction d'un produit scalaire faisant intervenir le vecteur d'onde, en utilisant les coordonnées des points et la longueur d'onde du rayonnement (on considérera α petit).

Existe-t-il des familles de points O vibrant en phase ?

b) On considère un point P de l'écran, de coordonnées (x,y). Quelle est l'expression du déphasage en P entre l'onde qui a été réémise par le point Q de l'ouverture, de coordonnées (X,Y) et celle issue du point O ?

c) Proposer une expression de l'amplitude complexe observée en P, d'abord sous la forme d'une intégrale double, puis en effectuant le calcul.

d) Exprimer l'éclairement dans le plan focal de la lentille et décrire le diffractogramme observé.

2.a) Le terme fonction du temps et des coordonnées d'espace s'écrit, pour les composantes d'une onde plane progressive monochromatique : $\exp j(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})$. Le déphasage entre les points Q et Q' est donc $\varphi = \vec{k}\cdot\overrightarrow{OQ'} - \vec{k}\cdot\overrightarrow{OQ}$, c'est-à-dire :

$$\varphi = \vec{k}\cdot\overrightarrow{QQ'}.$$

le plan d'incidence est dirigé par la normale au diaphragme $(\vec{u}_z)$ et le vecteur d'onde $\vec{k}$.

Puisque α est un petit angle, et compte-tenu de l'orientation annoncée pour le vecteur d'onde, on peut donner ses coordonnées cartésiennes sous la forme :

$$\vec{k}\begin{vmatrix} \frac{2\pi}{\lambda}\alpha \\ 0 \\ -\frac{2\pi}{\lambda} \end{vmatrix}$$

En notant (X,Y) et (X',Y') les coordonnées des points Q et Q', on obtient

$$\boxed{\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\alpha(X'-X)}.$$

Les points de même abscisse X vibrent en phase : c'est un résultat attendu, car ces points sont situés à l'intersection d'un plan d'onde et du diaphragme (Fig. 9).

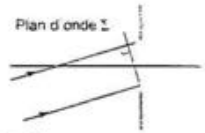


Figure 9

b) La différence de marche entre la source de l'onde (située à l'infini) et les points Q et Q' peut être obtenue à partir du résultat précédent :

$$\delta_1 = [SQ'] - [SQ] = \alpha(X'-X).$$

⇨ Rappel : un plan d'onde est une surface équiphase, il est perpendiculaire au vecteur d'onde.

⇨ On peut aussi utiliser une construction graphique de surface d'onde.

Si Q' est le centre O du diaphragme, $X' = 0$ et :

$$\delta_1 = [SO] - [SQ] = -\alpha X.$$

Pour parvenir en P repéré par ses coordonnées, il faut ajouter la différence de marche $\delta_2 = [OP] - [OP]$ que l'on calcule de la même manière que dans le cours en questions :

si l'on note C le centre de la lentille, on définit le vecteur unitaire des rayons issus des points de l'ouverture qui convergent en P : $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{CP}}{CP}$, on exprime la différence de marche $\delta_2 = \vec{u} \cdot \overrightarrow{OQ}$,

en se limitant à des rayons paraxiaux (petits angles par rapport à l'axe), on aboutit à $\boxed{\delta_2 \approx \frac{xX + yY}{f'}}$.

• Le déphasage recherché, prenant en compte les retards avant et après le diaphragme, est ainsi $\varphi_T = 2\pi\frac{\delta_1 + \delta_2}{\lambda}$, soit :

$$\varphi_T = \frac{2\pi}{\lambda}\left[-\alpha X + \frac{xX + yY}{\lambda f'}\right] = 2\pi\frac{(x-\alpha f')X + yY}{\lambda f'}.$$

c) L'application du principe d'Huygens-Fresnel amène à sommer les amplitudes complexes correspondant aux différentes ondes réémises. On aboutit ainsi à une intégrale, qui revient à sommer les différents termes, en tenant compte du déphasage par des facteurs en $\exp(j\varphi_T)$:

$$\underline{A}(P) = K\iint_D \exp\left(j\frac{2\pi((x-\alpha f')X + yY)}{\lambda f'}\right)dX \cdot dY.$$

D désigne l'ensemble des points de l'ouverture.

⇨ Le facteur de proportionnalité K n'a pas à être déterminé : en définitive seules les variations relatives d'éclairement sur l'écran seront pertinentes.

On effectue le calcul dans le cas d'une ouverture rectangulaire, donc pour X courant sur $\left[-\frac{a}{2};\frac{a}{2}\right]$ et Y sur $\left[-\frac{b}{2};\frac{b}{2}\right]$.

On se ramène au produit des intégrales :

$$\int_{-a/2}^{+a/2}\exp\left(j\frac{2\pi(x-\alpha f')X}{\lambda f'}\right)dX = \sin\left(\frac{\pi(x-\alpha f')a}{\lambda f'}\right)\frac{\lambda f'}{\pi(x-\alpha f')}$$

et $$\int_{-b/2}^{+b/2}\exp\left(j\frac{2\pi yY}{\lambda f'}\right)dY = \sin\left(\frac{\pi yb}{\lambda f'}\right)\frac{\lambda f'}{\pi y}.$$

© Lavoisier - La photocopie non autorisée est un délit

En posant $\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$, on aboutit à :

$$\boxed{\underline{A}(P) = \underline{A}(\alpha f',0)\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\pi a(x-\alpha f')}{\lambda f'}\right)\mathrm{sinc}\left(\frac{\pi by}{\lambda f'}\right)}.$$

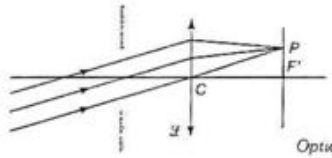
Erreur à éviter
Noter que le terme en facteur est $\underline{A}(\alpha f',0)$ et non plus $\underline{A}(0,0)$ comme dans le cas de l'incidence normale !

d) L'éclairement $\varepsilon(P)$ s'obtient maintenant à partir de l'amplitude complexe par $\varepsilon(P) = \frac{1}{2}Re(\underline{A}(P)\underline{A}^*(P))$. Ainsi :

$$\boxed{\varepsilon(x,y) = \varepsilon_{max}\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{\pi a(x-\alpha f')}{\lambda f'}\right)\mathrm{sinc}^2\left(\frac{\pi by}{\lambda f'}\right)}.$$

Mais la valeur maximale ε_{max} est atteinte ici pour le point $P(\alpha f',0)$. Il s'agit bien de l'image géométrique, car les rayons inclinés de α et traversant le diaphragme comme des rayons de l'optique géométrique convergeraient en ce point (Fig. 10).

Ils y rencontrent le rayon de même inclinaison qui passe par le centre optique de la lentille.



Optique géométrique
Figure 10

Comme dans le savoir-faire précédent, on obtient une translation de vecteur $\vec{i} = \alpha f'\vec{u}_x$.

Finalement, toute la figure de diffraction est translatée autour de l'image géométrique : les franges conservent la même largeur, la même orientation...

REMARQUE – Cet exercice permet finalement de reprendre les différentes étapes du cours, mais avec quelques modifications. Il est de ce fait très formateur, mais nécessite une bonne maîtrise des notions de déphasage et différence de marche qui relèvent des chapitres sur les interférences. En cas de besoin, il est vivement conseillé de réviser ces notions.

Conseils méthodologiques

3 ■ Savoir relier interférence et diffraction.

On étudie le dispositif des fentes d'Young éclairées par un faisceau monochromatique de lumière parallèle en incidence normale. L'observation a lieu à l'infini, dans une direction repérée par le vecteur unitaire $\vec{u}$. Les fentes ont une largeur ℓ et sont écartées de a, selon l'axe Ox (Fig. 11). La longueur des fentes est $b >> \ell$.

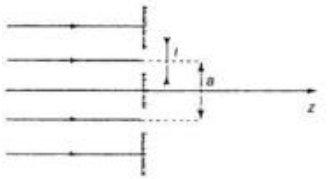


Figure 11

a) On étudie dans un premier temps la diffraction due à la fente supérieure. Exprimer, en fonction des coordonnées (α,β) de $\vec{u}$ selon $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$, l'amplitude complexe $\underline{A}_1(\alpha,\beta)$ de l'onde diffractée. On notera $\underline{A}_0$ la valeur obtenue selon l'axe, c'est-à-dire pour $\alpha = \beta = 0$.

b) Quelle est la conséquence de la grande différence d'ordre de grandeur entre b et ℓ sur les propriétés de la figure de diffraction ? Si l'on se restreint à une observation dans le plan défini par $\beta = 0$, quelle expression simplifiée de l'amplitude diffractée peut-on adopter ?
On fait désormais le choix $\beta = 0$.

c) Comment peut-on déduire l'amplitude diffractée par la seconde fente dans la direction $\vec{u}$, notée $\underline{A}_2(\alpha)$, de $\underline{A}_1(\alpha)$ due à la première fente ? Quel est l'intérêt de raisonner avec des amplitudes complexes ?

d) Exprimer l'amplitude, puis l'intensité de l'onde diffractée dans la direction α par les fentes d'Young, lorsqu'on tient compte de leur largeur propre et de leur écartement.

e) Quel cas limite faut-il envisager pour ne faire apparaître que le phénomène d'interférences ? Quelle expression obtient-on alors ?

3.a) On ne fait pas intervenir ici de lentille, il faut donc raisonner angulairement.

3.b) On reconnaît la problématique du passage de l'ouverture rectangulaire à la fente.

3.c) Exploiter le fait qu'une translation de l'élément diffractant équivaut à l'introduction d'un déphasage.

3.d) Doit-on sommer les amplitudes ou les éclairements ? C'est la première question à se poser.

3.e) Quel choix adopter pour que la variation (la modulation) due à la diffraction n'intervienne plus ?

3.a) Les points de l'ouverture vibrent en phase, car l'onde incidente est plane et en incidence normale, donc l'ouverture est incluse dans un même plan d'onde. Soit M_1 un point de la fente supérieure, comparons les déphasages subis par les ondes qui partent du centre O_1 de la première fente et de M_1 pour se propager dans la direction repérée par $\vec{u}$.
D'après la construction de la figure 12, la différence de marche apparaît comme $\delta = \overrightarrow{O_1M_1} \cdot \vec{u}$. Le déphasage correspondant est donc :

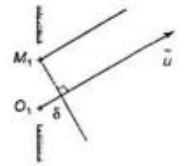


Figure 12

$$\boxed{\varphi = 2\pi\frac{\delta}{\lambda} = \frac{2\pi(\alpha X_1 + \beta Y_1)}{\lambda}}$$

où X_1 et Y_1 sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{O_1M_1}$.

Par application du principe d'Huygens-Fresnel, on somme les amplitudes complexes des ondes réémises par les différents éléments de surface de la fente supérieure. On aboutit ainsi à l'intégrale :

$$\underline{A}(\alpha,\beta) = K\iint_{\text{fente}} \exp\left(j\frac{2\pi(\alpha X_1 + \beta Y_1)}{\lambda}\right)dX_1 \cdot dY_1 .$$

⇒ On ne retient ici que le terme de phase $\exp(j\varphi)$, car le coefficient de transparence est de valeur 1 sur toute l'ouverture.

L'intégrale est calculée pour X_1 parcourant sur $\left[-\frac{\ell}{2},\frac{\ell}{2}\right]$ et Y_1 décrivant $\left[-\frac{b}{2},\frac{b}{2}\right]$. On obtient alors un produit d'intégrales :

$$\int_{-\ell/2}^{+\ell/2}\exp\left(j\frac{2\pi\alpha X_1}{\lambda}\right)dX_1 = \frac{\lambda}{\pi\alpha}\sin\left(\frac{\pi\alpha\ell}{\lambda}\right) = \ell\cdot\operatorname{sinc}\left(\frac{\pi\alpha\ell}{\lambda}\right)$$

et $\int_{-b/2}^{+b/2}\exp\left(j\frac{2\pi\beta Y_1}{\lambda}\right)dY_1 = b\cdot\operatorname{sinc}\left(\frac{\pi\beta b}{\lambda}\right)$.

© Ellipses - La photocopie non autorisée est un délit

On rappelle que ℓ désigne ici la largeur de la fente.

Erreur à éviter
Le terme $\underline{A}_0$ étant proportionnel à ℓ et à b, effectuer le passage à la limite $b \to \infty$ ne se fait pas sans difficulté. En pratique, on se contente de considérer $b >> \ell$.

On retrouve des expressions connues, mais exprimées en fonction des coordonnées du vecteur $\vec{u}$ repérant la direction dans laquelle est observée la diffraction.
Finalement, en notant $\underline{A}_0$ l'amplitude diffractée dans la direction de la lumière incidente (Oz ici) :

$$\boxed{\underline{A}_1(\alpha,\beta) = \underline{A}_0\operatorname{sinc}\left(\frac{\pi\alpha\ell}{\lambda}\right)\operatorname{sinc}\left(\frac{\pi\beta b}{\lambda}\right)}.$$

Le terme quelques pourrait être remplacé par *de l'ordre de*. On rappelle que $\operatorname{sinc}(x)$ devient très inférieur à 1 dès que x excède quelques fois π.

b) L'étalement dû à la diffraction selon α peut être estimé de l'ordre de quelques $\frac{\lambda}{\ell}$ quand celui correspondant à l'angle β est de quelques $\frac{\lambda}{b}$.
On déduit de $b >> \ell$ le fait que l'étalement le plus important est observé selon l'angle α.

En adoptant la valeur $\beta = 0$, on s'assure que $\operatorname{sinc}\left(\frac{\pi\beta b}{\lambda}\right) = 1$ et ainsi, que seule la dépendance en α est examinée. On raisonnera dorénavant sur :

$$\boxed{\underline{A}_1(\alpha) = \underline{A}_0\operatorname{sinc}\left(\frac{\pi\alpha\ell}{\lambda}\right)}.$$

Le signe – indique que pour α positif, l'onde réémise par la fente inférieure est en retard sur celle qui est due à la fente supérieure. En réalité, il est sans conséquence ici, une fois calculé l'éclairement.

c) Pour chaque élément de fente supérieure autour de X_1, on peut associer un élément de même taille autour de l'abscisse $X_1 - a$. Le rayonnement émis dans la direction $\vec{u}$ par ces deux éléments diffère par un terme de phase, qui se calcule comme précédemment :

$$\boxed{\varphi = -2\pi\frac{a\alpha}{\lambda}}.$$

On peut ainsi déduire le calcul de l'intégrale d'Huygens-Fresnel relative à la fente inférieure, de celui correspondant à la fente supérieure, en multipliant chaque terme par $\exp(j\varphi)$. On aboutit ainsi à la relation :

$$\boxed{\underline{A}_2(\alpha) = \underline{A}_1(\alpha)\exp\left(-j2\pi\frac{a\alpha}{\lambda}\right)}.$$

Les amplitudes complexes sont donc liées par le seul terme de déphasage dû au décalage d'abscisse.

Il s'agit d'une division du front d'onde, comme précisé dans le cadre des interférences.

d) Les ondes diffractées par les deux fentes sont cohérentes, car leurs éléments sont éclairés par la même onde.
On doit donc additionner les amplitudes complexes :

$$\underline{A}(\alpha) = \underline{A}_1 + \underline{A}_2 = \underline{A}_1(\alpha)\left[1 + \exp\left(-j2\pi\frac{a\alpha}{\lambda}\right)\right].$$

On obtient ensuite l'éclairement $\mathcal{E}(\alpha)$ par $\mathcal{E} = \frac{1}{2}Re(\underline{A}\cdot\underline{A}^*)$. Or :

$$[1 + \exp(j\theta)][1 + \exp(-j\theta)] = 2 + 2\cos\theta .$$

Ainsi :

$\mathcal{E}_0$ n'est pas ici la valeur maximale, car celle-ci est atteinte pour $\alpha = 0$ et vaut $\mathcal{E}_{max} = 2\mathcal{E}_0$.

$$\boxed{\mathcal{E}(\alpha) = \mathcal{E}_0\operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi\alpha\ell}{\lambda}\right)\left[1 + \cos\left(2\pi\frac{a\alpha}{\lambda}\right)\right]}.$$

On interprète ce produit d'un terme de diffraction $\text{sinc}^2\left(\frac{\pi a \ell'}{\lambda}\right)$ par un terme d'interférences $1 + \cos\left(2\pi \frac{a\alpha}{\lambda}\right)$, en parlant de modulation.

⇨ Se reporter au cours en question, paragraphe **3.4.** pour ce point et son illustration.

En effet, si $\ell << a$, ce qui est une situation fréquente, on peut considérer que le terme de diffraction varie beaucoup plus lentement avec α que le terme d'interférences. Ainsi, on observe les variations qui correspondent aux interférences comme s'inscrivant dans l'enveloppe due à la diffraction.

e) C'est pour un terme de diffraction variant très lentement, que l'on retrouve les interférences étudiées seules. Il faut donc que l'intervalle de valeurs de α sur lequel varie le terme de diffraction soit d'étendue très supérieure à l'interfrange. Or, la diffraction s'effectue sur l'intervalle $\left[-\frac{\lambda}{\ell'}, \frac{\lambda}{\ell'}\right]$ et l'interfrange angulaire vaut $\frac{\lambda}{a}$. On se ramène au cas des interférences prépondérantes si $\ell << a$, donc pour des fentes infiniment fines.

⇨ C'est la largeur du lobe principal de diffraction.

Erreur à éviter

Une nouvelle difficulté apparaît si l'on recherche la quantité de lumière : fermer les fentes n'est pas envisageable, il n'y aurait plus de luminosité ! En pratique, il faut trouver un compromis.

REMARQUE – Le fait de pouvoir mêler diffraction et interférences est riche de significations. On retrouve la même problématique avec les réseaux : la diffraction de chaque élément module la luminosité des franges très fines d'interférences.

4 ▬ Savoir prévoir les symétries d'un diffractogramme.

Conseils méthodologiques

On envoie en incidence normale une onde plane progressive et monochromatique sur un diaphragme de forme circulaire, c'est-à-dire dont l'ouverture est un disque. On place derrière ce diaphragme une lentille convergente dont l'axe est identique à l'axe de symétrie de révolution du diaphragme.

a) Où doit-on placer l'écran d'observation pour observer la figure de diffraction à l'infini ?

b) Où prévoit-on que se trouve le maximum de lumière diffractée ?

c) Quelle forme doivent présenter les franges de diffraction ?

d) Lorsqu'on augmente le diamètre du diaphragme, quelle transformation de la figure de diffraction s'attend-on à observer ?

REMARQUE. – Dans tout cet exercice, on s'abstient résolument de passer par des calculs : ce sont les propriétés générales de la diffraction à l'infini que l'on invoque, et les propriétés de symétrie.

4.a) La diffraction à l'infini met en œuvre l'interférence de rayons émis parallèlement depuis les différents points de l'ouverture. C'est donc dans le plan focal image de la lentille que doit se faire l'observation.

⇨ Il n'y a pas de modification de cette réponse lorsque la forme du diaphragme change.

b) Le maximum de lumière diffractée est observé sur l'image géométrique. Ici, les rayons qui traverseraient le diaphragme parviendraient sur la lentille en étant parallèles à son axe optique ; ils convergeraient donc tous en son foyer image.

⇨ Le conditionnel des verbes de cette phrase signifie que la réalité est tout autre : il y a diffraction et chaque point de l'ouverture réémet une onde sphérique.

© Lavoisier – La photocopie non autorisée est un délit

C'est donc à l'intersection de l'axe optique et du plan focal image, c'est-à-dire au foyer de la lentille que l'on trouve le maximum de lumière diffractée.

On ne tient pas compte ici de la polarisation éventuelle de l'onde : on raisonne dans l'approximation scalaire.

c) Le problème est invariant par rotation autour de l'axe optique de la lentille, qui est également l'axe de symétrie du diaphragme et de l'onde incidente.

On en déduit que la figure de diffraction est laissée invariante dans cette rotation : ce qui est déjà le cas du maximum de lumière diffractée.

Ce disque est appelé disque d'Airy, il intervient fréquemment dans la pratique de l'instrumentation optique.

Les franges de diffraction ont donc nécessairement la forme d'anneaux centrés sur le foyer. On obtient finalement une figure composée d'un disque lumineux au centre, entouré d'un réseau d'anneaux concentriques.

Ces prévisions se trouveraient parfaitement confirmées par les calculs et l'expérience.

d) Si l'on généralise la propriété de la diffraction qui veut qu'une dilatation de l'ouverture diffractante se traduise par une concentration dans le même rapport de la figure de diffraction, on prévoit qu'une augmentation du diamètre du diaphragme a comme conséquence une diminution du diamètre de la tache centrale et des anneaux de diffraction.

REMARQUE – Cet exercice est un exemple patent de ce que l'usage préalable des symétries et invariances dans un problème permet d'obtenir un très grand nombre de résultats, sans écrire de lois ni mener de calculs.

Annales

Pour maîtriser les bases

1. Translation d'un diaphragme — D'après CCP

On considère une onde plane monochromatique de longueur d'onde λ éclairant dans le plan (xy) un diaphragme D de centre O dont la pupille est caractérisée en chaque point $M(x,y)$ par un coefficient de transmission en amplitude complexe $\underline{t}(x,y)$. On étudie l'éclairement en un point P d'un plan Σ_0 dont l'intersection avec l'axe $z'z$ est notée O' (Fig. 13).

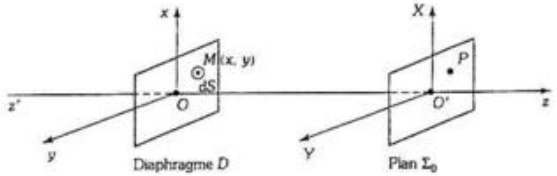


Figure 13

a) On se place dans le cadre de la diffraction à l'infini, quelles hypothèses doit-on faire sur les distances OM, $O'P$ et OO' ? Remarque : L'énoncé original demande ici d'énoncer le principe de Huygens-Fresnel.

b) Afin d'observer la figure de diffraction à l'infini, on place une lentille convergente L_3 de foyer image F'_3, de distance focale image f'_3 derrière l'ouverture diffractante. On considère les rayons diffractés dans la direction du vecteur unitaire $\vec{u}$ de coordonnées (α,β,γ) (Fig. 14). Dans quel plan π convergent ces rayons ? On associe un système d'axes (X,Y) à ce plan. Exprimer les coordonnées (X_P,Y_P) du point P où convergent ces rayons en fonction de α,β.

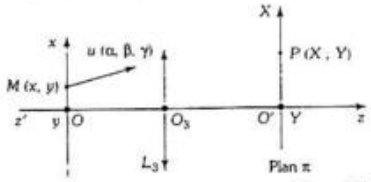


Figure 14

c) Dans le cas d'une onde incidente plane sur le diaphragme D, de direction caractérisée par un vecteur unitaire $\vec{u}_i$ de coordonnées $(\alpha_i,\beta_i,\gamma_i)$, le principe de Huygens-Fresnel permet d'écrire, en attribuant une phase nulle en P à l'onde qui provient de O, l'amplitude complexe $\underline{A}(P)$ de l'onde au point P, sous la forme :

$$\underline{A}(P) = K_1 \iint_D \underline{t}(x,y)\exp\left(j\frac{2\pi(\vec{u}_i - \vec{u})\cdot\overrightarrow{OM}}{\lambda}\right)dS$$

où K_1 est une constante, dS un élément de la surface de la pupille entourant M, l'intégrale étant étendue à toute la surface du diaphragme.

On déplace le diaphragme D parallèlement à lui-même, dans le même plan, le centre du diaphragme occupant alors une position C. On appelle (d_x,d_y) les coordonnées de C ; montrer que l'amplitude en P peut alors s'écrire :

$$\underline{A}'(P) = \underline{A}(P)\exp(jh(d_x,d_y))$$

et exprimer la fonction $h(d_x,d_y)$ sous la forme d'un produit scalaire de 2 vecteurs que l'on précisera. Interpréter

© Lavoisier – La photocopie non autorisée est un délit

Conseils méthodologiques. a) : Traduire ici la notion de grande distance, sans se préoccuper de l'aspect ondulatoire, car λ n'est pas mentionné. **b)** : Raisonner comme en optique géométrique. **c)** : L'intérêt de l'écriture du déphasage en terme de produit scalaire est de permettre une manipulation vectorielle par la relation de Chasles.

a) Parler d'observation à l'infini impose de considérer les distances grandes par rapport aux dimensions de l'ouverture.

Ici, avec les notations de la figure, il convient de satisfaire :

$$OM \ll OO' \quad \text{et} \quad O'P \ll OO'.$$

Mais en réalité, comme le précisera la suite du raisonnement, l'expression des différences de marche ne sera possible, dans l'approximation de l'infini, qu'à condition que les erreurs commises restent inférieures à la demi-longueur d'onde.

⇨ **Remarque**

La contrainte sera finalement plus forte que celle proposée ici.

b) La construction de la figure 15 montre que les rayons émergents correspondant à deux rayons incidents parallèles entre eux se coupent dans le plan focal image de L_3 :

$$\pi = (F'_3, x, y).$$

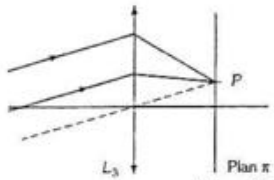


Figure 15

Le point d'intersection est déterminé par le tracé du rayon imaginaire parallèle aux deux rayons incidents et passant par le centre optique de la lentille.

Puisqu'il n'est pas dévié et coupe les émergents dans le plan π, on obtient aisément le point d'intersection.

En supposant les angles petits, on aboutit à :

$$\boxed{X_P = \alpha f'_3 \text{ et } Y_P = \beta f'_3}.$$

⇨ **Remarque**

C'est-à-dire un trait de construction.

c) Il convient de remplacer dans l'expression de l'intégrale $\overrightarrow{OM}$ par $\overrightarrow{CM}$:

$$\underline{A}'(P) = K_1 \iint \underline{t}'(x,y)\exp\left(j\frac{2\pi(\vec{u}_i - \vec{u})\cdot\overrightarrow{OM}}{\lambda}\right)dS.$$

⇨ **Remarque**

Cette hypothèse est nécessaire pour raisonner dans les conditions de Gauss pour L_3.

où $\underline{t}'(x,y)$ est la transmittance du diaphragme translaté :

$$\underline{t}'(x,y) = \underline{t}(x-d_x, y-d_y).$$

⇨ **Remarque**

Il n'y a pas de problème avec les bornes car le domaine d'intégration reste tout le plan.

Par le changement de variable $x' = x - d_x$, $y' = y - d_y$, on fait apparaître $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OC}$, d'où l'expression proposée avec :

$$h(d_x,d_y) = \frac{2\pi}{\lambda}(\vec{u}_i - \vec{u})\cdot(d_x\vec{u}_x + d_y\vec{u}_y)$$

⇨ **Remarque**

$\exp(j\varphi)$ a un module unité et l'argument φ.

On interprète l'existence de ce terme comme l'apparition d'un déphasage dû à la translation de l'origine. Dans une figure de diffraction à l'infini ne faisant intervenir que ce diaphragme et une seule onde incidente, le diffractogramme serait identique, malgré la translation.

⇨ **Remarque**

L'éclairement est donné par le carré du module et $|\underline{A}(P)| = |\underline{A}'(P)|$.

2. Diffraction à 4 ouvertures — D'après Oral Centrale-Supelec

On éclaire par un faisceau de lumière parallèle monochromatique, en incidence normale un écran percé de 4 ouvertures rectangulaires (Fig. 16) :

- chaque rectangle a pour dimensions $2a$ et $2b$;
- les écartements des axes de symétrie sont $2d$ et $2e$.

L'observation a lieu à l'infini, dans le plan focal image d'une lentille convergente de distance focale f'.

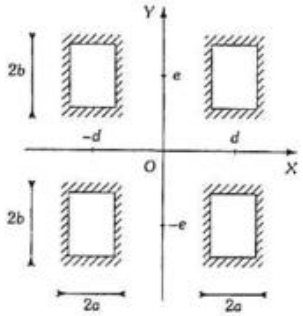


Figure 16

a) Proposer une définition du coefficient de transparence $t(X,Y)$.

b) Après avoir rappelé le principe d'Huygens-Fresnel, exprimer l'amplitude complexe diffractée en un point de coordonnées (x,y) du plan focal image de la lentille. Effectuer le calcul.

c) Quelle est la loi donnant l'éclairement $\varepsilon(x,y)$ correspondante ?

d) Quel lien peut-on faire avec le résultat obtenu dans une expérience d'interférences bien connue ?

Conseils méthodologiques. a) : Le coefficient est réel ici, puisque chaque point de l'ouverture est soit transparent, soit opaque. Il s'agit donc d'un jeu d'écriture. b) : En organisant astucieusement le calcul de l'intégrale double, on peut réutiliser des résultats partiels comme l'amplitude diffractée par une ouverture rectangulaire. c) : A l'oral, il faut rappeler avec justification la nature du lien entre amplitude complexe et éclairement. d) : Après tout, il y a cohérence entre les rayonnements réémis par les différentes ouvertures, donc des interférences sont à prévoir.

a) Le coefficient de transparence vaut 0 en dehors des ouvertures rectangulaires et 1 dans celles-ci. Ainsi :

- Pour $(d-a) \leqslant |X| \leqslant (d+a)$ et $(e-b) \leqslant |Y| \leqslant (e+b)$, $t(X,Y) = 1$.
- En dehors de ces cas $t(X,Y) = 0$.

b) Par application du principe d'Huygens-Fresnel, on doit sommer, en un point M du plan focal de la lentille, les amplitudes complexes des ondes réémises par les différents éléments de surface de l'objet diffractant. Cette somme est pondérée par le coefficient de transparence, c'est-à-dire ici que l'on restreint le domaine d'intégration aux intervalles définis ci-dessus.

⇒ **Remarque**

L'usage des valeurs absolues permet de réunir les intervalles symétriques par rapport à 0 en une seule relation.

L'onde incidente est plane et parvient sur l'objet diffractant en incidence normale, donc les points de l'ouverture vibrent en phase. Les seuls termes de déphasage à prendre en compte sont dus à la différence de marche entre :

- d'une part le point $P(X,Y)$ situé sur l'écran diffractant et le point $M(x,y)$ d'observation ;
- d'autre part le point $O(0,0)$ et M.

On peut donc aboutir à une écriture intégrale :

$$\underline{A}(x,y) = K\iint_{(XOY)} t(X,Y)\exp\left(j\frac{2\pi\delta}{\lambda}\right)dX \cdot dY$$

⇒ **Remarque**

Le choix de O situé au centre de l'objet diffractant permet de définir une référence des phases.

où $\delta = \overrightarrow{OM} \cdot \vec{u}$, avec $\vec{u}$ vecteur unitaire définissant la direction des rayons diffractés.

Puisqu'ici l'observation a lieu dans le plan focal image d'une lentille, on écrit $\vec{u} = \dfrac{\overrightarrow{CM}}{CM}$, C étant le centre optique de la lentille.

© Laycuier - La photocopie non autorisée est un délit

La différence de marche est ainsi :

$$\boxed{\delta = \frac{xX + yY}{f'}}$$

⇒ **Remarque**

Les coordonnées de $\vec{u}$ sont, pour des rayons paraxiaux :

$$\alpha = \frac{X}{f'} \text{ et } \beta = \frac{Y}{f'}$$

Le calcul de l'intégrale double :

$$\underline{A}(x,y) = K\iint_D \exp\left(j\frac{2\pi(xX+yY)}{\lambda f'}\right)dX \cdot dY$$

peut être simplifié si l'on utilise :

- d'une part, le fait qu'il est possible de séparer l'intégration en X de celle portant sur Y grâce à l'écriture :

$$\exp\left(j\frac{2\pi(xX+yY)}{\lambda f'}\right) = \exp\left(j\frac{2\pi xX}{\lambda f'}\right)\exp\left(j\frac{2\pi yY}{\lambda f'}\right).$$

le résultat est alors le produit des intégrales correspondantes ;

⇒ **Remarque**

Il s'agit du théorème de Fubini.

- d'autre part en séparant l'intégration sur chaque intervalle $[-a-d,-a+d]$, $[a-d,a+d]$...

Puisque $\int_{-d-a}^{-d+a}\exp\left(j\frac{2\pi xX}{\lambda f'}\right)dX = \exp\left(-j\frac{2\pi xd}{\lambda f'}\right)\int_{-a}^{a}\exp\left(j\frac{2\pi xX}{\lambda f'}\right)dX$, on obtient pour l'une des intégrales :

$$\int_{-d-a}^{-d+a}\exp\left(j\frac{2\pi xX}{\lambda f'}\right)dX = \exp\left(-j\frac{2\pi xd}{\lambda f'}\right)2a \cdot \operatorname{sinc}\left(\frac{2\pi ax}{\lambda f'}\right).$$

Les deux intégrales effectuées sur les abscisses s'ajoutent en faisant apparaître la simplification suivante :

$$\left[\exp\left(-j\frac{2\pi xd}{\lambda f'}\right)+\exp\left(j\frac{2\pi xd}{\lambda f'}\right)\right]\operatorname{sinc}\left(\frac{2\pi ax}{\lambda f'}\right) = 2\cos\left(\frac{2\pi xd}{\lambda f'}\right)\operatorname{sinc}\left(\frac{2\pi ax}{\lambda f'}\right).$$

Finalement, par produit avec le terme relatif aux ordonnées déduit par transposition des notations :

$$\boxed{\underline{A}(x,y) = A_0\cos\left(\frac{2\pi xd}{\lambda f'}\right)\operatorname{sinc}\left(\frac{2\pi ax}{\lambda f'}\right)\cos\left(\frac{2\pi ye}{\lambda f'}\right)\operatorname{sinc}\left(\frac{2\pi by}{\lambda f'}\right)}$$

⇒ **Remarque**

A_0 désigne ici l'amplitude diffractée au centre du plan focal image de la lentille, donc en F'.

c) Puisque l'éclairement correspond à la moyenne quadratique de la vibration scalaire, on obtient en notation complexe une proportionnalité au carré du module de l'amplitude complexe. On peut donc écrire, puisqu'il apparaît que l'amplitude complexe est ici réelle :

$$\boxed{\varepsilon = \varepsilon_{max}\cos^2\left(\frac{2\pi xd}{\lambda f'}\right)\operatorname{sinc}^2\left(\frac{2\pi ax}{\lambda f'}\right)\cos^2\left(\frac{2\pi ye}{\lambda f'}\right)\operatorname{sinc}^2\left(\frac{2\pi by}{\lambda f'}\right)}$$

⇒ **Remarque**

Cette propriété est due aux symétries de l'objet diffractant.

d) Sur chaque coordonnée, on obtient une loi de dépendance de la forme : $\cos^2\left(\frac{2\pi xd}{\lambda f'}\right)\operatorname{sinc}^2\left(\frac{2\pi ax}{\lambda f'}\right)$ qui témoigne :

- de l'existence d'un phénomène de diffraction, par le terme $\operatorname{sinc}^2\left(\frac{2\pi ax}{\lambda f'}\right)$, la largeur de l'ouverture correspondante étant ici $2a$;
- d'une variation sinusoïdale d'éclairement, qui s'interprète comme une manifestation des interférences entre les ondes diffractées par les ouvertures distantes de $2d$, car :

$$\cos^2\left(\frac{2\pi xd}{\lambda f'}\right) = \frac{1}{2}\left[1+\cos\left(\frac{4\pi xd}{\lambda f'}\right)\right] \quad \text{et on retrouve l'interfrange } \frac{\lambda f'}{2d} \text{ attendue.}$$

Ce qui est tout à fait remarquable est la coexistence des phénomènes en x et en y dans un simple produit : la diffraction module les interférences sur chacun des axes.

REMARQUE – Il était également possible d'obtenir l'expression de l'amplitude complexe en superposant quatre termes dus respectivement à chacune des quatre ouvertures. Dans ce cas, il faut veiller à inclure un terme de phase pour tenir compte du décalage d'origine dans le plan (XOY). Cette méthode a été expérimentée à une dimension dans le savoir-faire : « savoir relier interférence et diffraction ».

3. Annulation de l'amplitude diffractée — D'après Oral Banque PT

On cherche à interpréter l'existence de directions dans lesquelles l'amplitude diffractée par une fente est nulle.

a) On rappelle l'expression de l'amplitude diffractée à l'infini par une ouverture rectangulaire, en fonction des coordonnées $(\alpha,\beta,\gamma = 1)$ du vecteur unitaire $\vec{u}$ permettant de définir la direction d'observation :

$$\underline{A}(\alpha,\beta) = \underline{A}_0 \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi\alpha a}{\lambda}\right)\operatorname{sinc}\left(\frac{\pi\beta b}{\lambda}\right).$$

Que représentent ici λ, a et b ?

b) Dans le cas où l'on considère une ouverture assimilable à une fente de largeur a, quelle expression obtient-on ?

c) Montrer qu'il existe des valeurs de l'angle d'observation pour lesquelles l'amplitude diffractée est nulle. Proposer la première valeur de α pour laquelle ce phénomène se produit.

d) En associant deux à deux les éléments de l'ouverture diffractante, montrer que l'absence de rayonnement dans cette direction découle d'une interférence destructive.

Conseils méthodologiques. a) : On attend ici un jeu d'arguments qualitatifs simples : c'est une vérification des connaissances du cours. **b) :** Le passage à la fente nécessite une condition sur les dimensions de l'ouverture, mais également une restriction dans le choix des coordonnées (α,β) de l'observation. **c) :** On doit s'attacher ici aux propriétés de la fonction $\sin(x)/x$. **d) :** On raisonne dans le plan $\beta = 0$ et on considère deux points source. Préciser à quelle condition les rayons qu'ils émettent dans la direction définie ci-dessus interfèrent avec un ordre d'interférence demi-entier.

a) La longueur d'onde λ du rayonnement est la longueur caractéristique qui intervient dans les phénomènes d'interférences ou de diffraction.

Dans ce dernier cas, on forme avec la dimension a ou b de l'ouverture un nombre sans dimension $\frac{\lambda}{a}$ ou $\frac{\lambda}{b}$ qui permet de caractériser l'importance du phénomène.

Ce nombre donne notamment un ordre de grandeur de l'angle correspondant au premier lobe de diffraction, dans la direction considérée.

⇨ Remarque

Il s'agit de la longueur ou de la largeur dans le cas d'un diaphragme rectangulaire.

b) Pour définir une fente de largeur a, on peut considérer une ouverture rectangulaire de longueur b et de largeur a et se placer dans le cas où $b \gg a$. Alors, l'ordre de grandeur $\frac{\lambda}{b}$ de l'angle β du lobe principal de diffraction devient très inférieur à $\frac{\lambda}{a}$. L'étalement dû à la diffraction a lieu essentiellement dans la direction perpendiculaire à la plus grande dimension de l'ouverture, c'est-à-dire selon l'axe repéré par α.

On en déduit qu'en raisonnant au voisinage de $\beta = 0$, on obtient suivant la direction repérée par α une répartition d'amplitude de la forme :

$$\boxed{\underline{A}(\alpha,0) = \underline{A}_0 \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi a \alpha}{\lambda}\right)}$$

Technique de calcul

$\operatorname{sinc}(0) = 1$

© Larousier – La photocopie non autorisée est un délit

c) La variation de $\underline{A}(\alpha,0)$ avec α fait apparaître des annulations, lorsque α est un multiple non nul de $\frac{\lambda}{a}$.
La première annulation a donc lieu pour :

$$\boxed{\alpha_1 = \frac{\lambda}{a}}.$$

On peut être intrigué par le fait que bien qu'il y ait une infinité d'ondes élémentaires diffractées par les différents éléments de l'ouverture dans cette direction, l'amplitude résultante puisse s'annuler.

L'objet de la question suivante est de justifier ce résultat.

⇨ Remarque

Un des résultats importants et significatifs de l'étude des interférences est le fait que superposer de la lumière avec de la lumière puisse, en certains points, donner de l'obscurité !

d) Considérons deux éléments de l'ouverture autour de points P et P' dont les abscisses diffèrent de X.

La différence de phase entre les deux rayons réémis dans la direction α peut s'apprécier en considérant (Fig. 17) la différence de marche :

$$\delta = [PH] - [P'H'].$$

où H et H' sont deux points à l'intersection des rayons et d'un plan $\mathcal{P}$ orthogonal à la direction envisagée.

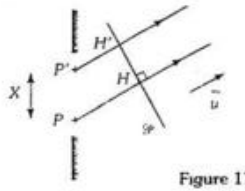


Figure 17

Les points du plan $\mathcal{P}$ sont en effet à égale distance optique d'un point d'observation situé à l'infini, dans la direction repérée par α.

⇨ Remarque

On prouve ceci en imaginant une source placée en un tel point M : la loi de Malus et le retour inverse de la lumière font de $\mathcal{P}$ une surface d'onde.

En utilisant les propriétés du produit scalaire, qui donne la longueur du projeté $\vec{u} \cdot \overrightarrow{PP'}$, on obtient l'expression du déphasage :

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\vec{u} \cdot \overrightarrow{PP'} = \frac{2\pi}{\lambda} X \sin\alpha$$

Pour des rayons paraxiaux, c'est-à-dire proches de l'axe, $\sin\alpha \approx \alpha$ et on obtient l'expression approchée suivante :

$$\boxed{\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} X\alpha}.$$

Pour $X = \frac{a}{2}$ et $\alpha = \alpha_1 = \frac{\lambda}{a}$, le déphasage obtenu est : $\boxed{\varphi_1 = \pi}$.

⇨ Remarque

Ce sont les abscisses qui diffèrent de $\frac{a}{2}$.

Ainsi, les ondes réémises par deux points séparés de $\frac{a}{2}$ interfèrent destructivement. On peut faire une partition de l'intervalle des X représentant la fente diffractante en couples d'éléments séparés de $\frac{a}{2}$; on somme ainsi les amplitudes en groupant ces éléments deux à deux et on aboutit à une somme de termes nuls. L'amplitude complexe résultante est ainsi nulle.

⇨ Remarque

L'éclairement qui est proportionnel au carré du module est nul par conséquent.

REMARQUE – Cet exercice, qui n'est pas très compliqué, fait une nouvelle fois le lien entre interférences et diffraction. Tout est basé sur le fait que les éléments de l'ouverture émettent des rayonnements cohérents, donc qu'il faut sommer les amplitudes complexes.

4. Diffraction par un miroir — D'après Mines-Ponts

On recherche l'expression de l'intensité diffractée par un miroir rectangulaire, dont les dimensions a et b vérifient $b \gg a$. La lumière incidente est une onde plane progressive monochromatique, qui parvient sur le plan du miroir avec un angle d'incidence i (Fig. 18). On recherche l'amplitude et l'intensité diffractées dans le demi-espace $Y' > 0$ et dans la direction repérée par l'angle i'.

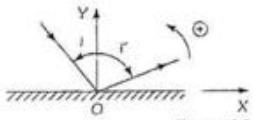


Figure 18

Les angles sont comptés algébriquement : i et i' peuvent être positifs ou négatifs ; on ne fait pas l'hypothèse des angles petits.

a) Qualitativement, justifier que la forme allongée de l'ouverture permet de se ramener à un problème à une dimension spatiale ; quel est le nom donné à une ouverture qui aurait la même forme, dans un problème de diffraction en transmission ?

b) Les points du miroir reçoivent-ils une vibration de même phase ? Dans le cas contraire, quelle est l'expression du déphasage entre l'onde incidente reçue par le centre O et un point P de coordonnées (X,Z) ?

c) On applique l'approximation prévue et justifiée à la question **a)**, exprimer l'amplitude diffractée $\underline{A}(i')$ par le miroir rectangulaire, dans la direction repérée par l'angle i'. On notera A_0 l'amplitude obtenue dans la direction donnée par les lois de Descartes.

d) En déduire l'expression des variations d'intensité et commenter les résultats.

Conseils méthodologiques. a) : C'est l'inégalité $b \gg a$ qu'il faut exploiter ici. **b) :** Il est commode de tracer les surfaces d'onde, puis de déterminer l'expression de la différence de marche. **c) :** En tenant compte du déphasage entre les ondes réfléchies dans une même direction i', qui s'obtient comme au b) par l'intermédiaire de la différence de marche, on peut sommer les amplitudes complexes. **d) :** L'intensité résulte d'une moyenne quadratique de l'amplitude de la vibration instantanée, ce qu'il faut traduire sur l'amplitude complexe par une proportionnalité au carré du module.

a) La forme allongée du miroir nous permet de faire le lien avec le passage d'une ouverture rectangulaire à une fente.

Lorsqu'un objet diffractant présente une dimension très grande, l'étalement de la diffraction dans la direction correspondante diminue. On considère alors que la diffraction a lieu de façon prépondérante dans la direction perpendiculaire à la fente. Ici, c'est dans le plan (XOY) que doit être conduite l'étude.

b) Du fait de l'incidence oblique, les plans d'onde Σ sont inclinés par rapport à (XOZ) de l'angle i.

Ainsi, les points de même abscisse X vibrent en phase, mais il n'en va pas de même de points dont les valeurs de X diffèrent.

En raisonnant sur la figure 19, où Σ est le plan d'onde passant par l'origine O, on peut obtenir la différence de marche $\delta = HP$ par :

$$\boxed{\delta = X \sin i}.$$

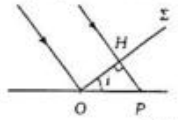


Figure 19

En notant λ la longueur d'onde dans le vide du rayonnement, on obtient l'expression du déphasage :

$$\boxed{\varphi = 2\pi\frac{\delta}{\lambda} = 2\pi\frac{X \sin i}{\lambda}}$$

⇨ Remarque

Le fait de ne plus avoir à supposer les angles petits provient de l'absence de lentille ou miroir dont le stigmatisme approché nécessite l'adoption des conditions de Gauss.

c) Pour deux rayons réémis par les points O et P, qui partent dans la même direction définie par i', l'interférence a lieu à l'infini.

On doit prendre en compte, en plus du déphasage calculé précédemment, un terme dû à la différence de marche $\delta' = OH'$ (Fig. 20).

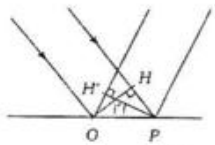


Figure 20

© Eyrolles – La photocopie non autorisée est un délit

Par la même méthode que précédemment, on obtient $\delta' = OH' = -X \sin i'$.

Finalement, le déphasage total s'écrit :

$$\boxed{\varphi = 2\pi\frac{\delta - \delta'}{\lambda} = 2\pi\frac{X(\sin i + \sin i')}{\lambda}}.$$

Erreur à éviter

Faire attention au signe des angles : sur la figure, $i' < 0$.

On applique alors le principe d'Huygens-Fresnel en sommant les amplitudes complexes des vibrations réémises par les différents éléments de surface du miroir. En mettant en facteur le terme associé à la vibration d'origine O, on obtient la prise en compte des déphasages par $\exp(j\varphi)$:

$$\underline{A}(i') = K\iint_{\text{miroir}} \exp(j\varphi)\mathrm{d}S = K\iint_{\text{miroir}} \exp\left(j2\pi\frac{X(\sin i + \sin i')}{\lambda}\right)\mathrm{d}S.$$

Puisque le miroir a une forme rectangulaire, le découpage de la surface se fait en éléments de longueur b et largeur $\mathrm{d}X$: $\mathrm{d}S = b\,\mathrm{d}X$ et l'intégrale devient une intégrale simple sur l'intervalle $\left[-\frac{a}{2};\frac{a}{2}\right]$:

$$\underline{A}(i') = Kb\int_{-a/2}^{a/2} \exp\left(j2\pi\frac{X(\sin i + \sin i')}{\lambda}\right)\mathrm{d}X.$$

On obtient ainsi une expression analogue à celle de l'amplitude diffractée par une fente, utilisant la fonction $\mathrm{sinc}(x)$.

$$\underline{A}(i') = Kab \cdot \mathrm{sinc}\left(\pi\frac{a(\sin i + \sin i')}{\lambda}\right).$$

La constante de proportionnalité peut être reformulée, en utilisant la direction $i' = -i$, qui correspond aux lois de Descartes :

$$\boxed{\underline{A}(i') = A_0\,\mathrm{sinc}\left(\pi\frac{a(\sin i + \sin i')}{\lambda}\right)}.$$

⇨ Remarque

C'est l'image géométrique !

d) En passant au carré du module, on écrit la variation d'intensité en fonction de l'angle i' :

$$\boxed{I(i') = I_0\,\mathrm{sinc}^2\left(\pi\frac{a(\sin i + \sin i')}{\lambda}\right)}$$

On montre ainsi que la réflexion est un phénomène qui peut être décrit par le principe d'Huygens-Fresnel : la direction de l'image géométrique est bien celle prévue par les lois de Descartes, puisque le maximum d'intensité est obtenu dans la direction symétrique par rapport à la normale : $i' = -i$. Ce qui en revanche tout à fait nouveau et relève de l'optique physique, est l'étalement autour de cette direction principale. On constate que selon la valeur du rapport largeur-longueur d'onde $\frac{a}{\lambda}$, l'intervalle des valeurs de i' où l'on observe de la lumière varie de façon calculable.

REMARQUE – Cet exercice doit être vu comme l'occasion d'une transposition du cours sur la diffraction : on reprend la même démarche en l'adaptant à une situation différente. Les conditions d'application du principe d'Huygens-Fresnel dans des directions pouvant faire un grand angle ne sont pas évoquées. En réalité, la méthode est discutable, notamment le recours à l'approximation scalaire, mais ce n'est pas le propos ici.

Pour approfondir

5. Apodisation — D'après Oral Mines-Ponts

On étudie la figure de diffraction par une fente éclairée par un faisceau monochromatique de lumière parallèle en incidence normale. Grâce à un cache, on obtient un coefficient de transparence variable avec l'abscisse, sur la largeur de la fente :

$$t(X) = \exp\left(-\frac{|X|}{a}\right).$$

On admet que la décroissance de cette fonction avec $|X|$ est assez rapide pour que l'on puisse raisonner avec X variant sur $[-\infty,\infty]$. L'observation a lieu dans le plan focal image d'un objectif.

a) Comment peut-on produire un faisceau de lumière monochromatique et parallèle à l'axe, à partir d'une lampe à incandescence blanche ?

b) Soit F' le foyer de l'objectif et f' sa distance focale, quelle est l'expression des variations relatives de l'éclairement en fonction de l'abscisse x, sur l'axe $(F'x)$?

c) Par comparaison avec le cas d'une fente de coefficient de transparence uniformément égal à 1, quelles sont les caractéristiques de la nouvelle figure de diffraction ?

Conseils méthodologiques. a) : Il faut revoir les notions découvertes en travaux pratiques ; les qualificatifs importants ici sont monochromatique et parallèle. b) : Le principe d'Huygens-Fresnel permet dans un premier temps de calculer l'amplitude complexe. c) : Le titre apodisation, qui signifie disparition des pieds (du grec πoδoς pied), peut mettre sur la voie de l'interprétation souhaitée.

a) La source est polychromatique, donc il faut utiliser un filtre sélectif capable de sélectionner un intervalle de longueur d'onde étroit. En pratique, des filtres interférentiels présentent des facteurs de qualité suffisamment élevés pour que l'intervalle de longueur d'onde observé en sortie soit assez étroit et que l'on puisse assimiler le rayonnement à une onde monochromatique.

En outre, la source placée à distance finie ne produit pas un faisceau de lumière parallèle. On peut donc utiliser un diaphragme placé au foyer objet d'une lentille convergente. Le faisceau en sortie est alors composé de rayons issus du foyer, donc parallèles à l'axe optique de la lentille. Le réglage du parallélisme des rayons peut être effectué par autocollimation à l'aide d'un miroir.

b) En vertu du principe d'Huygens-Fresnel, les différents éléments de l'ouverture réémettent des rayonnements cohérents dont on somme les amplitudes complexes. L'observation dans le plan focal image de l'objectif équivaut à une observation à l'infini, en liant l'angle α que font les rayons réémis avec l'axe à $\frac{x}{f'}$.

Dans l'intégrale qui définit l'amplitude complexe résultante, le coefficient de transparence apparaît comme un facteur de pondération des ondes réémises par les différents éléments de surface de la fente supérieure. L'expression à calculer est donc :

⇨ Remarques

La lumière blanche a un spectre continu.

On retrouve ici la structure du collimateur présent dans un goniomètre.

Dans le cas présent il s'agira d'une fente parallèle à la fente diffractante.

Technique de calcul

Approximation des petits angles.

⇨ Remarque

L'amplitude réémise au point P est proportionnelle à l'amplitude de l'onde incidente, via le coefficient $t(P)$.

© Ellipses – La photocopie non autorisée est un délit

$$\underline{A}(\alpha) = K\int_{-\infty}^{\infty} t(X)\exp\left(j\frac{2\pi\alpha X}{\lambda}\right)dX.$$

Pour X parcourant l'intervalle $[-\infty,0]$: $t(X) = \exp\left(\frac{X}{a}\right)$,

tandis que sur $[0,\infty]$: $t(X) = \exp\left(-\frac{X}{a}\right)$.

On calcule donc la somme de deux intégrales :

$$\int_{-\infty}^{0}\exp\left(\frac{X}{a}+j\frac{2\pi\alpha X}{\lambda}\right)dX = \frac{1}{j\frac{2\pi\alpha}{\lambda}+\frac{1}{a}}$$

et de même :

$$\int_{0}^{\infty}\exp\left(\frac{-X}{a}+j\frac{2\pi\alpha X}{\lambda}\right)dX = \frac{-1}{j\frac{2\pi\alpha}{\lambda}-\frac{1}{a}}.$$

Par sommation, après réduction au même dénominateur, on aboutit à :

$$\underline{A}(\alpha) = \underline{A}_0\frac{1}{1+4\pi^2\frac{a^2\alpha^2}{\lambda^2}}.$$

Technique de calcul

$a+jb$ et $a-jb$ sont complexes conjugués : leur produit vaut a^2+b^2.

Le passage à l'éclairement, qui s'effectue usuellement par calcul du carré du module de l'amplitude complexe, s'obtient ici par simple élévation au carré :

$$\boxed{\mathcal{E}(x) = \frac{\mathcal{E}_0}{\left(1+4\pi^2\frac{a^2x^2}{\lambda^2f'^2}\right)^2}}.$$

c) Par comparaison avec l'expression $\mathcal{E}(\alpha) = \mathcal{E}_0\mathrm{sinc}^2\left(\frac{\pi a x}{\lambda f'}\right)$ (Fig. 21), on constate que la nouvelle fonction est monotone décroissante pour x positif. Ainsi, on n'observe plus de franges de part et d'autre de l'image géométrique : la frange centrale n'est en revanche plus délimitée précisément par des abscisses où l'éclairement s'annule.

⇨ Remarque

Elle est monotone croissante sur x négatif, par raison de symétrie.

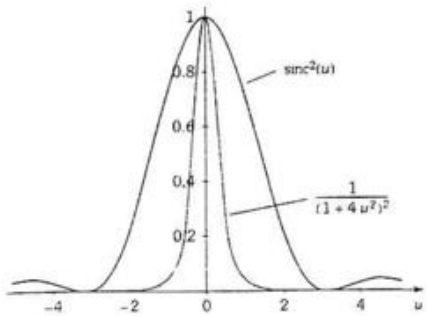


Figure 21

Un avantage de la disparition des pieds, en astronomie par exemple, est que l'on ne risque plus de confondre les maxima secondaires avec des objets moins lumineux situés au voisinage de l'objet central observé.

Plus généralement, le fait d'utiliser une loi de pondération plutôt qu'une variation abrupte permet de minimiser, ou en tout cas de contrôler, l'influence des effets de bords. On retrouve ces pratiques en analyse spectrale.

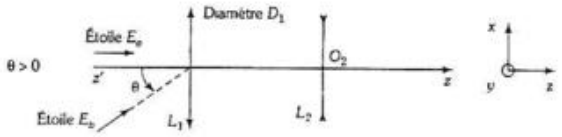
Au-delà du calcul de l'intégrale, qui n'est pas nécessairement le cœur de l'évaluation, cet exercice permet de revenir sur le lien entre l'expression de l'éclairement et la figure observée. Ne pas oublier qu'en diffraction, l'existence d'un lobe central et de franges latérales de largeur moitié est un résultat important et une propriété caractéristique.

6. Résolution d'une lunette astronomique — D'après CCP

On s'intéresse ici à l'observation d'une étoile E_e située dans la direction de l'axe optique d'une lunette utilisée dans les conditions de Gauss. On recherche la tache de diffraction produite par la lunette et on évalue la limite de résolution de l'instrument, définie comme la plus petite distance angulaire entre deux étoiles décelables.

La lunette astronomique d'axe optique $z'z$ (Fig. 22) est constituée :

- d'un objectif assimilé à une lentille mince convergente L_1 de diamètre $D_1 = 50$ cm et de distance focale image $f_1' = 7{,}5$ cm ;
- associé à une lentille divergente L_2, oculaire dont on admettra qu'il n'intervient pas dans la résolution de l'instrument.



Lunette astronomique

Figure 22

On désigne respectivement par O_1 et F_1' les centre optique et foyer de la lentille L_1.

a) Quelle est la forme et la direction du faisceau lumineux émis par l'étoile E_e lorsqu'il parvient sur la lunette ? On appelle A_1 l'image de l'étoile à travers la lentille L_1. Dans quel plan se situe A_1 ? Est-ce le cas pour toutes les images des étoiles observables ?

b) On admet qu'il est possible de mener une étude équivalente, en plaçant devant l'objectif L_1 de la lunette un écran comportant une ouverture ayant la forme d'un carré, centré sur l'axe optique, de côtés parallèles aux axes x et y, de dimension $a = \frac{D_1}{\sqrt{2}}$ (Fig. 23). On utilise un filtre sélectif permettant d'assimiler l'étoile E_e à une source qui émet une onde monochromatique de longueur d'onde λ.

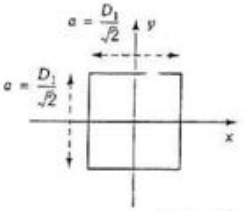


Figure 23

Exprimer l'amplitude diffractée $\underline{A}(X_P, Y_P)$ par l'ouverture carrée dans la direction de vecteur unitaire $\vec{u}$ de coordonnées (α, β, γ), en un point P du plan focal image de l'objectif L_1.

c) Donner alors l'éclairement $\varepsilon_e(X_P, Y_P)$ en P sous la forme d'un produit :

$$\varepsilon_e(X_P, Y_P) = \varepsilon_{ms}\, g(X_P) g(Y_P).$$

Exprimer $g(X)$.

© Librairie - La photocopie non autorisée est un délit

d) Montrer que la figure de diffraction est formée d'une tache centrale brillante entourée de lumière plus faible répartie en franges (pieds de la figure de diffraction). Où se situe le centre de la figure de diffraction ? Quelle est la valeur de X pour laquelle $g(X)$ s'annule pour la première fois ? En déduire la largeur de la tache centrale.

e) Une étoile E_b située à la distance angulaire θ de l'étoile E_e est observée à l'aide de la lunette toujours munie de l'ouverture carrée de telle façon que l'image géométrique B_1 de E_b à travers l'objectif L_1 se forme sur l'axe $F_1'X$. L'étoile E_b est également assimilée à une source lumineuse ponctuelle monochromatique de longueur d'onde λ émettant une onde plane caractérisée par le vecteur unitaire $\vec{u}_i$ de coordonnées $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$.

Donner la relation entre (α_i, β_i) et θ. En supposant que seule l'étoile E_b est observée, exprimer l'éclairement $\varepsilon_b(X_P, Y_P)$ en P. Préciser l'allure de la tache de diffraction.

f) Les étoiles E_e et E_b sont observées simultanément et sont d'éclat comparable.

- E_e et E_b étant deux sources incohérentes, que peut-on dire de l'éclairement total dans le plan focal image de L_1 ?
- Sachant que deux taches de diffraction apparaissent comme séparées lorsque le maximum central de l'une coïncide avec le premier minimum nul de l'autre suivant l'axe X, estimer le plus petit écart angulaire θ décelable (en seconde d'arc), que l'on appelle pouvoir de séparation de la lunette, pour la longueur d'onde $\lambda = 0{,}68\ \mu$m.

Conseils méthodologiques. a) : Il s'agit ici d'un raisonnement d'optique géométrique. **b) :** Raisonner à partir du principe d'Huygens-Fresnel, en utilisant si besoin l'étude analogue menée dans l'exercice sur le diaphragme (*cf.* les bases). **c) :** Il ne s'agit de rien d'autre que se remémorer la relation permettant de passer de l'amplitude complexe à l'éclairement. **d) :** On retrouve ici les notions du cours sur la description d'une figure de diffraction. **e) :** Il est possible de réutiliser les résultats précédents, grâce à un petit raisonnement liant l'étude pour E_e à celle-ci. Se reporter si besoin à l'étude analogue menée dans l'exercice sur la translation d'un diaphragme (*cf.* les bases). **f) :** Toute la problématique repose ici sur le caractère incohérent des deux rayonnements. Il faut savoir ce que l'on peut sommer !

a) L'étoile est située à distance infinie, au regard des dimensions terrestres de l'instrument. On peut donc assimiler l'onde incidente à une onde plane progressive. A_1, ainsi que toutes les images des étoiles situées dans le champ d'observation, se forme dans le plan focal image de l'objectif :

$$(F_1', x, y).$$

⇨ Remarque

C'est une utilisation du résultat sur l'approximation quasi plane du rayonnement dipolaire à grande distance.

b) On applique le principe d'Huygens-Fresnel pour une onde incidente plane, progressive, monochromatique en incidence normale. On doit donc sommer en P les amplitudes réémises par les divers éléments de surface de l'ouverture diffractante, en tenant compte des différences de phase. Si M est le point de l'ouverture considéré, le déphasage entre l'onde issue de O et celle issue de M, lorsqu'elles parviennent en P repéré par $\vec{u}$, s'écrit $\frac{2\pi}{\lambda}\vec{u} \cdot \overrightarrow{OM}$.

La sommation des amplitudes complexes s'écrit donc :

$$\underline{A}(P) = K\iint_D \exp\left(j\frac{2\pi}{\lambda}\vec{u} \cdot \overrightarrow{OM}\right)dS$$

Puisque $\vec{u} \cdot \overrightarrow{OM} = x_M\frac{X_P}{f_1'} + y_M\frac{Y_P}{f_1'}$ et sachant que l'intégrale porte sur le carré de côté $\frac{a}{2}$,

$$\underline{A}(P) = K\int_{-a/2}^{a/2}\exp\left(j\frac{2\pi}{\lambda}\frac{x_M X_P}{f_1'}\right)dx_M \cdot \int_{-a/2}^{a/2}\exp\left(j\frac{2\pi}{\lambda}\frac{y_M Y_P}{f_1'}\right)dy_M$$

Technique de calcul

$$\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$$

On obtient ainsi l'expression usuelle de l'amplitude diffractée par un rectangle, dans le cas particulier des deux dimensions de même longueur a :

$$\underline{A}(X_P, Y_P) = Ka^2 \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi a X_P}{\lambda f_1'}\right) \cdot \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi a Y_P}{\lambda f_1'}\right)$$

$$= Ka^2 \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi a \alpha}{\lambda}\right) \cdot \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi a \beta}{\lambda}\right)$$

⇨ Remarque

La constante K n'est pas déterminée, mais on s'intéresse à terme à la variation relative d'éclairement, pas à sa valeur dans l'absolu.

c) L'éclairement est obtenu par moyenne quadratique de l'amplitude, c'est-à-dire en notation complexe qu'il est proportionnel au carré du module de l'amplitude :

$$\mathcal{E}_a(X_P, X_P) = \mathcal{E}_{max} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi a X_P}{\lambda f_1'}\right) \cdot \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi a Y_P}{\lambda f_1'}\right)$$

donc la fonction $g(X)$ n'est autre que le carré du sinus cardinal :

$$\boxed{g(X) = \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi a X}{\lambda f_1'}\right)}.$$

d) Le maximum d'éclairement correspond au foyer F_1' de l'objectif, c'est bien l'image géométrique de l'étoile E_a. De part et d'autre du foyer, des franges de diffraction sont visibles, sur chacun des axes X ou Y. On observe une annulation de l'éclairement lorsque $\frac{\pi a X}{\lambda f_1'}$ est multiple non nul de π.

Ceci est obtenu une première fois pour :

$$\boxed{X_1 = \frac{\lambda f_1'}{a}}$$

on en déduit que la tache centrale a une largeur qui peut raisonnablement être évaluée à :

$$\boxed{\Delta X = 2\frac{\lambda f_1'}{a}}$$

⇨ Remarque

En astronomie, on rencontre une tache circulaire comme image d'une étoile, ce que l'invariance par rotation justifie simplement.

Le rôle du cache rectangulaire n'est pas très clair ici : il sert en réalité à permettre des calculs en coordonnées cartésiennes, mais privilégie artificiellement les directions X et Y.

⇨ Remarque

En pratique, c'est l'ouverture du télescope ou de la lunette qui intervient : le cache n'est intervenu ici que pour rester dans une géométrie rectangulaire et non circulaire.

On remarque que la tache de diffraction correspondant à une étoile ponctuelle est d'autant plus petite que l'ouverture du cache est grande.

e) Avec la seconde étoile seule, on va utiliser les résultats obtenus précédemment, mais en constatant que l'incidence n'est plus normale : l'étoile E_b n'est plus sur l'axe. On peut donc obtenir la nouvelle image géométrique par un raisonnement simple : en traçant le rayon issu de E_b et passant par le centre optique O_1. L'angle sous lequel arrive ce rayon est θ, or il n'est pas dévié, donc il tombe sur le plan focal image de L_1 au point d'abscisse $\theta f_1'$.

⇨ Remarque

Ici $\beta = 0$, mais ce n'est que grâce au choix des axes X et Y : $\alpha = \theta$.

La figure de diffraction est donc translatée autour de la nouvelle image géométrique, ce qu'on peut écrire :

$$\boxed{\mathcal{E}_b(X_P, Y_P) = \mathcal{E}_{max} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi a (X_P - \theta f_1')}{\lambda f_1'}\right) \cdot \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi a Y_P}{\lambda f_1'}\right)}.$$

On pourrait bien entendu utiliser une autre notation que $\mathcal{E}_{max}$, car rien n'indique à ce stade que l'éclairement de l'étoile E_b soit de même valeur que celui de E_a. Les caractéristiques de la figure de diffraction sont en revanche identiques à celles obtenues avec E_a seule.

© Vuibert – La photocopie non autorisée est un délit

f) Les ondes issues des deux étoiles sont nécessairement incohérentes, car elles émanent de sources n'ayant aucune synchronisation.

On doit donc sommer les éclairements dans le plan d'observation.

On peut considérer qu'il y a séparation, si le centre d'une des taches est situé à une distance de l'autre centre supérieure à la demi-largeur du lobe central de diffraction.

Ici, l'application de ce critère donne $\theta f_1' \geqslant \frac{\lambda f_1'}{a}$, soit :

$$\boxed{\theta \geqslant \frac{\lambda}{a}}.$$

⇨ Remarque

Le plan d'observation est ici le plan focal image de l'objectif.

⇨ Remarque

Critère dit de Rayleigh.

On ne pourra ainsi distinguer les taches données par deux étoiles de luminosité comparable que si leur écart angulaire excède $\frac{\lambda}{a}$, que l'on appelle pouvoir de résolution de la lunette.

Numériquement, on obtient $\theta_{limite} = 1.92\ 10^{-6}$ rad, soit 0.40 secondes d'arc.

REMARQUE – Cet exercice présente une application directe du cours sur la diffraction, dans le cas où les hypothèses d'observation à l'infini et d'onde incidente plane sont réunies. En revanche, le passage d'une ouverture réelle circulaire à un modèle carré est artificiel.

7. Réseau par réflexion — D'après Oral Centrale-Supelec

Un réseau par réflexion est constitué d'un grand nombre de miroirs de forme très allongée, parallèles et équidistants, disposés sur le plan (XOZ) (Fig. 24). Le pas du réseau, c'est-à-dire la distance entre deux miroirs successifs, est noté d.

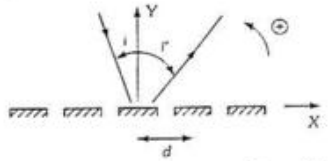


Figure 24

La largeur a des miroirs étant très faible, on admet (*cf.* exercice : diffraction par un miroir dans les Bases) qu'éclairé par un faisceau de lumière parallèle sous l'incidence i, chaque miroir diffracte la lumière dans les directions i' du plan (XOY). On recherche alors dans quelles directions, donc pour quels angles i' l'intensité diffractée présente des maxima.

La lumière incidente est monochromatique, on note λ sa longueur d'onde.

Les angles i et i', que l'on ne suppose pas petits, sont comptés algébriquement : ils peuvent être positifs ou négatifs.

a) Chaque miroir est rectangulaire, mais ses dimensions a et b vérifient $b \gg a$. Justifier qualitativement que l'on peut se ramener à un problème paramétré par les seuls angles i et i'.

b) On fait interférer à l'infini les ondes réémises par les différents miroirs, dans la direction repérée par i' ; quel est l'instrument permettant de faire cette visée dans un goniomètre ?

Exprimer le déphasage entre les ondes réémises par deux miroirs successifs dans cette direction.

c) À quelle condition sur i et i' observe-t-on un maximum principal de lumière ?

d) En incidence normale, combien observe-t-on de maxima de lumière, si le réseau présente 500 miroirs par millimètre, la longueur d'onde du rayonnement étant 644 nm.

e) En lumière polychromatique, comment distingue-t-on la direction correspondant à l'image géométrique ?

Conseils méthodologiques : **a)** : C'est l'inégalité $b \gg a$ qu'il faut exploiter ici. **b)** : Pour décrire l'instrument, on peut soit s'appuyer sur les connaissances de travaux pratiques, soit réfléchir aux conditions de l'observation à l'infini. Pour obtenir le déphasage demandé, il est commode de tracer les surfaces d'onde puis de déterminer l'expression de la différence de marche. **c)** : On peut reprendre ici la démarche identique à celle du cours : c'est-à-dire considérer que l'ensemble des rayons donnera une intensité maximale si les interférences de tous ces rayons sont constructives. **d)** : Le nombre entier introduit précédemment ne peut varier que dans un intervalle qu'il faut définir. **e)** : La lumière polychromatique est, comme son nom l'indique, composée de plusieurs rayonnements de longueurs d'onde différentes.

a) La forme allongée du miroir permet une analogie avec le passage d'une ouverture rectangulaire à une fente, lors de l'étude de la diffraction. L'objet diffractant présente une dimension très grande selon (OZ), donc la largeur du lobe principal de diffraction dans la direction (Oz) diminue. On considère donc que la diffraction a lieu principalement dans la direction perpendiculaire à (Oz). Ici, c'est dans le plan (XOY) que doit être conduite l'étude, donc on fait intervenir les angles i et i' comme paramètres de l'étude.

⇨ **Remarque**

La diffraction étale la lumière réfléchie dans les directions perpendiculaires à la plus grande dimension.

b) Les rayons parallèles doivent être dirigés en un même point, ce qui peut être effectué grâce à l'objectif de l'instrument. Le lieu des interférences est ainsi le plan focal image de l'objectif, où l'on grave un réticule permettant un repérage aisé ; on observe à l'œil la figure dans ce plan au travers d'un oculaire. L'ensemble objectif-réticule-oculaire est appelé lunette de visée.

⇨ **Remarque**

L'utilisation d'une lunette et son réglage font partie des méthodes pratiques exigibles aux concours.

On trace d'une part le plan d'onde Σ, perpendiculaire aux rayons incidents, donc incliné de l'angle i (Fig. 25). La différence de marche $\delta = HP_k$ qui apparaît s'écrit :

$$\delta_1 = d\sin i$$

⇨ **Remarque**

Le signe qui figure ici dépend de la définition que l'on adopte pour la différence de marche.

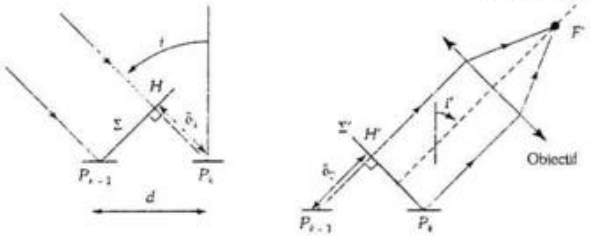


Figure 25

Le tracé des deux rayons réémis par les points P_{k-1} et P_k permet également de faire figurer Σ', plan qui leur est orthogonal. Ce plan est à égale distance du foyer de l'objectif de la lunette de visée orientée dans cette direction.

Un second terme intervient donc dans la différence de marche :

$$\delta_2 = P_{k-1}H' = -d\sin i'.$$

⇨ **Remarque**

Σ' serait un plan d'onde si une source était placée au foyer, d'après le principe du retour inverse de la lumière.

La différence de marche totale, entre la source et le foyer de l'objectif où interfèrent les rayons, s'écrit finalement :

$$\delta = \delta_1 - \delta_2 = d\sin i + d\sin i'.$$

Le déphasage correspondant est donc :

$$\boxed{\varphi = 2\pi\frac{\delta}{\lambda} = 2\pi\frac{d(\sin i + \sin i')}{\lambda}}$$

Erreur à éviter

Attention au signe des angles : $i' < 0$ sur la figure.

c) Toutes les ondes interfèrent constructivement si le déphasage entre deux quelconques de ces ondes est un multiple de 2π, ce qui nécessite que le déphasage entre les rayons réfléchis par deux miroirs successifs soit lui-même multiple de 2π : $\varphi \equiv 0\,[2\pi]$. On peut donc utiliser l'ordre d'interférence p entier, tel que :

$$2\pi\frac{d(\sin i + \sin i')}{\lambda} = 2p\pi.$$

La formule du réseau en réflexion est donc, avec des angles orientés :

$$\boxed{\sin i + \sin i' = p\frac{\lambda}{d}}.$$

⇨ **Remarque**

n est la densité de traits, ici : $n = 5\,10^5\,\text{m}^{-1}$.

d) Si n est le nombre de miroirs par mètre, on écrit $n = \frac{1}{d}$.

Pour $i = 0$, la formule du réseau est :

$$\boxed{\sin i' = pn\lambda}.$$

⇨ **Remarque**

Ne pas oublier l'ordre 0.

Puisque $-1 \leqslant \sin i' \leqslant 1$, il faut que l'entier p ait une valeur absolue inférieure à $\frac{1}{n\lambda} = 3{,}1$. 7 modes sont donc observables en théorie.

L'angle i' étant élevé pour $p = \pm 3$, il n'est pas certain que le dispositif permette l'orientation correspondante.

e) En lumière polychromatique, les rayonnements de longueurs d'onde différentes sont incohérents : ils n'interfèrent pas. On doit donc étudier séparément, comme dans les questions précédentes, le sort de chaque composante spectrale.

⇨ **Remarque**

C'est l'image géométrique.

En général donc, les directions i' où l'on observe de la lumière sont différentes pour des valeurs de λ distinctes. Une seule exception existe, qui correspond à l'ordre d'interférence nul : $p = 0$. En effet, dans la direction $i' = -i$ on obtient un maximum de lumière pour toutes les longueurs d'onde. Ainsi, l'ordre d'interférence nul est remarquable car il ne disperse pas la lumière : on observe dans sa direction un rayonnement de même teinte que la source.

⇨ **Remarque**

En lumière blanche par exemple, une seule direction renvoie de la lumière blanche, c'est l'image géométrique correspondant à l'ordre nul.

REMARQUE – Cet exercice permet de reprendre la démarche du cours en l'adaptant à une situation légèrement différente. Il constitue de ce fait un bon exercice de révision du cours, ou un bon test de la connaissance de celui-ci.

Induction électromagnétique

Méthodes

Le cours en questions

1 ■ Forces magnétiques sur les conducteurs

1.1 Qu'est-ce que la force de Laplace ?

• Un morceau de conducteur filiforme $\overrightarrow{d\ell}$, parcouru par un courant I et placé dans un champ magnétique $\vec{B}$, est soumis à la force de Laplace (Fig. 1) :

$$\overrightarrow{df}_{Lapl} = I\overrightarrow{d\ell} \wedge \vec{B} \ .$$

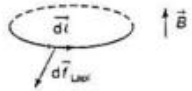


Figure 1

Erreur à éviter
Ne surtout pas confondre cette force avec la force de Lorentz exercée par un champ électromagnétisme sur une charge :

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) .$$

• Si le circuit n'est pas filiforme, on définit la densité volumique de force de Laplace : $\dfrac{\overrightarrow{df}_{Lapl}}{d\tau} = \vec{j} \wedge \vec{B}$.

1.2 Rappeler l'action d'un champ magnétique uniforme sur un circuit fermé.

• La résultante de la force de Laplace est nulle car :

$$\vec{f}_{Lapl} = \oint_C I\overrightarrow{d\ell} \wedge \vec{B} = I\left(\oint_C \overrightarrow{d\ell}\right) \wedge \vec{B} = \vec{0} \ .$$

© Lavoisier – La photocopie non autorisée est un délit

On retrouve en fait la formule de l'action exercée sur un dipôle magnétique.

• Le moment résultant pour $\vec{B}$ uniforme est un couple $\vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}$, où $\vec{\mathcal{M}} = i\vec{S}$ est le moment magnétique associé au circuit (Fig. 2).

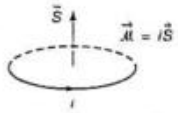


Figure 2

2 ■ Induction électromagnétique : généralités

2.1 Quelles sont les deux situations types menant à des phénomènes d'induction ?

Cette distinction est artificielle, un même phénomène physique peut correspondre à une induction de Neumann ou de Lorentz suivant le référentiel choisi.

• On distingue deux types d'induction :
– conducteur immobile dans un champ magnétique dépendant du temps (induction de Neumann) ;
– conducteur mobile dans un champ magnétique stationnaire (induction de Lorentz).

Erreur à éviter
Ne pas confondre : stationnaire (indépendant du temps) et uniforme (indépendant du point considéré).

• L'induction crée une force électromotrice dans les conducteurs concernés. Celle-ci influe sur les courants dans le cas de circuits fermés.

2.2 Citer deux expériences illustrant l'induction.

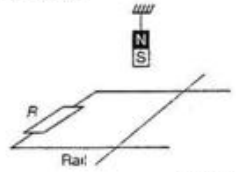


Figure 3

• Induction de **Neumann** : un expérimentateur approche et éloigne un aimant d'une spire. On met en évidence l'apparition d'un courant dans cette spire.

• Induction de **Lorentz** : un rail mobile est posé sur un circuit (Fig. 3) et un aimant fixe est suspendu au-dessus. L'expérimentateur lance le rail. Là encore, on note l'apparition d'un courant.

2.3 Énoncer la loi de Lenz.

C'est une loi de moderation.

• Loi de Lenz : l'induction, par ses effets, s'oppose aux causes qui lui ont donné naissance.

2.4 Que sont les courants de Foucault ?

• Ce sont des courants dus à l'induction et ne suivant pas de fil. Ils parcourent le volume d'un conducteur.

3 ■ Induction de Neumann

3.1 Définir l'inductance propre d'un circuit.

Figure 4

C'est une conséquence de la loi de Biot et Savart.

• Soit un circuit C seul dans l'espace (Fig. 4) parcouru par un courant I. Il crée en tout point de l'espace un champ magnétique proportionnel à I.

On parle alors de flux propre.

Le flux de $\vec{B}$ créé par le circuit au travers de ce même circuit vaut $\Phi_p = LI$.

L est appelée inductance propre du circuit. Elle est toujours le produit de μ_0 par une quantité homogène à une longueur. Son unité est le henry (H).

• L'inductance propre d'un circuit est toujours positive et ne dépend que de la forme du circuit.

• D'un point de vue énergétique, l'énergie magnétique du champ créé par le circuit vaut :

$$U_m = \iiint_{\text{espace}} \frac{B^2}{2\mu_0} d\tau = \frac{1}{2} L I^2 .$$

⇨ Cette relation a été utilisée en électrocinétique en 1re année.

3.2 Qu'est-ce que l'inductance mutuelle entre deux circuits ?

• Soient deux circuits C_1 et C_2 parcourus respectivement par I_1 et I_2 (Fig. 5). Ils créent respectivement les champs $\vec{B}_1$ et $\vec{B}_2$. On appelle Φ_1 le flux magnétique au travers de la surface S_1 du circuit C_1 :

$$\Phi_1 = \iint_{S_1} \vec{B} \cdot \overrightarrow{dS} = \iint_{S_1} (\vec{B}_1 + \vec{B}_2) \cdot \overrightarrow{dS} = L_1 I_1 + M_{12} I_2 .$$

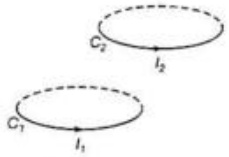


Figure 5

L_1 est l'inductance propre du circuit 1 et M_{12} la mutuelle inductance entre les circuits 1 et 2.

• La mutuelle inductance entre les circuits 1 et 2 M_{12} est égale à celle entre les circuits 2 et 1 : $M_{12} = M_{21} = M$.

⇨ C'est le théorème de Neumann.

• La mutuelle inductance est homogène à une inductance propre : elle s'exprime en henry (H). En revanche, M peut être positive ou négative selon les conventions de signe des courants des circuits 1 et 2.

• On a l'inégalité : $M^2 \leqslant L_1 L_2$.

3.3 Donner l'expression de la force électromotrice d'induction de Neumann.

• Dans un circuit fermé, la formule de Faraday indique $e = -\frac{d\Phi}{dt}$, où Φ est le flux du champ magnétique au travers du circuit en question. Le signe moins traduit une modération.

Figure 6

Erreur à éviter
Lors du calcul du flux :

$$\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot \overrightarrow{dS} ,$$

le sens de la normale est donné par le tire-bouchon de Maxwell à partir du sens positif choisi pour l'intensité (Fig. 6).

3.4 Qu'est-ce que le champ électromoteur de Neumann ?

• Les électrons de conduction sont soumis à la force de Lorentz : $\vec{f} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$ qui ne travaille pas. Seule la force électrique fournit un travail aux électrons. Comme $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$, sur un tour de circuit seul $q\vec{E}_m = -q\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ leur fournit un travail. $\vec{E}_m$ est appelé champ électromoteur de Neumann.

• Alors : $e = \oint_C \vec{E}_m \cdot \vec{dl} = \oint_C -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot \vec{dl}$.

3.5 Comment prendre en compte l'aspect électrique de l'induction ?

La « flèche » de la fem doit être orientée dans le sens choisi pour le courant.

• On rajoute dans le circuit préalablement orienté (afin de définir la normale pour le flux) un générateur de force électromotrice e (Fig. 7).

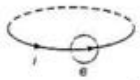


Figure 7

4 ■ Induction de Lorentz

4.1 Rappeler la valeur du champ électromagnétique dans un référentiel galiléen R' en fonction de celle dans un référentiel galiléen R.

• On note $(\vec{E}, \vec{B})$ $((\vec{E}', \vec{B}'))$ le champ électromagnétique dans le référentiel $R(R')$ et $\vec{V}$ la vitesse de R' par rapport à R. Alors :

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B} \qquad \vec{B}' = \vec{B} .$$

4.2 Quelle est la force électromotrice d'induction de Lorentz ?

On a la même expression que pour l'induction de Neumann.

• La loi de Faraday donne pour un circuit fermé $e = -\frac{d\Phi}{dt}$.

4.3 Qu'est-ce que le champ électromoteur de Lorentz ?

• Parallèlement à l'induction de Neumann, la partie du champ électrique pouvant donner un travail aux électrons sur un tour de circuit est $\vec{E}_m = \vec{V} \wedge \vec{B}$, où $\vec{V}$ est la vitesse du conducteur au point considéré.

$\vec{E}_m$ est appelé champ électromoteur de Lorentz.

On retrouve le même résultat qu'en utilisant la loi de Faraday si $A = B$ (circuit fermé).

• Alors, entre deux points A et B, $e_{AB} = \int_A^B (\vec{V} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{dl}$.

© Lavoisier – La photocopie non autorisée est un délit

4.4 Citer la loi d'Ohm généralisée.

• Soit un morceau AB de circuit filiforme (Fig. 8). Alors,

$$V_A - V_B = R_{AB} I - e_{AB} \ .$$

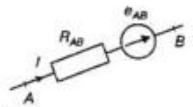


Figure 8

4.5 Donner la méthode pour réaliser des bilans d'énergie.

⇒ Toujours utiliser ces conventions de sens pour ne pas se tromper de signe.

• On écrit l'équation électrique, qu'on multiplie par l'intensité, puis l'équation mécanique, qu'on multiplie par la vitesse (éventuellement vitesse angulaire) du conducteur. On réunit ensuite les deux équations par un terme commun.

⇒ Il s'agit à proprement parler d'un bilan de puissance. Comme $P = dE/dt$, faire un bilan d'énergie ou de puissance est identique à dt près.

4.6 Rappeler la relation entre la puissance de la fem induite et celle des actions de Laplace en champ magnétique stationnaire.

• La puissance de la force électromotrice de Lorentz est l'opposée de celle des actions de Laplace si $\vec{B}$ est stationnaire : $P_{fem} + P_{Lapl} = 0$.

⇒ Ce point essentiel est à l'origine des trois applications ci-après.

• L'induction permet de transformer de l'énergie électrique en énergie mécanique (et réciproquement).

4.7 Comment fonctionne un haut-parleur ?

• Le signal d'entrée est une tension alimentant une inductance liée à une membrane et mobile dans le champ magnétique d'un aimant. On a donc à la fois induction de Neumann (due à l'inductance propre) et induction de Lorentz (due au mouvement). Une force de Laplace s'exerce sur l'inductance, entraînant le mouvement de la membrane et engendrant une onde sonore.

4.8 Comment fonctionne un générateur ?

• Un phénomène physique crée un travail mécanique, par exemple la rotation d'un cadre autour d'un axe fixe pour fixer les idées. Si la spire baigne dans un champ magnétique externe, une induction de Lorentz a lieu dans le cadre, engendrant une force électromotrice : on a créé un générateur.

⇒ C'est sur ce principe que l'électricité est engendrée.

4.9 Comment fonctionne un moteur ?

• À l'inverse d'un générateur, on considère un circuit dans lequel un générateur fait circuler un courant. Si le circuit est placé dans un champ magnétique externe, ce dernier est soumis à l'action de Laplace qui le met en mouvement.

© Ellipses – La photocopie non autorisée est un délit

Les savoir-faire clefs

Conseils méthodologiques

1 ■ Savoir déterminer l'action d'un champ magnétique sur un circuit.

1.1 Soit un fil infini parcouru par un courant I (Fig. 9). Un cadre métallique de côtés a et b, situé à la distance d du fil, est parcouru par le courant I'. Calculer la force exercée par le fil sur le cadre.

1.2 Une spire circulaire, constituée de N spires, de rayon R et parcourue par le courant I, est contenue dans un plan vertical dont la normale $\vec{n}$ fait un angle θ avec l'axe $\vec{u}_x$ (Fig. 10). Cette spire est placée dans le champ magnétique uniforme et constant $\vec{B} = B_0 \vec{u}_x$.

1.1 Considérer la force de Laplace élémentaire.

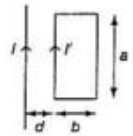
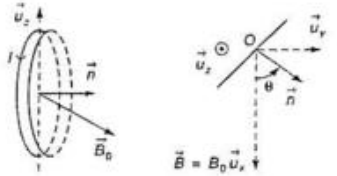


Figure 9



Vue de dessus

Figure 10

1.2.a) et **b)** Utiliser le Cours en questions **1.2.**.

1.2.c) Faire l'analogie avec le dipôle magnétique.

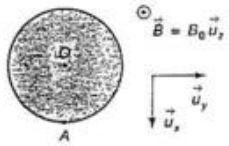


Figure 11

1.3.a) La force linéique uniforme est équivalente à une force unique s'appliquant au centre.

1.3.b) Question délicate, on pourra admettre le résultat.

a) Quelle est la force exercée par le champ sur la spire ?

b) Calculer le moment en O exercé par le champ sur la spire.

c) Quelles sont les positions d'équilibre ? Interpréter.

1.3 Une roue de Barlow est un disque conducteur, de rayon a, mobile autour d'un axe fixe noté Oz (Fig. 11), et placé dans un champ magnétique uniforme et stationnaire $\vec{B} = B_0 \vec{u}_z$. La vitesse angulaire de la roue est notée $\vec{\omega} = \omega \vec{u}_z$. Un courant I part de son centre O pour atteindre l'extrémité A (le reste du circuit n'est pas représenté).

a) En considérant que le courant passe seulement en ligne droite entre O et A, calculer le moment projeté sur l'axe de rotation de l'action de Laplace. On pourra noter que la force linéique de Laplace est uniforme entre O et A.

b) On considère désormais que le courant I passe par un chemin quelconque entre A et B. Retrouver le résultat précédent en évaluant tout d'abord le moment de Laplace élémentaire exercé sur l'élément $\overrightarrow{dl} = dr\,\vec{u}_r + r\,d\theta\,\vec{u}_\theta$.

1.1 Un élément $\overrightarrow{d\ell}$ de circuit parcouru par I' soumis au champ magnétique extérieur $\vec{B}$ subit la force de Laplace $\overrightarrow{df} = I'\overrightarrow{d\ell} \wedge \vec{B}$.

Dans le cas présent, le champ magnétique est créé par le fil. Il faut donc l'évaluer. On a établi dans le chapitre Magnétostatique, à l'aide du théorème d'Ampère, $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{u}_\theta$.

Si on considère deux morceaux $\overrightarrow{d\ell}$ symétriques sur les côtés haut et bas du fil, on constate que le champ magnétique est le même, alors que les termes $I'\overrightarrow{d\ell}$ sont opposés (Fig. 12). En conséquence, les contributions à la force de Laplace des côtés haut et bas sont opposées.

Il reste à considérer les côtés gauche et droite.

Pour le côté gauche (Fig. 12) :

$$\overrightarrow{df_g} = I'd\ell\,\vec{u}_z \wedge \frac{\mu_0 I}{2\pi d}\vec{u}_\theta = \frac{\mu_0 II'}{2\pi d}d\ell\,\vec{u}_r.$$

d'où : $\vec{f}_g = -\frac{\mu_0 II'}{2\pi d}a\vec{u}_r$.

On procède de la même manière pour le côté droit :

$$\overrightarrow{df_d} = I'd\ell\,(-\vec{u}_z) \wedge \frac{\mu_0 I}{2\pi(d+b)}\vec{u}_\theta = \frac{\mu_0 II'}{2\pi(d+b)}d\ell\,\vec{u}_r$$

d'où : $\vec{f}_d = \frac{\mu_0 II'}{2\pi(d+b)}a\vec{u}_r$.

Au final : $\boxed{\vec{f} = \vec{f}_g + \vec{f}_d = \frac{\mu_0 II'ab}{2\pi(d+b)}\vec{u}_r}$. La force est attractive.

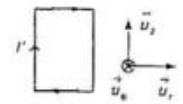


Figure 12

⇒ La simplification précédente n'est pas possible car le champ magnétique n'a pas même valeur sur ces deux côtés.

⇒ Deux fils parallèles parcourus par des courants de même sens s'attirent. Ce fait est à l'origine de la définition de l'ampère.

1.2.a) Le circuit est soumis au champ magnétique uniforme et stationnaire $\vec{B}$. Il subit donc une force de Laplace. L'élément $\overrightarrow{d\ell}$ subit $\overrightarrow{df} = I\overrightarrow{d\ell} \wedge \vec{B}$.

En sommant sur toute la longueur du fil :

$$\boxed{\vec{f} = \oint I\overrightarrow{d\ell} \wedge \vec{B} = I\left(\oint \overrightarrow{d\ell}\right) \wedge \vec{B} = \vec{0}}$$

La résultante est nulle : l'action de Laplace se réduit à un couple.

b) Vu la question précédente, le moment ne dépend pas du point considéré. Le couple a pour expression :

$$\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B} = NI\pi R^2\vec{n} \wedge \vec{B} = NI\pi R^2(\cos\theta\vec{u}_x + \sin\theta\vec{u}_y) \wedge B_0\vec{u}_x$$

$$\boxed{\vec{\Gamma} = -NI\pi R^2 B_0 \sin\theta\,\vec{u}_z}.$$

L'action de Laplace a tendance à faire tourner la spire autour de l'axe $\vec{u}_z$, de manière à rendre la normale au circuit parallèle au champ magnétique.

c) Les positions d'équilibre sont $\theta = 0$ et $\theta = \pi$. On retrouve ici les positions d'équilibre d'un dipôle libre en rotation dans un champ magnétique extérieur : positions parallèle (stable) et antiparallèle (instable).

© Lavoisier – La photocopie non autorisée est un délit

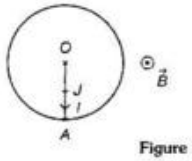


Figure 13

Erreur à éviter

Ce résultat n'est valable que dans un champ magnétique uniforme.

Seul le moment importe car l'axe exerce une force compensant la force de Laplace et empêchant la roue de se détacher.

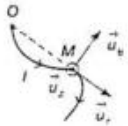


Figure 14

Sauf indication de l'énoncé ou de l'examinateur, on préférera toujours la solution particulière donnée au **1.3.a)**.

1.3.a) La ligne OA est parcourue par le courant I et placée dans un champ magnétique $\vec{B}$: elle est ainsi soumise à la force de Laplace. L'élément $\overrightarrow{d\ell}$ subit $\overrightarrow{df} = I\overrightarrow{d\ell} \wedge \vec{B}$. La force linéique $\frac{\overrightarrow{df}}{d\ell} = \vec{I} \wedge \vec{B}$ est uniforme ($\vec{I}$ est orienté selon $\overrightarrow{d\ell}$).

On va faire une analogie. Dans un champ de pesanteur uniforme, le poids s'exerce sur la totalité du système considéré. Son action est équivalente à celle d'une force unique exercée au centre de masse. Ici, l'équivalent du centre de masse est le milieu de OA (noté J, Fig. 13). La force de Laplace linéique est équivalente à une force unique $\vec{f} = I\overrightarrow{OA} \wedge \vec{B} = -IaB_0\vec{u}_y$.

Son moment en O est :

$$\vec{M}_O = \overrightarrow{OJ} \wedge \vec{f} = \frac{a}{2}\vec{u}_x \wedge -IaB_0\vec{u}_y = -\frac{Ia^2B_0}{2}\vec{u}_z.$$

Le moment projeté sur l'axe Oz est alors : $\boxed{M_{Oz} = \vec{M}_O \cdot \vec{u}_z = -\frac{Ia^2B_0}{2}}$.

b) Considérons la force de Laplace élémentaire (Fig. 14)

$$\vec{df} = I\overrightarrow{d\ell} \wedge \vec{B} = I(dr\,\vec{u}_r + r\,d\theta\vec{u}_\theta) \wedge B_0\vec{u}_z = IB_0(-dr\,\vec{u}_\theta + r\,d\theta\vec{u}_z).$$

Le moment élémentaire est alors

$$dM_{Oz} = d\vec{M}_O \cdot \vec{u}_z = (\overrightarrow{OM} \wedge \vec{df}) \cdot \vec{u}_z = (r\vec{u}_r \wedge IB_0(-dr\,\vec{u}_\theta + r\,d\theta\vec{u}_z)) \cdot \vec{u}_z$$
$$= -IB_0 r\,dr$$

On intègre de O à A :

$$M_{Oz} = \int_O^A dM_{Oz} = -\int_0^a IB_0 r\,dr = -\frac{Ia^2B_0}{2}.$$

On remarque que ce résultat est indépendant du chemin suivi entre O et A, et est par conséquent le même que celui trouvé pour une intensité allant de O à A en ligne droite.

Conseils méthodologiques

2 ■ Savoir calculer une inductance propre ou mutuelle.

Hors programme PT-PT*

Deux solénoïdes, de très grande longueur h, comportent respectivement n et n' spires par unité de longueur. Le premier solénoïde de rayon R est strictement contenu à l'intérieur du second de rayon R' (Fig. 15). On rappelle que le champ magnétique créé par un solénoïde infini en son extérieur est nul.

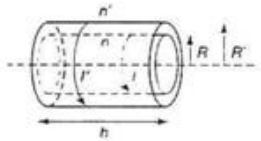


Figure 15

a) Calculer l'inductance propre L du premier solénoïde en utilisant le flux.

b) Calculer l'inductance propre L du premier solénoïde en utilisant l'énergie.

c) Calculer l'inductance mutuelle M du second solénoïde au travers du premier.

d) Calculer l'inductance mutuelle M' du premier solénoïde au travers du second.

e) Commenter les résultats.

f) On change la convention de courant dans le premier solénoïde : le courant I parcourt le premier solénoïde en sens inverse. Quelles sont les conséquences ?

2.a) Utiliser la définition $\Phi = LI$.

2.b) Utiliser la relation $U_m = LI^2/2$.

2.c) et d) Utiliser la définition de la mutuelle inductance.

2.a) Pour l'inductance propre, il ne faut considérer que le circuit en question. Le premier solénoïde, quasi infini, crée (lorsqu'il est parcouru par un courant I) en son intérieur un champ magnétique $B = \mu_0 nI$ et à l'extérieur un champ magnétique nul.

Le solénoïde peut être assimilé à nh spires placées les unes contre les autres.

Le flux φ_p du champ magnétique au travers d'une spire vaut :

$$\varphi_p = B\pi R^2 = \mu_0 nI\pi R^2 .$$

Comme le solénoïde comporte nh spires :

$$\Phi_p = (nh)\varphi_p = \mu_0 n^2 h\pi R^2 I .$$

On en déduit : $\boxed{L = \mu_0 n^2 h\pi R^2}$.

⇒ On vérifie bien : L est égale à μ_0 multipliée par une longueur.

b) Pour le même solénoïde, on évalue :

$$U_m = \frac{1}{2}LI^2 = \iiint_{\text{espace}} \frac{B^2}{2\mu_0}\,d\tau .$$

L'intégrale se réduit à l'intérieur du solénoïde car le champ magnétique est nul à l'extérieur. Ainsi :

$$U_m = \frac{(\mu_0 nI)^2}{2\mu_0}\iiint_{\text{intérieur}} d\tau = \frac{(\mu_0 nI)^2}{2\mu_0}\pi R^2 h .$$

On obtient alors, conformément à la question précédente :

$$\boxed{L = \mu_0 n^2 h\pi R^2}$$

⇒ Il faut penser aux deux méthodes en cas de calcul d'inductance propre. L'une peut être plus aisée que l'autre, ce n'est pas le cas ici

c) Il faut cette fois-ci évaluer le flux $\Phi_{2\to 1}$ du second solénoïde au travers du premier. Le second solénoïde crée le champ $B' = \mu_0 n'I'$ à l'intérieur de lui-même et 0 à l'extérieur. Ainsi, au travers d'une spire du premier solénoïde $\varphi_{1\to 2} = B'\pi R^2 = \mu_0 n'I'\pi R^2$. Le premier solénoïde comporte nh spires, on en déduit :

$$\Phi_{2\to 1} = (nh)\varphi_{2\to 1} = \mu_0 nn'I'\pi R^2 h = MI'$$

par définition de la mutuelle. Alors : $\boxed{M = \mu_0 nn'\pi R^2 h}$.

⇒ Le résultat est bien homogène à μ_0 multipliée par une longueur

d) Le calcul est très similaire à celui de la question précédente. Il faut intervertir les rôles des deux solénoïdes. Le premier crée le champ $B = \mu_0 nI$ en son intérieur, strictement inclus à l'intérieur du second solénoïde. Ainsi, avec les notations précédentes, $\varphi_{1\to 2} = B\pi R^2 = \mu_0 nI\pi R^2$. De plus, le second solénoïde comporte $n'h$ spires, soit :

$$\Phi_{1\to 2} = (n'h)\Phi_{1\to 2} = \mu_0 nn'I'\pi R^2 h = M'I .$$

Alors : $\boxed{M' = \mu_0 nn'\pi R^2 h = M}$.

e) On vérifie que $L \geqslant 0$ et $L' \geqslant 0$.

$\boxed{M = M'}$ conformément au théorème de Neumann.

Enfin, on compare M^2 et LL' :

$$M^2 = (\mu_0 nn'\pi R^2 h)^2 \qquad LL' = (\mu_0 n^2 h\pi R^2)(\mu_0 n'^2 h\pi R'^2) .$$

Comme $R \leqslant R'$, on vérifie l'inégalité habituelle : $\boxed{M^2 \leqslant LL'}$.

Ce résultat est facile à constater par la méthode énergétique qui fait intervenir le carré du champ magnétique.

⇐ **f)** Les signes de L et L' sont inchangés.

En revanche, le champ magnétique créé par le premier solénoïde change de sens. Le flux $\Phi_{1\to 2}$ aussi. Comme I est inchangé (seule la convention de courant a changé), M est désormais négative. Changer la convention de sens du courant d'un des circuits change le signe des inductances mutuelles.

Conseils méthodologiques

3 ▬ Savoir traiter l'induction de Neumann.

3.1 Les deux circuits représentés en Fig. 16 sont couplés par mutuelle. Le premier comporte un générateur de fem $E = E_0\cos\omega t$ et une résistance R. Son inductance propre est L. Le second circuit comporte les mêmes éléments, le générateur en moins. On note M la mutuelle inductance entre les deux circuits.

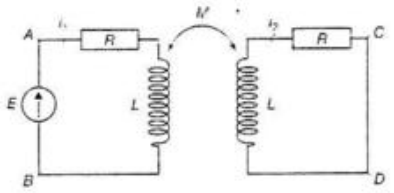


Figure 16

3.1.a) Utiliser les définitions de L et M

a) Trouver les équations différentielles satisfaites par les intensités i_1 et i_2 des deux circuits.

b) En déduire les équations satisfaites par $x = i_1 + i_2$ et $y = i_1 - i_2$.

c) En étudiant la solution générale, donner l'ordre de grandeur de la durée du régime transitoire.

3.1.d) On substitue $(d/dt) \leftrightarrow j\omega$

d) On se place désormais dans le cadre du régime sinusoïdal forcé. En déduire i_2, intensité dans le second circuit en notation complexe.

© Libellex – La photocopie non autorisée est un délit

3.2 Le circuit de la figure 17 possède une surface S et une résistance R. Il est soumis au champ magnétique uniforme mais non stationnaire $\vec{B} = \vec{0}$ pour $t \leqslant 0$ et $\vec{B} = B_0(1 - \exp(-t/\tau))\vec{u}_z$ pour $t \geqslant 0$ (τ est une constante).

Ce champ est perpendiculaire au plan du circuit.

a) Expliquer qualitativement les phénomènes se produisant, en utilisant notamment la loi de Lenz.

b) Écrire l'équation régissant l'intensité i du circuit.

c) La résoudre et vérifier l'interprétation *a priori* de la question **a)**.

d) Quel phénomène a été négligé ? Comment le prendre en compte ?

e) Écrire la nouvelle équation différentielle satisfaite par l'intensité.

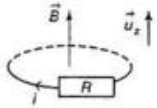


Figure 17

3.2.a) Conducteur fixe dans un champ magnétique dépendant du temps.

3.2.d) Considérer l'inductance propre du circuit.

3.1.a) Les intensités variables parcourant les deux circuits induisent des flux magnétiques dépendant du temps au travers des deux circuits. On a alors une induction de Neumann.

La loi de Faraday indique :

$$e_1 = -\frac{d\Phi_1}{dt} \quad \text{et} \quad e_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt}.$$

Par définition : $\Phi_1 = Li_1 + Mi_2$ et $\Phi_2 = Li_2 + Mi_1$.

Le circuit équivalent est celui indiqué en Fig. 18.

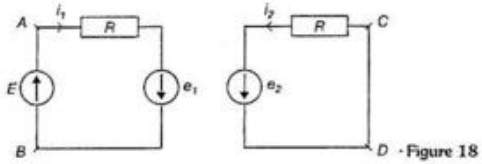


Figure 18

Quels que soient les sens choisis pour les intensités, les expressions des flux restent de cette forme.

Erreur à éviter
Attention à bien orienter les fem dans le sens indiqué par les intensités i_1 et i_2.

Par la loi d'Ohm généralisée, on obtient $e = Ri_1 - e_1$ et $0 = Ri_2 - e_2$, soit :

$$\boxed{V_A - V_B = E = Ri_1 + L\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt}}$$

et $$\boxed{V_C - V_D = Ri_2 + L\frac{di_2}{dt} + M\frac{di_1}{dt} = 0}.$$

b) On introduit les fonctions x et y de l'énoncé en additionnant et soustrayant les deux relations précédentes :

$$\boxed{(L+M)x + Rx = E} \quad \text{et} \quad \boxed{(L-M)y + Ry = E}.$$

c) On ne considère que le régime transitoire, ce qui revient à faire $E = 0$. Alors :

$$x(t) = x_0 \exp(-Rt/(L+M)) \quad \text{et} \quad y(t) = y_0 \exp(-Rt/(L-M)).$$

La solution générale est la solution de l'équation différentielle sans second membre. Elle correspond au régime transitoire.

© Librairie - La photocopie non autorisée est un délit

Ces deux quantités τ_x et τ_y sont bien positives car $L^2 \geqslant M^2$, soit $L \geqslant |M|$.

L'argument de l'exponentielle étant sans unité, on en déduit deux temps caractéristiques des régimes transitoires concernant x et y :

$$\boxed{\tau_x = (L+M)/R} \quad \text{et} \quad \boxed{\tau_y = (L-M)/R}.$$

Au bout de quelques fois le maximum de τ_x et τ_y, le régime transitoire est quasi nul.

d) On reprend les équations de la question **3.1.a)** en régime sinusoïdal forcé : toutes les grandeurs varient temporellement en $\exp(j\omega t)$. Ainsi :

$$\begin{cases} \underline{E} = R\underline{i}_1 + L\dfrac{d\underline{i}_1}{dt} + M\dfrac{d\underline{i}_2}{dt} = (R + jL\omega)\underline{i}_1 + jM\omega\underline{i}_2 \\ R\underline{i}_2 + L\dfrac{d\underline{i}_2}{dt} + M\dfrac{d\underline{i}_1}{dt} = (R + jL\omega)\underline{i}_2 + jM\omega\underline{i}_1 = 0 \end{cases}$$

On élimine $\underline{i}_1 = -(R + jL\omega)\underline{i}_2/jM\omega$:

$$\underline{E} = \left(-\frac{(R+jL\omega)^2}{jM\omega} + jM\omega\right)\underline{i}_2 = \frac{(L^2 - M^2)\omega^2 - 2jRL\omega - R^2}{jM\omega}\,\underline{i}_2.$$

L'intensité dans le second circuit (secondaire) varie sinusoïdalement, bien qu'aucun générateur ne soit physiquement présent. Le couplage avec le premier circuit (primaire) est réalisé sans contact ohmique.

3.2.a) On est en présence d'un circuit fixe soumis à un champ magnétique dépendant du temps : une induction de type Neumann a lieu. Le circuit est le siège d'une fem et par conséquent une intensité non nulle le traverse. Pour déterminer son sens, on utilise la loi de Lenz.

La cause de l'induction est la variation du champ magnétique. Le circuit réagit en créant un champ magnétique de sens opposé au champ magnétique extérieur (dont la norme augmente). Le champ magnétique induit est donc orienté selon $-\vec{u}_z$. La règle du tire-bouchon de Maxwell indique alors $i > 0$. On peut même ajouter que $i \to 0$ quand $t \to \infty$. En effet, à t élevé, le champ magnétique extérieur ne varie quasiment plus et l'induction est très faible.

Erreur à éviter
Le tire-bouchon de Maxwell indique que la normale au circuit, donnée par le sens positif du courant, est selon $-\vec{u}_z$. Le flux du champ magnétique est par conséquent négatif. En conséquence, le choix du sens positif du courant doit toujours précéder le calcul du flux !

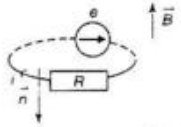


Figure 19

b) Le circuit équivalent est celui de la figure 19, avec $e = -\dfrac{d\Phi}{dt}$.

Or : $\Phi = \iint \vec{B} \cdot \vec{dS} = \iint \vec{B} \cdot \vec{n}\, dS = -B(t)S$.

La loi des mailles indique :

$$\boxed{e = Ri = \frac{dB}{dt}S = \frac{B_0 S}{\tau}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}$$

c) On en déduit : $$\boxed{i(t) = \frac{B_0 S}{R\tau}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}.$$

On vérifie que $i \geqslant 0$ et que l'intensité s'annule au bout d'un temps suffisamment long.

d) Dans l'analyse *a priori* du **3.2.a)**, le sens du courant a été déterminé grâce à la loi de Lenz qui donnait le sens du champ magnétique induit, c'est-à-dire créé par le circuit. Or, on a par la suite totalement négligé ce

champ magnétique. Pourtant, il crée un certain flux au travers du circuit, dont les variations engendrent une fem. C'est ce qu'on appelle l'auto-induction : induction due au champ magnétique propre du circuit. Sa prise en compte impliquerait la présence de l'inductance propre L du circuit.

e) Alors, le flux aurait deux contributions, une propre et une due au champ extérieur : $\Phi = Li - B(t)S$, où $B(t)$ est le champ extérieur au circuit. Ainsi, $e = -\frac{d\Phi}{dt} = -L\frac{di}{dt} + \frac{dB}{dt}S = Ri$, soit :

$$\boxed{L\frac{di}{dt} + Ri = \frac{B_0 S}{\tau}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}.$$

4 ■ Savoir traiter l'induction de Lorentz.

Conseils méthodologiques

4.1 Une barre mobile sans frottement le long de l'axe $\vec{u}_x$ est posée sur deux rails (dits de Laplace) (Fig. 20). Le dispositif est placé dans le champ magnétique uniforme et stationnaire $\vec{B} = B_0\vec{u}_z$. La barre de masse m possède une résistance R. Initialement, on communique à la barre une vitesse $\vec{v} = v_0\vec{u}_x$.

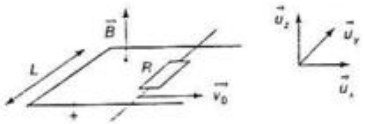


Figure 20

a) Décrire les phenomènes ayant lieu. Interpréter la loi de Lenz.

b) Écrire l'équation électrique par le flux, puis par le champ électromoteur.

c) Obtenir l'équation mécanique. Pourquoi parle-t-on de couplage électromécanique ?

d) Obtenir l'expression de l'intensité $i(t)$ et de la vitesse $v(t)$. Interpréter.

4.1.b) Utiliser le Cours en questions 4.2 et 4.3.
4.1.c) Relation fondamentale de la dynamique.

4.2 Une roue de Barlow de rayon a (voir le savoir-faire 1.3) est placée dans le champ magnétique uniforme et stationnaire $\vec{B} = B_0\vec{u}_z$. Elle fait partie d'un circuit comprenant une résistance R, un générateur de fem E et un interrupteur. Le circuit est fermé au bas de la roue par un bain de mercure (Fig. 21). A l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur.

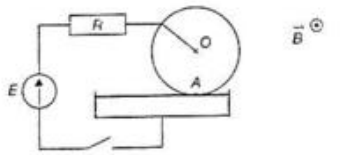


Figure 21

© Les Ulis – La photocopie non autorisée est un délit

4.2.b) Utiliser le Cours en questions 4.3..
4.2.c) Appliquer le théorème du moment cinétique scalaire et utiliser le savoir-faire 1.3.

a) Interpréter les phénomènes ayant lieu. Dans quel sens va tourner la roue ? Commenter la loi de Lenz.

b) Que vaut le champ électromoteur ? En déduire la fem d'induction.

c) Donner l'équation électrique du système.

d) Établir l'équation mécanique. On note J le moment d'inertie de la roue par rapport à son axe. On supposera que la liaison est un pivot parfait.

e) Résoudre les équations.

La barre est parcourue par un courant et placée dans un champ magnétique.

4.1.a) La barre est un conducteur mobile dans un champ magnétique stationnaire. Elle est donc le siège d'une induction de Lorentz. Une fem induite se crée dans le circuit. En conséquence, celui-ci est parcouru par un courant. La barre est soumise à la force de Laplace.

Erreur à éviter
Bien identifier les phénomènes de manière logique : quelles sont les causes ? Et les conséquences ?

Son mouvement est alors modifié par cette force... (Fig. 22)

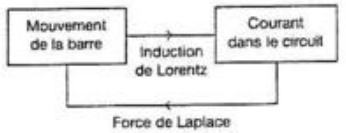


Figure 22

La loi de Lenz indique que l'induction s'oppose aux causes qui lui ont donné naissance. Les causes sont :

- le mouvement de la barre : l'induction, par la force de Laplace $d\vec{f} = i\,\vec{dl} \wedge \vec{B}$ s'oppose au mouvement de la barre. Par le tire-bouchon de Maxwell, on déduit le sens du courant : $i < 0$;
- le champ magnétique extérieur $\vec{B}$: le courant induit cherche à créer un champ magnétique induit de sens opposé à $\vec{B}$. Encore par le tire-bouchon de Maxwell, on déduit $i < 0$.

Erreur à éviter
Avant de calculer un flux, il faut absolument choisir un sens pour l'intensité.

b) La loi de Faraday s'écrit : $e = -\frac{d\Phi}{dt}$.

Le flux $\Phi = \iint_{circuit} \vec{B}\cdot\vec{dS} = \iint_{circuit} \vec{B}\cdot\vec{n}\,dS$ se calcule en prenant la normale fournie par le tire-bouchon de Maxwell à partir du sens positif de l'intensité.

Ainsi, $\vec{n} = \vec{u}_z$ et : $\Phi = B_0\iint dS = B_0 L(x + \text{cte})$,

Erreur à éviter
Bien noter que le sens algébrique de la fem e est celui du sens positif du courant.

où $x(t)$ repère l'abscisse de la barre. L'aire du circuit est, à une constante près, égale à lx. Alors, $e = -B_0 lx = -B_0 lv$. Le circuit équivalent est celui indiqué en Fig. 23.

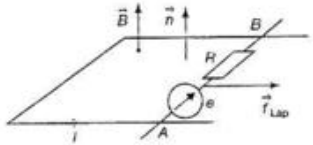


Figure 23

La loi d'Ohm généralisée sur le circuit donne : $V_A - V_A = Ri - e = 0$, d'où l'équation électrique est : $\boxed{Ri(t) + B_0 l v(t) = 0}$.

Il est aussi possible de calculer le champ électromoteur :

$$\vec{E}_m = \vec{v} \wedge \vec{B} = v\vec{u}_x \wedge B_0\vec{u}_z = -vB_0\vec{u}_y.$$

Alors : $e = \int_{\text{barre, A}}^{B} \vec{E}_m \cdot \vec{dl} = -vB_0 l$.

⇒ Methode pour le calcul de la fem : deux possibilités sont *a priori* envisageables. En premier lieu, on privilégiera le calcul du flux et la loi de Faraday. Si cette méthode pose un problème, on s'intéressera alors au champ électromoteur.

c) Pour l'équation mécanique, on écrit la relation fondamentale de la dynamique appliquée à la barre :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} + \vec{R} + \vec{f}_{Lap}.$$

On projette sur $\vec{u}_x$ pour éliminer le poids et la réaction des rails, d'où :

$$\boxed{m\dot{v} = \vec{f}_{Lap} \cdot \vec{u}_x = (il\vec{u}_y \wedge B_0\vec{u}_z) \cdot \vec{u}_x = ilB_0}.$$

C'est l'équation mécanique.

On remarque que dans l'équation mécanique intervient une grandeur électrique (l'intensité i) alors que dans l'équation électrique intervient une grandeur mécanique (vitesse v) : c'est ce qu'on appelle un couplage électromécanique.

d) On élimine par exemple i :

$$m\dot{v} = ilB_0 = -\frac{l^2B_0^2}{R}v,$$

dont la solution est $v(t) = A\exp(-t/\tau)$, où $\tau = mR/l^2B^2$ est homogène à un temps. Comme $v(0) = v_0$:

$$\boxed{v(t) = v_0\exp(-t/\tau)}.$$

- On en déduit l'intensité i par :

$$\boxed{i = -\frac{B_0 l}{R}v = -\frac{B_0 l v_0}{R}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}.$$

On vérifie que l'intensité est bien négative, conformément à ce que laissait présager la loi de Lenz. La force de Laplace est opposée à la vitesse et lui est proportionnelle : elle est similaire par sa forme à un frottement fluide. Ce comportement est encore conforme à la loi de Lenz.

⇒ On a négligé dans ce problème l'auto-induction.

4.2. a) Quand on ferme l'interrupteur, un courant s'établit dans le circuit. La roue est alors un conducteur parcouru par un courant et placé dans un champ magnétique. Elle est soumise à la force de Laplace, qui la met en rotation. La roue est alors un conducteur en mouvement dans un champ magnétique et est le siège d'une induction de Lorentz. Une fem d'induction se crée dans le circuit et influe sur l'intensité. Le mécanisme est indiqué sur la figure 24.

Erreur à éviter
Bien identifier les phénomènes de manière logique : quelles sont les causes ? Et les conséquences ?

© Larousse – La photocopie non autorisée est un délit

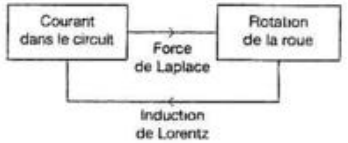


Figure 24

Initialement, le courant vaut $i(0) = E/R$. La force de Laplace élémentaire exercée sur la roue $d\vec{f} = i\vec{dl} \wedge \vec{B}$ est dirigée vers la gauche (Fig. 25) et la roue tourne dans le sens négatif.

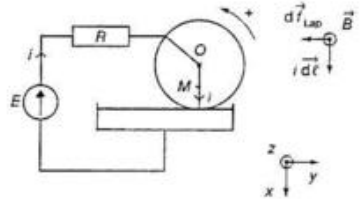


Figure 25

Erreur à éviter
L'autre cause est la présence du champ magnétique $\vec{B}$. Le circuit s'oppose à la variation de flux d'après la loi de Lenz. Cependant, la définition du flux est délicate vu la forme du circuit et cette interprétation est hors programme.

La loi de Lenz est délicate à interpréter. Le courant initial est imposé par le générateur : la fem induite va tenter de s'opposer au générateur E. Le champ électromoteur $\vec{E}_m = \vec{v} \wedge \vec{B}$ doit être opposé au générateur de tension E.

On en déduit $\vec{v}$ selon $-\vec{u}_y$, ce qui est cohérent avec l'analyse précédente.

b) Par définition :

$$\vec{E}_m(M) = \vec{v}(M) \wedge \vec{B} = v(M)\vec{u}_y \wedge B_0\vec{u}_z = v(M)B_0\vec{u}_x = r\omega B_0\vec{u}_x,$$

en posant $v = r\omega$ ($r = OM$).

Alors, la fem est donnée par :

$$\boxed{e_{OA} = \int_O^A \vec{E}_m \cdot \vec{dl} = \int_0^a r\omega B_0 dr = \omega B_0\frac{a^2}{2}}.$$

Erreur à éviter
Il est délicat de définir le flux au travers de ce circuit. Les lignes de courant dans la roue ne sont pas bien définies : on utilise préférentiellement le champ électromoteur.

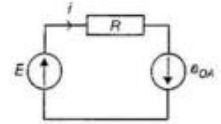


Figure 26

c) Le circuit électrique équivalent est donné en Fig. 26. La loi des mailles indique :

$$E = Ri - e_{OA} = Ri - \omega B_0\frac{a^2}{2}.$$

Erreur à éviter
Ne surtout pas appliquer le théorème du centre de masse à la roue : il fait intervenir la résultante de l'axe de rotation qui est inconnue. Pour un système en rotation, il faut absolument appliquer le théorème du moment cinétique.

d) Pour l'équation mécanique, on applique le théorème du moment cinétique scalaire projeté sur l'axe fixe de rotation Oz :

$$\boxed{J\frac{d\omega}{dt} = M_{Oz}(\text{Lap}) = -iB_0\frac{a^2}{2}},$$

d'après le savoir-faire 1.3.

e) On résout en ω :

$$J\dot{\omega} = -B_0\frac{a^2}{2}\frac{E + \omega B_0\frac{a^2}{2}}{R}.$$

Ainsi :

$$\boxed{\omega + \frac{\omega - \omega_0}{\tau} = 0} \quad \text{avec} \quad \boxed{\tau = \frac{4JR}{B_0^2 a^4}} \quad \text{et} \quad \boxed{\omega_0 = -\frac{2E}{B_0 a^2}}.$$

On resout : $\omega(t) = \omega_0 + A\exp(-t/\tau)$.

La constante est déterminée par la condition initiale : $\omega(0) = 0$, soit :

$$\boxed{\omega(t) = \omega_0(1 - \exp(-t/\tau))}.$$

La roue se met en rotation, dans le sens négatif, comme prévu par l'analyse préliminaire (rappelons que $\omega_0 < 0$). La fem est effectivement de signe négatif et s'oppose au générateur de tension E. Au bout d'un temps assez long, $e_{OA} \approx -E$, et l'intensité est quasi nulle dans le circuit. La roue de Barlow tourne alors à vitesse angulaire quasi constante.

La solution de l'équation différentielle est la somme de la solution particulière ω_0 et de la solution générale $A\exp(-t/\tau)$.

5 ■ Savoir réaliser un bilan énergétique en induction.

Conseils méthodologiques

5.1 Dans le cadre des deux circuits couplés par mutuelle (savoir-faire 2.1), realiser un bilan de puissance à l'aide des deux équations différentielles établies dans la question **2.1.a)**.

a) Réaliser un bilan de puissance pour le primaire et le secondaire.

b) Faire un bilan de puissance global et faire intervenir l'énergie magnétique des deux circuits U_m.

5.2 On s'intéresse au probleme des rails de Laplace traite dans le savoir-faire 4.1.

a) Faire un bilan de puissance électrique.

b) Faire un bilan de puissance mecanique.

c) En déduire un bilan global. Quel est le type initial d'énergie ? Que devient celle-ci ? De quelle maniere intervient l'induction ?

5.1.a) Utiliser le Cours en questions **4.5.**.

5.2.a) et **b)** Voir le Cours en questions **4.5.**.

5.1.a) Selon la méthode citée dans le cours en question, on multiplie les équations électriques par l'intensité de la maille en question :

$$Ei_1 = Ri_1^2 - e_1 i_1 = Ri_1^2 + Li_1\frac{di_1}{dt} + Mi_1\frac{di_2}{dt}$$

$$Ri_2^2 - e_2 i_2 = Ri_2^2 + Li_2\frac{di_2}{dt} + Mi_2\frac{di_1}{dt} = 0.$$

On réécrit sous la forme : $\boxed{Ei_1 + e_1 i_1 = Ri_1^2}$. Dans le primaire, les deux générateurs (le générateur de tension « physique » E et la fem d'induction e_1) fournissent une puissance qui est dissipée par effet Joule dans la résistance. De plus, $\boxed{e_2 i_2 = Ri_2^2}$: la puissance fournie par la fem d'induction dans le secondaire est dissipée par effet Joule.

© Lavoisier – La photocopie non autorisée est un délit

b) Cependant, cette interprétation fait intervenir les puissances (algébriques) des deux fem d'induction qui ne correspondent pas à une puissance fournie par l'expérimentateur (contrairement à celle fournie par le générateur de tension E). On peut faire un bilan énergétique général en additionnant les bilans du primaire et du secondaire :

$$Ei_1 = R(i_1^2 + i_2^2) + Li_1\frac{di_1}{dt} + Mi_1\frac{di_2}{dt} + Li_2\frac{di_2}{dt} + Mi_2\frac{di_1}{dt} = \boxed{R(i_1^2 + i_2^2) + \frac{dU_m}{dt}},$$

où $\boxed{U_m = \frac{1}{2}Li_1^2 + \frac{1}{2}Li_2^2 + Mi_1 i_2}$.

Sous cette forme, on comprend que la puissance est fournie par la source de tension E. Cette puissance est d'une part dissipée par effet Joule dans les deux résistances. D'autre part, les deux circuits stockent ou restituent une partie de cette puissance sous forme magnétique. De l'énergie en cours de stockage correspond à une fem < 0 (une force contre-électromotnce en fait) et de l'énergie rendue au circuit correspond à une fem > 0.

L'énergie stockée par les deux circuits est par conséquent U_m.

S'il n'y avait qu'un seul circuit, on retrouverait bien l'énergie magnétique $U_m = Li^2/2$, étudiée en première année.

5.2.a) On multiplie l'équation électrique par l'intensité : $Ri^2 + B_0 lvi = 0$. Afin de donner un sens, on fait apparaître la fem d'induction $e = -vB_0 l$, soit $\boxed{ei = Ri^2}$. La puissance électrique $P_{fem} = ei$ apportée par la fem d'induction est totalement dissipée par effet Joule.

b) On multiplie l'équation mécanique par la vitesse de la barre : $mvv = ilB_0 v = f_{Lap}.v$. On fait apparaître l'énergie cinétique de la barre :

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \vec{f}_{Lap}\cdot\vec{v} = P_{Lap}}.$$

Ce résultat représente le théorème de l'énergie cinétique appliquée à la barre. L'énergie cinétique de la barre varie grâce au travail de la force de Laplace exercé sur celle-ci.

c) Les deux bilans précédents font apparaître la puissance de la fem induite et de la force de Laplace. Cherchons à élucider physiquement leur origine. En fait, $P_{fem} = ei = -vB_0 li = -(ilb)v = -P_{Lap}$. On retrouve le bilan habituel en champ magnétique stationnaire :

$$\boxed{P_{fem} + P_{Lap} = 0}.$$

L'induction ne crée ni ne détruit de l'énergie. Elle permet des échanges d'energie entre phénomènes mécaniques et phénomènes électriques. Par exemple, vu les expressions, on constate que $P_{fem} \geqslant 0$ et $P_{Lap} \leqslant 0$. L'induction prélève de l'énergie cinétique à la barre et en donne au circuit. Le rendement de cette conversion est de 100 %.

Pour le bilan final, on élimine le terme commun aux bilans électrique et mécanique :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = P_{Lap} = -P_{fem} = -Ri^2,$$

qu'on réécrit $\boxed{-\frac{dEc}{dt} = Ri^2}$. L'énergie cinétique de la barre se transforme en énergie thermique par effet Joule dans la résistance R.

Le signe moins est nécessaire : en effet, l'énergie cinétique de la barre diminue alors que le terme d'effet Joule Ri^2 est nécessairement positif.

Annales

Pour maîtriser les bases

1. Détection par boucle inductive — D'après École de l'air

En milieu urbain, la détection de véhicules par boucle inductive s'est fortement développée. Le capteur est une boucle conductrice d'inductance propre L_1 implantée dans la chaussée, formée de spires de la taille de l'ordre du mètre (dipôle AB parcouru par un courant $i_1(t)$ de la figure 27). Lorsqu'un véhicule passe, des courants de Foucault sont induits dans la carcasse métallique. On modélise ce phénomène par un deuxième circuit d'inductance propre L_2 parcouru par l'intensité $i_2(t)$. On note M le coefficient de mutuelle inductance. On négligera la résistance des circuits.

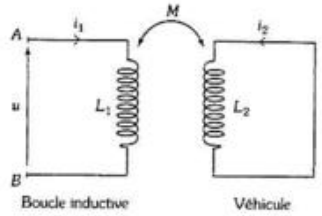


Figure 27

a) Montrer qu'en présence du véhicule, le dipôle AB est équivalent à une inductance propre L' qu'on exprimera en fonction de L_1, L_2 et M.

b) Cette boucle fait partie d'un circuit électronique oscillant dont la fréquence est fonction de son inductance. Ce circuit est composé d'une capacité C et du dipôle AB. Quelle est la pulsation de résonance ? Calculer sa variation relative en fonction de la variation relative d'inductance.

Conseils méthodologiques. Cet exercice utilise le savoir-faire 3 (induction de Neumann).

a) Écrivons la forme de la tension $u(t)$. La boucle inductive est le siège d'une induction de Neumann et est équivalente au circuit de la figure 28.

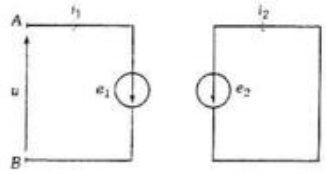


Figure 28

où $e_1 = -\dfrac{d\Phi_1}{dt}$. Le flux au travers du circuit 1 vaut :

$$\Phi_1 = L_1 i_1 + M i_2 .$$

Ainsi :

$$u(t) = -e_1(t) = \frac{d\Phi_1}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} .$$

De même, le circuit 2 (véhicule) voit son flux varier au cours du temps. Il abrite ainsi une fem $e_2 = -\dfrac{d\Phi_2}{dt}$, avec :

$$\Phi_2 = L_2 i_2 + M i_1 .$$

Cependant, $e_2 = 0$ car le circuit 2 place cette fem en court-circuit. Ainsi :

$$e_2 = 0 = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} .$$

On élimine i_2 des deux expressions :

© Le cahier – La photocopie non autorisée est un délit

$$u(t) = L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{M}{L_2} \frac{di_1}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt} \left(1 - \frac{M^2}{L_1 L_2}\right)$$

Ainsi, le dipôle AB est équivalent à une unique inductance L' valant : $\boxed{L' = L_1\left(1 - \dfrac{M^2}{L_1 L_2}\right)}$

b) Le circuit est tracé en Fig. 29. L'équation le décrivant est :

$$u = \frac{q}{C} = L \frac{di}{dt} , \text{ avec } i = -\dot{q} .$$

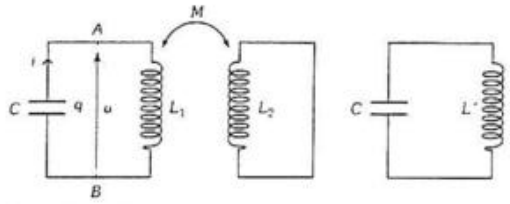


Figure 29

Alors, $\dfrac{d^2 i}{dt^2} + \omega_0^2 i = 0$, où $\boxed{\omega_0^2 = 1/L'C}$

La mesure de la pulsation permet, si C est connue, d'accéder à L'. Pour évaluer les variations relatives, on prend le logarithme de la relation :

$$\ln \omega_0 = -\frac{1}{2}(\ln L' + \ln C) .$$

Ainsi : $\dfrac{\Delta\omega_0}{\omega_0} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{\Delta L'}{L'} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{-M^2/L_2}{L_1} = \boxed{\dfrac{1}{2}\dfrac{M^2}{L_1 L_2}}$

car $L' = L_1 + \Delta L_1$, avec : $\Delta L_1 = -\dfrac{M^2}{L_2}$

2. Couplage d'oscillateurs par mutuelle inductance — D'après Oral Banque PT

On s'intéresse aux deux circuits LC représentés en Fig. 30. On note M le coefficient de mutuelle inductance. On étudiera le régime libre. À $t = 0$, on ferme les deux interrupteurs.

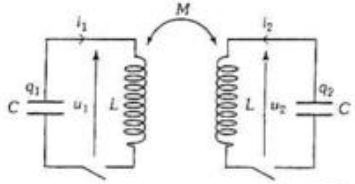


Figure 30

a) Trouver les équations différentielles satisfaites par $q_1(t)$ et $q_2(t)$. On posera $\omega_0^2 = 1/LC$ et $\alpha = M/L$.

b) Les résoudre en considérant une solution symétrique et une solution antisymétrique.

c) Quelle est en général l'allure du spectre de $q_1(t)$?

d) Initialement, les deux circuits sont ouverts. Quelles conditions initiales sur les charges des condensateurs doit-on imposer pour que le spectre de $q_1(t)$ ne contienne qu'une seule raie ?

e) Dans le cas général, réaliser un bilan de puissance global et le commenter.

Conseils méthodologiques. Cet exercice utilise le savoir-faire 3 (induction de Neumann) et 5 (bilans énergétiques).

a) Un phénomène d'induction se produit dans les deux circuits car les flux les traversant varient dans le temps :

$$\Phi_1 = Li_1 + Mi_2 \quad \text{et} \quad \Phi_2 = Li_2 + Mi_1 .$$

Alors :

$$u_1 = -e_1 = \frac{d\Phi_1}{dt} = L\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt} \quad \text{et} \quad u_2 = -e_2 = \frac{d\Phi_2}{dt} = L\frac{di_2}{dt} + M\frac{di_1}{dt} .$$

La loi des mailles donne :

$$u_1 = \frac{q_1}{C} \quad \text{et} \quad u_2 = \frac{q_2}{C} .$$

Erreur à éviter

Le signe moins provient du fait que le courant rencontre l'armature portant la charge $-q$.

Vu les orientations : $i_1 = -\dot{q}_1$ et $i_2 = -\dot{q}_2$

Ainsi :

$$\ddot{q}_1 + \frac{M}{L}\ddot{q}_2 + \frac{1}{LC}q_1 = 0 , \quad \text{soit :} \quad \boxed{\ddot{q}_1 + \alpha\ddot{q}_2 + \omega_0^2 q_1 = 0} .$$

$$\ddot{q}_2 + \frac{M}{L}\ddot{q}_1 + \frac{1}{LC}q_2 = 0 , \quad \text{soit :} \quad \boxed{\ddot{q}_2 + \alpha\ddot{q}_1 + \omega_0^2 q_2 = 0} .$$

b) On pose $s = q_1 + q_2$ et $a = q_1 - q_2$. Par combinaison linéaire, on obtient : $\boxed{\ddot{s} + \frac{\omega_0^2}{1+\alpha}s = 0}$ et $\boxed{\ddot{a} + \frac{\omega_0^2}{1-\alpha}a = 0}$.

$s(t)$ et $a(t)$ sont appelés les *modes propres* du système.

c) Résolvons les équations précédentes :

$$s(t) = s_0\cos\left(\frac{\omega_0}{\sqrt{1+\alpha}}t + \varphi\right) \qquad a(t) = a_0\cos\left(\frac{\omega_0}{\sqrt{1-\alpha}}t + \psi\right) .$$

$s(t)$ et $a(t)$ sont donc oscillantes aux pulsations $\omega_s = \omega_0/(\sqrt{1+\alpha})$ et $\omega_a = \omega_0/(\sqrt{1-\alpha})$ respectivement.

q_1 est égale à la moyenne de s et de a : c'est donc une somme de deux cosinus de pulsations ω_s et ω_a.

L'allure du spectre est celle de la figure 31 : deux pics apparaissent à ces deux pulsations.

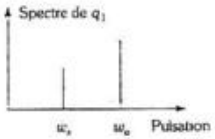


Figure 31

d) Si on désire que le spectre ne comporte qu'une raie, q_1 ne doit comporter qu'une seule oscillation à ω_s ou ω_a.

Il faut donc annuler $s(t)$ ou $a(t)$. Pour cela, on doit ajuster les conditions initiales.

Déjà, $s(0) = a(0) = 0$, car les courants i_1 et i_2 sont initialement nuls. Rappelons en effet que la présence d'inductances assure la continuité du courant dans les deux circuits. On déduit de cette condition la nullité des phases $\varphi = \psi = 0$.

Pour annuler $s(t)$ ($a(t)$), il suffit alors que $s(0) = s_0 = 0$ ($a(0) = a_0 = 0$). Or, $s_0 = q_1(0) + q_2(0)$: les condensateurs portent des charges initiales opposées. De même, pour annuler $a(t)$, il faut que les condensateurs portent des charges initiales identiques.

e) On multiplie les deux équations électriques de la question **a)** respectivement par $i_1 = -\dot{q}_1$ et $i_2 = -\dot{q}_2$:

$$Li_1\frac{di_1}{dt} + Mi_1\frac{di_2}{dt} = i_1\frac{q_1}{C} = -\frac{d}{dt}\frac{q_1^2}{2C}$$

$$Li_2\frac{di_2}{dt} + Mi_2\frac{di_1}{dt} = i_2\frac{q_2}{C} = -\frac{d}{dt}\frac{q_2^2}{2C}$$

On additionne ces deux équations :

$$Li_1\frac{di_1}{dt} + Li_2\frac{di_2}{dt} + Mi_1\frac{di_2}{dt} + Mi_2\frac{di_1}{dt} + \frac{d}{dt}\frac{q_1^2}{2C} + \frac{d}{dt}\frac{q_2^2}{2C} = 0 .$$

On réécrit cela sous la forme :

$$\boxed{\frac{dU_m}{dt} + \frac{dU_e}{dt} = 0} ,$$

où $U_m = \frac{1}{2}Li_1^2 + \frac{1}{2}Li_2^2 + Mi_1i_2$ est l'énergie magnétique du circuit et $U_e = \frac{q_1^2}{2C} + \frac{q_2^2}{2C}$ l'énergie électrique (emmagasinée dans les condensateurs). On obtient ainsi la conservation de l'énergie dans cette situation, ce qui n'est guère surprenant vu l'absence de phénomène dissipatif (tel que l'effet Joule dans des résistances).

3. Auto-inductance d'un coaxial — D'après Oral ENS

On considère un câble coaxial infini, de rayon intérieur R_1 et extérieur R_2 (Fig. 32).

Le cylindre intérieur est parcouru surfaciquement par le courant $+I$ et l'extérieur par le même courant, mais en sens inverse.

Donner le coefficient d'auto-inductance par unité de longueur L du coaxial.

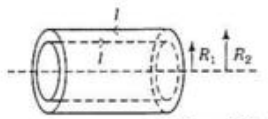


Figure 32

Conseils méthodologiques. Cet exercice utilise le savoir-faire 2 (évaluation d'une inductance).

On évalue tout d'abord le champ magnétique créé par le câble coaxial. Ce calcul a été mené dans les Bases **1** du chapitre Magnétostatique :

$$\boxed{\begin{aligned} &\vec{B} = \vec{0} , \quad \text{pour } r < R_1 \text{ et } r > R_2 \\ &\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{u}_\theta , \quad \text{pour } R_1 < r < R_2 \end{aligned}}$$

où on utilise les coordonnées cylindriques.

Pour évaluer l'inductance propre du câble, on a le choix de passer par le flux ou l'énergie. Le flux au travers du circuit est ici mal défini (le circuit n'est pas filiforme), on utilisera plutôt l'énergie :

$$U_m = \iiint \frac{B^2}{2\mu_0}d\tau = \frac{1}{2}LI^2 .$$

sur une longueur h unité.

En coordonnées cylindriques, $d\tau = dr\,rd\theta\,dz$, soit :

$$U_m = \frac{1}{2}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2}\frac{r\,dr}{r^2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^h dz = \frac{2\pi h}{2}\frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2}\ln\frac{R_2}{R_1} .$$

On déduit l'inductance L_h d'une longueur h de câble :

$$L_h = h\frac{\mu_0}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1} .$$

soit une inductance par unité de longueur :

$$\boxed{L = \frac{L_h}{h} = \frac{\mu_0}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}}$$

Du point de vue de l'homogénéité, une inductance est homogène à μ_0 multipliée par une longueur. Une inductance par unité de longueur est par conséquent homogène à μ_0, ce qui est bien le cas ici.

4. Roue de Barlow génératrice — D'après Oral CCP

Une roue de Barlow homogène de rayon a, plongée dans le champ magnétique uniforme et stationnaire $\vec{B} = B\vec{u}_z$, est en liaison pivot parfait avec son axe de rotation (Fig. 33). Cette roue est branchée sur une résistance R. Initialement, on communique la vitesse angulaire ω_0 à la roue.

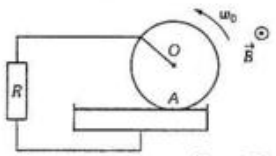


Figure 33

a) Expliquer qualitativement les phénomènes ayant lieu.

b) Donner l'équation électrique, puis l'équation mécanique. On donne J, moment d'inertie de la roue par rapport à l'axe Oz.

c) En déduire l'évolution temporelle de la vitesse angulaire de la roue $\omega(t)$.

d) Réaliser un bilan énergétique.

Conseils méthodologiques. Cet exercice utilise les techniques des savoir-faire 1 (action d'un champ magnétique sur un conducteur), 4 (induction de Lorentz) et 5 (bilans de puissances).

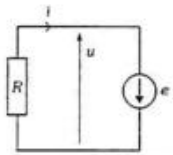


Figure 34

a) La roue de Barlow est un conducteur en mouvement dans un champ magnétique stationnaire : il y a alors induction de Lorentz et création d'une fem dans le circuit. Un courant circule dans le circuit, et les forces de Laplace modifient la rotation de la roue. La loi de Lenz prévoit son ralentissement.

b) Orientons le circuit, comme sur la figure 34.

La roue de Barlow est équivalente du point de vue électrique à un générateur de fem e, et :

$$e = \int_O^A (\vec{v}\wedge\vec{B})\cdot\overrightarrow{dl} = \int_O^A (r\omega\vec{u}_\theta\wedge B\vec{u}_z)\cdot dl\,\vec{u}_r = B\omega\int_O^A r\,dr = B\omega\frac{a^2}{2}.$$

⇒ Remarque

Le flux du champ magnétique au travers du circuit est mal défini, le courant empruntant des chemins différents à chaque instant. Il vaut mieux utiliser le champ électromoteur afin d'évaluer la fem.

Les lois de l'électrocinétique indiquent $u = -Ri = -e$, d'où :

$$\boxed{Ri = B\omega\frac{a^2}{2}}$$

D'un point de vue mécanique, on applique le théorème du moment cinétique scalaire (sur Oz) à la roue :

$$J\dot{\omega} = \Gamma_{Lap},$$

car le couple de frottement est nul (pivot parfait) et le poids est appliqué en O.

Le couple de Laplace vaut $\Gamma_{Lap} = -iB\frac{a^2}{2}$ (consulter le savoir-faire 1.3). Ainsi : $\boxed{J\dot{\omega} = -iB\frac{a^2}{2}}$

© Ellipses - La photocopie non autorisée est un vol

On note un couplage électromécanique : dans l'équation électrique (mécanique) intervient une grandeur mécanique (électrique) : la vitesse angulaire de la roue (électrique : l'intensité).

c) On élimine $i(t)$ des deux équations précédentes :

$$J\dot{\omega} = -\frac{B^2a^4}{4R}\omega.$$

En notant $\tau = 4RJ/(B^2a^4)$, on résout en :

$$\boxed{\omega(t) = A\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}$$

Comme $\omega(0) = \omega_0$, on obtient $A = \omega_0$. L'évolution de la vitesse angulaire est tracée en Fig. 35 : la roue tend à s'arrêter bien qu'il n'y ait **aucun** frottement.

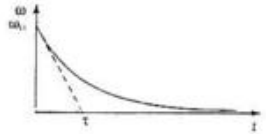


Figure 35

d) On multiplie l'équation électrique par i et l'équation mécanique par ω :

$$ei = Ri^2, \text{ soit } P_{fem} = Ri^2,$$

$$J\dot{\omega}\omega = \Gamma_{Lap}\omega, \text{ soit } \frac{d}{dt}\frac{1}{2}J\omega^2 = P_{Lap}.$$

La première équation exprime que la puissance électrique apportée par la fem est totalement dissipée par effet Joule dans la résistance. La seconde montre que l'énergie cinétique de la roue varie (diminue en fait) à cause de la puissance des actions de Laplace.

Or, on remarque :

$$P_{fem} + P_{Lap} = ei + \Gamma_{Lap}\omega = B\omega\frac{a^2}{2}i - iB\frac{a^2}{2}\omega = 0.$$

L'énergie électrique fournie au circuit par la fem est prélevée sur l'énergie mécanique par l'intermédiaire des forces de Laplace.

⇒ Remarque

C'est le bilan auxiliaire.

Au final : $\boxed{\frac{dEc}{dt} = -Ri^2}$

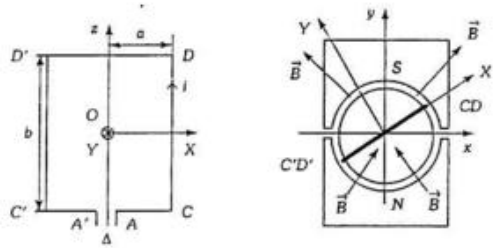
L'énergie cinétique de la roue diminue exactement au même taux que l'énergie est dissipée par effet Joule dans la résistance. L'induction permet un couplage entre un phénomène mécanique et un phénomène électrique. On a réalisé un (très sommaire) générateur, appareil transformant de l'énergie mécanique en énergie électrique.

Erreur à éviter

Bien obtenir un moins entre les deux termes. Si ce n'est pas le cas, la solution diverge : signe d'une erreur.

5. Moteur à courant continu — D'après Centrale-Supelec

Le rotor (partie mobile) du moteur est constitué de N spires rectangulaires (de côtés $2a$ et b) tournant autour d'un axe Δ coïncidant avec l'axe Oz, passant par leur centre O et parallèle aux côtés CD et $C'D'$. Il est plongé dans un champ magnétique $\vec{B}$. Le champ $\vec{B}$ est négligeable sur les brins DD', AC et $A'C'$. Sur les brins CD et $C'D'$, il est radial et de norme B pratiquement constante. Dans le domaine $y < 0$ (ce qui est le cas du brin $C'D'$ dans la position représentée sur la figure 36), $\vec{B}$ est radial entrant alors qu'il est radial sortant dans le domaine $y > 0$ (cas du brin CD). Un point M courant du brin CD sera repéré par $\overrightarrow{OM} = a\vec{e}_X + z\vec{e}_z$, avec $z \in [-b/2, b/2]$. La forme des pièces polaires N et S de l'aimant et la présence d'un noyau de fer cylindrique d'axe Oz permet d'obtenir un champ magnétique $\vec{B}$ pratiquement radial, au niveau des brins CD et $C'D'$.



Vue de face *Vue de dessus* **Figure 36**

1.a) Comparer les directions et les sens des champs $\vec{B}$ en un point M du tronçon CD et en un point M' du tronçon $C'D'$.

b) Comparer les forces de Laplace $\vec{f}_{CD}$ et $\vec{f}_{C'D'}$ s'exerçant sur ces deux tronçons.

c) Montrer que le moment $\mathcal{M}_1$ par rapport à l'axe Δ des forces de Laplace s'exerçant sur la spire peut se mettre sous la forme $\mathcal{M}_1 = i\Phi_1$. Exprimer Φ_1 et montrer qu'il a les dimensions d'un flux magnétique.

2.a) L'expression de Φ_1 dépend-elle de la position de la spire ? Que se passe-t-il si le brin CD passe dans le domaine $y < 0$?

b) Quelle serait la valeur moyenne de $\mathcal{M}_1$ sur un tour si l'intensité i_1, comptée positivement dans le sens de CD, était constante ?

c) En fait, un commutateur permet d'avoir toujours une intensité de même signe dans le brin qui évolue dans la zone $y > 0$. Quel est l'intérêt de cette commutation ?

d) Dans la suite, on admettra que le moment des efforts de Laplace s'exerçant sur le rotor dans son ensemble peut s'écrire $\mathcal{M} = \Phi i$, avec $\Phi = N\Phi_1$, quelle que soit la position du rotor. Justifier ce résultat et indiquer l'approximation effectuée.

3.a) La spire tourne à la vitesse angulaire Ω autour de l'axe Δ. Calculer la fem e induite. La mettre sous la forme $e = -\Phi_2\Omega$. Comparer Φ et Φ_2.

b) Donner le schéma électrique équivalent au moteur, si on note R la résistance totale des fils.

Conseils méthodologiques. L'étude du moteur à courant continu, sujet de grande importance pratique, fait intervenir conjointement les savoir-faire 1 (forces exercées sur les conducteurs dans un champ magnétique) et 4 (induction de Lorentz).

1.a) Les champs magnétiques en M et M' sont identiques (mêmes norme, direction et sens).

b) Considérons un élément $\overrightarrow{dl}$ du brin CD. Alors : $\vec{df}_{CD} = i\overrightarrow{dl} \wedge \vec{B} = iB\,dl\,\vec{e}_z \wedge \vec{e}_X = iB\,dl\,\vec{e}_Y$.

En intégrant : $\boxed{\vec{f}_{CD} = iBb\vec{e}_Y}$.

Pour le brin $C'D'$, le sens du courant est opposé et le champ magnétique identique. On déduit immédiatement : $\boxed{\vec{f}_{C'D'} = -iBb\vec{e}_Y}$.

⇨ **Remarque**

La force de Laplace totale est donc nulle. L'action se réduit à un couple.

© Lavoisier - La photocopie non autorisée est un délit

c) Les forces de Laplace sur les brins CD et $C'D'$ sont uniformes. Elles s'exercent respectivement en leurs milieux G et G'.

Alors : $\vec{\mathcal{M}}_1 = \overrightarrow{OG} \wedge \vec{f}_{CD} + \overrightarrow{OG'} \wedge \vec{f}_{C'D'} = a\vec{e}_X \wedge iBb\vec{e}_Y - a\vec{e}_X \wedge -iBb\vec{e}_Y = 2iBab\vec{e}_z$.

On déduit : $\boxed{\mathcal{M}_1 = \vec{\mathcal{M}}_1 \cdot \vec{e}_z = 2iBab}$.

Ainsi, $\Phi_1 = Ba(2b)$ et est clairement homogène à un champ magnétique multiplié par une surface : c'est un flux magnétique.

2.a) Tant que le brin CD reste dans la zone $y > 0$, l'expression du moment $\mathcal{M}_1$ et de Φ_1 ne varie pas. En revanche, elle change de signe si CD entre dans le domaine $y < 0$.

b) Le moment posséderait une certaine valeur sur la moitié d'un tour, et l'opposé de cette valeur pour l'autre moitié de tour. Au total, la moyenne serait nulle.

c) Dans ce cas, si i est constant sur un tour, le moment moyen est non nul et vaut $\langle \mathcal{M}_1 \rangle = i\Phi_1$.

d) Le résultat proposé est obtenu en sommant les contributions dues à chaque spire. Cela suppose que les N spires sont quasiment superposées. De plus, il faut que le commutateur agisse instantanément.

3.a) Le champ électromoteur dans le brin CD vaut :

$$\vec{E}_m = \vec{v} \wedge \vec{B} = b\Omega\vec{e}_Y \wedge B\vec{e}_X = -bB\Omega\vec{e}_z$$

Pour CD :

$$e_{CD} = \int_C^D -bB\Omega\vec{e}_z \cdot \overrightarrow{dl} = -bB\Omega a.$$

De même, $e_{C'D'} = e_{CD}$ car le changement de signe de la vitesse est compensé par l'inversion des bornes d'intégration.

Ainsi, pour une spire, la fem induite est $e_{AA'} = -2Bab\Omega$.

Pour les N spires :

$$\boxed{e = Ne_{AA'} = -NBa(2b)\Omega = -\Phi_2\Omega}.$$

On identifie $\Phi = \Phi_2$.

b) Le circuit équivalent est celui de la figure 37.

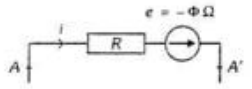


Figure 37

⇨ **Remarque**

Ou du moins en un temps bref devant $1/\Omega$, où Ω est la vitesse angulaire du rotor.

⇨ **Remarque**

Le flux de $\vec{B}$ au travers du circuit n'est pas connu car le champ $\vec{B}$ n'est donné qu'au voisinage de CD et $C'D'$. La loi de Faraday $e = -\Phi'$ n'est donc pas exploitable ici.

⇨ **Remarque**

Le bilan énergétique : $P_{\text{fem}} + P_{\text{Lap}} = 0$, avec $P_{\text{fem}} = ei$ et $P_{\text{Lap}} = -i\Phi\Omega$, permet d'arriver très simplement au résultat $e = -\Phi\Omega$.

1. Haut-parleur — D'après CCP et ENS

Un haut-parleur est représenté en Fig. 38.

De symétrie de révolution autour de l'axe x indiqué, il se compose d'un aimant permanent fixe, assurant un champ magnétique radial d'intensité constante B dans son entrefer. La membrane est fixée à un baffle plan, rigide, immobile, de grandes dimensions, par une suspension souple lui permettant un déplacement parallèlement à elle-même suivant l'axe x. Sa position $x(t)$ est ramenée par cette suspension à un positionnement moyen par une force de rappel proportionnelle à son déplacement $\vec{F}_r = -kx\vec{u}_x$. Sur cette membrane est collé un cylindre portant une bobine. On supposera que l'amplitude de déplacement de la bobine ne lui permet pas de quitter la région

de l'entrefer où le champ magnétique est radial et d'amplitude constante. Cette bobine est soumise à une tension $u(t)$ et on note $i(t)$ l'intensité qui la parcourt (Fig. 39 pour les conventions). La bobine possède une résistance R, un coefficient d'auto-inductance L et la longueur de fil est ℓ. Le couplage du haut-parleur avec l'air est modélisé par une force $\vec{F}_f = -f x \vec{u}_x$ subie par la membrane.

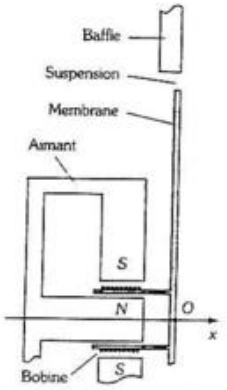


Figure 38

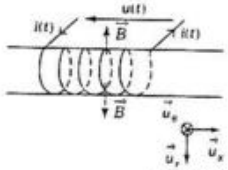


Figure 39

a) Quelles sont les forces exercées sur l'ensemble membrane-bobine, de masse m ? En déduire son équation du mouvement.

b) Quelle est la force électromotrice d'induction ? En déduire l'équation différentielle régissant le circuit électrique.

c) Établir une équation établissant le bilan global de puissance pour le système. On précisera clairement le sens physique des six termes présents.

d) On se place en régime sinusoïdal forcé. Montrer que plusieurs termes de ce bilan sont nuls en moyenne.

e) Définir et exprimer le rendement du haut-parleur.

Conseils méthodologiques. L'étude du haut-parleur fait intervenir conjointement les savoir-faire 1 (forces exercées sur les conducteurs dans un champ magnétique), 3 (induction de Neumann), 4 (induction de Lorentz) et 5 (bilans de puissance).

a) Les différentes forces s'exerçant sur le système sont :

- le poids : $\vec{P} = m\vec{g}$ (vertical) ;
- la force exercée par le baffle sur le système, composée d'une force de rappel horizontale $\vec{F}_r = -kx\vec{u}_x$ et d'une composante verticale (qui s'oppose au poids) ;
- la force de Laplace $\vec{F}_{Lap}$: en effet, la bobine est un conducteur parcouru par un courant $i(t)$ et placé dans un champ magnétique ;
- la force exercée par l'air sur la membrane : $\vec{F}_a = -fx\vec{u}_x$.

© Larousse - La photocopie non autorisée est un délit

En projection sur l'axe x, le théorème de la quantité de mouvement donne :

$$m\ddot{x} = -kx - fx + F_{Lap,x}.$$

Il reste à évaluer la force de Laplace. Sur un élément $d\vec{\ell}$, la force élémentaire vaut :

$$d\vec{F}_{Lap} = i(t)\,d\vec{\ell} \wedge \vec{B} = i(t)\,d\ell\,\vec{u}_\theta \wedge B\vec{u}_r = -i(t)B\,d\ell\,\vec{u}_x.$$

On intègre sur toute la longueur de la bobine :

$$\vec{F}_{Lap} = -i(t)\,\ell\,B\vec{u}_x.$$

L'équation du mouvement se ramène donc à :

$$\boxed{m\ddot{x} = -kx - fx - i\ell B}.$$

b) Deux types d'induction interviennent simultanément dans ce problème :

- auto-induction, caractérisée par le coefficient L : $e_1 = -L\dfrac{di}{dt}$;
- induction de Lorentz, dont la fem associée est :

$$e_2 = \int_{bobine} (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{\ell} = \int (\dot{x}\vec{u}_x \wedge B\vec{u}_r) \cdot d(\vec{u}_\theta = xB\int d\ell = xB\ell.$$

Le circuit équivalent est présenté en Fig. 40. La loi d'Ohm généralisée est :

$$\boxed{u(t) = Ri(t) - e_1(t) - e_2(t) = Ri(t) + L\frac{di}{dt}(t) - \dot{x}(t)B\ell}$$

c) On multiplie l'équation mécanique par $\dot{x}(t)$ et l'équation électrique par $i(t)$:

$$m\dot{x}\ddot{x} = -kx\dot{x} - f\dot{x}^2 - i\ell B\dot{x},$$

soit : $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{2}m\dot{x}^2\right) = -\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{2}kx^2\right) - f\dot{x}^2 - i\ell B\dot{x}$

$$ui = Ri^2 + Li\frac{di}{dt} - xB\ell i = Ri^2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2\right) - \dot{x}B\ell i.$$

On élimine le terme commun, et :

$$\boxed{ui = Ri^2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}kx^2\right) + f\dot{x}^2}$$

Explicitons le sens physique de ces termes :

- ui est la puissance électrique fournie par l'alimentation électrique au système. Elle est égale à la somme de toutes les contributions suivantes :
- Ri^2 est la puissance dissipée par effet Joule ;
- $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{2}Li^2\right)$ est la dérivée de l'énergie magnétique stockée dans l'inductance ;
- $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{2}m\dot{x}^2\right)$ est la dérivée de l'énergie cinétique du système ;
- $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{2}kx^2\right)$ est la dérivée de l'énergie potentielle élastique de la membrane ;
- $f\dot{x}^2$ est la puissance cédée à l'air (puissance acoustique émise).

Erreur à éviter

Le flux du champ $\vec{B}$ créé par l'aimant au travers du circuit est mal défini. Notamment, on ne connaît pas l'expression de $\vec{B}$ dans le pôle Nord de l'aimant. On ne peut donc pas utiliser la loi de Faraday : $e_2 = -\dfrac{d\Phi_B}{dt}$. Le recours au champ électromoteur est incontournable.

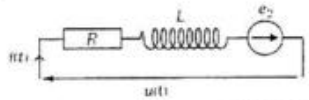


Figure 40

d) Les termes de puissance sont répartis en deux groupes : ceux s'exprimant comme une dérivée temporelle, et les autres. Étudions la moyenne des premiers, par exemple :

$$\left\langle \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Li^2\right)\right\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Li^2\right)\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}Li^2(t)\right]_0^T = 0\,.$$

car $i(t)$ est T-périodique.

Le même argument est utilisable pour les autres dérivées temporelles. Ainsi : $\boxed{\langle ui\rangle = \langle Ri^2\rangle + \langle fx^2\rangle}$.

En moyenne, la puissance fournie par l'alimentation est dissipée par effet Joule et engendre des ondes acoustiques.

e) La puissance dissipée par effet Joule est irrémédiablement perdue. La fonction du haut-parleur est en revanche la création d'une onde acoustique. On définit donc le rendement η par :

$$\boxed{\eta = \frac{\langle fx^2\rangle}{\langle ui\rangle} = \frac{\langle fx^2\rangle}{\langle Ri^2\rangle + \langle fx^2\rangle}}$$

Le rendement est clairement compris entre 0 et 1.

2. Moteur asynchrone — D'après Centrale-Supelec

Une bobine plate, de centre O, formée de N spires de section S, d'inductance propre L et de résistance r tourne à la vitesse angulaire constante $\omega > 0$ autour de l'axe Oz (Fig. 41). Sa position est repérée par l'angle entre $\vec{u}_x$ et le vecteur $\vec{n}$ normal au plan de la bobine : $(\vec{u}_x, \vec{n}) = \omega t - \alpha_0$, où α_0 est une constante positive.

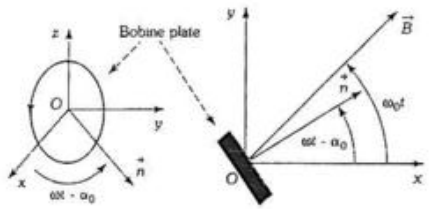


Figure 41

Cette bobine est plongée dans un champ magnétique, de norme B constante, tournant autour de l'axe Oz à la vitesse angulaire $\omega_0 > 0$ constante : $(\vec{u}_x, \vec{B}) = \omega_0 t$.

a) Déterminer la valeur à l'instant t de l'angle $\alpha(t) = (\vec{n}, \vec{B})$. En déduire le flux $\Phi(t)$ du champ $\vec{B}$ à travers la bobine. Quelle est la force électromotrice induite ?

b) En régime établi, cette fem engendre dans le circuit (r, L) un courant sinusoïdal $i(t)$ de même pulsation que e, qu'on exprimera sous la forme $i(t) = I\sin(\alpha(t) - \varphi)$, où φ est une constante. Exprimer I et $\tan\varphi$ en fonction de $\Phi_0 = NBS$, r, L, ω et ω_0.

c) À quel couple $\vec{\Gamma} = \Gamma\vec{u}_z$ le circuit est-il soumis ? Quelle est sa valeur moyenne Γ_m en fonction de I, S, B et φ ?

d) À quelle condition sur φ ce couple est-il moteur ?

e) Tracer l'allure de Γ_m en fonction de la pulsation ω. Dans quel domaine de pulsation le dispositif fonctionne-t-il en moteur ? On justifiera l'appellation de moteur asynchrone.

f) Un tel moteur peut-il démarrer seul ?

g) On suppose que le moteur a à vaincre un couple résistant de norme constante Γ_r. Étudier la stabilité du fonctionnement.

© Les éditions – Il n'est pas autorisé de photocopier ce livre sans autorisation.

Conseils méthodologiques. L'étude du moteur asynchrone utilise les savoir-faire 1 (actions des champs magnétiques sur les conducteurs) et 4 (induction de Lorentz).

a) On écrit :

$$\alpha(t) = (\vec{n}, \vec{B}) = (\vec{n}, \vec{u}_x) + (\vec{u}_x, \vec{B}) = -(\vec{u}_x, \vec{n}) + (\vec{u}_x, \vec{B}) = \boxed{\alpha_0 - \omega t + \omega_0 t}.$$

Alors, le flux du champ magnétique au travers de la bobine vaut :

$$\Phi(t) = \iint \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \iint \vec{B}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S = B\cos\alpha(t)\iint \mathrm{d}S = BNS\cos\alpha(t)\,,$$

en n'oubliant pas les N tours de fil.

Le flux du champ magnétique au travers du circuit varie au cours du temps, il y a création d'une force électromotrice. La loi de Faraday indique :

$$\boxed{e = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = BNS\dot{\alpha}\sin\alpha(t) = BNS(\omega_0 - \omega)\sin\alpha(t)}.$$

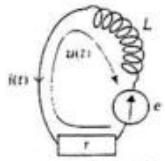


Figure 42

b) Le circuit équivalent au système est celui de la figure 42.

On déduit : $u(t) = ri(t) + L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(t) = e(t)$.

⇨ **Remarque**

Par régime établi, il faut comprendre fin du régime transitoire, soit régime sinusoïdal forcé.

On se place en régime sinusoïdal forcé, toutes les grandeurs oscillent à la pulsation $\omega_0 - \omega$.

Il est alors très profitable d'utiliser la notation complexe :

$$i(t) = \Re e(\underline{i}(t))$$

avec $\underline{i}(t) = -jI\exp(j(\alpha(t) - \varphi))$.

Technique de calcul

$\sin x = \Re e(-j\exp(jx))$

On obtient donc :

$$r\underline{i} + L\frac{\mathrm{d}\underline{i}}{\mathrm{d}t} - \underline{e} = 0$$

$$= (r + j(\omega_0 - \omega)L)(-jI)\exp(j(\alpha(t) - \varphi)) - BNS(\omega_0 - \omega)(-j\exp(j\alpha(t)))\,.$$

On simplifie :

$$I\exp(-j\varphi) = \frac{\Phi_0(\omega_0 - \omega)}{r + jL(\omega_0 - \omega)}\,.$$

Il reste à identifier module et phase, en distinguant deux cas :

- $\omega_0 > \omega$:

$$I = \frac{\Phi_0(\omega_0 - \omega)}{\sqrt{r^2 + L^2(\omega_0 - \omega)^2}} \quad \text{et} \quad \tan\varphi = \frac{L(\omega_0 - \omega)}{r} \quad (\sin\varphi > 0)\,;$$

- $\omega_0 < \omega$:

$$I = \frac{\Phi_0(\omega - \omega_0)}{\sqrt{r^2 + L^2(\omega_0 - \omega)^2}} \quad \text{et} \quad \tan\varphi = \frac{L(\omega_0 - \omega)}{r} \quad (\sin\varphi < 0).$$

⇨ **Remarque**

I s'explicite donc en général à l'aide d'une valeur absolue.

c) Le circuit est plongé dans le champ magnétique uniforme. Son action se réduit à un couple :

$$\vec{\Gamma} = \vec{M}\wedge\vec{B} = i(t)NS\vec{n}\wedge\vec{B}\,.$$

Comme $\vec{n} \wedge \vec{B} = B\sin(\alpha(t))\vec{u}_z$, on exprime le couple :

$$\vec{\Gamma} = INSB\sin(\alpha(t) - \varphi)\sin(\alpha(t))\vec{u}_z .$$

Pour la valeur moyenne, on linéarise tout d'abord :

$$\vec{\Gamma} = \frac{I\Phi_0}{2}(\cos\varphi - \cos(2\alpha(t) - \varphi))\vec{u}_z .$$

Le second terme oscille à la pulsation $2(\omega_0 - \omega)$, sa moyenne est donc nulle. Alors :

$$\boxed{\langle\vec{\Gamma}\rangle = \Gamma_m \vec{u}_z = \frac{I\Phi_0}{2}\cos\varphi\,\vec{u}_z}.$$

Technique de calcul

$|\vec{a} \wedge \vec{b}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,|\sin(\vec{a}, \vec{b})|$

Pour le sens, on conclut avec la règle des « trois doigts »

Technique de calcul

$\sin a \sin b = \frac{1}{2}(\cos(a - b) - \cos(a + b))$

d) Le couple est moteur s'il est exercé dans le sens de la rotation, soit $\langle\vec{\Gamma}\rangle \cdot \vec{u}_z \geqslant 0$. La condition est $\boxed{\cos\varphi > 0}$.

e) Explicitons $\cos\varphi$. D'après la question **b)** :

$$\exp(j\varphi) = \frac{I}{\Phi_0}\left(\frac{r}{\omega_0 - \omega} + jL\right) = \cos\varphi + j\sin\varphi .$$

Ainsi :

$$\Gamma_m = \frac{\Phi_0 I^2}{2}\frac{r}{\Phi_0(\omega_0 - \omega)} = \frac{1}{2}\frac{\Phi_0^2(\omega_0 - \omega)^2}{r^2 + L^2(\omega_0 - \omega)^2}\frac{r}{\omega_0 - \omega} = \frac{\Phi_0^2}{2}\frac{r(\omega_0 - \omega)}{r^2 + L^2(\omega_0 - \omega)^2}$$

Remarquons quelques valeurs particulières :

- $\Gamma_m(0) > 0$;
- $\Gamma_m(\omega_0) = 0$ et est décroissante en ce point ;
- $\Gamma_m \to 0^-$ quand $\omega \to \infty$.

On déduit l'allure de la figure 43. La condition de fonctionnement en moteur est $\omega < \omega_0$: la bobine tourne alors moins vite que le champ magnétique.

Pour $\omega = \omega_0$, le couple moyen est nul. Pour que le moteur asynchrone fonctionne, sa vitesse de rotation doit être différente de celle du champ (ce qui explique sa dénomination).

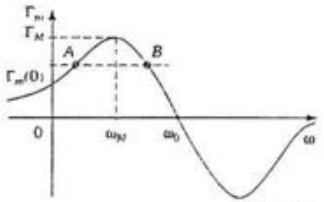


Figure 43

f) Supposons qu'initialement la spire ne tourne pas. Le couple moyen des actions de Laplace est non nul car $\Gamma_m(0) > 0$. La bobine se met alors en rotation si ce couple est supérieur au moment des frottements et de charge.

Remarque

Pour $\omega > \omega_0$, le couple est négatif : un dispositif extérieur doit fournir de l'énergie à la bobine afin de préserver sa rotation. Le système fonctionne alors en générateur.

g) En régime permanent de fonctionnement, le couple des actions de Laplace compense exactement le couple résistant : $\Gamma_m + (-\Gamma_r) = 0$. Si $\Gamma_r < \Gamma_M$, il existe au plus deux états possibles, notés A et B sur la figure 43.

Considérons que le point de fonctionnement soit A. Supposons que suite à un incident, la vitesse angulaire de la bobine diminue. Alors, le couple de Laplace diminue et la vitesse angulaire de la bobine diminue encore comme le montre le théorème du moment cinétique projeté sur l'axe de rotation et appliqué à la bobine :

$$J\dot{\omega} = \Gamma_m(\omega) - \Gamma_r .$$

Le régime est instable.

© Lavoisier – La photocopie non autorisée est un délit

En revanche, au point B, si ω diminue, le couple de Laplace augmente. Ainsi, la vitesse de rotation tend à augmenter, ce qui contre la perturbation. Inversement, si ω augmente, le couple de Laplace diminue. La stabilité du fonctionnement est assurée.

Le fonctionnement est stable et moteur pour $\boxed{\omega_M < \omega < \omega_0}$.

8. Mouvement d'un aimant à proximité d'une spire — D'après Oral Centrale-Supelec

Une spire de rayon a, de résistance R, comportant N tours de fil, est immobile au point O (Fig. 44). On approche un aimant à la vitesse $\vec{v} = \dot{z}\vec{u}_z$, où $z(t)$ est l'abscisse de l'aimant.

L'aimant est modélisé par un dipôle magnétique $\vec{\mathcal{M}} = \mathcal{M}\vec{u}_z$.

a) Calculer le flux du champ magnétique de l'aimant au travers de la spire.

b) En déduire l'intensité i induite dans la spire.

c) Illustrer la loi de Lenz.

d) Quelle force doit-on exercer sur la spire pour la maintenir immobile ?

Remarque

Hors programme PT-PT*

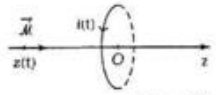


Figure 44

Conseils méthodologiques. Cet exercice fait intervenir les savoir-faire 1 (action d'un champ magnétique sur un conducteur) et 3 (induction de Neumann).

a) Rappelons le champ magnétique du dipôle (Fig 45) :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi r^3}(2\cos\theta\,\vec{u}_r + \sin\theta\,\vec{u}_\theta) .$$

Il s'agit d'évaluer :

$$\Phi = \iint_{spire} \vec{B}\cdot\vec{dS}$$

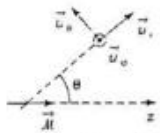


Figure 45

Pour cela, on peut choisir n'importe quelle surface s'appuyant sur le contour de la spire. La plus naturelle est le disque plan défini par la spire. Les points de cette surface ne sont pas tous à la même distance r du dipôle, et le calcul de l'intégrale est assez complexe. Il est préférable d'utiliser une autre surface s'appuyant sur la spire, et dont tous les points sont à la même distance du dipôle. Il s'agit de la calotte sphérique représentée en Fig. 46. Alors, $r = \sqrt{z^2 + a^2}$ et $\vec{dS} = dS\,\vec{u}_r$. On en déduit :

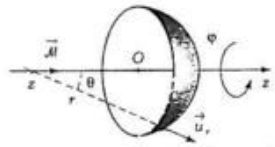


Figure 46

$$\Phi = N\iint_{spire}\frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi r^3}2\cos\theta\,dS = \frac{\mu_0 N\mathcal{M}}{2\pi(z^2 + a^2)^{3/2}}\iint\cos\theta\,dS$$

On exprime dS en coordonnées sphériques : $dS = r\,d\theta\,r\sin\theta\,d\varphi$, soit :

$$\Phi = \frac{\mu_0 N\mathcal{M}}{2\pi(z^2 + a^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{\theta_0}^{\pi}\sin\theta\cos\theta\,d\theta ,$$

avec $\sin\theta_0 = a/\sqrt{a^2 + z^2}$. Alors :

$$\Phi = \frac{\mu_0 N \mathcal{M}}{(z^2+a^2)^{1/2}}\left[\frac{1}{2}\sin^2\theta\right]_0^{\theta_0} = \frac{\mu_0 N \mathcal{M} a^2}{2(z^2+a^2)^{3/2}}$$

b) Grâce à la loi de Faraday, on déduit la force électromotrice induite dans la spire :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{3\mu_0 N \mathcal{M} a^2}{2(z^2+a^2)^{5/2}} \dot{z}z .$$

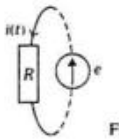


Figure 47

Le circuit équivalent est celui de la figure 47.

On obtient :

$$i = \frac{e}{R} = \frac{3\mu_0 N \mathcal{M} a^2}{2R(z^2+a^2)^{5/2}} \dot{z}z$$

⇒ **Remarque**

On a négligé dans ce problème l'auto-induction.

c) Rappelons la loi de Lenz : les effets de l'induction s'opposent aux causes qui lui ont donné naissance.

Dans le cas présent, la cause de l'induction est le champ $\vec{B}$ dont le flux au travers de la spire augmente (z^2 diminue).

Le courant induit i est de signe négatif (en effet, $\dot{z} < 0$ et $z > 0$) et la spire crée ainsi un champ magnétique $\vec{B}_{induit}$ de sens opposé à celui du dipôle.

Il est aussi possible de considérer comme cause de l'induction le rapprochement entre l'aimant et la spire. Les forces de Laplace exercées sur l'aimant et la spire vont tendre à les éloigner. C'est le but de la question suivante.

d) La spire est parcourue par un courant et placée dans le champ magnétique de l'aimant. Elle est ainsi soumise à la force de Laplace. La force élémentaire exercée sur un élément $\overrightarrow{d\ell}$ vaut (Fig. 48) :

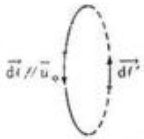


Figure 48

$$d\vec{f}_{Lap} = i(t)\overrightarrow{d\ell} \wedge \vec{B} = i(t)d\ell\, \vec{u}_\varphi \wedge \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi r^3}(2\cos\theta_0 \vec{u}_r + \sin\theta_0 \vec{u}_\theta)$$

$$d\vec{f}_{Lap} = i(t)a\,d\varphi\, \vec{u}_\varphi \wedge \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi r^3}(2\cos\theta_0 \vec{u}_r + \sin\theta_0 \vec{u}_\theta) = \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi r^3} i(t)a\,d\varphi(2\cos\theta_0 \vec{u}_\theta - \sin\theta_0 \vec{u}_r)$$

Si on considère deux éléments diamétralement opposés (Fig. 48), on remarque que seules les contributions selon $\vec{u}_z$ ne s'annulent pas (contrairement à celles perpendiculaires à $\vec{u}_r$). On ne s'intéresse alors qu'à la projection de $\vec{f}_{Lap}$ sur $\vec{u}_z$:

$$d\vec{f}_{Lap} \cdot \vec{u}_z = \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi r^3} i(t)a\,d\varphi(2\cos\theta_0 \vec{u}_\theta \cdot \vec{u}_z - \sin\theta_0 \vec{u}_r \cdot \vec{u}_z) = \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi r^3} i(t)a\,d\varphi(-2\sin\theta_0\cos\theta_0 - \sin\theta_0\cos\theta_0)$$

Alors :

$$d\vec{f}_{Lap} = -3N\int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi r^3} i(t)a\sin\theta_0\cos\theta_0 \vec{u}_r .$$

L'intégration est immédiate :

$$\vec{f}_{Lap} = -6\pi N \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi r^3} \frac{3\mu_0 N \mathcal{M} a^2}{2R(z^2+a^2)^{5/2}} \dot{z}za \frac{a}{\sqrt{a^2+z^2}} \frac{-z}{\sqrt{a^2+z^2}} \vec{u}_z .$$

Erreur à éviter

$\cos\theta_0 = -z\sqrt{a^2+z^2} < 0$ d'après la figure 44

Au final :

$$\vec{f}_{Lap} = \frac{9\mu_0^2 \mathcal{M}^2 a^4 \dot{z}z^2}{4R(a^2+z^2)^5} \vec{u}_z$$

On vérifie que ce résultat est bien en accord avec la loi de Lenz. Pour l'expérience en question, la force est selon $+\vec{u}_z$: la spire est repoussée dans la direction opposée à l'aimant (que s'approche), conformément à l'analyse précédente.

Clairement, un opérateur extérieur doit exercer la force $\vec{f}_{op} = -\vec{f}_{Lap}$ pour maintenir la spire immobile.

© Laurison – La reproduction non autorisée est un délit

Pour approfondir

9. Moteur linéaire — D'après CCP

Dans certains types de moteurs linéaires, un système statique (inducteur) crée dans le référentiel au repos $\mathcal{R}$ un champ glissant, auquel est soumise la partie mobile. Le système considéré est décrit sur la figure 49. Il se déplace sur des rails horizontaux, l'axe Oz étant vertical ascendant.

Dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$, un cadre conducteur $MNPQ$ carré de côté a, de centre C, composé de N spires identiques en série, se déplace avec la vitesse constante $\vec{v}_c = v_c \vec{u}_x$ dans le champ électromagnétique glissant :

$$\vec{B}(x,t) = B_m \cos(\omega(t - x/v_0))\vec{u}_z \quad \text{et} \quad \vec{E}(x,t) = B_m v_0 \cos(\omega(t - x/v_0))\vec{u}_y ,$$

où v_0 est une vitesse donnée et B_m une constante. À l'instant $t = 0$, le cadre est centré en O.

Soit $\mathcal{R}'$ un référentiel en translation rectiligne uniforme à la vitesse $\vec{v}$ par rapport à $\mathcal{R}$. On rappelle les formules de transformation pour les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$:

$$\vec{E}'(x',t') = \vec{E}(x,t) + \vec{v} \wedge \vec{B}(x,t) \quad \text{et} \quad \vec{B}'(x',t') = \vec{B}(x,t) .$$

x' et t' (x et t) sont les coordonnées d'un événement dans $\mathcal{R}$ ($\mathcal{R}'$). On rappelle $x' = x - vt$ et $t' = t$.

a) Donner les expressions des champs $\vec{B}_0(x_0,t)$ et $\vec{E}_0(x_0,t)$ dans le référentiel $\mathcal{R}_0$ pour lequel $v = v_0$. Commenter.

b) Donner les expressions des champs $\vec{B}_c(x_c,t)$ et $\vec{E}_c(x_c,t)$ dans le référentiel $\mathcal{R}_c$ dans lequel le cadre est immobile (Fig. 49). On fera intervenir $g_c = 1 - \frac{v_c}{v_0}$.

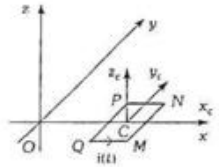


Figure 49

c) On se place dans le référentiel $\mathcal{R}_0$. Quelle est la vitesse $\vec{v}_{c0}$ du cadre ? Donner les abscisses de M et P en fonction du temps.

d) Calculer dans $\mathcal{R}_0$ la force électromotrice $e_0(t) = \oint (\vec{v}_{c0} \wedge \vec{B}_0) \cdot \overrightarrow{d\ell}$ en fonction notamment de g_c. Quelle est son amplitude e_{0m} ?

e) On donne :

$a = 0{,}3$ m, $B_m = 0{,}6$ T, $N = 100$, $\omega = 200\pi$ rad · s^{-1}, $v_0 = 60$ m · s^{-1} et $v_c = 58{,}2$ m · s^{-1}.

f) On se place dans le référentiel $\mathcal{R}_c$. Calculer le flux $\Phi_c(t)$ du champ magnétique à travers le circuit.

g) En déduire la force électromotrice $e_c(t)$ dans le référentiel $\mathcal{R}_c$.

h) Commenter le résultat.

i) Le cadre possède une résistance $r = 0{,}25\ \Omega$. Calculer l'intensité $i(t)$ qui le parcourt. Quelle est son amplitude I_m ?

j) Quelle est la résultante de la force de Laplace $\vec{f}_L(t)$ s'exerçant sur le cadre ? Donner la valeur moyenne $\langle \vec{f}_L \rangle$.

Application numérique pour $v_c = 58{,}2$ m · s^{-1}.

Conseils méthodologiques. Cet exercice explicite dans le cadre du moteur linéaire l'équivalence entre induction de Lorentz et induction de Neumann. Les savoir-faire 1 (action d'un champ magnétique sur un circuit), 3 (induction de Neumann) et 4 (induction de Lorentz) sont mis en pratique.

a) Dans $\mathcal{R}_0$, les formules de changement de référentiel s'expriment $t_0 = t$ et $x_0 = x - v_0 t$. Alors, $t - x/v_0 = -x_0/v_0$. Ainsi :

$$\vec{B}_0(x_0, t) = \vec{B}(x, t) = B_m \cos\left(\omega \frac{x_0}{v_0}\right)\vec{u}_z .$$

Ensuite :

$$\vec{E}_0(x_0, t) = \vec{E} + \vec{v}_0 \wedge \vec{B} = B_m v_0 \cos\left(\omega \frac{x_0}{v_0}\right)\vec{u}_y - B_m v_0 \cos\left(\omega \frac{x_0}{v_0}\right)\vec{u}_y = \vec{0}.$$

⇒ **Remarque**

On peut imaginer que le champ électromagnétique est créé par un aimant tiré à la vitesse uniforme v_0.

Dans $\mathcal{R}_0$, le champ magnétique est stationnaire et le champ électrique nul. Le référentiel avance à la même vitesse que les champs.

b) Le référentiel $\mathcal{R}_c$ possède la vitesse $\vec{v}_c = v_c \vec{u}_x$ par rapport à $\mathcal{R}$. Ainsi, $t_c = t$ et $x_c = x - v_c t$. Alors :

$$t - \frac{x}{v_0} = t - \frac{x_c + v_c t}{v_0} = g_c t - \frac{x_c}{v_0}.$$

On peut alors exprimer les champs :

$$\vec{B}_c(x_c, t) = B_m \cos\left(\omega\left(g_c t - \frac{x_c}{v_0}\right)\right)\vec{u}_z$$

$$\vec{E}_c(x_c, t) = B_m v_0 \cos\left(\omega\left(g_c t - \frac{x_c}{v_0}\right)\right)\vec{u}_y + v_c \vec{u}_x \wedge B_m \cos\left(\omega\left(g_c t - \frac{x_c}{v_0}\right)\right)\vec{u}_z$$

$$= B_m v_0 g_c \cos\left(\omega\left(g_c t - \frac{x_c}{v_0}\right)\right)\vec{u}_y .$$

Dans le référentiel lié au conducteur, le champ électromagnétique est variable.

c) La vitesse du cadre dans $\mathcal{R}_0$ est par composition des vitesses :

$$\vec{v}_{c0} = \vec{v}_c - \vec{v}_0 = (v_c - v_0)\vec{u}_x .$$

On déduit alors aisément l'abscisse des points M et P :

$$x_P = x_M = v_c - v_0 .$$

Comme $x_P(0) = -a/2$ et $x_M(0) = a/2$, on arrive à :

$$\boxed{x_P(t) = -\frac{a}{2} + (v_c - v_0)t} \quad \text{et} \quad \boxed{x_M(t) = \frac{a}{2} + (v_c - v_0)t}$$

d) Dans $\mathcal{R}_0$, le champ magnétique est stationnaire. Le conducteur est mobile dans un champ magnétique stationnaire : il est le siège d'une induction de Lorentz. L'énoncé propose l'évaluation de la force électromotrice avec le champ électromoteur :

$$e_0(t) = \oint (\vec{v}_{c0} \wedge \vec{B}_0) \cdot \vec{dl} = \oint \left[(v_c - v_0)\vec{u}_x \wedge B_m \cos\left(\omega \frac{x_0}{v_0}\right)\vec{u}_z\right] \cdot \vec{dl} = -B_m (v_c - v_0) \oint \cos\left(\omega \frac{x_0}{v_0}\right)\vec{u}_y \cdot \vec{dl}$$

Sur les côtés QM et NP, l'intégrale est nulle car $\vec{dl} \perp \vec{u}_y$. On déduit :

$$e_0(t) = -B_m (v_c - v_0) N \left(\int_P^Q \cos\left(\omega \frac{x_P}{v_0}\right) \vec{u}_y \cdot \vec{dl} \right) + \int_M^P \cos\left(\omega \frac{x_M}{v_0}\vec{u}_y \cdot \vec{dl}\right) .$$

On a multiplié par N car l'intégrale sur les N spires est égale à N fois l'intégrale sur une spire. Ensuite :

$$e_0(t) = -B_m (v_c - v_0) N a \left(-\cos\left(\omega \frac{-\frac{a}{2} + (v_c - v_0)t}{v_0} \right) + \cos\left(\omega \frac{\frac{a}{2} + (v_c - v_0)t}{v_0} \right) \right)$$

car $\vec{dl}$ est de sens opposé à $\vec{u}_y$ sur PQ. On factorise :

Technique de calcul

$$\cos p - \cos q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{q-p}{2}$$

$$\boxed{e_0(t) = 2 v_0 g_c B_m a N \sin\left(\frac{\omega a}{2 v_0}\right) \sin(\omega g_c t)}$$

L'*application numérique* donne : $g_c = 0{,}03$ et $e_{0m} = 65$ V.

e) Cette fois-ci, dans $\mathcal{R}_c$, le cadre est **immobile** et soumis à un champ magnétique dépendant du temps. Le cadre est le siège d'une induction de Neumann.

Le flux du champ magnétique s'écrit $\Phi_c(t) = \iint \vec{B}_c(M, t) \cdot \vec{dS}$. Le sens de la normale est donné par la règle du tire-bouchon de Maxwell à partir de l'orientation du contour (Fig. 50). Le cadre est contenu entre les abscisses $-a/2$ et $a/2$. Alors, en comptabilisant les N tours :

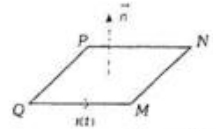


Figure 50

$$\Phi_c(t) = Na \int_{-a/2}^{a/2} B_m \cos\left(\omega\left(g_c t - \frac{x_c}{v_0}\right)\right)\vec{u}_z \cdot dx_c \vec{u}_z$$

$$= -NaB_m \frac{v_0}{\omega} \left[\sin\left(\omega\left(g_c t - \frac{x_c}{v_0}\right)\right) \right]_{-a/2}^{a/2}$$

$$\Phi_c(t) = -NaB_m a \frac{v_0}{\omega} \left(\sin\left(\omega\left(g_c t - \frac{a}{2v_0}\right)\right) - \sin\left(\omega\left(g_c t + \frac{a}{2v_0}\right)\right) \right).$$

Technique de calcul

$$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$$

Finalement : $\boxed{\Phi_c(t) = 2NB_m a \frac{v_0}{\omega} \sin\left(\frac{\omega a}{2v_0}\right) \cos(\omega g_c t)}$

f) La loi de Faraday indique :

$$\boxed{e_c(t) = -\frac{d\Phi_c}{dt} = 2N g_c B_m a v_0 \sin\left(\frac{\omega a}{2v_0}\right) \sin(\omega g_c t)}$$

g) On trouve exactement le même résultat pour la force électromotrice quel que soit le référentiel dans lequel on se place.

Induction de Neumann et induction de Lorentz correspondent à un même phénomène physique, l'induction.

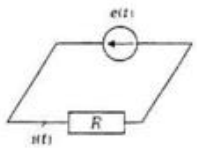


Figure 51

h) Le circuit équivalent est celui de la figure 51. On déduit ainsi :

$$i(t) = \frac{e_0(t)}{r} = \frac{2N g_c B_m a v_0}{r} \sin\frac{\omega a}{2v_0} \sin(\omega g_c t).$$

On trouve $i_m = 260$ A. Les courants engendrés sont très intenses.

i) La force de Laplace élémentaire s'exerçant sur un élément de longueur $\vec{dl}$ vaut $\vec{df}_L = i(t)\vec{dl} \wedge \vec{B}$. Cette force doit être la même dans tout référentiel galiléen, on se place dans $\mathcal{R}_c$.

On indique sur les quatre côtés la direction de $\vec{df}_L$ (Fig. 52). Les contributions de NP et QM s'annulent. Ce n'est pas le cas pour celles de PQ et MN car le champ magnétique y prend des valeurs différentes.

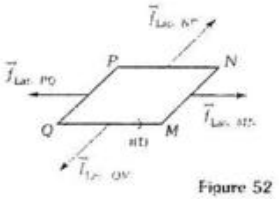


Figure 52

© Evidence - La photocopie non autorisée est un délit

Ainsi :

$$\vec{f}_L = N\left(\int_P^Q iB_r\left(-\frac{a}{2}\right)\mathrm{d}\ell\,(-\vec{u}_r) + \int_M^N iB_r\left(\frac{a}{2}\right)\mathrm{d}\ell\,(\vec{u}_r)\right)$$

$$\vec{f}_L = i(t)Na\left(B_r\left(\frac{a}{2}\right) - B_r\left(-\frac{a}{2}\right)\right)\vec{u}_x$$

$$\vec{f}_L = \frac{2Ng_c B_m a v_0}{r}\sin\frac{\omega a}{2v_0}\sin(\omega g_c t)\,NaB_m\left(\cos\omega\left(g_c t - \frac{a}{2v_0}\right) - \cos\omega\left(g_c t + \frac{a}{2v_0}\right)\right)\vec{u}_x$$

$$\vec{f}_L = \frac{4g_c N^2 a^2 B_m^2 v_0}{r}\sin^2\left(\frac{\omega a}{2v_0}\right)\sin^2(\omega g_c t)\,\vec{u}_x .$$

Au final :

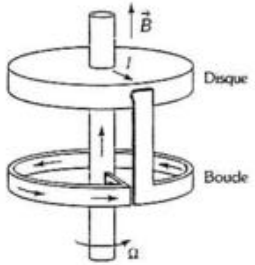
$$\boxed{\langle \vec{f}_L \rangle = \frac{2g_c N^2 a^2 B_m^2 v_0}{r}\sin^2\frac{\omega a}{2v_0}\,\vec{u}_x}$$

L'application numérique est $\langle \vec{f}_L \rangle = 4\,700$ N. Le moteur linéaire exerce ainsi une force motrice importante.

10. Génération spontanée du champ magnétique terrestre — D'après ENS

On considère un dispositif représenté en figure 53. Un disque conducteur est monté sur un axe vertical, également conducteur. L'ensemble peut tourner et est entraîné par un dispositif, non représenté. Une boucle conductrice, fixe, relie le bord du disque à l'axe par l'intermédiaire de deux frotteurs assurant un bon contact électrique. Ainsi, un courant électrique est susceptible de circuler, empruntant un itinéraire indiqué sur la figure par des flèches.

Ce dispositif n'est pas plongé dans un champ magnétique d'origine extérieure et ne comporte pas de générateur électrique. En dépit de cela, il est possible qu'un courant et un champ magnétique apparaissent spontanément.



Le système étudié

Figure 53

a) Expliquer pourquoi le disque, en présence d'un champ magnétique tel que celui indiqué sur la figure 53, engendre une fem. Montrer comment le courant qui en résulte peut engendrer un champ magnétique (direction et sens) et en déduire que la génération spontanée du champ est possible. Que se passe-t-il si le sens de rotation est inversé ?

b) On désigne par M l'inductance mutuelle entre le circuit et le disque. Rappeler la définition de cette quantité. Est-elle différente de l'inductance L de l'ensemble du circuit ? Supposant qu'il circule une intensité I et que le disque tourne à Ω, calculer la fem e apparaissant entre le centre et le bord du disque.

c) Montrer que le schéma électrique équivalent au dispositif est celui de la figure 54. On commentera l'origine des différents éléments. En déduire une équation différentielle en $I(t)$.

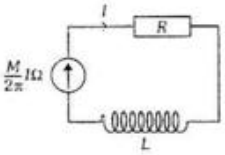


Figure 54

d) Du point de vue mécanique, le système disque + axe possède un moment d'inertie J et est soumis à un couple moteur constant Γ_m à un couple de frottement mécanique $-f\Omega$ et à un couple résistant supplémentaire dû aux effets magnétiques. Expliquer l'origine de ce dernier couple et pourquoi sa valeur est égale à $-MI^2/2\pi$. Écrire l'équation différentielle donnant l'accélération angulaire Ω.

© Ellipses – La photocopie non autorisée est un délit

e) Discuter les solutions stationnaires. Que dire de la génération spontanée du champ ? Montrer que le phénomène ne peut se produire que si la vitesse à vide $\Omega_{vide} = \Gamma/f$ est suffisante.

Conseils méthodologiques. Le problème modélisant simplement la dynamo terrestre fait appel aux savoir-faire 1 (action d'un champ magnétique sur un conducteur), 3 (induction de Neumann) et 4 (induction de Lorentz).

a) Si le disque est en mouvement avec $\Omega > 0$ (l'ensemble est entraîné par un dispositif fournissant le couple Γ), celui-ci soumis au champ magnétique $\vec{B}$ (orienté vers le haut) est le siège d'une force électromotrice $e = \int \vec{E}_m \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$, avec $\vec{E}_m = \vec{v} \wedge \vec{B}$. En prenant Ω et $\vec{B}$ dans le sens de la figure 53, le champ électromoteur sur le disque est selon $\vec{u}_r$, c'est-à-dire dans le sens de I choisi. Un courant induit $I > 0$ est alors engendré dans le circuit. Ce courant dans la boucle engendre un champ magnétique. La figure 53 indique que le champ engendré par la boucle vient renforcer le champ $\vec{B}$ ... Le phénomène s'amplifie. Tout champ magnétique infinitésimal peut engendrer spontanément un champ magnétique. Le même type de raisonnement reste valable si le champ magnétique est dans l'autre sens.

Si Ω change de sens, le champ électromoteur aussi, ainsi que l'intensité. Le champ magnétique engendré s'oppose au champ initial, le phénomène tend à disparaître.

Remarque

La loi de Lenz indique que les actions de Laplace sur le disque tendent à le freiner : $\Gamma_{Lap} < 0$ avec les conventions utilisées.

b) On appelle $\vec{B}$ le champ magnétique créé par le circuit (aucun champ extérieur n'existe). Alors, le flux de $\vec{B}$ au travers du disque est :

$$\Phi = \iint_{disque} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = MI .$$

Explicitons cette quantité :

$$\Phi = MI = \iint_{disque} (B_r(r,z)\vec{u}_r + B_z(r,z)\vec{u}_z) \cdot \mathrm{d}S\vec{u}_z = 2\pi\int_0^a B_z(r,z)\,r\,\mathrm{d}r$$

où a est le rayon du disque.

En effet, le champ magnétique (principalement créé par la boucle) est indépendant de la variable angulaire et n'a aucune coordonnée selon $\vec{u}_\theta$ (le plan passant par l'axe et un point M est un plan d'antisymétrie des courants et contient donc $\vec{B}$).

Erreur à éviter

Ce n'est pas à proprement parler une mutuelle inductance. En effet, le disque est une partie du circuit considéré alors qu'une mutuelle concerne deux circuits distincts.

Technique de calcul

On intègre sur des anneaux compris entre r et $r + \mathrm{d}r$.

Remarque

Voir le chapitre Magnétostatique pour davantage de précisions.

L'inductance propre concerne le flux de $\vec{B}$ à travers la **totalité** du circuit.

La fem e de Lorentz est :

$$e = \int_{centre}^{bord} (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \int_{centre}^{bord} (r\Omega\vec{u}_\theta \wedge (B_r(r,z)\vec{u}_r + B_z(r,z)\vec{u}_z)) \cdot \mathrm{d}r\vec{u}_r .$$

Alors :

$$\boxed{e = \int_0^a r\Omega B_z(r,z)\,\mathrm{d}r = \frac{\Omega}{2\pi}MI}$$

via la forme précédente de la mutuelle inductance.

c) Le disque est équivalent à un générateur de fem e sur lequel sont branchés une résistance R et une inductance L. Cela explique le schéma de la figure 54.
On déduit l'équation électrique :

$$\boxed{e = \frac{\Omega}{2\pi} MI = RI + L\frac{dI}{dt}}.$$

⇨ Remarque

Du point de vue électrique l'auto-induction est équivalente à considérer une inductance L dans le circuit

d) On applique le théorème du moment cinétique scalaire au disque :

$$J\dot{\Omega} = \Gamma - f\Omega + \Gamma_{Lap}.$$

Le disque est parcouru par des courants et soumis à un champ magnétique : il subit l'action des forces de Laplace. Pour un élément $\overrightarrow{dl}$, la force élémentaire est $d\vec{f}_{Lap} = I\overrightarrow{dl} \wedge \vec{B}$. Le moment élémentaire est alors :

$$d\vec{\Gamma}_{Lap} = \vec{r} \wedge d\vec{f}_{Lap} = r\vec{u}_r \wedge (I dr\,\vec{u}_r \wedge (B_r(r,z)\vec{u}_r + B_z(r,z)\vec{u}_z)) = Ir\,dr B_z(r,z)\vec{u}_r \wedge (-\vec{u}_\theta) = -Ir\,dr B_z(r,z)\vec{u}_z$$

On déduit au final :

$$\Gamma_{Lap} = \int d\vec{\Gamma}_{Lap} \cdot \vec{u}_z = -I\int_0^a r B_z(r,z)\,dr = -\frac{MI^2}{2\pi}.$$

en faisant intervenir le coefficient de mutuelle inductance. Alors :

$$\boxed{J\dot{\Omega} = \Gamma - f\Omega - \frac{MI^2}{2\pi}}$$

e) On s'intéresse aux solutions stationnaires, c'est-à-dire telles que $I = 0$ et $\dot{\Omega} = 0$.
L'équation électrique devient :

$$\frac{\Omega}{2\pi} MI = RI.$$

et l'équation mécanique :

$$\Gamma - f\Omega - \frac{MI^2}{2\pi} = 0.$$

La première solution est $\boxed{I = 0}$. Dans ce cas, $\boxed{\Omega = \Omega_{vide} = \Gamma/f}$. Le disque tourne à vitesse constante sous l'action d'un couple extérieur contré par un frottement fluide. Aucun phénomène inductif n'a lieu. Notamment, aucun champ magnétique n'est engendré.
L'autre possibilité pour satisfaire à l'équation électrique est $\boxed{\Omega = 2\pi R/M}$. Dans ce cas :

$$\boxed{I^2 = \frac{2\pi}{M}\left(\Gamma - f\frac{2\pi R}{M}\right)}.$$

Cette équation n'a de solution que si $\Omega_{vide} = \Gamma/f > 2\pi R/M$. Deux solutions correspondent en fait à ce cas, avec des intensités et des champs magnétiques de sens opposés.
Cela peut constituer un début d'explication aux retournements du champ magnétique terrestre.

⇨ Remarque

Ce point est en conformité avec l'analyse préliminaire

© Laurence - La photocopie non autorisée est un délit

Transferts thermiques

Méthodes

Le cours en questions

1 ■ Généralités

1.1 Nommer les différents types de transferts thermiques.

• Il existe trois modes de transferts thermiques : conduction, convection et rayonnement.

1.2 Qu'est-ce qu'un flux thermique ?

• Un flux thermique Φ_S correspond à la puissance thermique traversant une surface S (son unité est donc le watt).

⇒ En d'autres termes, c'est une énergie par unité de temps.

• On définit la densité surfacique de flux thermique φ telle que le flux de φ au travers d'une surface S est Φ_S : $\Phi_S = \iint_S \varphi \cdot dS$ (son unité est $W \cdot m^{-2}$).

⇒ On appelle aussi φ flux surfacique.

© Lavoisier – La photocopie non autorisée est un délit

2 ■ Conduction thermique

2.1 Décrire le sens physique de la conduction thermique.

Pour des atomes, l'énergie cinétique moyenne à la température T est $\langle Ec \rangle = \frac{3}{2} kT$, où :
$k = R/N$
$= 1{,}38\ 10^{-23}\ J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}$
est la constante de Boltzmann.

• La température est liée au niveau microscopique à l'énergie cinétique des constituants de la matière.

• Si localement, la température est élevée, les constituants de la matière ont une énergie cinétique moyenne élevée. Lors de chocs avec des particules provenant de zones de plus basse température, de l'énergie cinétique va être transférée de particules d'énergie cinétique élevée à celles de faible énergie cinétique. La température de la zone de faible température augmente, contrairement à celle de la zone de haute température : c'est la diffusion thermique.

2.2 Qu'est-ce que le vecteur densité de flux thermique de conduction ?

Il existe un parallèle avec le vecteur de Poynting dont le flux est égal à la puissance électromagnétique traversant une surface ici, il s'agit d'une puissance thermique de conduction.

• On appelle $\Phi_{c,S}$ le flux thermique de conduction à travers une surface S. On définit $\vec{j}_Q$, nommé vecteur densité de flux thermique tel que $\Phi_{c,S} = \iint_S \vec{j}_Q \cdot \overrightarrow{dS}$. Son unité est le $W \cdot m^{-2}$.

• Sa direction indique la direction dans laquelle est réalisé le transfert thermique de conduction et sa norme l'intensité de ce transfert.

2.3 Qu'est-ce que la loi de Fourier ?

• La loi phénoménologique de Fourier postule : $\vec{j}_Q = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}\, T$.

Le signe moins traduit le fait que le flux thermique est dirigé des hautes vers les basses températures, contrairement à $\overrightarrow{\text{grad}}\, T$. λ est la conductivité thermique du milieu considéré (en $W \cdot K^{-1} \cdot m^{-1}$).

2.4 Réaliser une analogie avec un autre domaine de la physique.

• Il existe une analogie entre la conduction thermique et la conduction électrique. Le tableau met les lois en parallèle :

Les mécanismes physiques à l'origine de la conduction thermique et électrique sont similaires. Par exemple, un bon conducteur électrique est généralement un bon conducteur thermique.

conduction thermique	$\Phi_c = \iint_S \vec{j}_Q \cdot \overrightarrow{dS}$	$\vec{j}_Q = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}\, T$
conduction électrique	$I = \iint_S \vec{j} \cdot \overrightarrow{dS}$	$\vec{j} = \gamma \vec{E} = -\gamma \overrightarrow{\text{grad}}\, V$

2.5 Qu'est-ce qu'une résistance ou conductance thermique ?

• Soit un milieu conducteur dont les extrémités sont portées aux températures fixes T_1 et T_2 (Fig. 1) et dont la surface latérale est calorifugée. On appelle Φ le flux thermique dans le sens de T_1 vers T_2. Alors, on pose en régime stationnaire

$$R_{th} = \frac{T_1 - T_2}{\Phi} \quad .$$

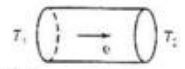


Figure 1

Son unité est le $K \cdot W^{-1}$. Elle est homogène à l'inverse d'une longueur multipliée par une conductivité thermique.

⇒ On retrouve par analogie la définition d'une résistance électrique : $T \leftrightarrow V$ et $\Phi \leftrightarrow I$.

• La conductance thermique G_{th} est l'inverse de la résistance thermique :

$$G_{th} = \frac{1}{R_{th}} = \frac{\Phi}{T_1 - T_2} \quad .$$

2.6 Quelle est l'équation de la chaleur (ou de diffusion) ?

• C'est une équation aux dérivées partielles vérifiée par la température dans un milieu de masse volumique ρ, capacité thermique massique à pression constante c_p et conductivité thermique λ. Elle s'obtient en appliquant le premier principe de la thermodynamique à un volume élémentaire :

$$\lambda \Delta T = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad .$$

⇒ Démonstration à connaître, voir le savoir-faire 2.

• $D = \lambda / \rho c_p$ est appelé coefficient de diffusion. Il est homogène au carré d'une longueur divisé par un temps. Les phénomènes diffusifs sont irréversibles et vérifient $L(t) \propto \sqrt{Dt}$, où L est la longueur sur laquelle le transfert thermique de diffusion a eu lieu pendant le temps t. La diffusion est donc peu efficace pour des temps longs.

⇒ L'équation de la chaleur sans terme de source prend aussi la forme plus générale, qui ne présuppose pas la loi de Fourier :

$$\operatorname{div} \vec{j}_Q + \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad .$$

• S'il existe un « terme de source » (production ou consommation volumique d'énergie, par exemple par effet Joule, réaction chimique exo ou endothermique), alors on définit $p(M,t)$ puissance volumique algébrique « créée » (en $W \cdot m^{-3}$, > 0 pour un dégagement d'énergie, < 0 pour une absorption), alors :

$$\lambda \Delta T + p = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad .$$

3 ■ Quelques notions de convection

⇒ Hors programme PT-PT*.

3.1 Décrire l'origine de la convection thermique.

• La convection est le mouvement macroscopique d'une certaine quantité de matière.

⇒ L'enthalpie est la grandeur thermodynamique pertinente pour une transformation à pression constante.

• Conjointement à ce transport de matière peut exister un transport d'enthalpie.

Par exemple, de l'air frais soufflé au contact d'un solide chaud va échanger de l'enthalpie avec le solide, il s'agit de convection.

• On distingue la convection forcée (agitation avec une cuillère dans une casserole) et la convection naturelle (élévation de l'air chaud dans l'atmosphère).

3.2 Quelle est l'expression d'un transfert thermique conducto-convectif ?

• À la surface d'un solide en contact avec un fluide, la densité de flux conducto-convectif est :

$$\vec{j}_{cc} = h(T_s - T_f)\vec{n}_{ext} \quad .$$

où T_s est la température de surface du solide, T_f la température du fluide et $\vec{n}_{ext}$ la normale extérieure au solide. h est appelé coefficient de Newton (en $W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$). On vérifie que, pour $T_s > T_f$, le flux thermique est dirigé vers l'extérieur du solide.

• À un échange conducto-convectif de surface S et caractérisé par le coefficient de Newton h est associée la résistance thermique $R_{th} = \frac{1}{hS}$.

Hors programme PT-PT*. ⇐

4 ■ Rayonnement thermique

4.1 Décrire l'origine physique du rayonnement thermique.

Ce phénomène est une application du cours sur le rayonnement dipolaire : toute charge accélérée rayonne ⇐

• Tout corps à une température $T > 0$ émet un rayonnement dû à l'agitation thermique ; c'est le rayonnement thermique.

4.2 Quels sont les différents termes intervenant dans un bilan énergétique à la surface d'un corps opaque ?

L'inverse est un corps transparent : le rayonnement électromagnétique peut se propager sans pertes. ⇐

• On appelle corps opaque un corps à l'intérieur duquel le rayonnement électromagnétique ne peut pas se propager. Certains corps réels possèdent une bonne opacité dans un certain domaine spectral.

Le caractère réfléchi ou diffusé dépend de l'état lisse ou rugueux de la surface du corps. ⇐

• À la surface d'un corps opaque, le rayonnement incident (i) peut être absorbé (a) ou réfléchi-diffusé (r) (Fig. 2). En passant en flux surfaciques, on obtient : $\varphi_i = \varphi_a + \varphi_r$.

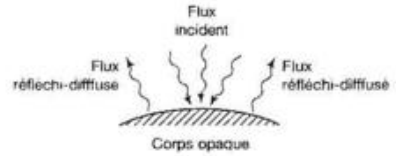


Figure 2

• On appelle flux surfacique partant (p) la somme des flux surfaciques quittant le corps opaque (Fig. 3). Il est constitué du flux réfléchi diffusé et du flux émis (e) : $\varphi_p = \varphi_r + \varphi_e$.

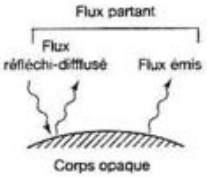


Figure 3

Le flux réfléchi-diffusé est directement lié au flux incident (si brutalement, ce dernier s'annule, alors il en sera de même pour le flux réfléchi-diffusé), contrairement au flux émis.

4.3 Quand y a-t-il équilibre radiatif ?

• On appelle bilan radiatif surfacique la différence des flux surfaciques partant et incident :

$$\varphi_R = \varphi_p - \varphi_i = \varphi_e - \varphi_a \quad .$$

• L'équilibre radiatif (surfacique) est atteint si $\varphi_p = \varphi_i$, ce qui est équivalent à $\varphi_e = \varphi_a$. Le corps émet autant de rayonnement qu'il en absorbe.

4.4 Qu'est-ce que la loi de Planck ?

• La densité spectrale en longueur d'onde de flux thermique surfacique φ^λ est telle que $d\varphi = \varphi^\lambda(\lambda)\,d\lambda$ est la partie du flux surfacique φ comprise entre les fréquences λ et $\lambda + d\lambda$. En conséquence, $\varphi = \int_0^\infty \varphi^\lambda(\lambda)\,d\lambda$.

φ^λ s'exprime en $W \cdot m^{-3}$.

• On définit de même la densité spectrale en fréquence de flux thermique surfacique φ^ν telle que $d\varphi = \varphi^\nu(\nu)\,d\nu$ est la partie du flux surfacique φ comprise entre les fréquences ν et $\nu + d\nu$. En conséquence, $\varphi^\nu\,d\nu = \varphi^\lambda\,d\lambda$.

φ^ν s'exprime en $W \cdot m^{-2} \cdot Hz^{-1}$.

• La loi de Planck indique qu'à l'équilibre thermodynamique, dans une cavité à l'intérieur d'un corps opaque à la température T (Fig. 4) :

$$g(\lambda) = \varphi_i^\lambda = \varphi_p^\lambda = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\dfrac{hc}{\lambda kT} - 1} \quad .$$

En revanche, les flux absorbés et émis sont inconnus. La condition d'équilibre thermodynamique est très restrictive et peu utile en pratique pour réaliser des bilans. Elle implique notamment l'équilibre radiatif.

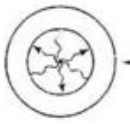


Figure 4

Cette formule n'est pas à retenir.

Cette fonction $g(\lambda)$ est universelle : elle ne dépend pas de la nature du matériau dans lequel est taillée la cavité. Elle caractérise le rayonnement d'équilibre thermique.

$h = 6{,}64\ 10^{-34}$ J · s est la constante de Planck

et $k = R/N = 1{,}38\ 10^{-23}$ J · K^{-1} · mol^{-1} la constante de Boltzmann.

© Larousse - La photocopie non autorisée est un délit

4.5 Rappeler la définition d'un corps noir. Quelles sont les conséquences ?

• Un corps noir est un corps absorbant tout le rayonnement incident : $\varphi_a = \varphi_i$, c'est-à-dire que le flux réfléchi-diffusé est nul : $\varphi_r = 0$.

• Le corps noir est une notion purement théorique. Cependant certains corps absorbent quasi totalement le rayonnement dans une certaine fenêtre dite d'absorption : corps noirci à la fumée pour le visible, verre dans une partie de l'infrarouge.

4.6 Que dire d'un corps noir en équilibre thermodynamique local ?

Cette condition est nettement moins contraignante que l'équilibre thermodynamique qui implique une température uniforme et la nullité du flux radiatif spectral.

• Un corps est dit à l'équilibre thermodynamique local s'il est possible de définir localement une température $T(M,t)$.

• Pour un corps noir à l'équilibre thermodynamique local :

$$\varphi_p^\lambda = \varphi_e^\lambda = g(\lambda) \quad .$$

En revanche, les flux surfaciques absorbés et incidents (qui sont égaux) possèdent des valeurs dépendant des conditions expérimentales.

4.7 Énoncer la loi de déplacement de Wien.

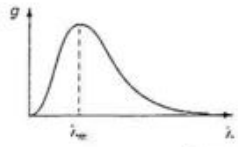


Figure 5

• La fonction $g(\lambda)$ donnée par la loi de Planck (Fig. 5) admet un maximum à la longueur d'onde λ_m telle que $\lambda_m T = 2\,900\ \mu m \cdot K$: c'est la loi de déplacement de Wien. De plus, 98 % du rayonnement correspondant est compris entre $\lambda_m/2$ et $8\lambda_m$.

Cela correspond à l'aire sous la courbe de la figure 5.

• Les résultats précédents sont par conséquent valables pour le rayonnement émis φ_e ou partant φ_p d'un corps noir à l'équilibre thermodynamique local.

4.8 Qu'est-ce que la loi de Stefan ?

• Le flux surfacique total correspondant à la loi de Planck vaut :

$$\int_0^\infty g(\lambda)\,d\lambda = \sigma T^4$$

où $\sigma = 5{,}7\ 10^{-8}$ W · m^{-2} · K^{-4} est la constante de Stefan.

• Ce résultat s'applique au flux émis (ou partant) par la surface d'un corps noir à l'équilibre thermodynamique local :

$$\varphi_e = \varphi_p = \sigma T^4 \quad .$$

Les savoir-faire clefs

1 ■ Savoir établir un bilan global d'énergie.

Conseils méthodologiques

La cuve d'un réacteur chimique contient des réactifs en solution aqueuse de masse $m_0 = 10^4$ kg bien homogénéisée a la température initiale $\theta_0 = 20$ °C. La température à un instant t est notée $\theta(t)$. La température extérieure vaut θ_0 et est constante. La pression est la pression standard P_0. La capacité thermique à pression constante de la solution est $c_p = 4{,}2\ 10^3\ \text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ (on néglige celle des parois). On admet que les échanges thermiques avec l'extérieur sont bien représentés par la loi de Newton : la puissance transférée à l'extérieur est $P = K(\theta - \theta_0)$, et on posera $x = \theta - \theta_0$.

a) Quel nom donner à K ? Pour l'évaluer, on procède à l'essai suivant. On remplit le réacteur d'une masse m_0 de solution aqueuse à la température $\theta_1 = 80$ °C. On laisse évoluer le système. Après une durée $T = 3$ h, la température est $\theta_2 = 40$ °C.

b) Trouver une équation différentielle satisfaite par $x(t)$.

c) En déduire K.

1.b) Appliquer le premier principe de la thermodynamique à la cuve et son contenu.

1.a) La constante K se définit comme le quotient d'un flux thermique par une différence de température. C'est donc une **conductance thermique**.

b) On définit le système étudié comme la cuve et son contenu. On lui applique le premier principe entre les instants t et $t + dt$ pour la transformation à pression constante :

$$dH = \delta Q + \delta W^*,$$

où δW^* représente le travail autre que celui des forces de pression :

- le seul travail est celui des forces de pression, ainsi $\delta W^* = 0$.
- $\delta Q = -P\,dt = -Kx\,dt$. Le signe moins provient du fait que cette énergie est transférée à l'extérieur. Par exemple, si $\theta > \theta_0$, le système refroidit en cédant de l'énergie. Alors, selon les conventions thermodynamiques, $\delta Q < 0$;
- pour le contenu du réacteur, $dH = m_0 c_p\,d\theta = m_0 c_p\,dx$. Au final :

$$\boxed{m_0 c_p \dot{x}(t) = -Kx(t)}.$$

c) On résout l'équation précédente : $x(t) = A \exp\left(-\dfrac{K}{m_0 c_p} t\right)$.

Comme de plus, $x(0) = x_0$, on déduit :

$$\boxed{x(t) = x_0 \exp\left(-\frac{K}{m_0 c_p} t\right)}.$$

© Linotelier – La photocopie non autorisée est un délit

La durée typique de décroissance de la température est $\tau = m_0 c_p / K$.

Or $\dfrac{x(T)}{x_0} = \exp\left(-\dfrac{T}{\tau}\right) = \dfrac{40 - 20}{80 - 20} = \dfrac{1}{3}$. Alors, $\tau = T/\ln 3 = 9\,800$ s. On en déduit :

$$K = \frac{m_0 c_p}{\tau} = 4{,}3\ 10^3\ \text{W} \cdot \text{K}^{-1}.$$

2 ■ Savoir établir un bilan local d'énergie.

Conseils méthodologiques

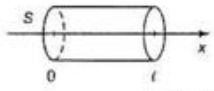


Figure 6

2.1 Soit une barre conductrice thermique de conductivité λ, de longueur ℓ, de surface S et calorifugée latéralement (Fig. 6). L'extrémité gauche est maintenue à T_1, et la droite à T_2. On se place en régime stationnaire et on suppose que toutes les grandeurs d'intérêt ne dépendent que de x.

a) Appliquer le premier principe de la thermodynamique au système constitué par la portion de la barre entre x et $x + dx$. On supposera que la pression reste constante.

b) Résoudre l'équation différentielle obtenue.

c) Évaluer les flux aux deux extrémités de la barre : $\Phi(x = 0)$ et $\Phi(x = \ell)$. On prendra les flux dans la direction $+\vec{u}_x$. Commenter les signes obtenus.

d) Plus généralement, calculer $\Phi(x)$ et expliquer le résultat obtenu.

2.1.c) Appliquer la loi de Fourier.

2.2 Même principe que le savoir-faire précédent, mais nettement plus délicat à cause de la géométrie sphérique.

2.2 Une boule de rayon R, de conductivité thermique λ, est le siège de réactions nucléaires dégageant uniformément sur tout le volume la puissance P. La température à la surface est notée T_0. Le régime est supposé stationnaire.

a) Appliquer le premier principe la thermodynamique au système constitué de la coquille sphérique entre r et $r + dr$. Pour cela, on évaluera notamment le transfert thermique aux frontières du système et la puissance dégagée à l'intérieur du système.

b) En déduire une équation différentielle satisfaite par j_Q.

c) Intégrer l'équation pour j_Q.

d) En déduire l'évolution de la température dans la boule.

2.3 Appliquer le premier principe au système compris entre x et $x + dx$.

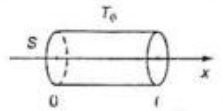


Figure 7

2.3 Une barre cylindrique, conductrice thermique de conductivité λ, masse volumique ρ, capacité calorifique à pression constante c_p, de longueur ℓ, de rayon R est plongée dans un fluide de température T_0 (Fig. 7). Le coefficient de Newton caractérisant le transfert conducto-convectif entre la barre et le fluide est noté h. Sachant que la température est homogène sur une section droite de la barre, trouver une équation aux dérivées partielles satisfaite par la température dans la barre.

où $\delta^2 W^*$ représente le travail des actions autres que les forces de pression.

2.1.a) Le système est celui indiqué par l'énoncé (Fig. 8). Le premier principe appliqué à ce système entre les instants t et $t + dt$ donne :

$$d^2 H = \delta^2 Q + \delta^2 W^*.$$

Figure 8

Les grandeurs considérées (comme d^2H) sont deux fois élémentaires : le système a pour longueur dx et la durée dt est infinitésimale.

- $\delta^2 W^* = 0$ dans ce problème ;
- les transferts thermiques ont lieu au travers des frontières du système en x et en $x + dx$. En x, le flux selon $+\vec{u}_x$ est entrant, on le compte donc avec un signe plus (convention thermodynamique). En $x + dx$, le flux selon $+\vec{u}_x$ est sortant (Fig. 8). Il convient donc de le comptabiliser avec un signe moins. Au total, $\delta^2 Q = (j_Q(x)S - j_Q(x+dx)S)dt$;
- enfin, la variation d'enthalpie du système entre t et $t + dt$ est nulle. En effet, l'enthalpie est une fonction d'état. Comme le régime est stationnaire, l'état final est identique à l'état initial et la variation d'enthalpie est nulle : $d^2H = 0$.

Au final, $0 = (j_Q(x)S - j_Q(x+dx)S)dt$. On divise alors par dx dans la limite $dx \to 0$:

$$\frac{j_Q(x) - j_Q(x+dx)}{dx} = -\frac{dj_Q}{dx} = 0.$$

La loi de Fourier indiquant $j_Q = -\lambda \frac{dT}{dx}$, on en déduit l'équation vérifiée par la température : $\boxed{T''(x) = 0}$.

On retrouve un cas particulier de l'équation de la chaleur. Cette question est directement issue du cours et doit être traitée sans hésitation.

b) On résout $T''(x) = 0$, soit $T'(x) = a$ et $T(x) = ax + b$ (a et b sont des constantes). Les conditions aux limites imposent $T(0) = T_1$ et $T(\ell) = T_2$. Alors :

$$\boxed{T(x) = \frac{T_2 - T_1}{\ell} x + T_1}.$$

La température varie linéairement dans la barre.

En fait, la continuité de la température n'est pas une nécessité. Elle n'est d'ailleurs pas vérifiée en présence de conducto-convection (cf. Exercice d'approfondissement 6). Elle l'est *a priori* pour des contacts entre solides.

c) On évalue tout d'abord le vecteur densité de courant thermique $\vec{j}_Q$:

$$\vec{j}_Q = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}\, T = -\lambda \frac{T_2 - T_1}{\ell} \vec{u}_x.$$

Tout comme son analogue électrique, l'intensité, le flux thermique nécessite le choix préalable d'une convention de signe.

On s'intéresse aux flux thermiques dans le sens $+\vec{u}_x$, d'où :

$$\Phi(x) = \iint_S \vec{j}_Q(x) \cdot (dS\, \vec{u}_x) = j_Q(x)S = -\lambda T'(x)S.$$

Ainsi :

$$\Phi(0) = -\lambda T'(0)S = -\lambda \frac{T_2 - T_1}{\ell} S = -\lambda T'(\ell)S = \Phi(\ell).$$

Les flux à l'entrée et à la sortie de la barre sont égaux. En effet, comme le régime est stationnaire, la même quantité d'énergie thermique doit entrer et sortir. Sinon, la température globale de la barre augmenterait ou diminuerait forcément.

© Lavoisier - La photocopie non autorisée est un délit

Supposons $T_1 > T_2$. Le transfert thermique a dans ce cas lieu de la gauche vers la droite (du chaud vers le froid). Alors, $\Phi(0)$ et $\Phi(\ell)$ sont bien positifs (rappelons que ces flux sont positifs s'ils sont dans le sens $+\vec{u}_x$.

De manière plus formelle, cela revient à dire que le vecteur densité de courant thermique est à flux conservatif : $\text{div}\, \vec{j}_Q = 0$ en régime stationnaire et en l'absence de source.

d) Comme $T'(x) = \text{cte}$, on se convainc rapidement que $\Phi(x)$ ne dépend pas de x. Le sens physique est très clair. Considérons deux sections droites en x_1 et x_2. Les flux en x_1 et x_2 sont nécessairement égaux sinon le bilan thermique sur le système compris entre ces deux abscisses ne serait pas nul et la température de ce morceau évoluerait.

2.2. a) On utilise les coordonnées sphériques. Vu les invariances par toutes les rotations autour du point O, la température ne dépend que de la distance à ce point, soit $T = T(r)$.

Le système étudié est indiqué en Fig. 9. Appliquons-lui le premier principe de la thermodynamique entre t et $t + dt$: $d^2H = \delta^2Q + \delta^2W^*$.

Figure 9

Successivement :

Erreur à éviter
Les surfaces correspondant aux sphères de rayon r et $r + dr$ sont différentes. Il est absolument nécessaire de les distinguer.

- les échanges thermiques se font au travers des sphères de rayons r et $r + dr$. On prend les flux selon $+\vec{u}_r$. En conséquence, le flux au travers de la sphère de rayon r ($r + dr$) est rentrant (sortant) et compté positivement (négativement). Alors, $\delta^2Q = (j_Q(r)S_r - j_Q(r+dr)S_{r+dr})dt$. S_r est la surface de la sphère de rayon r : $S_r = 4\pi r^2$;
- les désintégrations radioactives correspondent à une certaine énergie libérée. Le plus simple est de les considérer comme un travail reçu par le système. La puissance dégagée pour toute la sphère est P. En conséquence, celle correspondant au système est :

$$P\frac{4\pi r^2\, dr}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3P}{R^3} r^2 dr.$$

Le volume de la coquille sphérique est $4\pi r^2 dr$. On l'évalue comme la surface de la sphère de rayon r, soit $4\pi r^2$, multipliée par l'épaisseur dr. C'est aussi la différence des volumes des boules de rayons $r + dr$ et r.

On obtient alors : $\delta^2W^* = \frac{3Pr^2 dr}{R^3} dt$;

Erreur à éviter
Ne pas inclure dans le premier principe appliqué à la coquille sphérique entre r et $r + dr$ l'énergie dégagée dans d'autres secteurs de la boule.

- le régime étant stationnaire, l'enthalpie du système n'évolue pas : $d^2H = 0$.

Alors :

$$\boxed{(j_Q(r)4\pi r^2 - j_Q(r+dr)4\pi(r+dr)^2)dt + \frac{3Pr^2}{R^3} dr\, dt = 0}.$$

b) On simplifie par dt et divise par dr dans la limite $dr \to 0$:

Erreur à éviter
Bien garder dans la dérivée le terme du vecteur densité de courant multiplié par la surface, les calculs qui suivent en seront allégés.

$$\boxed{-\frac{d}{dr}(j_Q(r)4\pi r^2) + \frac{3Pr^2}{R^3} = 0}.$$

c) On intègre :

$$-j_Q(r)4\pi r^2 + \frac{Pr^3}{R^3} = \text{cte}.$$

On détermine la constante : quand $r \to 0$, les deux termes de gauche tendent vers 0. Ainsi :

$$\boxed{j_Q(r) = \frac{Pr}{4\pi R^3}}.$$

d) La loi de Fourier donne dans cette symétrie $j_Q(r) = -\lambda\frac{dT}{dr}$. Alors :

$$-\lambda\frac{dT}{dr} = \frac{Pr}{4\pi R^3}.$$

En intégrant :

$$T(r) = -\frac{Pr^2}{8\pi\lambda R^3} + \text{cte}.$$

Enfin, la température en surface est T_0 : $T(R) = T_0$. Au final :

$$\boxed{T(r) = T_0 + \frac{P}{8\pi\lambda R^3}(R^2 - r^2)}.$$

On vérifie bien que la température est maximale au centre de la boule.

2.3 Choisissons comme système la partie de la barre comprise entre x et $x + dx$. Appliquons-lui le premier principe de la thermodynamique : $d^2H = \delta^2Q + \delta^2W^*$, et évaluons successivement les termes :

- les transferts thermiques se font aux frontières du système : en x, en $x + dx$ et aussi sur la paroi latérale (Fig. 10). Pour les deux premiers, on a la contribution usuelle $(j_Q(x,t)S - j_Q(x+dx,t)S)dt$. Il ne faut pas oublier le terme conducto-convectif $-h(T(x,t) - T_0)S_\ell\,dt$.

Alors, en utilisant $S = \pi R^2$ et $S_\ell = 2\pi R\,dx$, on obtient :

$$\delta^2Q = (j_Q(x,t) - j_Q(x+dx,t))\pi R^2\,dt - h(T(x,t) - T_0)2\pi R\,dx\,dt\ ;$$

- il n'existe aucun travail autre que celui des forces de pression : $\delta^2W^* = 0$;
- enfin, l'enthalpie de ce système élémentaire est :

$$dH = dmc_pT = \rho S\,dx\,c_pT,$$

et sa variation élémentaire :

$$d^2H = \rho\pi R^2\,dx\,c_p\,dT, \quad \text{où } dT = T(x,t+dt) - T(x,t).$$

On égale les termes, en divisant par dt dans la limite $dt \to 0$:

$$\rho c_p\,dx\frac{\partial T}{\partial t}(x,t) = (j_Q(x,t) - j_Q(x+dx,t)) + \frac{2h}{R}(T_0 - T(x,t))dx.$$

Enfin, on divise par dx, en réalisant $dx \to 0$:

$$\boxed{\rho c_p\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial j_Q}{\partial x} + \frac{2h}{R}(T_0 - T) = \lambda\frac{\partial T^2}{\partial x^2} + \frac{2h}{R}(T_0 - T)}.$$

On obtient l'équation de la chaleur, à laquelle il faut ajouter un terme dû à l'échange conduco-convectif.

Erreur à éviter
Ne pas oublier le signe moins : si $T(x,t) > T_0$, le transfert thermique est dirigé vers l'extérieur, ce qui contribue à la diminution de l'enthalpie du système.

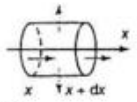


Figure 10

On rappelle :
$$\frac{\partial T}{\partial t}(x,t) = \lim_{dt\to 0}\frac{T(x,t+dt) - T(x,t)}{dt}.$$

© Larousse – La photocopie non autorisée est un délit

Conseils méthodologiques

3 ■ Savoir calculer une résistance ou conductance thermique.

On considère un système unidimensionnel comme la barre décrite au savoir-faire 2.1.

3.a) et b) Utiliser le Cours en questions **2.5.**, et les résultats du savoir-faire 2.1.

a) Faire une analogie électrique.

b) Quelles sont les résistance et conductance thermiques d'un mur en béton ?
On donne : $\lambda = 1{,}5\ \text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$, $S = 10\ \text{m}^2$ et $\ell = 20\ \text{cm}$.

3.c) Résistances en série.

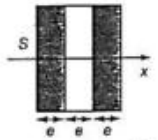


Figure 11

c) On s'intéresse à un double vitrage, constitué de trois milieux consécutifs de mêmes épaisseur e et section S. Les milieux extrêmes sont en verre, de conductivité $\lambda_{verre} = 1{,}0\ \text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ et celui du milieu en air, de conductivité $\lambda_{air} = 2{,}6\ 10^{-2}\ \text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ (Fig. 11). Quelle est la résistance thermique de cet ensemble ?

d) Comparer à la résistance thermique d'une vitre simple d'épaisseur e.

e) Esquisser le profil de la température dans le double vitrage.

3.a) La situation électrique analogue est indiquée sur la figure 12. C'est une résistance de longueur ℓ, section S et conductivité γ. L'une de ses extrémités est au potentiel V_1 et l'autre à V_2.

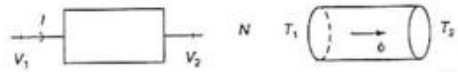


Figure 12

b) De même qu'on définit la résistance électrique par $R = (V_1 - V_2)/I$, la résistance thermique est $R_{th} = (T_1 - T_2)/\Phi$, le flux et l'intensité étant orientés de 1 vers 2.

Comme $\Phi = \lambda S\frac{T_1 - T_2}{\ell}$, on déduit :

$$\boxed{R_{th} = \frac{1}{\lambda}\frac{\ell}{S}}.$$

De même :

$$\boxed{G_{th} = \lambda\frac{S}{\ell}}.$$

La formule est évidemment très similaire à celle de la résistance électrique $R = \frac{1}{\gamma}\frac{\ell}{S}$.

La résistance thermique est d'autant plus importante que le matériau est un mauvais conducteur thermique et que la longueur ℓ est importante. Des murs épais isolent plus efficacement une habitation que des murs minces, toutes choses égales par ailleurs.

L'*application numérique* donne :

$$R_{th,\,mur} = 2\ 10^{-2}\ \text{K}\cdot\text{W}^{-1}, \quad \text{soit : } G_{th} = 50\ \text{W}\cdot\text{K}^{-1}.$$

c) On a alors trois résistances en série (Fig. 13). La résistance équivalente est ainsi :

$$R_{th,\,double} = R_{th1} + R_{th2} + R_{th3} = \frac{1}{\lambda_{verre}}\frac{e}{S} + \frac{1}{\lambda_{air}}\frac{e}{S} + \frac{1}{\lambda_{verre}}\frac{e}{S} = \frac{e}{S}\left(\frac{2}{\lambda_{verre}} + \frac{1}{\lambda_{air}}\right)$$

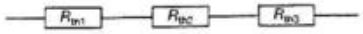


Figure 13

Vu les ordres de grandeur des conductivités du verre et de l'air :

$$\boxed{R_{th,\,double} \approx \frac{1}{\lambda_{air}}\frac{e}{S}}.$$

d) La résistance thermique d'une vitre simple, d'épaisseur e et surface S étant $R_{th,\,simple} = \frac{1}{\lambda_{verre}}\frac{e}{S}$, on déduit le rapport :

$$\frac{R_{th,\,double}}{R_{th,\,simple}} = \frac{\lambda_{verre}}{\lambda_{air}} \approx 38.$$

• Le double vitrage est une technique très efficace pour diminuer les pertes thermiques dans une habitation. Les pertes au travers des fenêtres sont réduites d'un facteur 38.

⇒ Le double vitrage assure aussi une bien meilleure isolation phonique.

e) Le flux thermique Φ et la densité de flux thermique $\vec{j}_Q$ étant uniformes dans les trois matériaux, on déduit que la quantité $\lambda T'(x)$ est constante sur l'ensemble des trois matériaux.

Erreur à éviter
Ne pas confondre avec le fait que $T'(x)$ est constant dans un matériau donné.

Comme la conductivité de l'air est faible par rapport à celle du verre, le gradient thermique est nettement plus important dans l'air que dans le verre. On déduit l'allure de la figure 14 si $T_1 > T_2$.

⇒ Dans ce cas, la différence de température au niveau de l'isolant (l'air) est quasiment la différence de température totale $T_1 - T_2$.

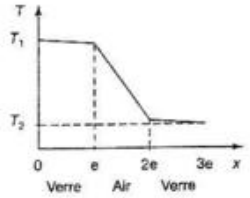


Figure 14

4 ■ Savoir manier la loi de Planck.

Conseils méthodologiques

Hors programme PT-PT*

On rappelle la loi de Planck : dans une cavité taillée dans un corps opaque à l'équilibre thermodynamique à la température T,

$$g(\lambda) = \varphi'_\lambda = \varphi'^{\lambda} = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5}\frac{1}{\exp\frac{hc}{\lambda kT} - 1}.$$

a) À partir de la loi de Planck, évaluer la densité spectrale en fréquence de flux surfacique partant et incident (notée $\varphi'_\nu(\nu)$) pour une cavité dans un corps opaque à l'équilibre thermodynamique. On rappellera pour cela le lien longueur d'onde-fréquence pour une onde.

4.a) Consulter les définitions du Cours en questions **4.4.**

© Ellipses – La photocopie non autorisée est un délit

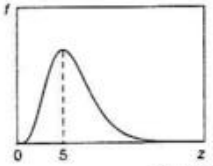


Figure 15

b) Introduire une quantité adimensionnée dans l'expression de $g(\lambda)$. Montrer que la longueur d'onde réalisant le maximum de g vérifie une relation de la forme $\lambda_m T$ = cte. On donne le graphe de la fonction $f(z) = z^5/(\exp z - 1)$ (Fig. 15).

c) Intégrer la fonction $g(\lambda)$ pour retrouver la loi de Stefan. On donne :

$$\int_0^\infty \frac{z^3}{\exp(z) - 1}\,dz = \frac{\pi^4}{15}.$$

Évaluer la constante σ, sachant que :
$c = 3{,}00\ 10^8\ m \cdot s^{-1}$,
$k = 1{,}38\ 10^{-23}\ J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}$,
$h = 6{,}67\ 10^{-34}\ J \cdot s$.

4.a) Par définition, $\varphi'^{\lambda}_\lambda(\lambda) = g(\lambda)$: c'est la densité spectrale en longueur d'onde de flux surfacique incident (ou partant).

On passe en densité spectrale fréquentielle grâce à l'équivalence des deux descriptions : $\varphi'^{\lambda}_\lambda\,d\lambda = \varphi'^{\nu}_\nu\,d\nu$.

La longueur d'onde λ et la fréquence ν sont reliées par la relation $\lambda = cT = c/\nu$. Ainsi, $d\lambda = -\frac{c}{\nu^2}d\nu$. On arrive alors à :

$$\varphi'^{\nu}_\nu = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5}\frac{1}{\exp\frac{hc}{\lambda kT} - 1}\frac{c}{\nu^2}.$$

Le signe moins a été éliminé. Par définition, les flux sont positifs. Ce signe moins est simplement un indicateur de la proportionnalité inverse de la longueur d'onde et de la fréquence.

On élimine la longueur d'onde en faveur de la fréquence par $\lambda = c/\nu$:

$$\varphi'^{\nu}_\nu = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2}\frac{1}{\exp\frac{h\nu}{kT} - 1}.$$

b) La quantité adimensionnée apparaissant naturellement dans l'expression de $g(\lambda)$ est $z = hc/\lambda kT$. En effet, l'argument de l'exponentielle est forcément sans unité.

On étudie alors :

$$G(z) = g(\lambda) = \frac{2\pi k^5 T^5}{c^3 h^4}\frac{z^5}{\exp z - 1}.$$

La fonction G atteint son maximum en :

$$z_m = \frac{hc}{\lambda_m kT} \approx 5,$$

soit : $\boxed{\lambda_m T \approx 2\,900\ \mu m \cdot K}$.

c) Pour obtenir la loi de Stefan, on désire intégrer la densité spectrale de flux surfacique sur toutes les longueurs d'onde :

$$\varphi = \int_0^\infty g(\lambda)d\lambda = \int_0^\infty \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5}\frac{1}{\exp\frac{hc}{\lambda kT} - 1}d\lambda.$$

Afin d'utiliser l'intégrale de l'énoncé, on réalise à nouveau le changement de variable précédent : $z = hc/(\lambda kT)$, soit : $d\lambda = -\frac{hc}{kTz^2}dz$. Alors :

$$\varphi = 2\pi hc^2\left(\frac{kT}{hc}\right)^4\int_0^\infty \frac{z^3}{\exp z - 1}dz = \frac{2\pi^5k^4}{15h^3c^2}T^4 = \sigma T^4.$$

L'application numérique donne bien $\sigma = 5{,}67\ 10^{-8}\ W\cdot m^{-2}\cdot K^{-4}$.

⇒ Les lois de Wien et Stefan caractérisent les flux surfaciques incident et partant à la surface d'un corps opaque à l'équilibre thermodynamique. Rappelons qu'en pratique, elles concernent le flux surfacique émis par un corps noir à l'équilibre thermodynamique local.

5 ■ Savoir utiliser la loi de Stefan pour des bilans énergétiques.

Conseils méthodologiques

Hors programme PT-PT*.

5.1 Le Soleil peut être considéré comme une sphère de rayon $R_s = 700\,000$ km, à la température $T_s = 5\,800$ K. On considérera le Soleil comme un corps noir.

a) Quel est le domaine de longueur d'onde dans lequel le Soleil émet majoritairement ?

5.1.a) Loi de Wien.

b) Calculer la puissance totale émise par le Soleil.

On donne : $\sigma = 5{,}67\ 10^{-8}\ W\cdot m^{-2}\cdot K^{-4}$.

5.1.b) et f) Loi de Stefan.

c) En déduire le flux surfacique incident φ_i au niveau de l'orbite terrestre. On donne la distance Terre-Soleil : $D = 150\ 10^6$ km.

d) Quel est le flux Φ_i total incident arrivant sur la Terre ? On réalisera un schema mettant clairement en évidence la surface decoupee par la Terre sur la sphere centree sur le Soleil et de rayon D. On notera $R_t = 6\,400$ km le rayon terrestre.

e) On supposera que la Terre est aussi un corps noir. Quel est le flux Φ_a absorbe par la Terre ?

f) Quel est le flux Φ_e émis par la Terre ? On appellera T_t la température de la Terre, supposee uniforme.

g) Exprimer et calculer la température de la Terre en supposant le régime stationnaire.

5.2 Un abri de jardin est protégé par un toit métallique de surface S considéré comme un corps noir (Fig. 16). On supposera que tous les échanges thermiques ont lieu dans la direction $\vec{u}_z$.

Le toit reçoit de la part du Soleil un rayonnement de flux surfacique $\varphi_{sol} = 700\ W\cdot m^{-2}$. Le sol dans l'abri de jardin est aussi considéré comme un corps noir. On négligera toute conduction thermique dans le sol et toute convection.

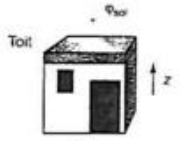


Figure 16

a) On note $T_t(z)$ la température dans le toit. On appelle λ_t la conductivité du toit. Quel est le profil de la température dans le toit en régime stationnaire ?

b) En prenant comme système celui entouré par les pointillés de la figure 17, montrer que la température du toit est uniforme en régime stationnaire (le système se referme dans le sol).

Figure 17

c) En supposant l'équilibre radiatif atteint pour le sol, établir une relation entre la température du sol T_s et celle du toit T_t.

5.2.c) et d) Utiliser la loi de Stefan.

d) En déduire la température du toit en exprimant son équilibre radiatif. On rappelle $\sigma = 5{,}67\ 10^{-8}\ W\cdot m^{-2}\cdot K^{-4}$.

© Larousse – La photocopie non autorisée est un délit

5.1.a) On considère le Soleil comme un corps noir à l'équilibre thermodynamique local à la température T_s. Le rayonnement qu'il émet obéit à la loi de Wien.

Le maximum de rayonnement est atteint pour la longueur d'onde λ_m telle que $\lambda_m T_s = 2\,900\ \mu m\cdot K$, soit $\lambda_m = 0{,}5\ \mu m$. Le maximum est dans le visible. Cependant, 98 % du rayonnement appartient au domaine $\left[\frac{\lambda_m}{2}, 8\lambda_m\right]$, soit $[0{,}25 - 4\ \mu m]$. Une grande partie est ainsi située dans l'infra-rouge.

b) Le Soleil étant modélisé comme un corps noir à l'équilibre thermodynamique local, on lui applique la loi de Stefan. Le flux surfacique émis à la surface du Soleil est $\varphi_e = \sigma T_s^4$.

Le flux total émis est alors :

$$\boxed{\Phi_e = \iint_S \varphi_e\, dS = \varphi_e(4\pi R_s^2) = 4\pi R_s^2\,\sigma T_s^4}.$$

Erreur à éviter
Bien différencier les flux des flux surfaciques !

L'application numérique donne : $\Phi_e = 4{,}0\ 10^{26}$ W.

c) Au niveau de l'orbite terrestre, ce flux est réparti sur la surface $4\pi D^2$. Le flux surfacique incident est alors :

$$\boxed{\varphi_i = \frac{\Phi_e}{4\pi D^2} = \sigma T_s^4\frac{R_s^2}{D^2}}.$$

Attention à la terminologie. Le flux en question est émis par le Soleil, et incident sur la Terre. C'est ce dernier point de vue que nous utiliserons dans la suite de l'exercice.

On obtient ainsi $\varphi_i = 1\,400\ W\cdot m^{-2}$. C'est bien l'ordre de grandeur mesuré.

d) Sur la sphère centrée sur le Soleil et de rayon D, la Terre découpe un disque de rayon R_t (Fig. 18).

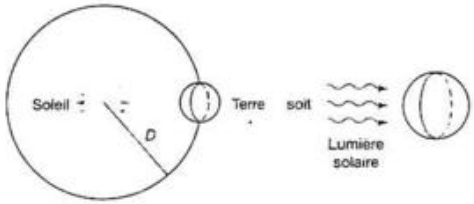


Figure 18

Erreur à éviter
Ne surtout pas intégrer sur toute la surface de la Terre. La Terre absorbe exactement le même rayonnement solaire qu'un disque hypothétique de rayon R_t placé perpendiculairement aux rayons.

Ainsi, le flux incident sur la Terre est :

$$\boxed{\Phi_i = \iint_{\text{disque de rayon } R_t} \varphi_i\, dS = \varphi_i \pi R_t^2 = \sigma T_s^4\frac{R_s^2}{D^2}\pi R_t^2}.$$

e) Par définition d'un corps noir, $\boxed{\Phi_a = \Phi_i}$.

Erreur à éviter
Cette fois-ci, il faut intégrer sur toute la surface de la Terre. Tout élément dS émet un rayonnement.

f) La Terre est ici considérée comme un corps noir à l'équilibre thermodynamique local. On lui applique la loi de Stefan : $\varphi_e = \sigma T_t^4$. Alors :

$$\boxed{\Phi_e = \iint_{\text{surface Terre}} \varphi_e\, dS = \varphi_e 4\pi R_t^2 = 4\pi R_t^2\sigma T_t^4}.$$

g) Appliquons le premier principe entre les instants t et $t + dt$ au système formé par la Terre :

$$dU = \delta Q + \delta W .$$

La Terre ne reçoit aucun travail, soit $\delta W = 0$. Les échanges thermiques se font par rayonnement. Pendant dt, la Terre absorbe $\Phi_a\, dt$ et émet $\Phi_e\, dt$. Alors :

$$dU = \Phi_a\, dt - \Phi_e\, dt = 0$$

car le régime est stationnaire. On en déduit $\Phi_a = \Phi_e$.
On obtient alors :

$$\sigma T_s^4 \frac{R_s^2}{D^2} \pi R_t^2 = 4\pi R_t^2 \sigma T_t^4 .$$

soit : $\boxed{T_t^4 = T_s^4 \frac{R_s^2}{4D^2}}$.

L'application numérique donne $T_t = 275$ K, ce qui est un bon ordre de grandeur. De nombreux phénomènes essentiels ont été négligés, comme l'effet de serre par exemple.

5.2. a) L'équation de la chaleur unidimensionnelle en régime stationnaire se réduit à $\boxed{T_s'' = 0}$. La température varie de manière affine dans le toit.

b) Appliquons le premier principe de la thermodynamique entre t et $t + dt$ au système proposé. Il n'existe aucun transfert thermique par rayonnement pour ce système. En effet, les échanges se font verticalement. Les frontières du système dans le sol et dans le toit sont au cœur d'un milieu opaque. Les seuls transferts thermiques ont lieu par conduction. Celle-ci est négligée dans le sol. En revanche, elle est possible dans le toit : le flux thermique traversant le toit est $\Phi_{\text{conduc, toit}} = -\lambda_t T_t' S$ par la loi de Fourier.
Le premier principe donne :

$$dU = \Phi_{\text{conduc, toit}}\, dt = 0$$

car le régime est stationnaire. On en déduit que le transfert thermique par conduction dans le toit est nul. Ainsi, $T_t' = 0$: la température du toit est uniforme.

c) Le toit et le sol sont considérés comme des corps noirs à l'équilibre thermodynamique local.
Réalisons un bilan radiatif (surfacique) pour le sol (Fig. 19) :

- Le rayonnement incident provient du toit : c'est exactement le rayonnement émis par ce dernier. Comme le sol est un corps noir, ce rayonnement est intégralement absorbé par le sol. Alors. $\varphi_a = \varphi_{e,\,\text{toit}} = \sigma T_t^4$;
- le sol émet un rayonnement. Comme le sol est modélisé par un corps noir à l'équilibre thermodynamique local à la température T_s, $\varphi_{e,\,\text{sol}} = \varphi_e = \sigma T_s^4$.

L'équilibre radiatif indique : $\varphi^R = \varphi_e - \varphi_a = 0$. On en déduit : $\varphi_s = \varphi_t$.

Dans le cadre de ce modèle, le toit et le sol ont même température.

La condition de stationnarité est équivalente à celle d'équilibre radiatif ici car les seuls échanges thermiques sont dus au rayonnement.

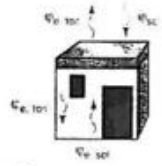


Figure 19

© Ellipses – La photocopie non autorisée est un délit

d) Réalisons le même raisonnement pour le toit. Celui-ci reçoit (Fig. 19) :

- le rayonnement solaire, de flux surfacique φ_{sol},
- le rayonnement issu du sol, de flux surfacique σT_s^4 ;

tous deux intégralement absorbés car le toit est un corps noir.
Le toit émet $\varphi_{e,\,\text{toit}} = \varphi_e = \sigma T_t^4$ (vers le haut et vers le bas) car c'est un corps noir à l'équilibre thermodynamique local.
On en déduit :

$$\varphi^R = 2\sigma T_t^4 - \sigma T_s^4 - \varphi_{sol} = 0 .$$

Alors, comme : $\boxed{T_t = T_s}$, $\boxed{T_t^4 = \varphi_{sol}/\sigma}$.

L'application numérique indique $T_s = T_t \approx 330$ K. La température peut effectivement être très élevée dans un tel local hermétiquement fermé (pensez à une scène du film *Le pont de la rivière Kwaï*).

Erreur à éviter
Ne pas oublier les deux contributions. Chaque élément dS du toit émet σT_t^4, mais la surface du toit est à comptabiliser deux fois.

Annales

Pour maîtriser les bases

1. Résistance thermique entre deux cylindres. D'après Oral CCP

L'espace entre deux cylindres coaxiaux de rayons r_1 et r_2, de longueur ℓ quasi infinie, est occupé par un conducteur thermique de conductivité λ (Fig. 20). Le régime est stationnaire.

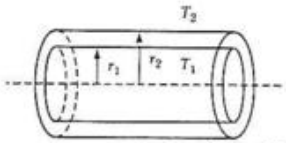


Figure 20

a) De quelle(s) variable(s) dépend la température ?

b) Quelle est la forme de la densité de flux thermique $\vec{j}_Q$?

c) Soit $\Phi(r)$ le flux thermique sortant au travers du cylindre de rayon r et de longueur ℓ. Par un bilan, montrer que $\Phi(r)$ est indépendant de r.

d) En déduire la résistance thermique de l'ensemble.

Conseils méthodologiques. Consulter le savoir-faire 2 pour l'établissement du bilan et le savoir-faire 3 pour la résistance thermique.

a) Vu la géométrie, on se place en coordonnées cylindriques. Le cylindre étant quasi infini, la température est invariante par translation le long de l'axe du cylindre. De plus, il y a aussi invariance par rotation autour de cet axe. Ainsi, $\boxed{T = T(r)}$.

b) D'après la loi de Fourier, $\vec{j}_Q = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}\, T$. Ainsi, par la forme de la température, on déduit : $\boxed{\vec{j}_Q = -\lambda T'(r)\vec{u}_r}$.

Technique de calcul

Si $f = f(r)$, $\overrightarrow{\text{grad}}\, f = f'(r)\vec{u}_r$.

c) Prenons comme système la coquille cylindrique comprise entre r et $r + dr$. On lui applique le premier principe de la thermodynamique entre r et $r + dr$:

$$d^2H = \delta^2Q + \delta^2W^* = \delta^2Q$$

Les échanges thermiques se font au travers des frontières qui sont les cylindres de rayon r et $r + dr$: $\delta^2Q = (\Phi(r) - \Phi(r + dr))dt$.

On en déduit ainsi $\Phi(r) = \Phi(r + dr)$. Le flux Φ est alors indépendant de r, il est constant.

Remarque

$\Phi(r)$ est le flux sortant du cylindre de rayon r, il entre donc dans le système considéré et est comptabilisé avec un signe plus.

d) Rappelons la définition $R_{th} = \dfrac{T_1 - T_2}{\Phi}$, où T_1 (T_2) est la température interne (externe). Il faut exprimer $T_1 - T_2$ en fonction de Φ.

$$\Phi = \iint_{S(r)} (\vec{j}_Q(r) \cdot \overrightarrow{dS}) = \iint_{S(r)} j_Q(r)dS = j_Q(r)\iint_{S(r)} dS = j_Q(r)2\pi r\ell.$$

Remarque

Dans cette définition, Φ doit bien être orienté de 1 vers 2.

Alors, la température vérifie :

$$\Phi = -\lambda T'(r)2\pi r\ell, \quad \text{soit} \quad T'(r) = -\frac{\Phi}{2\pi\lambda r\ell}$$

On intègre entre r_1 et r_2 : $T_2 - T_1 = -\dfrac{\Phi}{2\pi\lambda\ell}\ln\dfrac{r_2}{r_1}$.

Enfin, la résistance thermique vaut :

$$\boxed{R_{th} = \frac{1}{\lambda}\frac{\ln\frac{r_2}{r_1}}{2\pi\ell}}$$

La relation est bien homogène à l'inverse d'une distance multipliée par une conductivité thermique.

2. Quelques réflexions sur la lumière solaire. D'après CCP

L'observation d'un objet exposé à la lumière du jour est révélatrice d'une multitude de phénomènes physiques liés aux propriétés intrinsèques de la matière qui le constitue, conjointement à son état de surface et à sa géométrie.

Remarque

Hors programme PT-PT*

a) Quel est l'aspect visuel d'un objet parfaitement absorbant pour toutes les longueurs d'onde ? Une plante verte utilise-t-elle l'intégralité des radiations vertes dans son développement ?

b) Un tissu bleu est examiné à la lumière d'un néon ne contenant pas de radiations bleues. Décrire son apparence visuelle.

c) Dans quel domaine se situe le rayonnement émis par la Terre ? Comparer à ce que peuvent observer des astronautes en orbite terrestre.

Conseils méthodologiques. Utiliser le savoir-faire 4 pour la question c).

a) Si l'objet absorbe l'intégralité des radiations l'atteignant, il ne réfléchit aucun rayonnement. Cependant, il émet tout de même un rayonnement dont la composition dépend de sa température. À température ambiante, ce rayonnement se situe dans l'infrarouge auquel nos yeux ne sont pas sensibles. Si l'objet est à température ambiante, il apparaît donc **noir**.

Remarque

L'objet en question est alors un véritable corps noir.

Une plante verte nous apparaît verte car elle réfléchit une bonne partie du rayonnement vert qui l'atteint. Les plantes vertes n'utilisent donc pas l'intégralité du rayonnement vert.

En fait, on pourrait tout à fait imaginer que les plantes absorbent et utilisent le vert pour leur développement. En revanche, elles réfléchiraient le jaune et le bleu, acquérant ainsi une couleur verte à nos yeux. Le moyen de trancher serait d'éclairer des plantes avec un rayonnement purement vert. Si les plantes nous apparaissent alors noires, c'est qu'elles absorbent le vert. Si les plantes nous apparaissent vertes, c'est qu'elles n'absorbent et n'utilisent pas le vert. Ce dernier cas correspond à la réalité, la chlorophylle absorbe dans le rouge et le bleu, pas le vert.

b) Le tissu nous apparaît bleu : il réfléchit le bleu et absorbe les autres couleurs (le bleu est une couleur primaire, il n'y a pas d'autre solution). Si on l'éclaire par une lumière ne contenant pas de bleu, il absorbe tout le rayonnement incident : il apparaît alors **noir**.

c) La Terre a pour température typique $T = 300$ K. Le rayonnement émis présente un maximum d'intensité à $\lambda_m = 3\,000/300 = 10\,\mu\text{m}$. 98 % du rayonnement se situe dans l'intervalle $[5\,\mu\text{m}, 80\,\mu\text{m}]$, c'est-à-dire dans l'infrarouge.

Remarque

La Terre est implicitement considérée comme un corps noir à l'équilibre thermodynamique local (dans le domaine de l'infrarouge).

Nos yeux ne sont pas sensibles à ce type de rayonnement. Les astronautes observant la Terre la voient effectivement. Ils observent le rayonnement solaire réfléchi par la Terre, et certainement pas le rayonnement émis par la Terre.

© Editions - La photocopie non autorisée est un délit

3. Ailette de refroidissement — D'après G2E

Pour éviter un trop important échauffement de certains appareils, on place à leur contact des ailettes de refroidissement (Fig. 21). Leur forme est parallélépipédique aplatie, d'épaisseur $a = 2{,}0$ mm, de largeur $b = 10$ cm et de longueur $c = 20$ cm. En fonctionnement, l'appareil M est maintenu à la température $T_M = 60\,°C$. L'air extérieur, qui circule, est de température constante et uniforme $T_A = 20\,°C$. Dans l'ailette, on admettra que le transfert thermique, de type conductif, peut être considéré comme unidimensionnel dans la direction Ox et qu'il obéit à la loi de Fourier $\vec{j}_Q = -\lambda\,\overrightarrow{\text{grad}}\,T$, avec $\lambda = 16\,\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$. Il existe aussi un transfert thermique de l'ailette vers l'air ambiant, de nature conducto-convective. Le flux thermique entre la surface latérale dS (Fig. 22) de l'élément d'abscisse x et l'air est de la forme $dP = h(T(x) - T_A)\,dS$, où $h = 150$ SI est une constante.

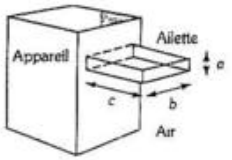


Figure 21

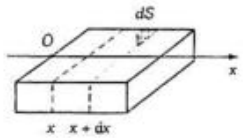


Figure 22

a) Expliquer la loi de Fourier et donner l'unité de h dans le système international.

b) Écrire un bilan énergétique pour la tranche d'ailette contenue entre x et $x + dx$, en régime stationnaire. On posera $L = \sqrt{\dfrac{\lambda a}{2h}}$ et on donnera la valeur numérique de L. En déduire que la température $T(x)$ vérifie l'équation différentielle :

$$T''(x) - \frac{1}{L^2}(T(x) - T_A) = 0\,.$$

c) Résoudre cette équation. En remarquant que $c \gg L$, considérer c comme quasi infini pour simplifier l'expression obtenue.

d) Donner l'expression de la puissance dP sortant de la surface latérale dS de la tranche d'ailette comprise entre x et $x + dx$.

e) En déduire la puissance totale P évacuée par l'ailette, ainsi que sa valeur numérique.

f) Exprimer et calculer la puissance thermique P' transmise de l'appareil M à l'ailette en $x = 0$. Conclure.

g) Combien faudrait-il d'ailettes pour évacuer un flux thermique total de 900 W ?

h) La taille de chaque ailette peut-elle être réduite sans changer notablement l'ensemble des résultats précédents ? Si oui, expliquer pourquoi et comment.

Conseils méthodologiques. On a ici l'expression d'un bilan, en régime stationnaire, avec un échange conducto-convectif. S'inspirer du savoir-faire 2.

a) La loi de Fourier exprime le fait que les échanges thermiques conductifs sont liés aux inhomogénéités de température. Le gradient étant orienté des basses vers les hautes températures, le signe moins indique que les transferts thermiques ont lieu en sens inverse. Cette loi est d'origine phénoménologique.

Pour l'unité de h, on utilise la formule donnée :

$$h = \frac{dP}{(T(x) - T_A)\,dS}$$

© Les Auteurs - La photocopie non autorisée est un délit

Clairement, l'unité de h est $\text{W}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{m}^{-2}$.

b) Appliquons le premier principe à ce système entre les instants t et $t + dt$. On considérera que la transformation est isochore.

Alors, $d^2U = \delta^2Q + \delta^2W$:

- $\delta^2W = 0$ car le travail des forces de pression est nul ;
- les échanges thermiques se font aux frontières du système : en x, en $x + dx$ (transferts conductifs) et sur la paroi latérale (transfert conducto-convectif).

Ainsi :

$$\delta^2Q = (j_Q(x) - j_Q(x + dx))ab\,dt - h(T(x) - T_A)dS\,dt\ ;$$

le signe moins pour le dernier terme exprime que la quantité est cédée par le système à l'extérieur. De plus :

$$dS = 2dx(a + b)\ ;$$

- enfin, le régime étant stationnaire, l'énergie interne du système n'évolue pas et $d^2U = 0$.

On aboutit alors à :

$$0 = (j_Q(x) - j_Q(x + dx))ab - 2h(T(x) - T_A)(a + b)dx\,.$$

On divise par dx dans la limite $dx \to 0$:

$$ab j_Q'(x) + 2h(a + b)(T(x) - T_A) = 0\,.$$

La loi de Fourier permet d'obtenir :

$$\lambda ab T''(x) - 2h(a + b)(T(x) - T_A) = 0\,.$$

Comme $a \ll b$, $a + b \approx b$, et on établit l'expression demandée par l'énoncé :

$$\boxed{\lambda a T''(x) - 2h(T(x) - T_A) = 0}$$

L'application numérique indique $L = 1{,}0$ cm. L est typiquement une longueur car T'' est homogène à une température divisée par le carré d'une longueur et T'' est homogène à T/L^2.

c) La solution est la somme de la solution générale et d'une solution particulière. Pour cette dernière, T_A convient. La solution générale est de la forme $\alpha\exp\left(\dfrac{x}{L}\right) + \beta\exp\left(-\dfrac{x}{L}\right)$, où α et β sont des constantes. Au total :

$$T(x) = T_A + \alpha\exp\left(\frac{x}{L}\right) + \beta\exp\left(-\frac{x}{L}\right).$$

Cette expression est valable pour $0 \leqslant x \leqslant c$. En considérant c comme quasi infinie, on remarque que le terme en α diverge alors. Ce terme non physique doit être éliminé.

Enfin, $T(0) = T_M$, d'où $T_M = T_A + \beta$, soit :

$$\boxed{T(x) = T_A + (T_M - T_A)\exp\left(-\frac{x}{L}\right)}$$

Effectivement, $(c = 20\text{ cm}) \gg (L = 1{,}0\text{ cm})$.

On remarque aussi qu'au bout de quelques L, la température de l'ailette devient quasi égale à celle de l'air environnant. L'influence de la température élevée de l'appareil ne se fait plus ressentir.

d) On utilise l'expression donnée par l'énoncé :

$$dP = h(T(x) - T_A)dS = h(T_M - T_A)\exp\left(-\frac{x}{L}\right)dS = \boxed{h(T_M - T_A)\exp\left(-\frac{x}{L}\right)2b\,dx}$$

⇨ Remarque

De manière équivalente, on aurait pu supposer la transformation isobare et utiliser l'enthalpie plutôt que l'énergie interne.

⇨ Remarque

L'argument de la non-divergence d'une grandeur est souvent utilisé.

e) L'expression désirée s'obtient en sommant les contributions dP tout au long de l'ailette :

$$P = \int_0^{\infty} dP = h(T_M - T_A)2b\int_0^{\infty}\exp\left(-\frac{x}{L}\right)dx = -h(T_M - T_A)2bL\left[\exp\left(-\frac{x}{L}\right)\right]_0^{\infty} = \boxed{h(T_M - T_A)2bL}$$

l'application numérique fournit : $P = 12$ W.

⇨ **Remarque**

Le terme obtenu est bien homogène à une puissance : c est le produit de h par une température et une surface.

f) On évalue le flux thermique au travers de l'ailette en $x = 0^+$. Il est en effet égal à la puissance transmise par l'appareil à l'ailette :

$$P' = \iint \vec{j}_Q(x = 0)\cdot d\vec{S}.$$

Déjà :

$$\vec{j}_Q = -\lambda\,\overrightarrow{\text{grad}}\,T = \frac{\lambda(T_M - T_A)}{L}\exp\left(-\frac{x}{L}\right)\vec{u}_x.$$

⇨ **Remarque**

On vérifie que le transfert thermique est bien orienté de l'appareil vers l'ailette car $T_M > T_A$.

Alors :

$$P' = \frac{\lambda(T_M - T_A)}{L}ab.$$

En fait, on remarque $P = P'$. En effet :

$$P' = \frac{\lambda(T_M - T_A)}{L}ab = \lambda ab(T_M - T_A)\sqrt{\frac{2h}{\lambda a}} = (T_M - T_A)\sqrt{\frac{\lambda a}{2h}}2bh = (T_M - T_A)L2bh = P.$$

Ce résultat n'est pas un hasard. Si on prend comme système l'ailette entière (Fig. 23) pour réaliser un bilan thermodynamique, les échanges thermiques ont lieu :

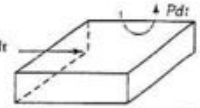


Figure 23

- à l'entrée en $x = 0$, le terme est $P'dt$;
- sur la paroi latérale, le terme est $-Pdt$. Le signe moins traduit le fait que cette énergie est cédée à l'air environnant.

En régime stationnaire, ces deux termes doivent s'annuler (sinon l'ailette s'échaufferait ou se refroidirait) et $\boxed{P' = P}$.

g) Si une ailette évacue 12 W, il faut $900/12 = 75$ ailettes pour évacuer 900 W.

h) Reconsidérons l'expression de la puissance évacuée : $P = (T_M - T_A)b\sqrt{2\lambda h a}$.

La largeur et l'épaisseur de l'ailette interviennent dans la puissance dégagée par une ailette (ils jouent un rôle dans la surface latérale de l'ailette). En revanche, leur longueur c peut être diminuée sans trop changer les résultats tant que $c \gg L$. En effet, la puissance thermique n'est évacuée de manière notable que sur quelques L à partir de la surface de contact avec l'appareil.

4. Température des planètes et effet de serre — D'après Mines-Ponts

Dans tout le problème, étoiles et planètes sont considérées comme des corps noirs à l'équilibre thermodynamique local. On modélise la surface de la Terre par une coquille sphérique de température uniforme, en équilibre radiatif : puissances absorbée et émise sont égales.

⇨ **Remarque**

Hors programme PT-PT*

a) Soit P_S la puissance totale émise par le Soleil. Exprimer P_S en fonction du rayon solaire $R_S = 7\,10^5$ km et de la température solaire $T_S = 5\,800$ K. Exprimer, en fonction de P_S, la puissance P_0 reçue par la Terre, à la distance $D_{ST} = 1{,}5\,10^8$ km du Soleil. Exprimer alors la température de surface de la Terre T_T.

© Le vieux - La photocopie non autorisée est un délit

b) En réalité, la puissance absorbée par la surface de la Terre n'est qu'une fraction de la puissance du rayonnement solaire incident : la surface terrestre réfléchit la fraction $A_T = 0.35$, nommée albédo. Établir l'expression suivante de la température de surface de la Terre :

$$T_T^4 = \left(\frac{R_S}{2D_{ST}}\right)^2(1 - A_T)T_S^4.$$

c) Calculer la valeur numérique. Commenter.

d) L'atmosphère joue en fait un rôle essentiel dans le bilan thermique terrestre. Celle-ci est modélisée par une couche d'épaisseur $e \ll R_T$ et de température uniforme T_a. Elle absorbe la fraction α du rayonnement solaire non réfléchi ; elle absorbe aussi la totalité du rayonnement de corps noir émis par la surface de la Terre. La Terre absorbe la totalité du rayonnement émis par l'atmosphère vers elle (Fig. 24). À quoi pourrait être due la différence d'absorption de l'atmosphère pour les rayonnements solaire et terrestre ?

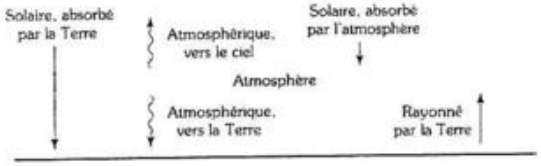


Figure 24

e) Soit T_T' la température superficielle de la Terre calculée en tenant compte de l'influence de l'atmosphère. Exprimer P_1, puissance solaire absorbée par la surface terrestre ; exprimer P_2, puissance rayonnée par l'atmosphère vers la Terre en considérant l'atmosphère comme un corps noir. Effectuer un bilan thermique pour l'atmosphère. En déduire $T_T'^4 = (2 - \alpha)T_T^4$.

f) Application numérique pour $\alpha = 0.35$ (l'égalité $\alpha = A_T$ est fortuite).

g) Montrer que la température de l'atmosphère est $T_a = T_T$.

Conseils méthodologiques. Ce problème constitue une extension du savoir-faire 5.

a) Ces questions ont exactement été traitées en détail dans le savoir-faire 5. Nous ne rappellerons que les grandes lignes.

$$\boxed{P_S = 4\pi R_S^2\sigma T_S^4}$$

où σ est la constante de Stefan car le Soleil est considéré comme un corps noir.

La puissance émise par le Soleil se répartit au niveau de la Terre sur une sphère de rayon D_{TS}. Celle atteignant la Terre se situe au niveau du disque découpé par la Terre sur cette sphère :

$$\boxed{P_0 = P_S\frac{\pi R_T^2}{4\pi D_{TS}^2}}$$

La Terre considérée comme un corps noir émet la puissance $4\pi R_T^2\sigma T_T^4$. En égalant ce terme à P_0, on arrive à :

$$\boxed{T_T = T_S\sqrt{\frac{R_S}{2D_{TS}}}}.$$

b) En fait, la surface terrestre réfléchit une fraction A_T du rayonnement solaire incident. Ainsi, la Terre n'absorbe pas la totalité de la puissance incidente P_0, mais la fraction $(1-A_T)P_0$.

En revanche, la puissance émise par la Terre est inchangée, elle vaut toujours $4\pi R_T^2 \sigma T_T^4$.

En égalant la puissance absorbée et la puissance émise, on arrive à :

$$(1-A_T)4\pi R_S^2 \sigma T_S^4 \frac{\pi R_T^2}{4\pi D_{TS}^2} = 4\pi R_T^2 \sigma T_T^4.$$

Alors : $\boxed{T_T^4 = \left(\frac{R_S}{2D_{TS}}\right)^2 (1-A_T) T_S^4}$.

c) On obtient $T_T = 250$ K, soit $T_T = -23$ °C. Cette valeur n'est pas réaliste, le modèle oublie un phénomène essentiel, l'effet de serre, traité dans la suite.

d) Les domaines spectraux des deux rayonnements sont différents :

- rayonnement solaire : visible, infrarouge, ultraviolet ;
- rayonnement terrestre : infrarouge.

Les deux rayonnements étant différents, il n'est pas étonnant que leur absorption par l'atmosphère soit différente. Notamment, l'atmosphère absorbe beaucoup dans certaines bandes de l'infrarouge et de l'ultraviolet, mais est plutôt transparente dans le visible.

e) La puissance incidente venant du Soleil sur la Terre est P_0. Une fraction A_T de cette puissance est réfléchie vers l'espace, donc seule la puissance $P_0' = (1-A_T)P_0$ intervient. Ensuite, une fraction α de cette puissance est absorbée par l'atmosphère. Ainsi, la puissance absorbée par la surface terrestre est $(1-\alpha)P_0'$, soit :

$$\boxed{P_1 = P_0(1-A_T)(1-\alpha)}.$$

La puissance surfacique émise par l'atmosphère vers la Terre est σT_a^4 d'après la loi de Stefan. La surface délimitant l'atmosphère vaut quasiment $4\pi R_T^2$ (l'épaisseur d'atmosphère est négligeable devant le rayon terrestre). Ainsi :

$$\boxed{P_2 = 4\pi R_T^2 \sigma T_a^4}.$$

Effectuons un bilan thermique pour l'atmosphère :

- elle absorbe $P_0(1-A_T)\alpha$ en provenance du Soleil ;
- elle absorbe $4\pi R_T^2 \sigma T'^4_T$, totalité de la puissance émise par la Terre ;
- elle émet $2P_2$ (plus précisément, P_2 est émise vers la surface de la Terre, et P_2 est émise dans l'espace).

À l'équilibre thermique, ces termes se compensent exactement :

$$4\pi R_S^2 \sigma T_S^4 \frac{\pi R_T^2}{4\pi D_{ST}^2}(1-A_T)\alpha + 4\pi R_T^2 \sigma T'^4_S = 2 \times 4\pi R_T^2 \sigma T_a^4.$$

ce qui se simplifie en :

$$T_S^4 \frac{R_S^2}{4D_{ST}^2}(1-A_T)\alpha + T'^4_T = T_T^4 \alpha + T'^4_T = 2T_a^4$$

Deux inconnues sont présentes (T_a et T_T'), il est nécessaire d'obtenir une autre équation. Celle-ci est fournie par un bilan effectué sur la surface terrestre ou bien sur le système Terre et atmosphère. Nous considérerons ce dernier choix (Fig. 25) :

- la puissance incidente, provenant du Soleil, est P_0 ;

⇨ **Remarque**

C'est une conséquence immédiate du premier principe de la thermodynamique appliqué à l'atmosphère.

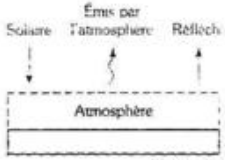


Figure 25

- la puissance partante est constituée de la partie réfléchie $P_0 A_T$, ainsi que de la puissance émise par l'atmosphère $4\pi R_T^2 \sigma T_a^4$.

À l'équilibre thermique :

$$4\pi R_S^2 \sigma T_S^4 \frac{\pi R_T^2}{4\pi D_{ST}^2}(1-A_T) = 4\pi R_T^2 \sigma T_a^4.$$

soit :

$$T_a^4 = (1-A_T)\frac{R_S^2}{4D_{ST}^2} = T_T^4.$$

On replace cette expression de T_a dans l'équation précédente, d'où $T_T^4 \alpha + T'^4_T = 2T_T^4$. Au final :

$$\boxed{T'^4_T = T_T^4(2-\alpha)}.$$

f) $T_T' = 285$ K, soit 12 °C. Cette température est un bon ordre de grandeur pour la température moyenne de la Terre, malgré la simplicité du modèle.

g) Ce résultat a déjà été démontré en question e) en considérant le système Terre plus atmosphère. La présence de l'atmosphère ne change pas le bilan global terrestre (si l'albédo n'est pas modifié).

Erreur à éviter

Tous les autres flux ont lieu à **l'intérieur** du système et n'interviennent pas dans l'expression du premier principe. Seuls les termes d'échange avec l'extérieur y figurent.

5. Thermalisation d'une barre — D'après Oral Mines-Ponts

Une barre de longueur ℓ, de section S est calorifugée latéralement (Fig. 26). On note $D = \lambda/(\rho c)$ le coefficient de diffusion, λ étant la conductivité thermique, ρ la masse volumique et c la capacité thermique massique de la barre.

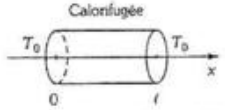


Figure 26

Initialement, la température de la barre est $T_{i,n}(x) = T_0 + \theta_0 \sin\frac{n\pi x}{\ell}$. Les deux extrémités de la barre sont alors placées en contact avec un thermostat à la température T_0. On cherche à déterminer l'évolution de la température de la barre au cours du temps.

a) Que dire de la température de la barre pour des temps très longs ?

b) Établir une équation aux dérivées partielles satisfaite par la température.

c) La résoudre sous la forme $T(x,t) = A + f(x)g(t)$ (solution à variables séparées). Trouver sans ambiguïté les formes de f et g.

d) Conclure sachant que la température initiale est $T_{i,n}(x)$.

e) Faire apparaître un temps typique d'évolution, et commenter le résultat. On vérifiera l'homogénéité de ce temps.

f) Désormais, la température initiale est une fonction quelconque $T_i(x)$ vérifiant seulement $T_i(0) = T_i(\ell) = T_0$. Trouver $T(x,t)$ à l'aide des séries de Fourier. On pourra faire apparaître la série de Fourier d'une fonction impaire, de période 2ℓ, et identique à T_i sur $[0,\ell]$.

Conseils méthodologiques. Reprendre les bilans du savoir-faire 2, mais en régime non stationnaire. Des notions sur les séries de Fourier sont nécessaires pour résoudre cet exercice. La question f) est plus délicate.

a) Au bout d'un temps très long, la barre se retrouvera en équilibre thermique avec le thermostat. La température de la barre sera alors uniforme et égale à T_0.

b) Vu la nature unidimensionnelle du système, la température ne dépend que de la coordonnée x et du temps : $T(x,t)$.

Pour respecter la géométrie du système, on considère le système compris entre x et $x+\mathrm{d}x$. Appliquons-lui le premier principe entre les instants t et $t+\mathrm{d}t$ en supposant que les transformations se font à pression constante. Le premier principe indique : $\mathrm{d}^2H = \delta^2Q + \delta^2W^*$, où δ^2W^* représente le travail des actions autres que les forces de pression.

- $\delta^2W^* = 0$ dans ce problème ;
- les transferts thermiques ont lieu au travers des frontières du système en x et en $x+\mathrm{d}x$:

$$\delta^2Q = (j_Q(x,t)S - j_Q(x+\mathrm{d}x,t)S)\mathrm{d}t \ ;$$

- enfin, la variation élémentaire d'enthalpie vaut $\mathrm{d}^2H = \rho S\,\mathrm{d}x\,c\,\mathrm{d}T$, où $\mathrm{d}T = T(x,t+\mathrm{d}t) - T(x,t)$.

Au final, $\rho S\,\mathrm{d}x\,c\,\mathrm{d}T = (j_Q(x,t)S - j_Q(x+\mathrm{d}x,t)S)\mathrm{d}t$. En divisant par $\mathrm{d}t$ puis en considérant $\mathrm{d}t \to 0$:

$$\rho c\,\mathrm{d}x\frac{\partial T}{\partial t} = j_Q(x,t) - j_Q(x+\mathrm{d}x).$$

Il reste à diviser par $\mathrm{d}x$ dans la limite $\mathrm{d}x \to 0$:

$$\rho c\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial j_Q}{\partial x}.$$

La loi de Fourier indiquant $j_Q = -\lambda\dfrac{\partial T}{\partial x}$, on obtient sans surprise l'équation de la chaleur :

$$\boxed{D\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t}}.$$

Remarque

Voir le savoir-faire 2.3 pour davantage de détails.

c) On injecte dans l'équation précédente la forme proposée :

$$Df''(x)g(t) = f(x)g'(t),$$

soit : $\dfrac{g'(t)}{g(t)} = D\dfrac{f''(x)}{f(x)} = C = \text{cte}$.

En effet, le premier terme ne dépend que de x alors que le second que de t. x et t étant des variables indépendantes, chacun des deux termes est constant.

Alors : $\boxed{g(t) = g_0\exp(Ct)}$, où g_0 est une constante.

La non-divergence de la température implique $C < 0$ (le cas $C = 0$ est à bannir car la solution ne dépend alors pas du temps, ce qui est physiquement non acceptable).

Désormais, on connaît la forme de f :

$$\boxed{f(x) = B_1\cos(\alpha x) + B_2\sin(\alpha x)}, \text{ où } \alpha = \sqrt{-C/D}.$$

Remarque

Cette question est une véritable question de cours et doit être traitée sans hésitation.

Technique de calcul

Si $\forall(x,t)$, $f_1(x) = f_2(t)$, clairement $f_1 = f_2 = \text{cte}$. En effet, on peut par exemple fixer t et faire varier x pour obtenir le résultat.

Technique de calcul

La nature de la solution de $f''(x) = Bf(x)$ dépend du signe de B. Si $B < 0$, la solution est en sinus et cosinus. Si $B > 0$, la solution est en exponentielles réelles. Enfin, la solution est affine si $B = 0$.

d) Il reste à vérifier les conditions initiales, $T(x,0) = T_{i,n}(x)$. Ainsi :

$$\forall x,\ A + g_0\exp(0)(B_1\cos(\alpha x) + B_2\sin(\alpha x)) = T_0 + \theta_0\sin\frac{n\pi x}{\ell}$$

La constante g_0 ne joue aucun rôle.

En effet, on peut poser $B_1' = g_0B_1$ et $B_2' = g_0B_2$. La liberté des $(\sin(kx))$ et $(\cos(kx))$ permet d'identifier terme à terme : $A = T_0$, $B_1' = 0$, $B_2' = \theta_0$ et $\alpha = n\pi/\ell$. On en déduit $C = -D\alpha^2 = -Dn^2\pi^2/\ell^2$.

© Larousse – La photocopie non autorisée est un délit

Alors, la solution est :

$$\boxed{T(x,t) = T_0 + \theta_0\exp\left(-\frac{Dn^2t}{\pi^2\ell^2}\right)\sin\frac{n\pi x}{\ell}}.$$

e) On remarque tout d'abord que $T(x,t) \to T_0$ quand $t \to \infty$, conformément à l'analyse préliminaire.

Le terme d'évolution temporelle est $\exp\left(-\dfrac{Dn^2t}{\pi^2\ell^2}\right)$. L'argument de l'exponentielle étant sans dimension, on pose $\tau_n = \pi^2\ell^2/(Dn^2)$ qui est nécessairement un temps. Vérifions-le : $[D] = L^2/T$, ainsi $[\tau_n] = L^2/[D] = [T]$. C'est effectivement le cas.

L'allure de la température dans la barre est tracée sur la figure 27 pour divers instants dans le cas $n = 2$. Au bout de quelques τ_n, la température dans la barre est quasi uniforme. τ_n représente la durée de la thermalisation.

On remarque que la durée de thermalisation diminue quand n augmente. Plus n est grand, plus la température initiale varie spatialement vite (n est le nombre d'arches de sinusoïdes de la température initiale). Les inhomogénéités brusques de température sont très vite atténuées lors d'un processus de conduction thermique : la température devient assez rapidement « lisse ».

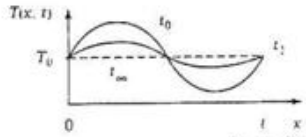


Figure 27

Remarque

Le terme « thermalisation » a pour signification le processus durant lequel la température de la barre atteint sa valeur d'équilibre.

f) On a établi dans les questions précédentes une solution particulière de l'équation de la chaleur. On va en construire une plus générale grâce à la linéarité de l'équation :

$$T(x,t) = T_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\theta_n\exp\left(-\frac{t}{\tau_n}\right)\sin\frac{n\pi x}{\ell}$$

est aussi solution de l'équation de la chaleur.

Il reste simplement à vérifier si elle satisfait aux conditions initiales. Si c'est le cas, on a définitivement la réponse à la question. Il est nécessaire de vérifier $T(x,0) = T_i(x)$, soit :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\theta_n\sin\frac{n\pi x}{\ell} = T_i(x) - T_0.$$

Cette expression ressemble à une décomposition en série de Fourier d'une fonction impaire (seuls les termes en sinus sont présents) de période 2ℓ.

Ainsi, les θ_n sont les coefficients de Fourier de la fonction $\tilde{T}_i(x)$ impaire, de période 2ℓ valant $T_i(x) - T_0$ sur $[0,\ell]$. Explicitement :

$$\theta_n = \frac{2}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell}\tilde{T}_i(x)\sin\left(n\frac{2\pi}{2\ell}x\right)\mathrm{d}x = \frac{4}{2\ell}\int_0^{\ell}\tilde{T}_i(x)\sin\left(n\frac{\pi}{\ell}x\right)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}(T_i(x) - T_0)\sin\left(n\frac{\pi}{\ell}x\right)\mathrm{d}x$$

Remarque

Cette solution vérifie $\forall t,\ T(0,t) = T(\ell,t) = T_0$.

Les contacts solides entre le thermostat et la source imposent la continuité de la température aux extrémités.

Erreur à éviter

Rappelons que pour une fonction de période T, les termes de son développement en série de Fourier sont de la forme $\cos\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)$ ou $\sin\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)$.

Par identification, on trouve ici $T = 2\ell$. Attention à bien réaliser le parallèle série de Fourier temporelle étudiée dans l'exemple des filtres et série de Fourier spatiale utile ici.

Pour approfondir

6. Chauffage par micro-ondes — D'après Mines-Ponts

Un échantillon de matériau aqueux est placé dans un four à micro-ondes. La conductivité thermique K, la capacité thermique massique c et la masse volumique ρ de l'échantillon sont supposées être indépendantes de la température. L'échantillon est parallélépipédique d'aire S et d'épaisseur $2e$ suffisamment faible pour qu'on considère que le problème reste unidimensionnel (selon x) (Fig. 28). On note P la puissance moyenne fournie au matériau par le champ électromagnétique. Il s'agit de déterminer le profil de température $T(x,t)$.

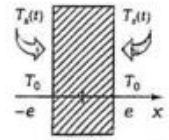


Figure 28

La température du milieu T_0 est supposée constante. La température d'interface est notée $T_s(t) = T(-e,t) = T(e,t)$. Les échanges thermiques au niveau des interfaces sont modélisés par la loi $\Phi = gS(T_s(t) - T_0) = j_{th}S$ qui exprime la puissance thermique sortant du matériau.

a) Établir l'équation aux dérivées partielles relative à $T(x,t)$.

b) Donner l'expression des densités de flux thermiques aux limites $\vec{j}_{th}(-e,t)$ et $\vec{j}_{th}(e,t)$ en fonction de g et de $T_s(t) - T_0$.

c) Déterminer l'expression et tracer l'allure de $T_p(e)$, profil de température dans l'échantillon en régime permanent en fonction de $T_p(e)$, x, P, K, S et e.

d) Établir les relations :

$$T_p(0) = T_0 + \frac{P}{2gS}\left(1 + \frac{ge}{2K}\right) = T_p(e) + \frac{Pe}{4SK}.$$

e) La température étant initialement T_0 en tout point, on cherche les solutions sous la forme :

$$T(x,t) = T_0 + (T_p(x) - T_0)(1 - f(t)).$$

Déterminer $f(0)$ et $\lim_{t\to\infty} f(t)$.

f) Montrer qu'une telle solution est acceptable si $ge \ll 2K$. Quelle est la constante de temps, notée τ de la solution ainsi obtenue ?

Suggestion : Replacer la solution proposée dans l'équation de la question **a)**, arriver à une équation du type $f'(t) + \varphi(x)f(t) = 0$, qui n'a un sens que si $\varphi(x)$ est quasi constante.

g) Calculer τ et $T_p(0)$ pour $\rho c = 4\,10^6$ J · m^{-3} · K^{-1}, $e = 5$ mm, $S = 10^{-2}$ m^2, $g = 10$ W · K^{-1} · m^{-2}, $K = 0{,}5$ W · K^{-1} · m^{-1}, $P = 500$ W et $T_0 = 293$ K.

Conseils méthodologiques. Utiliser le savoir-faire 2 pour établir le bilan thermodynamique.

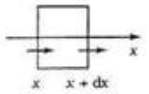


Figure 29

a) On applique le premier principe au système constitué d'une tranche du système située entre les abscisses x et $x + dx$ (Fig. 29) :

$$d^2U = \delta^2Q + \delta^2W.$$

Successivement :

- le système étant supposé incompressible, il n'y a pas de travail des forces de pression. Il faut en revanche considérer la puissance fournie au système par l'onde électromagnétique. L'onde donne au volume **total** la puissance P. Le système représente une portion $dx/2e$ du volume, donc la puissance reçue est $P\frac{dx}{2e}$;

⇒ **Remarque**

Le système a pour volume $S\,dx$ alors que le volume total est $2Se$.

- un transfert thermique a lieu au travers des parois en x et $x + dx$. Le flux entrant en x est $j_Q(x,t)S$ et le flux sortant en $x + dx$ est $j_Q(x + dx, t)S$.

Finalement :

$$d^2U = \rho S\,dx\,c(T(x,t+dt) - T(x,t)).$$

Alors :

$$\rho Sc(T(x,t+dt) - T(x,t)) = (j_Q(x,t) - j_Q(x+dx,t))Sdt + P\frac{dx}{2e}dt$$

On divise par dt dans la limite $dt \to 0$, puis par dx qui tend aussi vers 0 :

$$\rho Sc\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial j_Q}{\partial x}S + \frac{P}{2e}.$$

Ensuite, on utilise la loi de Fourier, avec K constant :

$$\boxed{\rho c\frac{\partial T}{\partial t} = K\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{P}{2eS}}$$

b) D'après l'indication de l'énoncé, on obtient :

$$j_{th}(e,t) = g(T_s(t) - T_0).$$

Commentons les signes : si $T_s(t) > T_0$, le flux thermique quitte le matériau ce qui correspond à un flux selon $+\vec{u}_x$.

Ainsi :

$$\boxed{\vec{j}_{th}(e,t) = g(T_s(t) - T_0)\vec{u}_x}$$

Inversement, en $-e$, le flux sortant est selon $-\vec{u}_x$, soit :

$$\boxed{\vec{j}_{th}(-e,t) = -g(T_s(t) - T_0)\vec{u}_x}$$

c) En régime permanent, par définition $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$. On a ainsi à résoudre l'équation suivante :

$$K\frac{\partial^2 T_p}{\partial x^2} + \frac{P}{2eS} = 0.$$

On résout :

$$T_p(x) = -\frac{P}{4cSK}x^2 + Ax + B.$$

Pour trouver les deux constantes d'intégration A et B, on utilise les deux conditions aux limites en e et $-e$.
Pour cela, on évalue :

$$T_s = T_p(e) = -\frac{Pe}{4SK} + Ae + B = T_p(-e) = -\frac{Pe}{4SK} - Ae + B.$$

En conséquence, $A = 0$ et $B = T_p(e) + \frac{Pe}{4SK}$. Ainsi, le profil de température $T_p(x)$ est :

$$\boxed{T_p(x) = \frac{P}{4eSK}(e^2 - x^2) + T_p(e)}.$$

L'allure parabolique est représentée en Fig. 30.

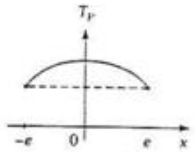


Figure 30

d) En $x = 0$, on arrive directement à :

$$T_p(0) = \frac{Pe}{4SK} + T_p(e),$$

ce qui répond à la moitié de la question.
On utilise la condition aux limites en $x = e$. Il faut évaluer la densité de flux thermique :

$$j_{th} = -K\frac{\partial T}{dx} = \frac{Px}{2eS}.$$

Alors :

$$j_{th}(e) = \frac{P}{2S} = g(T_p(e) - T_0).$$

Alors, $T_p(e) = T_0 + \frac{P}{2gS}$, soit en utilisant la relation du début de la question :

$$\boxed{T_p(0) = T_p(e) + \frac{Pe}{4SK} = T_0 + \frac{P}{2gS}\left(1 + \frac{ge}{2K}\right)}.$$

e) Pour $t \to 0$, $T(x,t) \to T_0$. Vu l'expression de $T(x,t)$, le terme en facteur de $T_p(x) - T_0$ est nécessairement nul : $1 - f(0) = 0$, soit $\boxed{f(0) = 1}$.

Au bout d'un temps suffisamment long, le système cesse d'évoluer. La solution doit ainsi s'identifier à la solution permanente $T_p(x)$. Il faut donc que : $\boxed{\lim_{t\to\infty} f(t) = 0}$.

f) Conformément à l'énoncé, on injecte la forme proposée pour $T(x,t)$ dans l'équation de la chaleur établie à la question **a)** :

$$-\rho c(T_p(x) - T_0)f'(t) = KT''_p(x)(1 - f(t)) + \frac{P}{2eS}.$$

En utilisant l'expression de $T_p(x)$ établie à la question **c)** :

$$-\rho c\left[\frac{P}{4eSK}(e^2 - x^2) + \frac{P}{2gS}\right]f'(t) = -K\frac{P}{2eKS}(1 - f(t)) + \frac{P}{2eS}.$$

En simplifiant :

$$-\rho c\left[\frac{1}{2eK}(e^2 - x^2) + \frac{1}{g}\right]f'(t) = \frac{1}{e}f(t).$$

© Hachette - La photocopie non autorisée est un délit

Alors : $\boxed{f'(t) + f(t)\varphi(x) = 0}$, avec $\boxed{\varphi(x) = \dfrac{1}{\rho c\left[\dfrac{1}{2K}(e^2 - x^2) + \dfrac{e}{g}\right]}}$.

Les variables de temps t et d'espace x étant indépendantes, la solution proposée ne peut être valable que si $\varphi(x) = \text{cte}$. Au dénominateur, le terme de gauche varie entre 0 et $e^2/(2K)$ et ce terme doit ainsi rester négligeable devant le terme de droite e/g, soit :

$$\frac{e^2}{2K} \ll \frac{e}{g}$$

La condition est alors $ge \ll 2K$.

Dans ce cas, $\varphi(x) = g/\rho ce$. Posons $\tau = \rho ce/g$. L'équation différentielle est :

$$f'(t) + \frac{1}{\tau}f(t) = 0.$$

Alors, $f(t) = A\exp(-t/\tau)$. Comme $f(0) = 1$, on déduit :

$$\boxed{f(t) = \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}$$

g) $\tau = 2\,10^3\,\text{s}$. La puissance semble un peu faible pour assurer un chauffage rapide de l'échantillon.

⇨ **Remarque**

La seconde limite pour $t \to \infty$ est aussi vérifiée.

⇨ **Remarque**

$ge = 5\,10^{-2}\,\text{W}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{m}^{-1}$
et $2K = 1\,\text{W}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{m}^{-1}$,
on est bien dans le cadre de l'approximation nécessaire à la résolution proposée.

7. Évolution de la plaque de glace sur la banquise — D'après Polytechnique

La figure 31 illustre le problème de la formation d'une couche de glace tel qu'il fut formulé par le travail pionnier de Stefan (1891). La surface d'un volume d'eau initialement à la température de fusion T_F est mis en contact à l'instant $t = 0$ avec une paroi plane, maintenue en position fixe et à $T_S < T_F$. Une couche de glace apparaît et se développe progressivement au sein du fluide. On note $\xi(t)$ la position de l'interface entre l'eau et la glace ; la glace occupe l'espace $0 \leq z \leq \xi(t)$. Soit $T_G(z,t)$ le champ de température dans la glace, supposé unidimensionnel. On suppose que $T_G(z = 0, t) = T_S$. La pression reste constamment égale à P_0, pression standard.

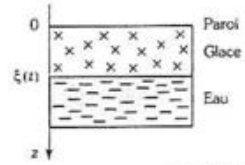


Figure 31

a) Exprimer la loi de Fourier dans la glace.
On note $\lambda_G = 2.2\,\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ la conductivité thermique de la glace.

b) Effectuer un bilan énergétique sur un système qu'on précisera pour obtenir l'équation de diffusion thermique (« équation de la chaleur »). On pourra introduire $\rho_G = 915\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$, masse volumique de la glace, et $c_G = 2{,}1\,10^3\,\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$, capacité thermique massique de la glace.

c) Quelles sont les conditions aux limites pour le champ de température de la glace ? Permettent-elles de déterminer $T_G(z,t)$?

d) Que dire de la température au sein de l'eau ? Pourquoi l'eau est-elle mise en mouvement par l'avancée de l'interface ?

e) Soient H_G l'enthalpie massique de la glace, et H_E celle de l'eau que l'on suppose indépendantes de la température. En raisonnant sur un cylindre vertical de section S, exprimer à l'aide de $\xi(t)$ la masse d'eau qui s'est transformée en glace entre t et $t + dt$.

f) Effectuer le bilan enthalpique de cette masse entre ces deux instants (on négligera les variations d'énergie cinétique). En déduire la relation :

$$\lambda_G\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_{\xi(t)} = \rho_G L \dot{\xi}(t)$$

où $L = 0{,}33\ 10^6\ \text{J} \cdot \text{kg}^{-1}$ est l'enthalpie de fusion de la glace.

g) On suppose que $\xi(t)$ est suffisamment faible pour admettre que la température dans la glace est à tout instant celle de l'état stationnaire. Pourquoi n'a-t-on jamais rigoureusement de régime permanent ? Que devient l'équation de la chaleur dans cette approximation ? En déduire le profil de la température dans la glace.

h) Déduire de la question **f)** une équation différentielle en $\xi(t)$. Montrer que $\xi(t) = \sqrt{2Dt}$, où D est une constante qu'on déterminera. Faire l'application numérique pour D avec $T_S = -30$ °C. Calculer l'épaisseur de glace après un jour, une semaine, un mois et six mois.

a) Par définition, la loi de Fourier s'écrit :

$$\boxed{\vec{j}_Q = -\lambda_G \overrightarrow{\text{grad}}\, T_G = -\lambda_G \frac{\partial T_G}{\partial z}\vec{u}_z}$$

$\vec{j}_Q \cdot \overrightarrow{dS}$ représente le flux thermique de conduction au travers de $\overrightarrow{dS}$.

b) Le système est un parallélépipède de section S et compris entre z et $z + dz$ (Fig. 32). On lui applique le premier principe de la thermodynamique entre t et $t + dt$:

$$d^2H = \delta^2Q + \delta^2W^* :$$

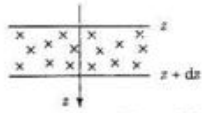


Figure 32

- le dernier terme de travail est ici nul (seules les forces de pression travaillent) ;
- le transfert thermique est lié aux échanges en z et $z + dz$:

$$\delta^2Q = (j_Q(z,t)S - j_Q(z+dz,t)S)dt = -\frac{\partial j_Q}{\partial z}S dz\, dt = \lambda_G \frac{\partial^2 T_G}{\partial z^2} S dt\, dz ;$$

- la variation d'enthalpie du système élémentaire s'écrit :

$$d^2H = dm\, c_G(T_G(z,t+dt) - T_G(z,t)) = \rho_G c_G(T_G(z,t+dt) - T_G(z,t))S\, dz .$$

En simplifiant par dz, S et en divisant par dt (dans la limite $dt \to 0$), on obtient :

$$\boxed{\rho_G c_G \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda_G \frac{\partial T_G}{\partial z^2}}$$

c) La température de la glace contre la paroi est T_S : $\forall t > 0$, $T_G(0,t) = T_S$.

La température de la glace au contact de l'eau est la température de fusion T_F : $T_G(\xi(t),t) = T_F$.

$\xi(t)$ étant inconnue, on ne peut pour l'instant espérer obtenir la variation spatiale de la température dans la glace.

d) La température de l'eau est uniforme et égale à T_F. En effet, elle est au contact avec de la glace de température inférieure à T_F. Si jamais la température de l'eau devient inférieure à T_F, elle se solidifie.

En conséquence, la diffusion thermique n'a pas lieu dans l'eau.

La solidification ne se fait pas à volume constant car la glace est moins dense que l'eau. La glace, en se formant, met en mouvement l'eau vers le bas.

⇨ **Remarque**

La solidification de l'eau est exothermique. L'énergie dégagée est diffusée par conduction vers la paroi froide en $z = 0$.

© La chimie – La physique non autorisée est un délit

e) À l'instant $t(t + dt)$, l'interface a pour abscisse $\xi(t)$ $(\xi(t + dt))$ (Fig. 33). La glace formée entre t et $t + dt$ se situe entre ces deux abscisses, dans le volume $S(\xi(t + dt) - \xi(t))$. Sa masse est ainsi :

$$\boxed{dm = \rho_G S(\xi(t+dt) - \xi(t)) = \rho_G S \dot{\xi}(t)\, dt}$$

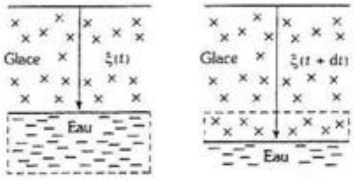


Figure 33

f) Conservons le même système auquel on applique le premier principe de la thermodynamique entre les instants t et $t + dt$:

$$dH = \delta Q + \delta W^* :$$

- le dernier terme est nul (le seul travail reçu est celui des forces de pression) ;
- les transferts thermiques se font aux frontières du système en $z = \xi(t)$ et en $z = \xi(t + dt)$. En $z = \xi(t)$ a lieu un transfert par conduction $j_Q(\xi(t),t)S\, dt$. En $z = \xi(t + dt)$, aucun transfert conductif n'a lieu.

En effet, cette frontière se trouve dans l'eau pendant la durée du bilan entre t et $t + dt$. L'eau étant de température uniforme, aucun flux conductif n'intervient. Alors, $\delta Q = j_Q(\xi(t),t)S\, dt$;

- pendant la durée du bilan, le système est de température constante mais change d'état : $d^2H = -dmL$.

Alors : $\boxed{\rho_G \dot{\xi}(t) L = -j_Q(\xi(t),t) = \lambda_G \frac{\partial T_G}{\partial z}(\xi(t),t)}$.

Erreur à éviter

Le bilan est délicat.

⇨ **Remarque**

Le signe moins vient du fait que la solidification est exothermique, contrairement à la fusion (ici, par convention, $L > 0$).

g) S'il existait un régime permanent, l'équation de la chaleur dans la glace mènerait à $T_G''(z) = 0$ et $T_G(z)$ varierait linéairement entre T_S en $z = 0$ et T_F en $z = \xi$. Ainsi, il existerait un gradient de température constant dans toute la glace, notamment au niveau de l'interface avec l'eau liquide. Or, dans l'eau liquide, il n'existe aucune conduction thermique. En conséquence, de l'énergie quitterait (ou s'accumulerait au niveau de) l'interface. La température de l'interface varierait alors, ce qui est contraire à l'hypothèse d'un régime permanent.

Dans ce régime quasi stationnaire, $\frac{\partial^2 T_G(z,t)}{\partial z^2} = 0$. Vu les conditions aux limites exprimées ci-dessus :

$$\boxed{T_G(z,t) = T_S + \frac{z}{\xi(t)}(T_F - T_S)}$$

h) On déduit de la question précédente : $\frac{\partial T_G}{\partial z}(\xi(t),t) = \frac{T_F - T_S}{\xi(t)}$.

En utilisant le bilan de la question **f)**, on arrive à : $\rho_G L \dot{\xi} = \lambda_G \frac{T_F - T_S}{\xi(t)}$.

soit : $\xi\dot{\xi} = D$, avec $D = \frac{\lambda_G(T_F - T_S)}{\rho_G L}$.

On intègre : $\frac{\xi^2(t)}{2} = Dt + \text{cte}$.

Comme $\xi(0) = 0$, on aboutit à : $\boxed{\xi(t) = \sqrt{2Dt}}$.

L'application numérique donne $D = 2{,}2\ 10^{-7}\ \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, et :

durée	1 jour	1 semaine	1 mois	6 mois
épaisseur de glace	19 cm	51 cm	1,1 m	2,6 m

⇨ **Remarque**

L'épaisseur de la couche de glace croît comme la racine carrée du temps. Ce résultat est caractéristique d'un phénomène diffusif.

Dispositifs industriels comportant un écoulement

Méthodes

Le cours en questions

1 ■ Généralités sur les écoulements en régime permanent

1.1 Rappeler ce qu'est un écoulement permanent.

Un écoulement est dit permanent si ses caractéristiques n'évoluent plus dans le temps.

1.2 Qu'appelle-t-on débit massique ?

Soit une conduite parcourue par un fluide en mouvement. Le débit massique au travers d'une section S (Fig. 1) est :

$$D_m = \iint_S \rho \vec{v} \cdot \vec{dS} \ .$$

Il correspond à la masse de fluide traversant la section S par unité de temps : il s'exprime en $kg \cdot s^{-1}$.

D_m est positif ou négatif suivant les sens respectifs de l'écoulement et de la normale choisie.

Si la section est droite et les grandeurs uniformes sur cette section (Fig. 2), le débit massique vaut :

$$D_m = \rho S v \ ,$$

ρ, S et v étant évaluées sur la surface.

⇨ Ce chapitre est à proprement parler uniquement au programme PT. Cependant, de nombreux problèmes de MP utilisent les notions développées ici.

⇨ Un régime transitoire précède toujours le régime permanent.

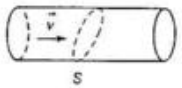


Figure 1

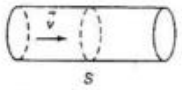


Figure 2

⇨ Dans le cas d'un écoulement à une entrée et une sortie, D_m est conventionnellement choisi positif.

© Librairie - La photocopie non autorisée est un délit

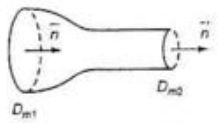


Figure 3

Cette loi est l'analogue de la loi des nœuds en électrocinétique.

1.3 Que dire du débit massique en régime permanent ?

En régime permanent, le débit massique se conserve le long d'une conduite : $D_{m1} = D_{m2}$ sur la figure 3

Si le système comprend plusieurs entrées/sorties (Fig. 4), alors :

$$D_{m,e1} + D_{m,e2} + D_{m,e3} + D_{m,e4} + \ldots = 0$$

(tous les débits doivent alors être considérés avec une normale **entrante**).

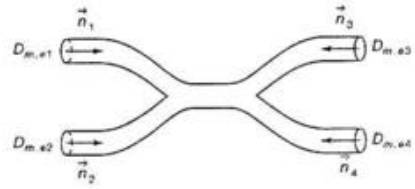


Figure 4

2 ■ Expression du premier principe pour les écoulements en régime permanent (« premier principe pour les systèmes ouverts »)

2.1 Quelle est l'expression du premier principe ?

Soit un écoulement le long d'une conduite (comportant une entrée et une sortie). Alors :

$$D_m \Delta(h + e_c + e_p) = P_i + \Phi_e \ .$$

Toutes les grandeurs en minuscule sont **massiques**. Plus précisément :

- D_m est le débit massique dans la conduite. Il est pris positif ;
- h est l'enthalpie massique. Pour un gaz parfait, h ne dépend que de la température, et :

$$h(T) = c_p T + \text{cte} = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{R}{M}T + \text{cte} \ ,$$

où $\gamma = c_p / c_v$, c_p est la capacité thermique massique à pression constante et M la masse molaire du gaz considéré.

Pour une phase condensée, cette relation reste valable avec une bonne approximation ;

- e_c est l'énergie cinétique macroscopique massique : $e_c = \frac{v^2}{2}$, où v est la vitesse de l'écoulement ;

• e_p est l'énergie potentielle macroscopique massique. Si cette dernière ne comporte que l'énergie potentielle de pesanteur, $e_p = gz + \text{cte}$, où z est orienté vers le **haut** ;

• P_i est la puissance reçue par le fluide autre que celle des actions de pression à l'entrée et à la sortie : on parle de **puissance indiquée** ;

• Φ_e est la puissance thermique reçue par le fluide passant dans le dispositif étudié.

Dans la plupart des dispositifs, les variations d'énergie potentielle Δe_p sont négligeables devant les autres termes. La variation d'énergie cinétique est elle aussi négligeable, sauf dans le cas d'une tuyère.

⇒ La démonstration est à connaître et est reprise en détail dans le savoir-faire 1.

Une autre formulation est :

$$\Delta(h + e_c + e_p) = w_i + q_e \quad ,$$

où :

• w_i est le travail indiqué massique : c'est le travail autre que celui des forces de pression exercées en aval et en amont reçu par l'unité de masse du fluide passant dans dispositif étudié. $w_i = P_i/D_m$, où P_i est la puissance indiquée reçue par le fluide dans le dispositif (D_m est le débit massique) ;

• q_e est le transfert thermique massique reçu par l'unité de masse du fluide passant dans le dispositif étudié. $q_e = \Phi_e/D_m$, où Φ_e est la puissance thermique reçue par le fluide dans le dispositif.

Dans le cas d'un dispositif à plusieurs entrées et sorties, on somme sur les entrées et sorties :

$$-\sum_j D_{m,e,j}(h_j + e_{c,j} + e_{p,j}) = P_i + \Phi_e \,,$$

⇒ $D_{m,e,j}$ est un débit entrant à la frontière numéro j du système, il peut être positif ou négatif. Il est très instructif de vérifier que cette formule se réduit bien à la précédente pour un système comportant une entrée et une sortie.

où on rappelle que les deux derniers termes représentent un **échange** avec l'extérieur.

2.2 Schématiser quelques dispositifs élémentaires et préciser leur fonction.

• Échangeur (Fig. 5) : deux fluides circulent à proximité sans se mélanger. Un transfert thermique peut alors intervenir, sans travail indiqué.

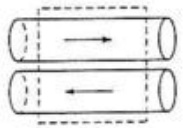


Figure 5

• Turbine adiabatique (Fig. 6) : le fluide entraîne une pièce mobile ($w_i \leqslant 0$), en vue de lui fournir une énergie (ce processus nécessite usuellement une détente du fluide et une diminution de son enthalpie, sans échange thermique : $q_e = 0$).

• Compresseur (Fig. 7) : l'extérieur fournit un travail ($w_i \geqslant 0$) mettant en mouvement des pièces mécaniques et augmentant l'enthalpie du fluide.

⇒ Le compresseur fonctionne en quelque sorte de manière réciproque par rapport à une turbine.

• Tuyère adiabatique : le fluide subit une détente spontanée adiabatique ($q_e = 0$) augmentant son énergie cinétique macroscopique

© Lavoisier - La photocopie non autorisée est un délit

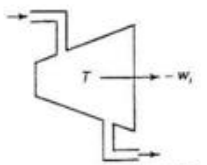


Figure 6

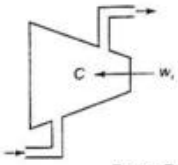


Figure 7

2.3 Comment définir le rendement d'un dispositif industriel ?

⇐ Ces termes doivent être adaptés à la machine étudiée.

Très généralement, il s'écrit comme le quotient de la puissance (ou énergie) récoltée par celle fournie au dispositif.

2.4 Qu'est-ce que le travail de transvasement ?

C'est le travail indiqué maximal récupérable (cas d'une turbine) ou minimal à fournir au fluide (cas d'un compresseur) fonctionnant entre deux pressions fixées (dans le cas où les énergies cinétique e_c et potentielle e_p macroscopiques sont négligeables). En grandeurs massiques :

$$w_t = \int v\mathrm{d}p \quad ,$$

où v est le volume massique du fluide.

3 ■ Changements de phase

3.1 Esquisser l'allure du diagramme d'état (p,T) pour un corps pur.

⇐ Seules les frontières solide-liquide de l'eau et du bismuth présentent une pente négative, en liaison avec un état solide moins dense que le liquide.

Les domaines des trois phases sont tracés sur la figure 8. Les pentes des domaines de coexistence sont positives.

Le point triple T correspond à la coexistence des trois phases liquide, solide et vapeur. Le point critique C représente la limite de la séparation entre les phases liquide et vapeur.

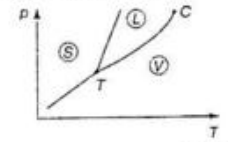


Figure 8

3.2 Rappeler les caractéristiques de l'équilibre entre deux phases pour un corps pur.

Si deux phases coexistent à l'équilibre pour un corps pur, alors la pression et la température ne peuvent être fixées indépendamment.

Si p est fixée, alors $T = T(p)$.

Si T est fixée, alors $p = p(T)$.

3.3 Quelles sont les variations des fonctions thermodynamiques lors d'un changement d'état ?

Lors du passage d'une masse m d'un corps pur de la phase 1 à la phase 2 à la température T constante (ou de manière équivalente à pression constante) :

$$\Delta H = m\ell_{1\to 2}(T) \ .$$

où $\ell_{1\to 2}$ est appelée enthalpie massique de changement d'état (en $J \cdot kg^{-1}$), et :

⇒ On dit aussi chaleur latente massique.

$$\Delta S = \frac{\Delta H}{T} = \frac{m\ell_{1\to 2}(T)}{T} \ .$$

Avec des grandeurs massiques, on obtient :

$$h_2 - h_1 = \ell_{1\to 2} \quad \text{et} \quad s_2 - s_1 = \frac{\ell_{1\to 2}}{T} \ .$$

h_i (s_i) est l'enthalpie (entropie) massique du corps pur dans la phase i à la température T.

4 ■ Cas particulier de l'équilibre liquide-vapeur pour un corps pur

4.1 Rappeler la définition d'une pression de vapeur saturante.

Lors d'un équilibre liquide-vapeur à la température T fixée, la pression possède nécessairement une valeur bien déterminée $p = p_{sat}(T)$, appelée **pression de vapeur saturante**.

⇒ Ce fait peut être constaté sur la figure 8.

On appelle :

- **vapeur sèche** une vapeur en l'absence de liquide ;
- **vapeur saturante** une vapeur en équilibre avec la phase liquide ;
- **vapeur saturante sèche** une vapeur à la fois sèche et saturante, c'est-à-dire à la limite de l'équilibre avec le liquide ;
- **liquide saturant** un liquide à la *limite* de l'équilibre avec la vapeur.

⇒ On peut l'imaginer comme le liquide en équilibre avec une seule bulle de vapeur.

4.2 Définir le titre massique en vapeur d'un mélange liquide-vapeur.

Soit une masse m de corps pur se présentant en équilibre sous les phases liquide (masse m_ℓ) et vapeur saturante (masse m_v). Le **titre massique en vapeur** du système est :

$$x = \frac{m_v}{m_\ell + m_v} \ .$$

© Larousse – La photocopie non autorisée est un délit

$x = 1$ correspond à une vapeur saturante sèche et $0 < x < 1$ à une vapeur saturante.

4.3 Quelle est l'allure du diagramme (p, V) ? Comment lire le titre massique ?

Ce diagramme est représenté en Fig. 9. Les domaines des différentes phases sont indiqués.

Quand le volume du système augmente, à température $T < T_C$ constante, on passe successivement du liquide seul à l'équilibre liquide-vapeur, puis à la vapeur sèche.

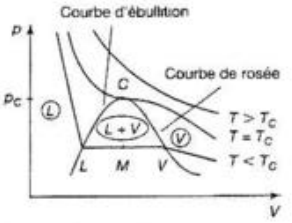


Figure 9

On trace ici les isothermes. Ces dernières correspondent aux isobares dans la zone d'équilibre liquide-vapeur.

Considérons une telle isotherme T, entre les points L et V sur la figure 9. En un point M intermédiaire, le titre massique en vapeur vaut :

C'est le théorème des moments.

$$x = \frac{LM}{LV} \ .$$

4.4 Quelle est l'allure du diagramme (T, s) ? Comment lire le titre massique ? Et l'enthalpie massique de vaporisation ?

Quand l'entropie du système augmente, à température $T < T_C$ constante, le système est plus « désordonné » : on passe successivement du liquide seul à l'équilibre liquide-vapeur, puis à la vapeur sèche.

Ce diagramme est représenté en Fig. 10. Les domaines des différentes phases sont indiqués.

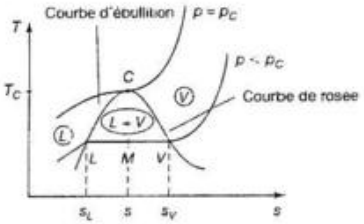


Figure 10

On trace souvent les isobares. Ces dernières correspondent aux isothermes dans le cas d'un équilibre liquide-vapeur.

Considérons une telle isobare p, entre les points L et V sur la figure 10. En un point M intermédiaire, le titre massique en vapeur vaut :

C'est le théorème des moments.

$$x = \frac{LM}{LV} \ .$$

Entre les points L (liquide seul) et V (vapeur sèche) :

$$s_V - s_L = \frac{\ell(T)}{T}.$$

4.5 Quelle est l'allure du diagramme (h, s) ?

Ce diagramme est représenté en Fig. 11.

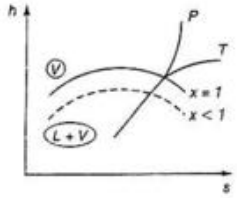


Figure 11

On distingue deux zones, délimitées par la courbe $x = 1$ (frontière entre vapeur saturante et vapeur sèche). Pour $x \leqslant 1$, isobares et isothermes sont confondues. Pour la vapeur sèche, elle se distinguent.

Les savoir-faire clefs

1 ■ Savoir démontrer et utiliser le premier principe pour les écoulements en régime permanent (une entrée et une sortie).

Conseils méthodologiques

Dans une turbine, un fluide passe des conditions (pression P_1, température T_1, vitesse v_1, enthalpie massique h_1) à l'entrée aux conditions (pression P_2, température T_2, vitesse v_2, enthalpie massique h_2) à la sortie (Fig. 12). Dans la turbine, le fluide reçoit de l'extérieur une puissance mécanique $\mathcal{P}_W$ (qui n'inclut pas la puissance des forces de pression à l'entrée et à la sortie) et une puissance thermique $\mathcal{P}_Q$. On se place en régime permanent et on néglige toute variation d'énergie potentielle.

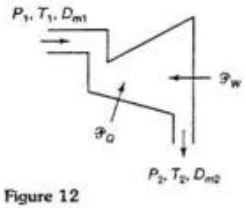


Figure 12

a) Montrer que les débits massiques entrant D_{m1} et sortant D_{m2} sont égaux. On appelle D_m leur valeur commune.

b) Que représentent les quantités $\mathcal{P}_W/D_m$ et $\mathcal{P}_Q/D_m$?

c) Montrer que l'application du premier principe à un système qu'on explicitera de manière précise mène à :

$$D_m\left(\left(h_2 + \frac{v_2^2}{2}\right) - \left(h_1 + \frac{v_1^2}{2}\right)\right) = \mathcal{P}_W + \mathcal{P}_Q.$$

1.b) Prendre comme système **fermé** une partie du fluide s'étendant entre l'entrée et la sortie du dispositif. Lui appliquer le premier principe de la thermodynamique.

© Lavoisier – La photocopie non autorisée est un délit

d) Une turbine à vapeur fonctionne dans les conditions suivantes : $P_1 = 6\ 10^6$ Pa, $T_1 = 713$ K, $v_1 = 160$ m · s^{-1}, $h_1 = 3277{,}2$ kJ · kg^{-1}, $P_2 = 9{,}5\ 10^4$ Pa, $v_2 = 80$ m · s^{-1} et $h_2 = 2673{,}2$ kJ · kg^{-1}.
Pour un débit massique $D_m = 20$ kg · s^{-1}, la turbine fournit une puissance $-\mathcal{P}_W = 11{,}5$ MW. Calculer la puissance thermique $\mathcal{P}_Q$ est préciser le sens du transfert.

e) Calculer le rapport $|\mathcal{P}_Q|/|\mathcal{P}_W|$. Commenter.

f) Calculer le rapport $\left|\frac{\frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2)}{h_2 - h_1}\right|$. Commenter.

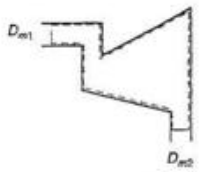


Figure 13

1.a) Remarquons déjà que les deux débits D_{m1} et D_{m2} sont positifs.
Faisons un bilan de masse pour le système délimité en Fig. 13. Pendant dt, la masse élémentaire $D_{m1}dt$ entre dans le système et $D_{m2}dt$ en sort. Ainsi, la variation de masse du système est :

$$dm = D_{m1}dt - D_{m2}dt.$$

Comme le régime est permanent, la masse contenue dans le système ne varie pas : $dm = 0$ et $\boxed{D_{m1} = D_{m2}}$.

b) $\mathcal{P}\Delta t$ est le travail indiqué (ou le transfert thermique) reçu par le système pendant la durée Δt. $D_m\Delta t$ est la masse de fluide pénétrant et sortant du dispositif pendant cette durée. Ainsi, le rapport des deux représente le travail indiqué (ou le transfert thermique) reçu par l'unité de masse du fluide traversant le dispositif.
Il est aussi possible de remarquer que si Δt est tel que $D_m\Delta t = m_0 = 1$ kg (durée nécessaire pour qu'un kg de fluide traverse le dispositif), alors le travail reçu est $\mathcal{P}\Delta t = \frac{\mathcal{P}}{D_m} m_0$. $\mathcal{P}/D_m$ est le travail reçu par le système pendant la durée nécessaire pour qu'une masse unité entre ou sorte du dispositif.
Ces termes $\mathcal{P}/D_m$ ont pour unité J · kg^{-1}.

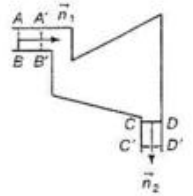


Figure 14

c) Soit le système **fermé** contenu à l'instant t entre les points $ABCD$. À l'instant $t + dt$, le même système est contenu entre $A'B'C'D'$ (Fig. 14). On applique à ce système le premier principe de la thermodynamique entre ces deux instants :

$$d(U + Ec + Ep) = \delta W + \delta Q.$$

Occupons-nous déjà des termes de droite : le transfert thermique vaut :

$$\delta Q = \mathcal{P}_Q dt.$$

En ce qui concerne le travail reçu, on le décompose entre celui des forces de pression d'entrée et de sortie et le travail autre (indiqué, ou utile).

Erreur à éviter
Les principes de la thermodynamique doivent être appliqués à des systèmes fermés. Il faut **toujours** choisir un système de ce type.

La force de pression à l'entrée vaut $P_1 S_1 \vec{n}_1$. La puissance associée est ainsi $\mathcal{P}_1 = P_1 S_1 \vec{n}_1 \cdot \vec{v}_1 = P_1 S_1 v_1$. De même, la puissance des forces de pression en sortie est $\mathcal{P}_2 = -P_2 S_2 v_2$ (le signe moins provient du fait que la force de pression est selon $-\vec{n}_2$ alors que la vitesse est orientée selon $+\vec{n}_2$. Au total :

$\delta W = \mathcal{P}_{tot}dt = \mathcal{P}_1 dt + \mathcal{P}_2 dt + \mathcal{P}_W dt = (P_1S_1v_1 - P_2S_2v_2 + \mathcal{P}_W)dt$.

Ensuite, évaluons la variation d'énergie interne (Fig. 14) :

$$\begin{aligned} dU &= U(A'B'C'D', t+dt) - U(ABCD, t) = U(A'B'C'D') - U(ABCD) \\ &= U(A'B'CD) + U(CDC'D') - U(ABA'B') - U(A'B'CD) \\ &= U(CDC'D') - U(ABA'B'). \end{aligned}$$

Les valeurs évaluées en t et $t + dt$ étant identiques (régime permanent), on a supprimé les références au temps. Au final, tout revient à évaluer la différence d'énergie interne des « morceaux de systèmes » à l'entrée et à la sortie. Ces derniers possèdent une masse commune $dm = D_m dt$. En utilisant l'énergie interne massique, on obtient :

$$dU = dm(u_2 - u_1) = D_m dt(u_2 - u_1).$$

On procède de la même manière pour l'énergie cinétique macroscopique (sa valeur massique étant $v^2/2$), et :

$$dEc = dm\left(\frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2}\right) = D_m dt\left(\frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2}\right).$$

Comme l'énergie potentielle ne varie pas, l'ensemble des résultats précédents mène à :

$$D_m dt(u_2 - u_1) = (P_1S_1v_1 - P_2S_2v_2 + \mathcal{P}_W)dt + \mathcal{P}_Q dt.$$

⇒ La prise en compte de l'énergie potentielle de pesanteur donnerait $dE_p = dm(gz_2 - gz_1)$ car l'énergie potentielle massique est gz.

On exprime enfin le débit massique au travers des surfaces d'entrée et de sortie :

$$D_m = \rho_1 S_1 v_1 = \rho_2 S_2 v_2,$$

on notant ρ la masse volumique. Ainsi :

$$D_m\left(u_2 - u_1 + \frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2}\right) = D_m\left(P_1\frac{1}{\rho_1} - P_2\frac{1}{\rho_2}\right) + \mathcal{P}_W + \mathcal{P}_Q.$$

Comme $1/\rho$ est le volume massique, on voit apparaître les termes $u_i + \frac{P_i}{\rho_i}$ ($i = 1,2$) qui sont en fait égaux à l'enthalpie massique h_i. Au final :

$$D_m\left(h_2 - h_1 + \frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2}\right) = \mathcal{P}_W + \mathcal{P}_Q.$$

d) On utilise le résultat précédent :

$$\mathcal{P}_Q = D_m(h_2 - h_1) + \frac{D_m}{2}(v_2^2 - v_1^2) - \mathcal{P}_W = -772\ \text{kW}.$$

Le transfert thermique a donc lieu du fluide vers le milieu extérieur. Il s'agit d'une perte énergétique pour le fluide qui doit être minimisée pour une turbine.

e) L'application numérique fournit un rapport de 0.067, soit 6,7 %. Ainsi, 93,3 % de l'énergie fournie par le fluide est transformée en travail mécanique (indiqué). Seuls 6,7 % échauffent le milieu extérieur.

f) On obtient 0,016, soit 1,6 %. Les variations d'énergie cinétique sont très faibles par rapport aux variations d'enthalpie. L'énergie macroscopique du fluide ne joue quasiment aucun rôle dans une turbine.

© La chimie - La photocopie non autorisée est un délit

Conseils méthodologiques

2 ■ Savoir démontrer et utiliser le premier principe pour les écoulements en régime permanent (dispositif à plusieurs entrées/sorties).

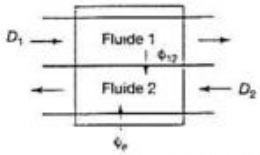


Figure 15

2.a) Considérer un système fermé dans les deux canalisations s'étendant entre l'entrée et la sortie.

2.b) S'intéresser à l'une des canalisations.

On étudie un condenseur, modélisé par un échangeur à double courant. Les deux fluides parcourent l'échangeur en sens opposés (Fig. 15). Les indices 1 et 2 font référence aux fluides 1 et 2, indice e pour entrée et s pour sortie. Les débits massiques dans les deux canalisations sont notés D_1 et D_2. La puissance indiquée $\mathcal{P}_i$ est nulle. On note Φ_e la puissance thermique échangée avec l'extérieur et Φ_{12} la puissance thermique reçue par le fluide 2 du fluide 1. On négligera les énergies cinétique et potentielle macroscopiques, et on supposera le régime permanent.

a) En effectuant un bilan énergétique global, relier les enthalpies massiques (notées h) d'entrée et de sortie des deux fluides.

b) En supposant le condenseur globalement adiabatique, montrer que :

$$D_2(h_{2s} - h_{2e}) = D_1(h_{1e} - h_{1s}) = \Phi_{12}.$$

c) On suppose les transformations réversibles. Montrer qu'elles sont aussi isobares pour les fluides 1 et 2.

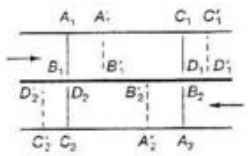


Figure 16

⇐ On établit deux fois ce bilan, une pour chaque canalisation.

2.a) Soit le système contenu à l'instant t entre les points $A_1B_1C_1D_1$ et $A_2B_2C_2D_2$ (Fig. 16). À l'instant $t + dt$, ce même système est contenu entre $A'_1B'_1C'_1D'_1$ et $A'_2B'_2C'_2D'_2$.

On applique à ce système **fermé** le premier principe de la thermodynamique :

$$d(U + Ec + Ep) = dU = \delta W + \delta Q.$$

Similairement à ce qui a été étudié dans le savoir-faire 1, question **c)** :

$$dU = U(C_1D_1C'_1D'_1) - U(A_1B_1A'_1B'_1) + U(C_2D_2C'_2D'_2) - U(A_2B_2A'_2B'_2)$$
$$dU = D_1 dt(u_{1s} - u_{1e}) + D_2 dt(u_{2s} - u_{2e}).$$

Le travail se limite à celui des actions de pression aux deux entrées et sorties :

$$\delta W = P_{1e}S_1v_{1e}dt - P_{1s}S_1v_{1s}dt + P_{2e}S_2v_{2e}dt - P_{2s}S_2v_{2s}dt,$$

en notant S_i les sections des deux conduites. On fait intervenir les débits massiques :

$$D_1 = \rho_{1e}S_1v_{1e} = \rho_{1s}S_1v_{1s} \quad \text{et} \quad D_2 = \rho_{2e}S_2v_{2e} = \rho_{2s}S_2v_{2s},$$

où ρ est la masse volumique. Alors :

$$\delta W = \left(\frac{P_{1e}}{\rho_{1e}} - \frac{P_{1s}}{\rho_{1s}}\right)dt + \left(\frac{P_{2e}}{\rho_{2e}} - \frac{P_{2s}}{\rho_{2s}}\right)dt.$$

Erreur à éviter
Ne surtout pas faire intervenir Φ_{12} ici : ce terme ne représente pas un terme d'échange avec l'extérieur.

Enfin, le transfert thermique est :

$$\delta Q = \Phi_e dt.$$

En faisant apparaître l'enthalpie massique $h = u + P/\rho$, on arrive à :

$$D_1(h_{1s}-h_{1e})+D_2(h_{2s}-h_{2e})=\Phi_e$$

On retrouve la formule à plusieurs entrées et sorties du Cours en questions 2.1..

b) Si le condenseur est globalement adiabatique, $\Phi_e = 0$, soit :

$$D_1(h_{1s}-h_{1e})+D_2(h_{2s}-h_{2e})=0$$

Le premier principe appliqué au fluide dans la seconde canalisation donne :

$$D_2(h_{2s}-h_{2e})=\Phi_{12}$$

c) Intéressons-nous au fluide 2 par exemple.
La relation précédente :

$$h_{2s}-h_{2e}=q_{12},$$

où $q_{12}=\Phi_{12}/D_2$, écrite sous forme massique donne :

$$dh_2=\delta q_2.$$

De plus, l'identité thermodynamique pour l'enthalpie massique du fluide 2 fournit une autre relation :

$$dh_2=T_2ds_2+v_2dP_2.$$

La réversibilité garantit l'égalité :

$$ds_2=\frac{\delta q_2}{T_2},$$

d'où on déduit $v_2dP_2=0$. La transformation est isobare.

Erreur à éviter
Ne pas chercher à faire une démonstration globale, sur l'ensemble des deux fluides.

Si ces transformations n'étaient pas isobares, elles ne pourraient être réversibles : l'écoulement aurait inévitablement lieu des hautes vers les basses pressions (comme lors d'une détente de Joule-Thomson).

3 ■ Savoir utiliser un diagramme de phase liquide-vapeur (d'après CCP).

Conseils méthodologiques

Bien lire et exploiter les différentes courbes sur la figure 18 (isenthalpes, isobares, isotitres).

Le schéma de fonctionnement d'un réfrigérateur est indiqué en figure 17. Entre l'entrée et la sortie d'un élément, on rappelle la relation :

$$\Delta h = w_i + q.$$

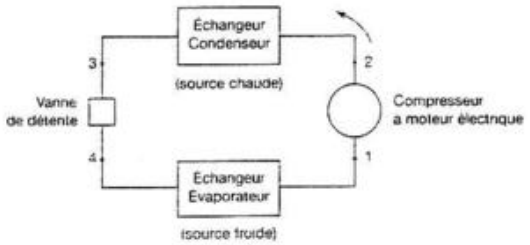


Figure 17

On utilisera le diagramme entropie massique-température de la figure 18.

Voir le Cours en questions pour les notations.

© Librairie - La photocopie non autorisée est un délit

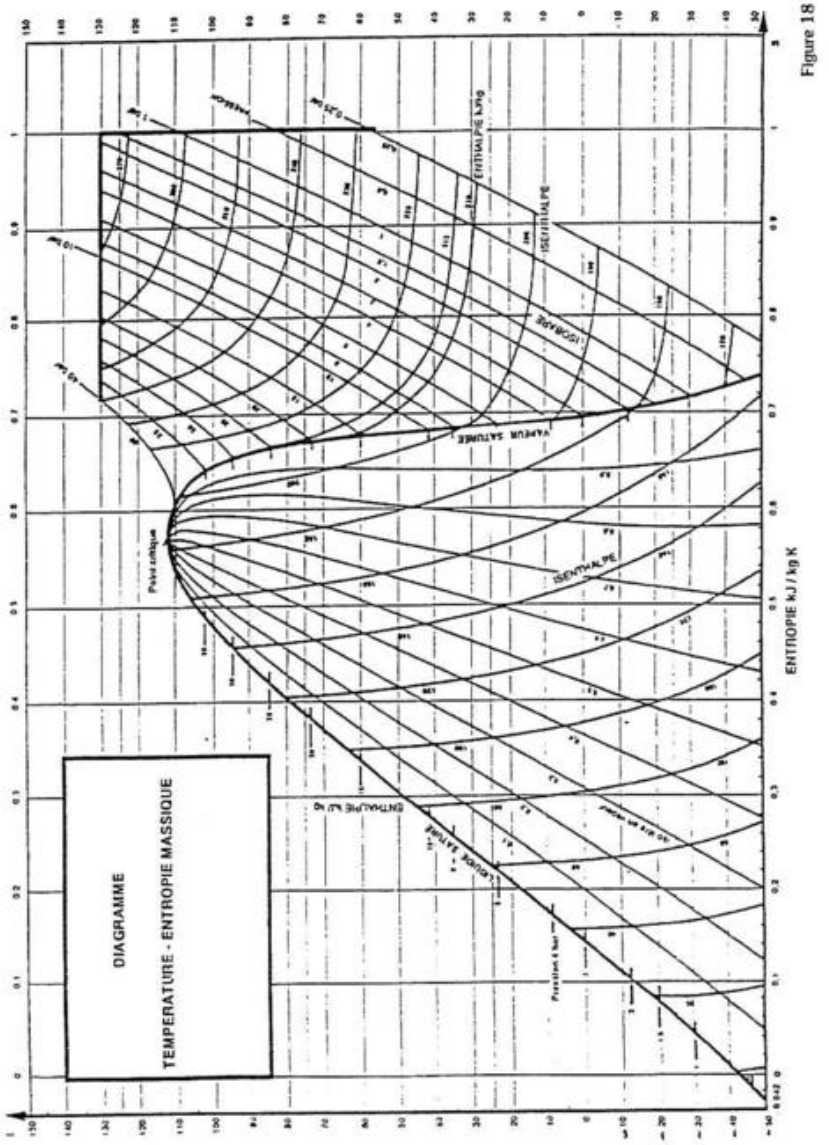


Figure 18

La compression de 1 à 2 est adiabatique réversible. Le passage dans les deux échangeurs (2 à 3, et 4 à 1) est isobare. La vanne de détente est un tuyau indéformable et ne permettant pas les échanges thermiques.

a) Montrer que dans la vanne, la detente est isenthalpique.

b) Rappeler la propriété liant les isothermes et les isobares dans la zone de mélange liquide-vapeur.

c) La température à la fin de l'évaporation dans l'évaporateur est $t_1 = -10\ °C$. La pression de fin de compression en 2 est 15 bar. Au point 3, le fluide est liquide saturant. L'evaporateur mène à un état de vapeur sèche saturante par une transformation isobare. Placer les quatre points 1, 2, 3 et 4 sur le diagramme de la figure 18. Déterminer les valeurs de P, t, h et s en ces points.

d) Comment trouver de deux façons différentes la valeur de l'enthalpie massique de vaporisation du fluide $\ell(t_0)$ à une temperature t_0 donnee ? Si $P_0 = 3$ bar, quelles sont les valeurs de t_0 et $\ell(t_0)$?

e) Que valent $\ell(t_c)$, t_c et s_c au point critique ?

f) Quel est le titre massique en vapeur x_4 du point 4 ?

g) Vu l'allure des isenthalpes du diagramme de la figure 18, le fluide sous forme de vapeur seche se comporte-t-il comme un gaz parfait ?

3.a) Appliquons l'expression du premier principe :

$$\Delta h = w_i + q .$$

Les tuyaux sont indéformables, soit $w_i = 0$. Les parois étant adiabatiques, $q = 0$. Ainsi, $\boxed{\Delta h = 0}$: la détente est isenthalpique.

b) Si les phases liquide et vapeur coexistent pour un corps pur, la pression et la température ne sont pas indépendantes. La détermination de l'une des deux fixe l'autre : les isobares coïncident avec les isothermes.

c) On sait déjà que $t_1 = -10\ °C$, $P_2 = P_3 = 15$ bar.

Le point 3 étant sur la courbe d'ébullition, on déduit clairement sa position (Fig. 19, page suivante).

De même, le point 1 étant sur la courbe de rosée, on l'identifie sans ambiguïté (Fig. 19, page suivante).

2 est sur l'isobare de 3. Dans la zone de coexistence liquide-vapeur, l'isobare coïncide avec l'isotherme. L'isobare est ensuite indiquée pour la vapeur sèche. De plus, 2 possède la même entropie que 1. On le situe alors (Fig. 19, page suivante).

4 est sur l'isobare de 1 (c'est-à-dire l'isotherme de 1 pour la zone liquide-vapeur). De plus, 4 est sur l'isenthalpe de 3. On peut ainsi conclure (Fig. 19, page suivante).

© La classe – La photocopie non autorisée est un délit

3.b) à f) Consulter le Cours en questions.

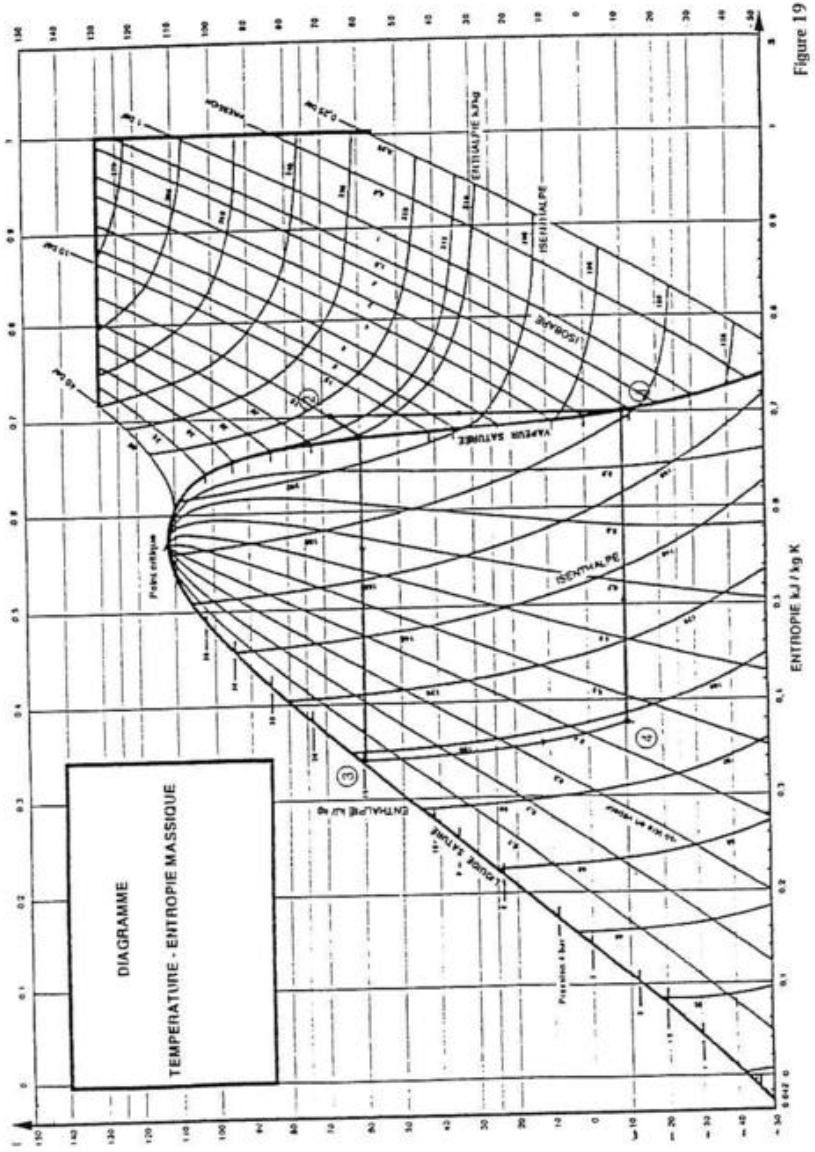


Figure 19

On lit alors les résultats du tableau suivant :

état	P (bar)	t (°C)	h (kJ · kg^{-1})	s (kJ · K^{-1} · kg^{-1})
1	2	–10	180	0,7
2	15	70	215	0,7
3	15	60	97	0,34
4	2	–10	97	0,38

d) L'isobare $P_0 = 3$ bar coïncide avec l'isotherme $t_0 = 0$ °C dans la zone de coexistence liquide-vapeur (Fig. 19).

Pour obtenir l'enthalpie massique de vaporisation, on peut utiliser :

- l'entropie : $s_V(t_0) - s_L(t_0) = \dfrac{\ell(t_0)}{T_0}$.

Erreur à éviter
Bien repasser en kelvin pour T_0 au dénominateur.

On lit sur le diagramme :

$$s_V(t_0) = 0{,}69 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1} \quad \text{et} \quad s_L(t_0) = 0{,}15 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}.$$

On déduit donc :

$$\boxed{\ell(t_0) = 173(0{,}69 - 0{,}15)\,10^3 \approx 150 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}} ;$$

- L'enthalpie : $h_V(t_0) - h_L(t_0) = l(t_0)$.

L'isenthalpe 40 kJ · kg^{-1} passe quasiment par le point de la courbe d'ébullition à t_0, et l'isenthalpe 180 kJ · kg^{-1} n'est pas trop éloignée du point de la courbe de rosée à t_0. On obtient

$$\boxed{\ell(t_0) = h_V - h_L \approx 140 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}},$$

en accord avec le résultat précédent.

e) Le point critique possède une température $t_c = 100$ °C et une entropie massique $s_c = 0{,}56$ kJ · K^{-1} · kg^{-1} comme on le lit sur le diagramme.

Au point critique, les entropies massiques du liquide et du gaz sont quasiment égales. On déduit :

$$\boxed{\ell(t_c) = T_c(s_V(t_c) - s_L(t_c)) = 0}.$$

f) Le théorème des moments indique :

$$\boxed{x_4 = \frac{LM_4}{LV} \approx \frac{0{,}36 - 0{,}10}{0{,}70 - 0{,}10} \approx 0{,}46}.$$

Le système est quasiment à moitié sous forme liquide et à moitié sous forme vapeur.

g) Pour un gaz parfait, l'enthalpie (massique) ne dépend que de la température. Les isenthalpes devraient donc être horizontales sur le diagramme de la figure 18. Le fluide représenté n'est pas un gaz parfait en phase vapeur sèche.

© La photocopie non autorisée est un délit

Annales

Pour maîtriser les bases

1. Étude simplifiée des turboréacteurs — D'après Banque PT

On étudie le fonctionnement de réacteurs en régime permanent. La fonction d'un turboréacteur est de transformer l'énergie thermique fournie à l'air lors d'une combustion en énergie cinétique. On suppose lors de tout le problème que :

- l'air est un gaz parfait de capacité thermique à pression constante $c_p = 1$ kJ · kg^{-1} · K^{-1} constante et $\gamma = 1{,}4$;
- l'énergie potentielle est négligée. L'énergie cinétique est négligée sauf à la sortie de la tuyère ;
- le débit massique d'air vaut $D_m = 1$ kg · s^{-1} ;
- le compresseur aspire l'air ambiant : $P_1 = 1$ bar et $T_1 = 288$ K ;
- les évolutions à l'intérieur des compresseurs et turbines sont adiabatiques réversibles ;
- les évolutions dans les chambres de combustion sont isobares.

1. Le schéma de principe d'un turboréacteur mono-flux, mono-corps est donné en Fig. 20. Le compresseur (ici axial) aspire l'air ambiant. Après compression, l'air est chauffé dans la chambre de combustion jusqu'à la température $T_3 = 1\,250$ K. Après détente partielle dans la turbine (ici axiale), l'air est envoyé dans la tuyère où la détente s'effectue à pression ambiante $P_5 = 1$ bar. Le compresseur est uniquement entraîné par la turbine, qui lui transmet intégralement la puissance mécanique que lui fournit l'écoulement. On rappelle $P_2 = P_3$ et on donne le taux de compression du compresseur $P_2/P_1 = 6{,}15$.

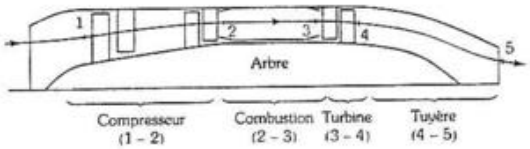


Figure 20

a) Donner les expressions littérales, puis numériques, de :

- la température T_2 (sortie du compresseur) et du travail indiqué massique de compression w_{ic} ;
- de la température T_4 et de la pression P_4 à la sortie de la turbine ;
- de la température T_5 et de la vitesse c_5 à la sortie de la tuyère.

b) Donner l'expression littérale, puis la valeur numérique de la quantité de chaleur fournie à l'air lors de la combustion, notée $q_{23} = q_{combustion}$.

c) Donner l'expression littérale, puis la valeur numérique de l'énergie cinétique massique de l'air à la sortie de la tuyère notée e_c.

d) En déduire la valeur du rendement thermique η_{th} de ce turboréacteur.

2. Le schéma de principe d'un turboréacteur mono-flux, mono-corps à post combustion est donné en Fig. 21. La situation est identique à la précédente, mais on insère une seconde chambre de combustion entre la turbine et la tuyère. Lors de cette seconde combustion, l'air est à nouveau chauffé jusqu'à la température $T_5 = 1\,930$ K. La détente s'effectue ensuite dans la tuyère jusqu'à la pression ambiante $P_0 = 1$ bar. Comme précédemment, la turbine entraîne le compresseur, le taux de compression est identique $P_2/P_1 = 6{,}15$ et la température de fin de première combustion aussi $T_3 = 1\,250$ K. On rappelle que $P_2 = P_3$ et $P_4 = P_5$.

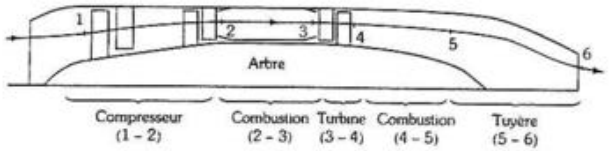


Figure 21

a) Calculer les valeurs numériques de T_2, T_4 et P_4.

b) Donner les expressions littérales puis les valeurs numériques de la température T_6 à la sortie de la tuyère et de la vitesse c_6 à la sortie de cette tuyère.

c) Donner l'expression littérale, puis la valeur numérique de la quantité de chaleur massique fournie à l'air lors de la seconde combustion, notée q_{45}. En déduire la valeur numérique de la quantité de chaleur massique fournie globalement à l'air, notée $q_{combustion} = q_{23} + q_{45}$.

d) Donner l'expression littérale, puis la valeur numérique de l'énergie cinétique massique de l'air à la sortie de la tuyère, notée e_c.

e) En déduire la valeur du rendement thermique η_{th} de ce turboréacteur.

f) Comparer les paramètres des deux turboréacteurs étudiés et conclure.

Conseils méthodologiques. L'étude des turboréacteurs fait de nombreuses fois appel au savoir-faire 1 (premier principe de la thermodynamique pour les systèmes en écoulement permanent).

1.a) Successivement :

• la transformation dans le compresseur est adiabatique réversible. L'air vérifie la loi de Laplace : $P^{1-\gamma}T^{\gamma} = \text{cte}$.

Ainsi :

$$T_2 = T_1\left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = 484\ \text{K}.$$

Remarque

On vérifie bien que P et T augmentent conjointement dans le compresseur.

On applique le premier principe de la thermodynamique pour les systèmes en écoulement :

$$\Delta(h + e_c + e_p) = \Delta h = w_{ic} + q_c = w_{ic}.$$

car l'évolution est adiabatique. Comme $\Delta h = c_p\Delta T$, on obtient :

$$w_{ic} = c_p(T_2 - T_1) = 196\ \text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}.$$

• le premier principe lors de la traversée de la turbine s'exprime :

$$\Delta h = c_p(T_4 - T_3) = w_{it} + q_t = w_{it}.$$

Or, le compresseur est uniquement entraîné par la turbine, soit $w_{it} = -w_{ic}$.

Ainsi :

$$T_4 = T_3 - \frac{w_{ic}}{c_p} = 1\,054\ \text{K}.$$

Erreur à éviter

Ne pas oublier le signe moins dans la turbine, le travail est cédé par le gaz alors qu'il est reçu dans le compresseur.

La transformation est adiabatique réversible dans la turbine : la loi de Laplace indique :

© Lavoisier - La photocopie non autorisée est un délit

$$P_4 = P_3\left(\frac{T_3}{T_4}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = P_2\left(\frac{T_3}{T_4}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = 3.39\ \text{bar}.$$

• encore une fois, l'évolution adiabatique réversible indique :

$$T_5 = T_4\left(\frac{P_4}{P_5}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = 744\ \text{K}.$$

Le premier principe permet de conclure, en n'oubliant pas l'énergie cinétique de sortie :

$$\Delta(h + e_c) = c_p(T_5 - T_4) + \frac{c_5^2}{2} = 0.$$

car le travail indiqué ainsi que le transfert thermique sont nuls. Finalement :

$$c_5 = \sqrt{2c_p(T_4 - T_5)} = 787\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Erreur à éviter

Ne pas oublier de prendre la valeur de c_p dans le système international : $c_p = 10^3\ \text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

b) Le premier principe de la thermodynamique appliqué pour la traversée de la chambre de combustion donne :

$$\Delta h = c_p(T_3 - T_2) = q_{23}.$$

L'application numérique est : $q_{23} = 766\ \text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.

Remarque

La quantité est bien positive : le gaz reçoit un transfert thermique suite à la combustion du carburant.

c) Par définition : $e_c = \frac{c_5^2}{2} = 3{,}10\ 10^5\ \text{J} \cdot \text{kg}^{-1} = 310\ \text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.

Remarque

L'unité du système international pour e_c est $\text{J} \cdot \text{kg}^{-1}$.

d) La fonction du turboréacteur est de communiquer de l'énergie cinétique à l'air, la source d'énergie étant la combustion du carburant. On déduit l'expression du rendement :

$$\eta_{th} = \frac{e_c}{q_{23}} = 0.40$$

2.a) Les raisonnements tenus dans la première partie sont toujours valables : on déduit :

$$T_2 = 484\ \text{K}, \quad T_4 = 1\,054\ \text{K}, \quad P_4 = 3.39\ \text{bar}.$$

b) L'évolution dans la tuyère est adiabatique réversible. Ainsi :

$$T_6 = T_5\left(\frac{P_5}{P_6}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = 1\,360\ \text{K}.$$

On applique le premier principe pour la traversée de la tuyère, et :

$$c_6 = \sqrt{2c_p(T_5 - T_6)} = 1\,070\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

c) Le premier principe de la thermodynamique fournit encore :

$$\Delta h = c_p(T_5 - T_4) = q_{45}.$$

soit : $q_{45} = 876\ \text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.

Ainsi : $q_{combustion} = q_{23} + q_{45} = 1\,640\ \text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.

d) Par définition : $e_c = \frac{c_6^2}{2} = 572 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.

e) Ainsi, le rendement vaut :

$$\eta_{th} = \frac{e_c}{q_{combustion}} = 0,35$$

f) La première observation est que le fonctionnement à post combustion permet d'obtenir des vitesses d'éjection des gaz plus importantes. C'est justement le but de la post-combustion : augmenter la vitesse de l'avion. Cette post-combustion est réalisée au prix d'un plus que doublement de l'énergie délivrée par la combustion de carburant. En d'autres termes, l'avion consomme deux fois plus de carburant. De plus, le rendement est diminué.

Pour conclure, le turboréacteur à combustion consomme nettement plus, présente un moins bon rendement... mais permet d'atteindre des vitesses plus élevées !

2. Turbine fonctionnant suivant un cycle de Joule (cycle Brayton) — D'après Centrale-Supelec

La figure 22 schématise le fonctionnement d'une turbine à gaz : elle comprend un compresseur Co qui puise l'air dans l'atmosphère, une chambre de combustion Ch (dans laquelle un carburant dont on négligera le débit massique est brûlé par l'air) et une turbine Tu alimentée par les gaz chauds issus de la chambre de combustion. La turbine entraîne le compresseur à l'aide d'un arbre de liaison Al. Les gaz sont assimilés à des gaz parfaits de masse molaire M, de capacités thermiques massiques à volume constant c_v (pression constante c_p). Celles-ci sont supposées constantes : $c_p = 1.0087 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, $\gamma = c_p/c_v = 1,4$ et $r = R/M = 0,2882 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$. Les travaux seront considérés comme n'incluant jamais le travail des forces de pression d'entrée ou de sortie. On néglige les variations d'énergie cinétique et potentielle de pesanteur. Le régime est considéré comme permanent.

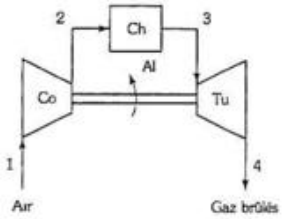


Figure 22

1. La figure 23 (entropie massique s en abscisse, température T en ordonnée) donne les éléments du cycle qui commande un fonctionnement idéal (réversible) du dispositif :

- 1 – 2 : évolution isentropique dans le compresseur Co durant laquelle l'air reçoit par unité de masse le travail w_C ;
- 2 – 3 : évolution isobare à la pression constante P_2 pendant la combustion qui fournit au gaz par unité de masse le transfert thermique q_E ;
- 3 – 4 : évolution isentropique dans la turbine Tu durant laquelle les gaz brûlés reçoivent algébriquement par unité de masse le travail w_T. Ce travail sert en partie à faire fonctionner le compresseur et le reste est disponible pour le milieu extérieur ;
- 4 – 1 : évolution isobare à la pression constante P_1 lors de l'éjection des gaz brûlés qui reçoivent algébriquement par unité de masse le transfert thermique q_S.

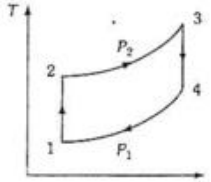


Figure 23

a) Représenter le cycle de Joule en diagramme de Clapeyron : volume massique v en abscisse et pression P en ordonnée.

b) Exprimer les travaux w_C et w_T ainsi que les transferts thermiques q_E et q_S en fonction de c_p et des températures T_1, T_2, T_3 et T_4, correspondant respectivement aux points 1, 2, 3 et 4 de la figure 23.

c) Quel est, en fonction de w_C et w_T le travail w_F fourni par l'unité de masse par le système au milieu extérieur au cours d'un cycle ?

© Libouvry - La photocopie non autorisée est un délit

d) Définir le rendement thermodynamique η de la turbine à gaz. Déterminer l'expression de η en fonction des températures T_1, T_2, T_3 et T_4, puis en fonction des seules températures T_1 et T_2.

e) Déterminer l'expression de η en fonction du rapport des pressions $\alpha = P_2/P_1$ et du coefficient γ.

f) Représenter graphiquement η en fonction de α dans le domaine $\alpha \in [5, 15]$.

g) On donne $P_1 = 1,03$ bar, $T_1 = 399$ K, $P_2 = 10,3$ bar et $T_3 = 1\,300$ K. Calculer T_2 et T_4. Calculer w_C, w_T et q_E. Quel est le rendement η ?

2. En fait, le compresseur et la turbine ont des fonctionnements irréversibles et le cycle réel des gaz dans la turbine est représenté en Fig. 24 (états 1 et 3 inchangés) :

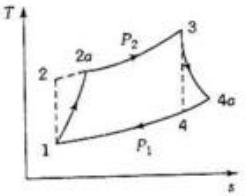


Figure 24

- 1 – 2a : l'évolution de l'air dans le compresseur Co n'est plus isentropique, l'air y reçoit par unité de masse le travail w_{Ce} ;
- 2a – 3 : pendant la combustion, l'évolution reste isobare à la pression constante P_2. Le gaz reçoit par unité de masse le transfert thermique q_{Ea} ;
- 3 – 4a : l'évolution des gaz dans la turbine Tu n'est plus isentropique, les gaz brûlés reçoivent algébriquement par unité de masse le travail w_{T_e} ;
- 4a – 1 : lors de l'éjection des gaz brûlés, l'évolution reste isobare à la pression P_1. Les gaz reçoivent algébriquement par unité de masse le transfert thermique q_{Se}.

On définit les efficacités η_C et η_T (η_C et η_T sont inférieures à 1) respectives du condenseur et de la turbine par $\eta_C = w_C/w_{Ce}$ et $\eta_T = w_{Te}/w_T$.

a) Calculer les températures T_{2a} et T_{4a} des points 2a et 4a en fonction des températures T_1, T_2, T_3, T_4 et des coefficients η_C et η_T.

b) Expliquer pourquoi les points 2a et 4a se situent à droite des points 2 et 4 sur la figure 24.

c) Calculer le rendement η_e de cette turbine à gaz en fonction des températures T_1, T_{2a}, T_3 et T_{4a}.

d) Calculer la variation d'entropie massique Δs_{Ce} du gaz pendant l'évolution 3 – 4a en fonction de T_1, T_{2a}, T_3, T_{4a} et du rapport des pressions $\alpha = P_2/P_1$.

Calculer de même la variation d'entropie massique Δs_{Te} du gaz pendant l'évolution 3 – 4a en fonction de T_3, T_{4a}, α, r et c_p.

e) Application numérique : on donne $\eta_C = 0,82$, $\eta_T = 0,85$. Calculer T_{2a}, T_{4a}, η_e, Δs_{Ce} et Δs_{Te}.

Conseils méthodologiques. L'étude de cette turbine nécessite l'utilisation du savoir-faire 1 (premier principe pour les écoulements en régime permanent).

1.a) L'évolution isobare est caractérisée par P = cte : les transformations 2 – 3 et 4 – 1 sont représentées par des horizontales.

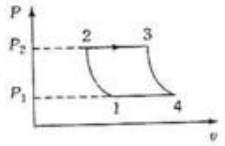


Figure 25

Pour une isentropique, Pv^γ = cte.

L'allure du cycle est ainsi celle représentée en Fig. 25.

Il reste néanmoins à préciser le sens du parcours. De 1 à 2, l'air est comprimé, soit P augmente. De 2 à 3, la température T augmente (combustion des gaz) à pression constante. L'équation des gaz parfaits $Pv = rT$ montre que le volume massique augmente. Le sens du cycle est alors non ambigu (Fig. 25).

Erreur à éviter

Bien prendre le temps de réfléchir au sens de parcours du cycle.

b) Appliquons le premier principe de la thermodynamique pour l'étape 1 - 2 :

$$\Delta h = h_2 - h_1 = w_i + q .$$

La transformation est isentropique et réversible, donc adiabatique : $q = 0$.

Le travail indiqué massique est le travail de compression w_C. Comme le gaz est parfait, $h_2 - h_1 = c_p(T_2 - T_1)$.

Ainsi :

$$\boxed{w_C = c_p(T_2 - T_1)}$$

De même, pour l'étape 3-4 :

$$\boxed{w_T = c_p(T_4 - T_3)}$$

Dans la chambre de combustion (étape 2-3), aucun travail n'est reçu par le gaz, mais le transfert thermique q_E est non nul. On déduit :

$$\boxed{q_E = c_p(T_3 - T_2)}$$

De même, pour l'étape 4-1 :

$$\boxed{q_S = c_p(T_1 - T_4)}$$

c) Appliquons le premier principe de la thermodynamique pour un cycle complet :

$$\Delta h = 0 = w_C + w_T + q_E + q_S .$$

En effet, les états initial et final sont identiques, soit $\Delta h = 0$. Le travail total **reçu** par le système (formé du gaz) sur un cycle est $w_C + w_T$.

En conséquence, le travail **fourni** est :

$$\boxed{w_F = -w_C - w_T}$$

Cette quantité doit être positive... le système fournit du travail à l'extérieur.

Remarque

La démonstration est rappelée dans le savoir-faire 1

Erreur à éviter

À cause du changement de point de vue, travail reçu ou fourni par le système, le signe de la quantité change

d) En toute généralité, le rendement est le quotient de la quantité fournie par le dispositif par la quantité dépensée.

La fonction de la turbine est de fournir du travail au milieu extérieur : c'est le travail w_F. La dépense provient du carburant brûlé. Ce carburant a fourni le transfert thermique q_E. On déduit :

$$\boxed{\eta = \frac{w_F}{q_E}}$$

D'après les expressions précédentes :

$$\eta = \frac{T_3 - T_4 + T_1 - T_2}{T_3 - T_2} = 1 + \frac{T_1 - T_4}{T_3 - T_2} .$$

Les transformations dans le compresseur 1 - 2 et la turbine 3 - 4 sont adiabatiques réversibles, elles vérifient la loi de Laplace $P^{1-\gamma}T^{\gamma} = \text{cte}$.

Ainsi :

$$T_1^{\gamma}P_1^{1-\gamma} = T_2^{\gamma}P_2^{1-\gamma} \quad \text{et} \quad T_3^{\gamma}P_3^{1-\gamma} = T_4^{\gamma}P_4^{1-\gamma} .$$

Comme de plus, $P_3 = P_2$ et $P_4 = P_1$ (transformations 2 - 3 et 4 - 1 isobares), on déduit :

$$\frac{T_4}{T_1} = \frac{T_3}{T_2} .$$

© Lavoisier - La photocopie non autorisée est un délit

On obtient alors :

$$\boxed{\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2}}$$

e) Vu la loi de Laplace :

$$\boxed{\eta = 1 - \alpha^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}} .$$

f) On obtient aisément le tableau suivant :

α	5	7	9	11	15
η	0,37	0,43	0,47	0,50	0,54

La courbe correspondante est tracée en Fig. 26. Le rendement croît avec le taux de compression α.

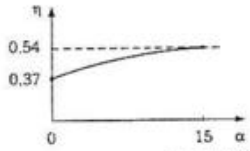


Figure 26

g) On utilise la loi de Laplace :

$$T_2 = T_1\left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_1\alpha^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = 579\ \text{K} .$$

$$T_4 = T_3\left(\frac{P_3}{P_4}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_3\alpha^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = 673\ \text{K} .$$

Comme les températures sont connues, à l'aide de la question b), on obtient les travaux et transferts thermiques :

$$w_C = c_p(T_2 - T_1) = 282\ \text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$$

$$w_T = c_p(T_4 - T_3) = -632\ \text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$$

$$q_E = c_p(T_3 - T_2) = 727\ \text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$$

On déduit alors le rendement $\boxed{\eta = 0,48}$. Ce résultat est correct vis-à-vis de la figure 26 et du tableau précédent : en effet, $\alpha = 10$ pour le cas étudié. Le rendement est donc de l'ordre de 50 %.

Remarque

On peut ainsi vérifier $w_T > 0$

2.a) Le premier principe de la thermodynamique appliqué entre les états 1 et 2a donne :

$$h_{2a} - h_1 = c_p(T_{2a} - T_1) = w_{Ca} = \frac{w_C}{\eta_C} = \frac{c_p(T_2 - T_1)}{\eta_C} .$$

On déduit :

$$\boxed{T_{2a} = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{\eta_C}} .$$

De même, entre les états 3 et 4a :

$$h_{4a} - h_3 = c_p(T_{4a} - T_3) = w_{Ta} = \eta_T w_T = \eta_T c_p(T_2 - T_1) ,$$

soit :

$$\boxed{T_{4a} = T_3 + \eta_T(T_4 - T_3)}$$

b) Les transformations $1-2a$ et $3-4a$ sont adiabatiques, mais **non réversibles**.

D'après le second principe de la thermodynamique, l'entropie du fluide augmente donc nécessairement dans ces transformations :

$$ds = \frac{\delta q}{T} + \delta s_{créée} = \delta s_{créée} > 0 .$$

⇨ **Remarque**

En revanche, les transformations $1-2$ et $3-4$ sont adiabatiques réversibles, soit isentropiques.

En conséquence : $\boxed{s_{2a} > s_1}$ et $\boxed{s_{4a} > s_3}$

c) On reprend la démonstration de la question **1.d)**, en effectuant les substitutions $T_2 \rightleftharpoons T_{2a}$ et $T_4 \rightleftharpoons T_{4a}$. Similairement, on montre :

$$\boxed{\eta_a = 1 + \frac{T_1 - T_{4a}}{T_3 - T_{2a}}} .$$

d) Il suffit de connaître l'entropie massique du gaz parfait pour exprimer sa variation lors d'une transformation. D'une part, pour un gaz parfait, $dh = c_p dT$. D'autre part, l'identité thermodynamique pour l'enthalpie massique s'écrit :

$$dh = Tds + vdP ,$$

où v est le volume massique. Ainsi :

$$ds = c_p \frac{dT}{T} - \frac{v}{T} dP = c_p \frac{dT}{T} - r\frac{dP}{P} .$$

On intègre, avec c_p constant :

$$s(T,P) = c_p \ln T - r \ln P + cte .$$

Il découle :

$$\Delta s_{Ca} = c_p \ln \frac{T_{2a}}{T_1} - r \ln \frac{P_2}{P_1} = \ln\left[\left(\frac{T_{2a}}{T_1}\right)^{c_p} \alpha^{-r}\right],$$

$$\Delta s_{Ta} = \ln\left[\left(\frac{T_{4a}}{T_3}\right)^{c_p} \alpha^{r}\right]$$

e) Les applications numériques sont :

$T_{2a} = 640\ K$, $T_{4a} = 767\ K$, $\boxed{\eta_a = 0.29}$, $\Delta s_{Ca} = 101\ J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$ et $\Delta s_{Ta} = 131\ J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$.

On vérifie bien que le rendement du cycle est inférieur lorsque les irréversibilités sont prises en compte.

3. Écoulement d'un gaz dans une canalisation : courbes de Fanno — D'après Banque PT

Un gaz est en écoulement dans une canalisation parfaitement calorifugée, de révolution autour de Ox, de section droite $S(x)$ fonction de x (Fig. 27). On suppose que :

- le régime est permanent ;
- la canalisation est fixe ;
- l'écoulement est unidimensionnel : la vitesse du gaz est parallèle à Ox : $\vec{c} = c\vec{u}_x$ et les variables d'état intensives du gaz ne dépendent que de x.

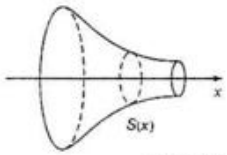


Figure 27

On note respectivement h, s, c, μ, v, T l'enthalpie massique, l'entropie massique, la vitesse d'écoulement, la masse volumique, le volume massique, la température en tout point d'une section droite ;

- le gaz est parfait, de capacités thermiques massiques à volume (pression) constant c_v (c_p). On note $\gamma = c_p/c_v$;

- on néglige les variations d'énergie potentielle de pesanteur dans tout le problème ;
- on note $r = R/M$, où R est la constante des gaz parfaits et M la masse molaire du gaz en écoulement.

a) Montrer que le débit massique q_m au travers de la section d'abscisse x, orientée selon $\vec{u}_x$, est $q_m = \mu c S$, ces valeurs étant évaluées en x. Quelle propriété vérifie le débit massique le long de la canalisation ?

b) Montrer qu'une fonction de h et de c se conserve au cours de l'écoulement.

c) On supposera désormais la section S constante. Soit q le débit massique par unité de surface : $q = q_m/S$.

Montrer qu'en tout point de l'écoulement, $T + \frac{q^2 v^2}{2c_p}$ garde la même valeur, qu'on notera T_c.

d) Exprimer l'entropie massique $s(T,P)$.

e) On pose : $k = s(T_0,P_0) - c_p \ln T_0 + r \ln P_0$, où P_0 et T_0 sont les pression et température d'un état donné. Exprimer l'entropie massique s dans l'écoulement en fonction de T, T_c, q, c_p, k et r.

f) Au type d'écoulement étudié dans ce problème, on associe un réseau de courbes dans le diagramme T,s, correspondant à une valeur donnée de T_c et des valeurs différentes du débit surfacique q. Ce sont les courbes de Fanno. Sur la figure 28 est donnée l'allure d'une courbe de Fanno. Quelle est l'équation de l'asymptote supérieure de la courbe de Fanno ? Commenter.

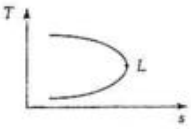


Figure 28

g) On considère deux courbes de Fanno, correspondant à des écoulements d'un même gaz pour lesquels T_c a même valeur, mais les débits surfaciques sont q_1 et q_2. Montrer comment une des courbes de Fanno peut se déduire géométriquement de l'autre. Tracer l'allure du réseau de courbes de Fanno.

h) On considère un écoulement dans une canalisation vérifiant les hypothèses précédentes. Au niveau de la section d'entrée, la pression est P_1, la température T_1 et la vitesse c_1. On rappelle que la section S est uniforme. Montrer que ces données déterminent complètement la courbe de Fanno décrite par le fluide lors de son écoulement dans la canalisation.

i) On envisage un écoulement depuis l'entrée précédente jusqu'à la section de sortie où la pression est P_2. On note L le point de la courbe de Fanno d'entropie maximale (où la tangente est verticale, voir la figure 28). On suppose $T_1 > T_L$. Quelle variable intensive du gaz doit augmenter lors de l'écoulement ? En déduire le sens de variation des autres paramètres intensifs. Si on diminue P_2, montrer que la vitesse du gaz ne peut dépasser une valeur maximale. Quelle est-elle ?

j) Décrire brièvement le cas $T_1 < T_L$.

Conseils méthodologiques. Ce problème exploite principalement le savoir-faire 1 (mise en œuvre du premier principe de la thermodynamique pour les systèmes en écoulement).

a) Par définition : $\boxed{q_m = \iint_S (\mu \vec{c}) \cdot \overrightarrow{dS} = \mu(x) c(x) S(x)}$,

vu le sens de la normale.

q_m se conserve le long de la canalisation. La démonstration a été réalisée au tout début du savoir-faire 1.

b) Le premier principe pour les écoulement en régime permanent donne $\Delta(h + e_c + e_p) = 0$ car les parois sont adiabatiques ($\Phi_c = 0$) et la puissance indiquée nulle. Comme, de plus, on néglige les variations d'énergie potentielle, $\Delta\left(h + \frac{c^2}{2}\right) = 0$.

Ainsi : $\boxed{h + \frac{c^2}{2} \text{ se conserve au cours de l'écoulement}}$

c) Utilisons la relation précédente, avec $h(T) = c_p T$ (à une constante près) et en éliminant c à l'aide du débit surfacique :

$c_p T + \frac{q^2}{2\mu^2}$ se conserve.

Sachant que $v = 1/\mu$, on montre que :

$$\boxed{T + \frac{q^2 v^2}{2c_p}}$$

se conserve au cours de l'écoulement.

⇒ **Remarque**

Le volume massique est l'inverse de la masse volumique.

d) Utilisons l'identité thermodynamique pour h : $dh = Tds + vdP$.

Comme pour un gaz parfait, $dh = c_p dT$, on déduit :

$$ds = c_p \frac{dT}{T} - \frac{v}{T} dP = c_p \frac{dT}{T} - r\frac{dP}{P}.$$

vu l'équation d'état $Pv = rT$. Cette relation s'intègre immédiatement en :

$$\boxed{s(T,P) = c_p \ln T - r \ln P + s_0}$$

où s_0 est une constante.

e) Déjà, on exprime la constante en fonction de k : $s(T_0, P_0) = c_p \ln T_0 - r \ln P_0 + s_0$, d'où $s_0 = k$.

On doit éliminer la pression :

$$P = \frac{rT}{v} = rT\frac{q}{\sqrt{2c_p(T_c - T)}}.$$

Pour conclure, $c_p = c_v + r$, d'où :

$$s = c_v \ln T + r \ln \frac{T}{P} + k = \boxed{c_v \ln T + r \ln \frac{\sqrt{2(c_v + r)(T_c - T)}}{rq} + k}.$$

f) Comme $T_c = T + \frac{q^2 v^2}{2c_p}$, T reste toujours inférieure à T_c. Quand T tend vers T_c, la relation de la question e) montre que s tend vers $-\infty$. On notera que cette asymptote ne peut être atteinte. En effet, cela imposerait des conditions de volume massique nul d'après la relation donnant T_c.

L'équation de l'asymptote est donc : $\boxed{T = T_c}$.

g) Appelons s_1 (s_2) l'entropie correspondant à q_1 (q_2). Alors, à la même température, $s_2 - s_1 = r \ln \frac{q_1}{q_2}$ (tous les autres termes correspondent vu la nature identique des gaz). Les deux courbes sont simplement décalées horizontalement. On passe de l'une à l'autre par translation (Fig. 29).

Quand le débit surfacique augmente, les courbes se translatent dans le sens de l'entropie massique croissante (Fig. 29).

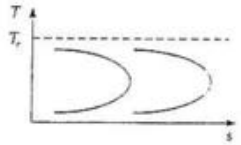


Figure 29

h) On connaît alors le volume massique à l'entrée $v_1 = rT_1/P_1$, ainsi que le débit surfacique $\mu_1 c_1 = c_1/v_1$. Alors :

$$\boxed{T_c = T_1 + \frac{q^2 v_1^2}{2c_p}}$$

est exactement déterminée. On sait sur quelle courbe de Fanno l'écoulement est représenté.

© Livonier - La photocopie non autorisée est un délit

i) La canalisation est calorifugée, aucun échange thermique ne peut donc avoir lieu. L'entropie massique du fluide augmente donc, et l'évolution sur la courbe de Fanno se fait vers la droite.

En conséquence, la température diminue. Comme $T_c = T + \frac{q^2 v^2}{2c_p}$, on déduit immédiatement que v augmente, et $P = rT/v$ diminue.

⇒ **Remarque**

Dans une transformation adiabatique l'entropie augmente toujours.

D'après la question b), $c_p T + \frac{c^2}{2}$ se conserve le long de l'écoulement. Ainsi :

⇒ **Remarque**

On rappelle que q se conserve.

$$T_1 + \frac{c_1^2}{2c_p} = T(x) + \frac{c^2(x)}{2c_p}.$$

La vitesse est donc maximale quand la température est minimale, c'est-à-dire au point L. Ainsi, la vitesse à la sortie est nécessairement inférieure à la vitesse du point L.

j) L'entropie massique augmente toujours, mais alors T augmente (Fig. 29). Le même raisonnement montre que v diminue et P augmente. De même, la vitesse à la sortie est forcément supérieure à celle du point L.

Les conditions d'entrée permettent de choisir l'un ou l'autre des deux régimes d'écoulement.

Pour approfondir

4. Cycles industriels de réfrigération — D'après Banque PT

Le schéma de l'installation (cycle de réfrigération à deux étages) est donné en Fig. 30.

Le condenseur et l'évaporateur sont des échangeurs permettant respectivement la condensation et l'évaporation totale du fluide qui les traverse. Dans les états 1 et 7, le fluide est respectivement à l'état de liquide saturant et de vapeur saturante sèche. Ces échangeurs sont calorifugés. Les évolutions du fluide y sont supposées réversibles.

R_{HP} et R_{BP} sont des robinets de laminage, respectivement haute et basse pression, qui assurent sans partie mobile des détentes supposées adiabatiques :

- le fluide pénètre dans R_{HP} sous une haute pression P_1 (état 1) et en ressort sous une pression intermédiaire P_2 (état 2) ;
- le fluide pénètre dans R_{BP} sous la pression intermédiaire P_5 (état 5) et en ressort sous une basse pression P_6 (état 6).

CPHP et CPBP sont des compresseurs, respectivement haute et basse pression, qui assurent des compressions adiabatiques et réversibles du fluide à l'état gazeux :

- le fluide pénètre dans CPHP sous une pression intermédiaire P_3 (état 3) et en ressort sous la haute pression P_4 (état 4) ;
- le fluide pénètre dans CPBP sous la basse pression P_7 (état 7) et en ressort sous une pression intermédiaire P_8 (état 8).

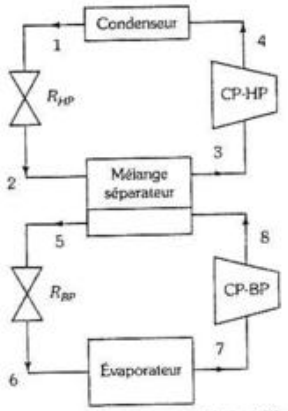


Figure 30

À la sortie de R_{HP} (état 2) et à la sortie de CPBP (état 8), le fluide pénètre dans le mélangeur-séparateur (MS) et ressort à l'état de vapeur saturante sèche (état 3) vers CPHP et à l'état de liquide saturant (état 5) vers R_{BP}. L'échangeur MS est parfaitement calorifugé, dépourvu de partie mobile et les évolutions du fluide y sont réversibles.

1.a) Soit un fluide en écoulement permanent. On note w_i le travail indiqué massique ; de même, on note q_e l'énergie thermique massique reçue. On suppose de plus que les variations d'énergie cinétique et potentielle sont négligeables. Toutes ces hypothèses sont vérifiées pendant tout le problème. Montrer que $w_i + q_e$ est égal à la variation d'une certaine fonction d'état massique.

b) Montrer que les transformations dans le condenseur, l'évaporateur et le mélangeur sont isobares.

c) La figure 31 facilite la lecture du diagramme présenté en Fig. 32 (attention à ne pas confondre sur ce dernier diagramme les isentropes avec les isochores non utilisées ici, et de pente nettement inférieure). L'abscisse est l'enthalpie massique h du fluide exprimée en $kJ \cdot kg^{-1}$ et l'ordonnée est la pression P exprimée en bar avec une échelle logarithmique. On note x le titre massique en vapeur dans un état donné. Quelle est la forme des isothermes à l'intérieur de la courbe de saturation ?

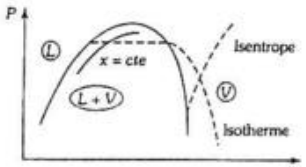


Figure 31

d) On s'intéresse au cas d'un gaz parfait de capacité thermique massique à pression constante c_p constante. Trouver l'équation d'une isotherme pour ce gaz dans le diagramme étudié. Y a-t-il accord avec les isothermes du diagramme réel de la figure 32 ? Discuter.

2. On donne pour la suite : $P_1 = 15$ bar, $P_2 = P_8 = 4$ bar, $P_6 = 1{,}5$ bar, débit du cycle basse pression $D_{BP} = 1{,}5\ kg \cdot s^{-1}$, puissance thermique de réfrigération $P = 240$ kW (reçue par le fluide au niveau de l'évaporateur).

a) Tracer le cycle 1, 2, 3, 4 sur le diagramme de la figure 32.

b) Présenter sous forme de tableau les caractéristiques (h, T, P, x) de chacun des états 1, 2, 3 et 4 par lecture directe sur le diagramme.

c) Retrouver le titre en vapeur x du fluide dans l'état 2 par un calcul clairement explicité.

d) Déterminer les valeurs de (h, T, P, x) pour les états 5 et 6.

e) Faire de même pour l'état 7. En déduire les valeurs pour l'état 8. Porter les points représentatifs sur le diagramme et présenter les valeurs numériques dans un tableau.

f) À l'aide d'un bilan énergétique pour le mélangeur, déterminer la valeur du débit massique D_{HP} du fluide qui décrit le cycle haute pression.

g) Calculer la puissance mécanique échangée dans CPHP et CPBP.

h) Calculer la puissance thermique échangée dans l'évaporateur et dans le condenseur.

i) Calculer le coefficient de performance e de l'installation frigorifique étudiée.

j) Calculer le coefficient de performance e_{Carnot} du cycle idéal de Carnot ayant même températures de source froide et source chaude. En déduire le rendement du cycle étudié par rapport au cycle de Carnot $\eta = e/e_{Carnot}$.

© Librairie Vuibert – La photocopie non autorisée est un délit

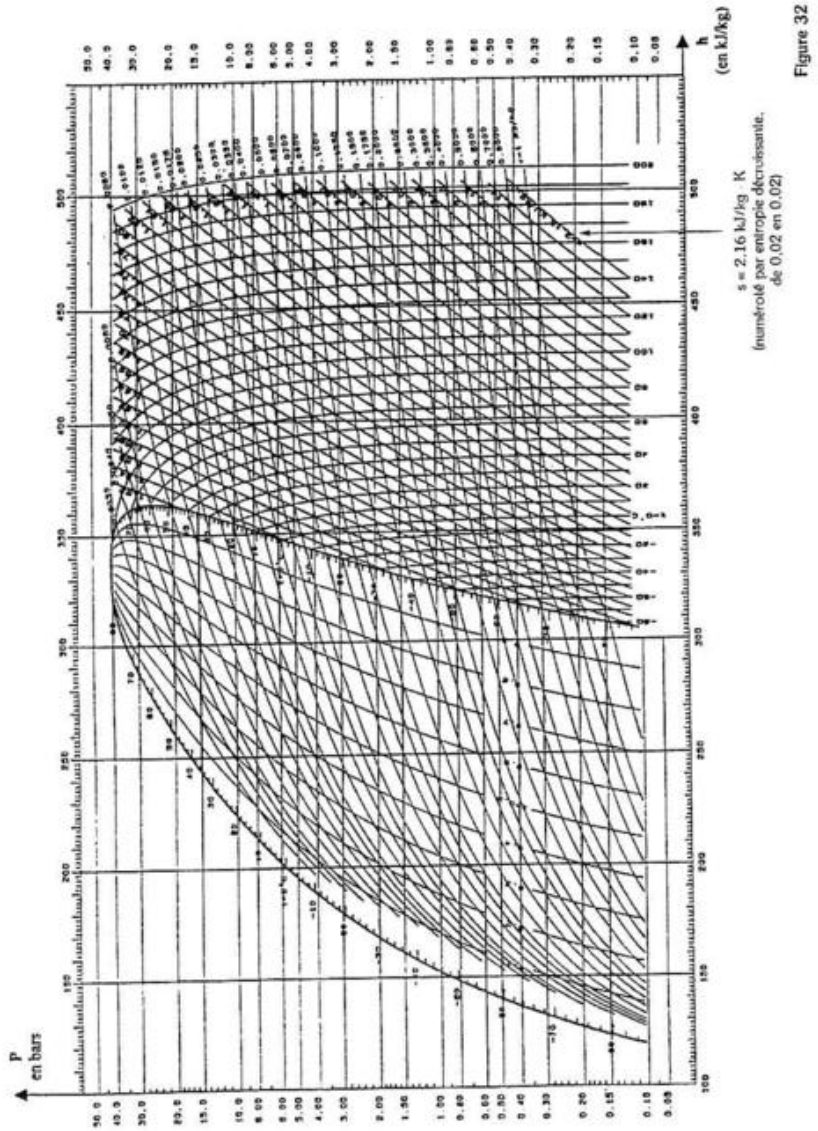


Figure 32

Conseils méthodologiques. Ce problème de synthèse nécessite l'ensemble des savoir-faire du chapitre (premier principe de la thermodynamique pour les fluides en écoulements permanents à une ou plusieurs entrées, changements d'état d'un fluide).

1.a) On rappelle la relation :

$$\boxed{\Delta h = w_i + q_e}$$

(la démonstration demandée ici est donnée dans le savoir-faire 1). La fonction d'état est l'enthalpie (massique).

b) Rappelons l'identité thermodynamique pour l'enthalpie massique :

$$dh = Tds + vdP,$$

où v est le volume massique du fluide.

Les transformations dans le condenseur, l'évaporateur et le mélangeur sont réversibles :

$$ds = \frac{\delta q_e}{T}.$$

D'autre part, vu la relation de la question **a)**, $dh = \delta w_i + \delta q_e = \delta q_e$. En effet, ces systèmes sont sans partie mobile. Au final, $vdP = 0$. Les transformations concernées sont donc isobares.

c) À l'intérieur de la courbe de saturation, les phases liquide et vapeur coexistent. Les **isothermes coïncident donc avec les isobares** : elles sont horizontales dans le diagramme de la figure 32.

d) Pour un gaz parfait, $h = c_p T + \text{cte}$. h ne dépend que de T : les isenthalpes et les isothermes coïncident. Dans le diagramme de la figure 32, les isothermes devraient correspondre à des droites verticales pour la vapeur sèche. C'est effectivement le cas loin du point triple.

2.a) Dans l'état 1, la pression est P_1 et l'état est liquide saturant. On déduit le point représentatif sur le diagramme (Fig. 33 : on étudie l'intersection de l'horizontale à 15.0 bars avec la courbe d'ébullition) et on lit les données manquantes.

Dans un robinet de laminage, la détente est adiabatique, sans pièce mobile. La relation de la question **a)** montre que la transformation est **isenthalpique**. Le point 2 est à la verticale du point 1, à la pression 4 bar. On remarque qu'il est environ au milieu des courbes isotitres 0,3 et 0,5.

Dans le mélangeur, la transformation est isobare. Le point 3 est ainsi sur la même horizontale que le point 2, c'est une vapeur sèche saturante (donc sur la courbe de rosée).

Enfin, l'état 4 est sur l'isentrope de 3 (transformation adiabatique réversible) et l'isobare de 1.

On consultera la figure 33 pour le tracé.

b) Les résultats sont condensés dans le tableau suivant :

	h (kJ · kg^{-1})	t (°C)	P (bar)	x
1	242	35	15	0
2	242	−11	4	0,35
3	342	−11	4	1
4	368	45	15	1

Erreur à éviter

N'appliquer cette relation que pour le fluide parcourant un cycle donné. Les variables d'état doivent être homogènes. Ainsi, cette relation écrite pour l'ensemble des deux fluides dans le mélangeur n'a aucun sens.

Remarque

Cette démonstration a été étudiée dans le savoir-faire 3, question **c)**.

Remarque

Rappelons que le modèle du gaz parfait est le mieux respecté à basse pression, soit dans la partie « basse » du diagramme de la figure 32.

© Ellipses – La photocopie non autorisée est un délit

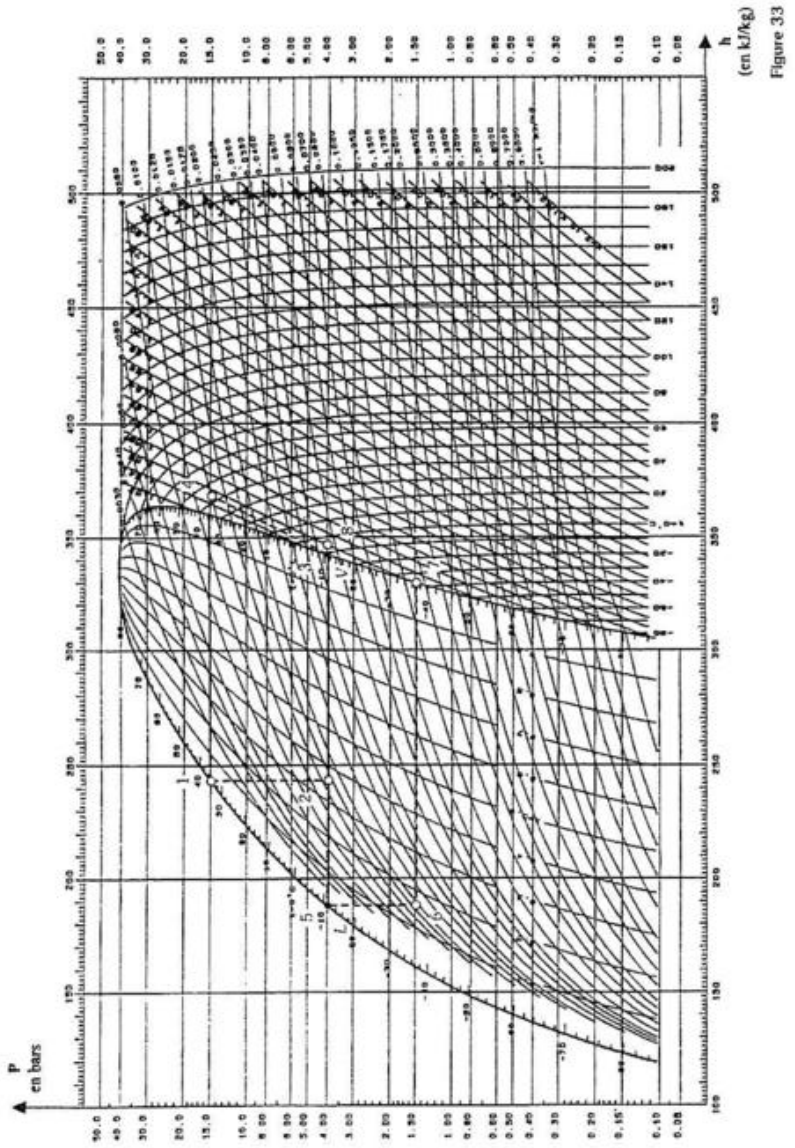


Figure 33

c) On applique le théorème des moments pour la température $t = -11\,°C$. Au point de liquide saturant L, $h_L = 189\ kJ \cdot kg^{-1}$. Au point de vapeur sèche saturante V (c'est en fait le point 3), $h_V = 342\ kJ \cdot kg^{-1}$ (Fig. 33). Alors, en appelant M le point 2 :

$$x = \frac{LM}{LV} = \frac{h_2 - h_L}{h_V - h_L} = \frac{53}{153} = 0{,}35.$$

L'accord est très bon.

d) On reprend les raisonnements de la question **2.b)**.

Déjà, $P_5 = P_8 = 4$ bar, vu que la transformation est isobare. Ensuite, comme l'état 5 est un liquide saturant, on détermine sa position (Fig. 33).

Le point 6 est sur l'isenthalpe du point 5 (soit la même verticale). Comme P_6 est connue, on le situe (Fig. 33).

e) Le point 7 est sur l'isobare du point 6 (même horizontale) et le fluide est une vapeur saturante sèche (Fig. 33).

Enfin, le point 8 est sur l'isentrope de 7 et l'isobare de 5.

Les résultats sont regroupés dans le tableau suivant :

	h (kJ · kg^{-1})	t (°C)	P (bar)	x
5	189	-11	4	0
6	189	-37	1,5	0,17
7	330	-37	1,5	1
8	346	-5	4	1

f) Il faut appliquer le premier principe au niveau du mélangeur.

On obtient alors :

$$D_{HP}(h_3 - h_2) + D_{BP}(h_5 - h_8) = w_i + q_e = 0.$$

Ainsi :

$$D_{HP} = -D_{BP}\frac{h_5 - h_8}{h_3 - h_2} = 2.4\ kg\ s^{-1}.$$

⇨ **Remarque**

Ce cas de système à deux entrées et deux sorties a été traité en détail dans le savoir-faire 2.

g) On applique le premier principe pour les écoulements en régime permanent à la traversée de CPHP :

$$D_{HP}(h_4 - h_3) = P_{CPHP} + \Phi_e = P_{CPHP}.$$

Ainsi : $\boxed{P_{CPHP} = 62\ W}$.

De même :

$$D_{BP}(h_5 - h_7) = P_{CPBP}.$$

Numériquement : $\boxed{P_{CPBP} = 24\ W}$.

h) Là encore, on applique le premier principe au niveau du condenseur :

$$D_{HP}(h_1 - h_4) = P_i + \Phi_{cond} = \Phi_{cond}.$$

L'application numérique indique : $\boxed{\Phi_{cond} = -302\ W}$. La valeur négative est bien synonyme de perte thermique pour le fluide au niveau du condenseur.

Similairement :

$$D_{BP}(h_7 - h_6) = \Phi_{évap}.$$

© Le cigne - La photocopie non autorisée est un délit

On obtient : $\boxed{\Phi_{évap} = 211\ W}$. Le fluide reçoit bien un transfert thermique au niveau de l'évaporateur.

On peut vérifier que $P_{CPHP} + P_{BPHP} + \Phi_{cond} + \Phi_{évap} = 0$: sur un cycle, l'enthalpie du système reste constante.

⇨ **Remarque**

L'application numérique donne - 5 W, ce qui est honorable (précision de 5/200 = 2,5 %) vu la précision des lectures...

i) Le coefficient de performance est défini comme le rapport de la quantité utile $\Phi_{évap}$ (puissance prélevée à la source froide) par le coût du dispositif (facture électrique) $P_{CPHP} + P_{BPHP}$:

$$\boxed{e = \frac{\Phi_{évap}}{P_{CPHP} + P_{BPHP}} = 2.5}.$$

j) Pour un cycle Carnot fonctionnant entre les sources froide (étape 6-7) de température $t_f = -37\,°C$ et chaude (étape 4-1) de température $t_c = 35\,°C$, l'efficacité vaut :

$$e_{Carnot} = -\frac{P_c}{P_{élec}}.$$

Le premier principe indique : $P_f + P_c + P_{élec} = 0$,

alors que le second donne : $\frac{P_f}{T_f} + \frac{P_c}{T_c} = 0$.

On déduit :

$$e_{Carnot} = \frac{T_c}{T_c - T_f} = \frac{236}{308 - 236} = 3.27.$$

Erreur à éviter

Bien repasser en kelvin pour cette application numérique.

Au final :

$$\boxed{\eta = \frac{e}{e_{Carnot}} = 0.77}$$

Le résultat est correct. Cependant, la plupart des étapes ont été supposées réversibles. La prise en compte des pertes diminuerait encore ce rendement.

5. Pompe de chaleur — D'après Mines-Ponts

Une pompe de chaleur contient un fluide, en écoulement stationnaire, de débit massique D_m qui suit un cycle de transformations $ABCD$, où on néglige les variations d'énergie cinétique et les effets de la pesanteur. Le fluide absorbe une puissance $\mathcal{P}_1$ au niveau de la source froide de température T_1 (étape AB) et cède une puissance $\mathcal{P}_2$ au niveau de la source chaude de température T_2 (étape CD) (Fig. 34). Il reçoit la puissance mécanique $\mathcal{P}$ dans le compresseur (étape BC). Enfin, dans le détendeur, le fluide ne reçoit ni transfert thermique, ni travail mécanique. Sa pression passe alors de P_2 à P_1.

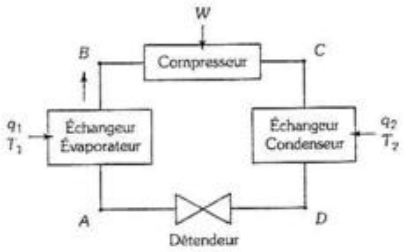


Figure 34

1.a) Montrer, en précisant les hypothèses, qu'entre l'entrée E et la sortie S d'un élément, $h_S - h_E = w_{ES} + q_{ES}$, où h est l'enthalpie massique. On précisera les valeurs des deux autres quantités.

b) Le coefficient d'efficacité de la pompe de chaleur est défini par $e = -\mathcal{P}_2/\mathcal{P}$. La valeur maximale théorique est notée e_0. Exprimer e_0 en fonction de T_1 et T_2. Application numérique pour $T_1 = 273$ K et $T_2 = 308$ K.

2. Dans le condenseur 2, le fluide évolue à pression constante P_2 en se refroidissant, puis se condense totalement à la température T_2. Dans le détendeur, le fluide évolue adiabatiquement (et sans travail, hormis celui des forces de pression), de (P_2, T_2) en D à (P_1, T_1) en A, subissant une vaporisation partielle dont le taux de transformation, rapport de la masse transformée à la masse initiale est x $(0 \leqslant x \leqslant 1)$. Dans l'évaporateur, on observe une vaporisation en principe totale sous la pression P_1 à la température T_1. À la sortie du compresseur (point C), le fluide évolue à pression constante jusqu'en C_0, puis se condense totalement jusqu'en D (Fig. 35).

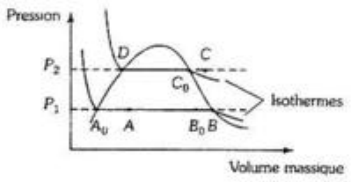


Figure 35

Les bilans énergétiques des questions qui suivent se rapporteront à des grandeurs massiques.

a) Calculer le taux x_A.

b) Calculer q_1, énergie thermique reçue entre A et B, par unité de masse du fluide ayant traversé l'évaporateur en y ayant subi une évaporation totale.

c) On admet que le fluide subit une compression isentropique dans le compresseur, le faisant passer de vapeur saturante sèche B à l'état vapeur C. Calculer la température θ_C (en degrés Celsius) à la sortie du compresseur et le travail massique w_{BC} reçu de ce dernier.

d) Calculer l'efficacité e puis le débit massique D_m du fluide pour une puissance de chauffe de 15 kW.

On précise les données suivantes. L'entropie massique du liquide saturant à 0 °C sous la pression P_1 vaut $1\ \text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

température (°C)	P_{sat} (bar)	h_L (liq. sat.) (en kJ · kg^{-1})	h_L (vap. sèche sat.) (en kJ · kg^{-1})
$\theta_1 = 0$ °C	4,98	200	405
$\theta_2 = 35$ °C	13,5	243	416

Les tables fournies pour le fluide considéré donnent l'enthalpie massique h_V (en kJ · kg^{-1}) et l'entropie massique s_V (en kJ · kg^{-1} · K^{-1}) pour la vapeur surchauffée de $\Delta\theta$ au-delà de la saturation à pression $P_2 = 13{,}5$ bar correspondant à $\theta_2 = 35$ °C pour l'équilibre liquide-vapeur.

$\Delta\theta$ (°C)	0	5	10	15	20	25
h_V (kJ · kg^{-1})	415,7	420,3	427,4	429,1	433,4	437,7
s_V (kJ · kg^{-1} · K^{-1})	1,706	1,721	1,735	1,749	1,762	1,775

Conseils méthodologiques. Le fonctionnement de la pompe à chaleur met en pratique les savoir-faire 1 (premier principe pour les systèmes en écoulement permanent) et 3 (changements de phase, étude des diagrammes de phase).

© Lavoisier - La photocopie non autorisée est un délit

1.a) On applique le premier principe de la thermodynamique à un système fermé s'étendant entre l'entrée et la sortie :

$$\Delta(h + e_c + e_p) = \Delta h = w_{ES} + q_{ES}$$

w_{ES} est le travail indiqué (c'est-à-dire autre que celui des forces de pression à l'entrée et à la sortie du dispositif) massique (travail reçu par l'unité de masse lorsqu'elle traverse le dispositif), et q_{ES} est le transfert thermique massique. Ainsi, $w_{ES} = \mathcal{P}/D_m$, où $\mathcal{P}$ est la puissance mécanique indiquée reçue par le fluide et $q_{ES} = \Phi_e/D_m$, où Φ_e est le flux thermique reçu par le fluide.

⇨ **Remarque**

Voir le savoir-faire 1 pour une démonstration détaillée.

⇨ **Remarque**

L'énoncé considère implicitement que les travaux et puissances mécanique sont indiqués.

b) Le premier principe montre que, sur un cycle :

$$\mathcal{P} + \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 = 0$$

Le second principe mène, vu la réversibilité supposée du processus (idéal), à :

$$\frac{\mathcal{P}_1}{T_1} + \frac{\mathcal{P}_2}{T_2} = 0.$$

Ainsi :

$$e_0 = -\frac{\mathcal{P}_2}{\mathcal{P}} = \frac{1}{1 - \frac{T_1}{T_2}} = \frac{T_2}{T_2 - T_1} = 8{,}80$$

2.a) Dans le détendeur, $w = 0$ et $q = 0$. Ainsi, $h_A = h_D$. Or $h_D = h_L(T_2) = 200$ kJ · kg^{-1}.

En revanche :

$$h_A = x_A h_V(T_1) + (1 - x_A) h_L(T_1)$$

(c'est le théorème des moments pour les points A, B et A_0).

On écrit alors :

$$x_A = \frac{h_L(T_2) - h_L(T_1)}{h_V(T_1) - h_L(T_1)} = \frac{243 - 200}{405 - 200} = 0.210$$

b) Le premier principe appliqué au fluide entre A et B donne :

$$h_B - h_A = q_1$$

(aucun travail reçu)

On utilise l'expression de h_A établie à la question précédente, et $h_B = h_V(T_1)$, ainsi :

$$q_1 = (1 - x_A)(h_V(T_1) - h_L(T_1)) = 162\ \text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$$

⇨ **Remarque**

On note que $h_V(T_1) - h_L(T_1)$ n'est rien d'autre que l'enthalpie massique de vaporisation à la température T_1.

c) La transformation dans le compresseur est isentropique, ainsi $s_B = s_C$.

On peut évaluer s_B à partir de A_0, dont l'entropie massique est connue ($s_{A_0} = 1$ kJ · kg^{-1} · K^{-1}). Entre A_0 et B, le fluide se vaporise à pression et température constantes :

$$s_B = s_{A_0} + \frac{l(T_1)}{T_1} = s_{A_0} + \frac{h_V(T_1) - h_L(T_1)}{T_1} = 1 + \frac{405 - 200}{273} = 1.75\ \text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

Ensuite, le second tableau donnant l'entropie massique de la vapeur surchauffée à pression constante P_2 au-delà du point C_0 montre l'écart $\Delta\theta = \theta_C - \theta_{C_0} = 16$ °C (entre 15 et 20 °C de surchauffe, l'entropie massique augmente de $(1{,}762 - 1{,}749)/5 = 2.6$ J · kg^{-1} · K^{-1} par degré Celsius).

Ainsi : $\theta_C = 35 + 16 = 51$ °C

Pour obtenir le travail massique w_{BC}, on applique le premier principe de la thermodynamique entre l'entrée et la sortie du condenseur :

$$h_C - h_B = w_{BC}$$

(pas d'échange thermique). $h_B = 405\ \text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ K^{-1}. Pour obtenir h_C, on connaît $\Delta\theta$, on déduit $h_C = 430\ \text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ grâce au second tableau indiquant l'enthalpie de la vapeur surchauffée au-delà du point C_0, à pression constante P_2.

On obtient finalement : $\boxed{w_{BC} = 24.7\ \text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}}$

d) Appliquons la définition :

$$\boxed{e = -\frac{q_2}{w_{BC}} = \frac{w_{BC} + q_1}{w_{BC}} = 7.56}.$$

Ce résultat est évidemment inférieur à e_0 mais assez proche. Cependant, on a négligé de nombreux phénomènes dissipatifs dans le fonctionnement de la pompe de chaleur.

Une puissance de chauffe de 15 kW signifie :

$$-\mathcal{P}_2 = 15\ \text{kW} = \mathcal{P}_1 + \mathcal{P} = D_m(w_{BC} + q_1).$$

On déduit alors le débit massique :

$$\boxed{D_m = 80.3\ \text{kg} \cdot \text{s}^{-1}}.$$

© Librairie Vuibert – La photocopie non autorisée est un délit

Annales

Problèmes d'entraînement

La fin de cet ouvrage est consacrée à la correction de parties entières de sujets de concours. Ces parties de problèmes nécessitent souvent la mobilisation simultanée de connaissances portant sur différents chapitres.

1. Centrale MP

La première partie de l'épreuve portait sur le programme de chimie. La correction détaillée de la partie de physique est ci-après.

Partie II – Couplage des phénomènes de conduction thermique et électrique en régime linéaire. Étude d'un réfrigérateur à effet Peltier

Le but de cette partie est de montrer que, dans certaines circonstances expérimentales, le passage d'un courant électrique (c'est-à-dire un flux de charges) peut donner lieu à un flux thermique (sans rapport avec l'effet Joule), et qu'inversement, l'établissement d'un gradient de température peut provoquer l'apparition d'un courant électrique ou d'une différence de potentiel : c'est ce qu'on appelle les effets thermoélectriques. Une application importante d'un de ces effets, l'effet Peltier, est la réfrigération de circuits électroniques ou optoélectroniques. Les trois sous-parties **II.A**, **II.B** et **II.C** sont très largement indépendantes.

II.A – Forces thermodynamiques

II.A.1) Cas de la conduction thermique pure

Soit un barreau cylindrique homogène et isotrope, d'axe Ox, de section Σ, parcouru par un flux thermique parallèlement à son axe. On donne la conductivité thermique λ du milieu, supposée constante. On se place en régime stationnaire. On suppose le problème unidimensionnel ; on note $T(x)$ la température en un point du barreau, d'abscisse x.

Soit $\vec{j}_q = j_q(x)\vec{e}_x$ le vecteur densité de courant thermique au sein du milieu.

a) Comment faire expérimentalement pour que le problème soit bien unidimensionnel ? Montrer que j_q est uniforme dans le barreau.

b) Montrer que l'entropie échangée par la tranche comprise entre les sections d'abscisses x et $x + dx$ avec l'extérieur entre les instants t et $t + dt$ vaut :

$$\delta S_e = \left[\frac{j_q}{T(x)} - \frac{j_q}{T(x+dx)}\right]\Sigma\, dt .$$

© Livonnet - La photocopie non autorisée est un délit

En déduire que l'entropie créée par unité de temps et de volume de matériau s'écrit :

$$\sigma = j_q \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{T}\right) = \vec{j}_q \cdot \vec{\nabla}\left(\frac{1}{T}\right).$$

Quelle est la dimension de σ ? Quel en est le sens physique ? Que peut-on dire du signe de σ ?

L'entropie créée par unité de temps et de volume σ s'écrit donc :

$$\sigma = \vec{j}_q \cdot \vec{\varphi}_q \quad \text{avec} \quad \vec{\varphi}_q = \vec{\nabla}\left(\frac{1}{T}\right).$$

$\vec{\varphi}_q$ est la « force thermodynamique » de conduction thermique.

c) Le barreau a pour longueur $L = 10$ cm, et est constitué de cuivre, de conductivité thermique $\lambda = 400\ W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$. Ses extrémités sont maintenues aux températures $T(x = 0) = 293$ K et $T(x = L) = 273$ K.

Calculer numériquement σ au milieu du barreau.

II.A.2) Cas de la conduction électrique pure

Le même barreau est maintenant parcouru par un courant électrique de vecteur densité de courant $\vec{j}_e = j_e(x)\vec{e}_x$ supposé uniforme sur une section droite du barreau (comme précédemment, on suppose le problème unidimensionnel). On donne la conductivité électrique γ du milieu supposée uniforme. On se place en régime stationnaire.

On note $\vec{E} = E(x)\vec{e}_x$ le champ électrique dans le conducteur et $V(x)$ le potentiel électrostatique. La température T est supposée uniforme au sein du barreau.

a) Montrer que j_e est uniforme dans tout le conducteur.

b) Calculer la puissance cédée par le champ $\vec{E}$ à la tranche de conducteur comprise entre les sections d'abscisses x et $x + dx$. En déduire l'expression de σ, entropie créée par unité de temps et de volume.

c) Mettre σ sous la forme $\sigma = \vec{j}_e \cdot \vec{\varphi}_e$ où :

$$\vec{\varphi}_e = \frac{-\vec{\nabla}V}{T}$$

est la force thermodynamique de conduction électrique.

d) Le barreau conducteur est parcouru par un courant de 100 mA ; sa section vaut $\Sigma = 1\ mm^2$. Il est constitué de cuivre de conductivité électrique $\gamma = 5{,}9\ 10^7\ \Omega^{-1} \cdot m^{-1}$. La température du barreau vaut $T = 293$ K.

Calculer numériquement σ.

Lorsque le milieu est simultanément le siège de phénomènes de conduction électrique et de conduction thermique, on admet que l'entropie créée par unité de temps et de volume de matériau s'écrit :

$$\sigma = \vec{j}_q \cdot \vec{\nabla}\left(\frac{1}{T}\right) + \vec{j}_e \cdot \frac{-\vec{\nabla}V}{T}.$$

On parle alors de couplage thermoélectrique. Il est à noter que ce résultat est absolument non trivial, contrairement à ce que l'on pourrait penser.

II.B – Théorie de la réponse linéaire d'Onsager

À l'équilibre thermodynamique, les vecteurs densités de courant $\vec{j}_e$ et $\vec{j}_e$ sont nuls ; la température T et le potentiel V sont uniformes et constants dans le temps ; les forces thermodynamiques :

$$\vec{\varphi}_q = \vec{\nabla}\left(\frac{1}{T}\right) \quad \text{et} \quad \vec{\varphi}_e = \frac{-\vec{\nabla}V}{T}$$

sont donc nulles à l'équilibre.

Pour qu'il y ait transport de chaleur ou de charges, il faut donc être hors équilibre : les forces thermodynamiques $\vec{\varphi}_q$ et $\vec{\varphi}_e$ ne sont alors plus nulles.

Si l'on n'est pas trop loin de l'équilibre, les densités de courant $\vec{j}_q$ et $\vec{j}_e$ dépendent linéairement des forces thermodynamiques $\vec{\varphi}_q$ et $\vec{\varphi}_e$ selon les relations phénoménologiques :

$$\vec{j}_q = L_{qq}\vec{\varphi}_q + L_{qe}\vec{\varphi}_e \quad \text{et} \quad \vec{j}_e = L_{eq}\vec{\varphi}_q + L_{ee}\vec{\varphi}_e ,$$

avec la relation dite d'Onsager $L_{qe} = L_{eq}$.

Les coefficients L_{qq}, L_{ee}, et L_{qe} sont des coefficients phénoménologiques. Ceci constitue la théorie de la réponse linéaire mise au point par le physicien norvégien Lars Onsager en 1931, Prix Nobel de chimie en 1968.

On se propose dans cette partie de calculer les coefficients d'Onsager en fonction des données expérimentales dont on dispose sur le milieu étudié :

- sa conductivité thermique λ ;
- sa conductivité électrique γ ;
- son pouvoir thermoélectrique ε défini à courant électrique nul (c'est-à-dire pour $\vec{j}_e = \vec{0}$) par la relation $\vec{\nabla} V = -\varepsilon \vec{\nabla} T$.

II.B.1) Citer et énoncer au moins une loi phénoménologique linéaire figurant à votre programme.

II.B.2)a) En vous plaçant dans le cas d'un champ de température uniforme, exprimer L_{ee} en fonction de γ et T.

b) En vous plaçant à courant électrique nul, donner une relation entre ε, L_{qe}, L_{ee}, T d'une part, et une relation liant ε, λ, L_{qq}, L_{ee} et T, d'autre part.

c) En déduire l'expression de $\vec{j}_q$ et $\vec{j}_e$ en fonction de λ, ε, γ, T, $\vec{\nabla} T$ et $\vec{\nabla} V$. En déduire finalement la relation :

$$\vec{j}_q = -\lambda \vec{\nabla} T + \varepsilon T \vec{j}_e \quad (4)$$

Commenter. On supposera cette relation valable dans toute la suite.

II.B.3) Effet Peltier

On considère un « module à effet Peltier » constitué comme suit (Fig. 1) : deux barreaux cylindriques semi-conducteurs n et p sont reliés d'une part à une source froide de température T_F par l'intermédiaire d'une plaque métallique F (dont la température vaut T_F) et d'autre part à une source chaude de température T_C, par l'intermédiaire de deux conducteurs dénommés C_1 et C_2 ; les jonctions $n-F$ et $F-p$ sont à la température T_F ; les jonctions C_1-n et $p-C_2$ sont toutes deux à la température T_C. Les parois latérales des deux barreaux semi-conducteurs sont supposées adiabatiques.

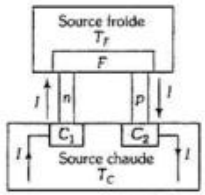


Figure 1

On suppose le problème unidimensionnel au sein de chaque barreau. L'ensemble est parcouru par un courant électrique I permanent délivré par un générateur. On note ε_n et ε_p les pouvoirs thermoélectriques des semi-conducteurs n et p.

a) On ne s'intéresse pour le moment qu'au terme $\varepsilon T \vec{j}_e$ de l'équation (4).

Montrer que la puissance algébriquement reçue par la source froide par l'intermédiaire des deux jonctions $n-F$ et $F-p$ s'écrit : $\mathcal{P}_P^F = (\varepsilon_n - \varepsilon_p) T_F I$. Le passage du courant I du semi-conducteur n au semi-conducteur p, les deux jonctions $n-F$ et $F-p$ étant à la même température, provoque donc un transfert thermique : c'est l'effet Peltier. On appellera $\mathcal{P}_P^F$ « puissance thermique Peltier » algébriquement fournie à la source froide.

b) On suppose $\varepsilon_n - \varepsilon_p < 0$. Quel est le rôle de l'élément à effet Peltier précédemment étudié ? Que se passe-t-il si l'on inverse le sens du courant ? Quel cas vous semble le plus intéressant sur le plan pratique ?

II.C – Étude d'un réfrigérateur à effet Peltier

On souhaite réaliser, à l'aide du module à effet Peltier de la figure 1, un réfrigérateur. On suppose négligeable la résistance électrique de la plaque F. **Les hypothèses de stationnarité et de géométrie unidimensionnelle sont conservées.**

© Le choix – La photocopie non autorisée est un délit

II.C.1) On néglige, pour le moment, l'effet Joule (conductivité électrique grande) ainsi que les pertes par conduction thermique dans les semi-conducteurs n et p (conductivité thermique faible) ; cela implique notamment la relation : $\vec{j}_q = \varepsilon T \vec{j}_e$ au sein de chaque semi-conducteur, au voisinage des jonctions.

a) Calculer la puissance thermique Peltier $\mathcal{P}_P^C$ fournie à la source chaude. En déduire la puissance électrique $\mathcal{P}_e$ fournie par le générateur au module à effet Peltier en fonction de ε_n, ε_p, T_F, T_C et I.

b) On donne les valeurs numériques suivantes :

$$\varepsilon_p = 200\ \mu V \cdot K^{-1} \ ; \quad \varepsilon_n = -190\ \mu V \cdot K^{-1} \ ; \quad T_F = 273\ K \ ; \quad T_C = 293\ K \quad \text{et} \quad I = 5\ A .$$

Calculer numériquement $\mathcal{P}_P^F$ et $\mathcal{P}_e$.

c) Montrer que le module à effet Peltier se comporte comme un générateur de tension continue dont on précisera la force électromotrice U ainsi que la résistance interne r ; représenter son schéma électrique équivalent. Calculer numériquement U.

d) Définir et évaluer l'efficacité e de ce réfrigérateur. Comparer e à l'efficacité d'un réfrigérateur fonctionnant suivant un cycle de Carnot entre les températures T_F et T_C. Comment pouvez-vous qualifier le fonctionnement du module dans le cadre du modèle proposé ?

II.C.2) On tient maintenant compte de l'effet Joule et de la conduction thermique dans les deux barreaux semi-conducteurs. On note λ_n et λ_p les conductivités thermiques (supposées indépendantes de la température) des semiconducteurs n et p ; γ_n et γ_p leurs conductivités électriques (également indépendantes de la température) ; Σ leur section, et L leur longueur. On suppose momentanément que les pouvoirs thermoélectriques ε_n et ε_p dépendent de la température.

a) On considère ici le barreau semi-conducteur de type n. Son axe est l'axe Ox ; la jonction C_1-n a pour abscisse $x = 0$ et la jonction $n-F$ a pour abscisse $x = L$.

En effectuant un bilan d'énergie sur la tranche comprise entre les sections d'abscisses x et $x+dx$, montrer, en utilisant notamment l'équation (4), que la température $T(x)$ au sein dudit barreau vérifie l'équation différentielle :

$$\lambda_n \frac{d^2T}{dx^2} - \frac{I}{\Sigma}\frac{d\varepsilon_n}{dT} T(x) \frac{dT}{dx} = -\frac{I^2}{\gamma_n \Sigma^2} .$$

b) Dans le domaine des températures envisagées, on peut raisonnablement considérer ε_n comme indépendant de la température. Déterminer le champ de température $T(x)$ dans le barreau semi-conducteur de type n. En déduire que la puissance thermique autre que la puissance Peltier fournie à la source froide par l'intermédiaire de la jonction $n-F$ s'écrit :

$$\mathcal{P}_n^F = \frac{\lambda_n \Sigma}{L}(T_C - T_F) + \frac{1}{2}\frac{L}{\gamma_n \Sigma} I^2 .$$

c) Identifier chacun des termes de l'expression trouvée et en donner le sens physique.

II.C.3)a) On suppose également le pouvoir thermoélectrique ε_p indépendant de la température. Déduire de ce qui précède la puissance **totale** $\mathcal{P}_F$ fournie à la source froide (puissance Peltier comprise). On pourra poser :

$$R = \frac{L}{\Sigma}\left(\frac{1}{\gamma_n} + \frac{1}{\gamma_p}\right) \quad \text{et} \quad G = \frac{\Sigma}{L}(\lambda_n + \lambda_p) .$$

b) Que représentent les grandeurs R et G ? Commenter les expressions de R et G.

c) On donne les valeurs numériques suivantes :

$$\gamma_n = 7{,}1\ 10^4\ \Omega^{-1} \cdot m^{-1} \ ; \quad \gamma_p = 8{,}3\ 10^4\ \Omega^{-1} \cdot m^{-1} \ ; \quad \lambda_n = 1{,}25\ W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1} \ ;$$

$$\lambda_p = 1{,}15\ W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1} \ ; \quad L = 5\ mm \quad \text{et} \quad \Sigma = 25\ mm^2 .$$

Calculer numériquement R et G. Quelles précautions doit-on prendre concernant les jonctions et les soudures des fils d'alimentation ?

d) Calculer numériquement $\mathcal{P}_F$ pour $I = 5$ A et $T_C = 293$ K dans les deux cas suivants : $T_F = 273$ K et $T_F = 253$ K. Commenter.

Au vu des valeurs numériques calculées, discuter la validité des deux approximations faites à la question **II.C.1.**.

e) Déterminer la température minimale T_{Fmin} que permet d'atteindre le réfrigérateur, en fonction du courant I et de la température T_C. Application numérique pour $I = 5$ A et $T_C = 293$ K.

II.C.4)a) Donner l'expression de la puissance totale $\mathcal{P}_C$ fournie à la source chaude. En déduire l'expression de la puissance électrique $\mathcal{P}_e$ fournie par le générateur au module à effet Peltier. Calculer numériquement $\mathcal{P}_e$ pour $T_C = 293$ K, $T_F = 273$ K et $I = 5$ A.

b) Que vaut l'efficacité e du réfrigérateur à effet Peltier dans les mêmes conditions expérimentales ? Comparer les résultats à ceux de la question **II.C.1.d)**. Quelles sont ici les causes d'irréversibilité dans le fonctionnement du réfrigérateur ?

c) Donner le schéma électrique équivalent du module à effet Peltier et préciser les valeurs de sa force électromotrice U et de sa résistance interne r. Comparer ces résultats aux valeurs trouvées en **II.C.1.c)**.

II.C.5) On souhaite obtenir une puissance de réfrigération de 50 W pour $T_F = 273$ K, $T_C = 293$ K et $I = 5$ A. Combien de modules faut-il utiliser ? Comment doit-on les assembler ? Comment qualifierez-vous le montage du point de vue électrique ? Du point de vue thermique ?

Conseils méthodologiques. Ce sujet de physique s'intéresse aux réfrigérateurs à effet Peltier. Il requiert notamment des connaissances de première année sur les principes de la thermodynamique et les machines thermiques, et de seconde année (énergie électromagnétique : chapitre **7** « Autour des équations de Maxwell » et conduction thermique : chapitre **14** « Transferts thermiques »).

II.A – Forces thermodynamiques

1.a) Si $T = T(x)$, la densité de courant thermique $\vec{j}_q = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}\, T$ est parallèle à $\vec{u}_x$. Les flux thermiques se font uniquement selon cette direction. Il est alors nécessaire d'isoler latéralement le barreau pour éliminer les flux radiaux. Pour éliminer les inhomogénéités transversales de température, il est aussi souhaitable d'utiliser un barreau nettement plus long que large, soit $L \gg \sqrt{\Sigma}$.

Considérons comme système la tranche du barreau comprise entre les abscisses x et $x + dx$ (Fig. 2) et appliquons-lui le premier principe de la thermodynamique :

$$dU = \delta Q + \delta W$$

Déjà, comme le régime est stationnaire, l'énergie interne de ce système ne varie pas :

$$dU = 0 .$$

En considérant le barreau comme indilatable, le travail (des forces de pression) est nul : $\delta W = 0$.

δQ est le transfert thermique **reçu** par le barreau. Ces transferts thermiques ont lieu aux frontières du système d'abscisses x et $x + dx$. Notons δQ_x le premier (Fig. 2) :

$$\delta Q_x = \vec{j}_q(x)\, \Sigma\, \vec{n}_{ext}(x)\, dt = j_q(x) \Sigma\, dt$$

En ce qui concerne δQ_{x+dx} (Fig. 2) :

$$\delta Q_{x+dx} = \vec{j}_q(x+dx)\, \Sigma\, \vec{n}_{ext}(x+dx)\, dt = -j_q(x+dx) \Sigma\, dt .$$

Remarque

Le rayon R du barreau vérifie $\Sigma = \pi R^2$, soit $R = \sqrt{\Sigma / \pi} = \sqrt{\Sigma}$.

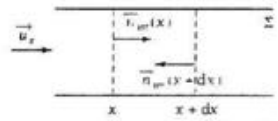


Figure 2

Remarque

On peut arriver au même résultat par un bilan d'enthalpie en supposant la transformation isobare.

Erreur à éviter

La frontière du système en $x + dx$ orientée vers l'intérieur est selon $-\vec{u}_x$.

© Lavoisier – La photocopie non autorisée est un délit

On déduit :

$$0 = (j_q(x) - j_q(x+dx))\Sigma\, dt .$$

Ainsi, la densité de courant thermique j_q est indépendante de x : elle est donc constante.

Remarque

De manière plus formelle et plus rapide : on pouvait utiliser le fait que la densité de courant thermique est à flux conservatif en régime stationnaire, sans terme de source.

1.b) Rappelons l'expression de l'entropie échangée par un système.

D'après le second principe de la thermodynamique :

$$\delta S_e = \frac{\delta Q}{T}$$

si le système reçoit le transfert thermique δQ au travers de la frontière du système de température T (Fig. 3).

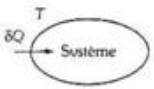


Figure 3

Le système considéré est toujours la tranche du barreau comprise entre les abscisses x et $x + dx$ (Fig. 2). Le système reçoit le transfert thermique $\delta Q = j_q \Sigma\, dt$ au travers de la frontière d'abscisse x et de température $T(x)$ et $-\delta Q = -j_q \Sigma\, dt$ au travers de la frontière d'abscisse $x + dx$ et de température $T(x + dx)$.

On obtient :

$$\delta S_e = \frac{\delta Q}{T(x)} + \frac{-\delta Q}{T(x+dx)} = \left(\frac{j_q}{T(x)} - \frac{j_q}{T(x+dx)}\right)\Sigma\, dt ,$$

d'après l'expression du transfert thermique δQ de la question précédente.

Or :

$$\delta S_e = j_q\left(\frac{1}{T(x)} - \frac{1}{T(x+dx)}\right)\Sigma\, dt = -j_q \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{T}\right)\Sigma\, dx\, dt .$$

Rappelons $f(x) - f(x + dx) = -dx \dfrac{d}{dx} f$ au premier ordre en dx. Ici, $f(x) = 1/T(x)$.

D'après le second principe de la thermodynamique appliqué au même système :

$$dS = \delta S_e + \delta S_c .$$

où δS_c est l'entropie créée lors de la transformation considérée. Comme le régime est stationnaire, l'entropie du système est constante : $dS = 0$ et $\delta S_c = -\delta S_e$. Comme on désire l'entropie créée par unité de volume et de temps, il faut diviser par le volume $\Sigma\, dx$ et la durée dt. On aboutit à :

$$\boxed{\sigma = \frac{\delta S_c}{\Sigma\, dx\, dt} = j_q \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{T}\right) = \vec{j}_q \cdot \vec{\nabla}\frac{1}{T}}$$

Rappelons la notation « nabla » : $\vec{\nabla} T = \overrightarrow{\text{grad}}\, T$, où T est un champ scalaire comme la température.

En effet : $\vec{j}_q = j_q \vec{u}_x$ et $\vec{\nabla}\dfrac{1}{T(x)} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{T(x)}\right)\vec{u}_x$

Une entropie est homogène à une énergie divisée par une température (penser à l'expression du second principe). Ainsi, σ est une puissance divisée par un volume et une température. Son unité naturelle est $W \cdot K^{-1} \cdot m^{-3}$.

L'entropie **créée** est toujours positive ou nulle. Elle est nulle pour une transformation réversible et strictement positive sinon. On déduit ici que la transformation est irréversible. La diffusion thermique est bien un phénomène irréversible : les transferts thermiques se font uniquement des zones de haute température vers celles de basse température. La seule possibilité pour que la transformation soit réversible est la nullité de la densité volumique de courant : aucun transfert thermique n'a alors lieu.

Remarque

On rappelle qu'une énergie divisée par un temps est homogène à une puissance.

Erreur à éviter

L'entropie du système ne varie pas alors que la transformation est irréversible.

1.c) Changeons un peu l'expression de σ :

$$\sigma = j_q \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{T}\right) = -\lambda T'(x)\left(-\frac{T'(x)}{T^2(x)}\right)$$

car $\vec{j}_q = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}\, T$ d'après la loi de Fourier. Comme la température varie linéairement dans le barreau :

$$T'(x) = \frac{T_L - T_0}{L}, \text{ car on identifie alors la dérivée à la pente.}$$

La température au milieu du barreau vaut :

$$T_m = \frac{T_0 + T_L}{2} = 283 \text{ K}.$$

On obtient donc :

$$\sigma_{milieu} = \lambda \frac{T'^2(x)}{T^2(x)} = \lambda \frac{4(T_L - T_0)^2}{L^2(T_0 + T_L)^2}.$$

Numériquement : $\sigma = 200$ W · K^{-1} · m^{-3}.

2.a) On utilise la conservation de la charge dans le barreau :

$$\text{div}\, \vec{j}_e + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

Comme le régime est stationnaire, la dérivée partielle par rapport au temps est nulle. Comme $\vec{j}_e = j_e(x)\vec{u}_x$, on déduit :

$$\text{div}\, \vec{j}_e = 0 = \frac{dj_e}{dx}.$$

Ainsi, j_e est indépendant de x et uniforme dans le barreau.

2.b) La puissance volumique cédée par le champ à la matière est :

$$\frac{dP}{d\tau} = \vec{j}_e \cdot \vec{E}.$$

Ainsi, la puissance (élémentaire) cédée par le champ au barreau entre les abscisses x et $x + dx$ vaut :

$$dP = \vec{j}_e \cdot \vec{E}\, d\tau = \vec{j}_e \cdot \vec{E}\, \Sigma\, dx.$$

L'application du second principe au même système mène encore à :

$$dS = 0 = \delta S_e + \delta S_c,$$

avec $\delta S_e = \frac{\delta Q}{T}$.

Pour évaluer le transfert thermique, on utilise le premier principe en régime stationnaire :

$$dU = 0 = \delta Q + \delta W.$$

Or, le travail élémentaire δW reçu par le système s'identifie au travail cédé par le champ électrique au barreau :

$$\delta W = P\, dt = \vec{j}_e \cdot \vec{E}\, \Sigma\, dx\, dt.$$

On déduit finalement :

$$\boxed{\sigma = -\frac{\delta S_e}{\Sigma\, dx\, dt} = \frac{\vec{j}_e \cdot \vec{E}}{T}}$$

⇨ **Remarque**

Consulter le savoir-faire 2 du chapitre **14** « Transferts thermiques »

⇨ **Remarque**

Consulter le savoir-faire 2 du chapitre **14** « Transferts thermiques »

⇨ **Remarque**

Consulter le savoir-faire 2 du chapitre **7** « Autour des équations de Maxwell »

⇨ **Remarque**

Consulter le savoir-faire 4 du chapitre **7** « Autour des équations de Maxwell »

⇨ **Remarque**

Voir la question **II.A.1.b)**

© Lavoisier - La photocopie non autorisée est un délit

Le second principe implique la positivité de ce terme. Le phénomène irréversible à la base de cette création d'entropie est la conduction électrique (et non plus thermique comme dans les questions **II.A.1.**).

2.c) Comme $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V$, on obtient :

$$\sigma = -\frac{\vec{j}_e \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\, V}{T}$$

et :

$$\boxed{\sigma = \vec{j}_e \cdot \vec{\varphi}_e}.$$

2.d) Le barreau est conducteur électrique, d'où :

$$\vec{j}_e = \gamma \vec{E} = -\gamma \overrightarrow{\text{grad}}\, V.$$

De plus, par définition de $\vec{j}_e$, $j_e = I/\Sigma$, où I est l'intensité électrique. On déduit :

$$\sigma = \frac{j_e^2}{\gamma T} = \frac{I^2}{\Sigma^2 T \gamma}$$

Numériquement : $\sigma = 0{,}58$ W · K^{-1} · m^{-3}.

Vu les valeurs proposées, la conduction électrique crée nettement plus d'entropie que la conduction thermique.

II.B - Théorie de la réponse linéaire d'Onsager

1. On peut citer la loi de **Fourier** :

$$\vec{j}_q = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}\, T.$$

La densité de flux thermique de conduction dans un matériau est proportionnelle au gradient de température existant dans ce matériau. Le signe moins signifie que la densité de flux thermique de conduction est dirigée des hautes vers les basses températures, contrairement au gradient de température. Cela reproduit le fait expérimental que la conduction thermique conduit à des flux allant des hautes vers les basses températures.

⇨ **Remarque**

Rappelons que « phénoménologique » signifie tiré de l'expérience, sans justification théorique.

⇨ **Remarque**

Il était aussi possible de citer la loi d'Ohm locale $\vec{j}_e = \gamma \vec{E}$.

2.a) Si la température est uniforme, la loi d'Ohm locale :

$$\vec{j}_e = \gamma \vec{E} = -\gamma \overrightarrow{\text{grad}}\, V$$

est valable. On compare avec la relation proposée par l'énoncé :

$$\vec{j}_e = L_{ee} \vec{\varphi}_e = L_{ee}\left(-\frac{\overrightarrow{\text{grad}}\, V}{T}\right).$$

On déduit alors :

$$\boxed{L_{ee} = \gamma T}$$

2.b) À courant électrique nul : $\vec{j}_e = \vec{0}$.

En conséquence : $L_{eq} \vec{\varphi}_q + L_{ee} \vec{\varphi}_e = L_{eq} \vec{\nabla} \frac{1}{T} + L_{ee} \frac{-\vec{\nabla} V}{T} = \vec{0}$.

Comme $\vec{\nabla} \frac{1}{T} = -\frac{\vec{\nabla} T}{T^2}$, on utilise $\frac{d}{dx} \frac{1}{T} = -\frac{T'}{T^2}$, et on aboutit à :

$$-L_{eq} \frac{\vec{\nabla} T}{T^2} + L_{ee} \frac{-\vec{\nabla} V}{T} = -L_{eq} \frac{\vec{\nabla} T}{T^2} + L_{ee} \frac{\gamma \vec{\nabla} V}{T} = \vec{0}$$

Ainsi :

$$\boxed{L_{eq} = \varepsilon T L_{ee}}$$

De plus, à courant électrique nul, la loi de Fourier est valable :

$$\vec{j}_q = -\lambda \vec{\nabla} T .$$

On compare avec la relation de l'énoncé :

$$\vec{j}_q = L_{qq}\vec{\varphi}_q + L_{qe}\vec{\varphi}_e = -L_{qq}\frac{\vec{\nabla}T}{T^2} + L_{qe}\frac{\varepsilon\vec{\nabla}T}{T}$$

On déduit ainsi :

$$\lambda = \frac{L_{qq}}{T^2} - \frac{\varepsilon L_{qe}}{T}$$

Avec l'expression précédente de $L_{qe} = L_{eq}$, on établit :

$$\boxed{\lambda = \frac{L_{qq}}{T^2} - \varepsilon^2 L_{ee}}$$

Erreur à éviter

La loi de Fourier n'est valable qu'en l'absence de courant électrique.

2.c) Il reste à reporter l'expression des coefficients dans les relations donnant les courants en fonctions des forces. Ainsi :

$$\vec{j}_e = L_{eq}\vec{\varphi}_q + L_{ee}\vec{\varphi}_e = -\varepsilon\gamma T^2\frac{\vec{\nabla}T}{T^2} - \gamma T\frac{\vec{\nabla}V}{T} = -\varepsilon\gamma\vec{\nabla}T - \gamma\vec{\nabla}V .$$

Similairement :

$$\vec{j}_q = L_{qq}\vec{\varphi}_q + L_{qe}\vec{\varphi}_e = -(T^2\lambda + \varepsilon^2 L_{ee})\frac{\vec{\nabla}T}{T^2} - \varepsilon\gamma T^2\frac{\vec{\nabla}V}{T}$$

$$\vec{j}_q = -(\lambda + \varepsilon^2\gamma T)\vec{\nabla}T + \varepsilon T(\vec{j}_e + \varepsilon\gamma\vec{\nabla}T) = -\lambda\vec{\nabla}T + \varepsilon T\vec{j}_e .$$

Ainsi, conductions thermique et électrique sont couplées. Les lois locales d'Ohm et de Fourier ne sont que des cas particuliers de découplage entre les deux phénomènes.

3.a) Par définition, la puissance thermique traversant la surface S dans le sens défini par $\vec{n}$ est (Fig. 4) :

$$\mathcal{P} = \iint_S \vec{j}_q \, dS\,\vec{n}$$

Figure 4

Ici, on considère $\vec{j}_q = \varepsilon T \vec{j}_e$. Comme on désire obtenir la puissance reçue par la source froide, il faut prendre $\vec{n}$ normale **rentrante** (Fig. 5). Il en résulte :

$$\mathcal{P}_P^F = \iint \varepsilon_n T \vec{j}_e \, dS\,\vec{n} + \iint \varepsilon_n T \vec{j}_e \, dS\,\vec{n}$$
$$= \varepsilon_n T_F \iint \vec{j}_e \, dS\,\vec{n} + \varepsilon_p T_F \iint \vec{j}_e \, dS\,\vec{n}$$

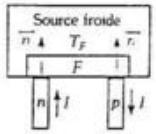


Figure 5

Sachant que $\vec{j}_e$ est algébriquement orienté dans le même sens que l'intensité I, $\iint \vec{j}_e \, dS\,\vec{n} = \pm I$ suivant les sens respectifs de $\vec{j}_e$ et $\vec{n}$, on obtient :

$$\boxed{\mathcal{P}_P^F = (\varepsilon_n - \varepsilon_p)T_F I}$$

⇨ Remarque

Le signe est plus si $\vec{j}_e$ et $\vec{n}$ sont parallèles de même sens.

3.b) Dans ce cas, $\mathcal{P}_P^F < 0$. Cela signifie que le transfert thermique a lieu de la source froide vers l'élément à effet Peltier. En d'autres termes, l'élément Peltier prélève de l'énergie à la source froide. C'est le principe de fonctionnement d'un réfrigérateur. Si $I < 0$, la source froide reçoit le transfert thermique et est chauffée.

C'est le seul effet thermique allant dans le sens d'un refroidissement qui soit commandable électriquement.

© Libration - La photocopie non autorisée est un délit

II.C – Étude d'un réfrigérateur à effet Peltier

1.a) De même qu'aux deux questions précédentes, on peut évaluer le transfert thermique reçu par la source chaude (Fig. 6) :

$$\mathcal{P}_P^C = \iint \varepsilon_n T \vec{j}_e \, dS\,\vec{n}' + \iint \varepsilon_p T \vec{j}_e \, dS\,\vec{n}' = \varepsilon_n T_C \iint \vec{j}_e \, dS\,\vec{n}' + \varepsilon_p T_C \iint \vec{j}_e \, dS\,\vec{n}'$$

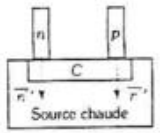


Figure 6

Ainsi :

$$\boxed{\mathcal{P}_P^C = (\varepsilon_p - \varepsilon_n)T_C I}$$

On applique le premier principe de la thermodynamique au module à effet Peltier entre les instants t et $t + dt$:

$$dU = \delta Q + \delta W = 0 .$$

En effet, par stationnarité, l'énergie interne du module est constante. Ensuite, les échanges thermiques se font avec les sources froide et chaude :

$$\delta Q = -\mathcal{P}_P^F dt - \mathcal{P}_P^C dt .$$

Les signes moins proviennent du fait qu'il s'agit ici des transferts thermiques **reçus** par le module Peltier : ils sont opposés à ceux fournies aux sources. Le seul travail reçu par l'élément Peltier est celui fourni par le générateur : $\delta W = \mathcal{P}_e dt$.

On arrive à :

$$\boxed{\mathcal{P}_e = \mathcal{P}_P^F + \mathcal{P}_P^C = (\varepsilon_p - \varepsilon_n)(T_C - T_F)I}$$

Si $\varepsilon_p - \varepsilon_n > 0$, $\mathcal{P}_e > 0$: le générateur fournit bien de la puissance au module.

Erreur à éviter

Attention au changement de signe !

⇨ Remarque

En d'autres mots, il faudra bien payer une facture d'électricité pour le fonctionnement du réfrigérateur.

1.b) Numériquement : $\mathcal{P}_P^F = -0.53$ W et $\mathcal{P}_e = 0.039$ W.

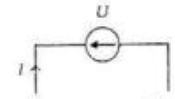


Figure 7

1.c) On remarque que la puissance électrique reçue par le module à effet Peltier est :

$$\mathcal{P}_e = UI .$$

C'est exactement la même que celle reçue par un générateur :

- de force électromotrice

$$\boxed{U = (\varepsilon_p - \varepsilon_n)(T_C - T_F)}$$

- et de résistance interne

$$\boxed{r = 0},$$

montés en **opposition**.

Le tout est représenté en Fig. 7.

$$U = 7.8 \text{ mV} .$$

Erreur à éviter

L'expression $\mathcal{P} = UI$ représente la puissance reçue par le dipôle en convention récepteur (Fig. 8).

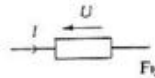


Figure 8

⇨ Remarque

La nullité de la résistance interne est cohérente avec la non-prise en compte de l'effet Joule.

1.d) L'efficacité d'un réfrigérateur est le rapport de la quantité utile (transfert thermique prélevé à la source froide) sur la dépense (ici la facture électrique) :

$$e = \frac{|\mathcal{P}_P^F|}{\mathcal{P}_e} = \frac{T_F}{T_C - T_F} = 13.6$$

⇨ Remarque

Le but d'un réfrigérateur est de refroidir la source froide.

Pour un réfrigérateur suivant un cycle de Carnot :

$$\boxed{e_{Carnot} = \frac{T_F}{T_C - T_F}}.$$

On remarque que le réfrigérateur à effet Peltier possède l'efficacité maximale (pour des températures T_C et T_F fixées). Cela s'explique par l'absence d'irréversibilité dans son fonctionnement (effet Joule et conduction thermique négligés).

2.a) On applique le premier principe de la thermodynamique au système proposé par l'énoncé :

$$dU = 0 = \delta Q + \delta W.$$

Successivement :

- en régime stationnaire, l'énergie interne du système ne varie pas : $dU = 0$;
- les transferts thermiques se font au travers des sections d'abscisses x et $x + dx$:

$$\delta Q = j_q(x)\Sigma\,dt - j_q(x+dx)\Sigma\,dt = -j_q'(x)\Sigma\,dt\,dx.$$

Comme $j_q = -\lambda T' + \varepsilon T j_e$ (question **II.B.2.c)**) :

$$\delta Q = (\lambda_n T'' - (\varepsilon_n T)' j_e)\Sigma\,dx\,dt ;$$

- le travail correspond à celui cédé par le champ électrique $\vec{E}$:

$$\delta W = \vec{j}_e \vec{E}\,\Sigma\,dx\,dt.$$

Comme (question **II.A.2.b)**) :

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V = \varepsilon \vec{\nabla} T + \frac{\vec{j}_e}{\gamma},$$

on réécrit le travail reçu par le système en utilisant $j_e = I/\Sigma$:

$$\delta W = \left(\frac{j_e^2}{\gamma_n} + \varepsilon_n T' j_e\right)\Sigma\,dx\,dt = \left(\frac{I^2}{\Sigma\gamma_n} + \varepsilon_n T' I\right)dx\,dt.$$

En rassemblant les résultats :

$$\lambda_n \Sigma T'' - (\varepsilon_n T)' I + \frac{I^2}{\Sigma\gamma_n} + \varepsilon_n T' I = 0.$$

Comme :

$$-(\varepsilon_n T)' + \varepsilon_n T' = -\varepsilon_n' T = -\frac{d\varepsilon}{dx} T = -\frac{d\varepsilon}{dT}\frac{dT}{dx} T = -\frac{d\varepsilon}{dT} T' T,$$

on écrit :

$$\boxed{\lambda_n T'' - \frac{d\varepsilon_n}{dT} T' T \frac{I}{\Sigma} + \frac{I^2}{\Sigma^2 \gamma_n} = 0}$$

2.b) On doit alors résoudre l'équation simplifiée :

$$\lambda_n T'' + \frac{I^2}{\Sigma^2 \gamma_n} = 0.$$

On intègre une première fois : $\lambda_n T' + \frac{I^2}{\Sigma^2\gamma_n} x = A$

et une seconde fois : $\lambda_n T = \frac{I^2}{2\Sigma^2\gamma_n} x^2 = Ax + B$

(A et B sont des constantes). Il faut utiliser les conditions aux limites $T(x = 0) = T_C$ et $T(x = L) = T_F$.

Erreur à éviter

Ne pas appliquer la loi de Fourier $\vec{j}_q = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}\, T$ qui n'est valable qu'en l'absence de courant électrique.

Erreur à éviter

Ne pas appliquer la loi d'Ohm $\vec{j}_e = \gamma \vec{E}$ qui n'est valable qu'en l'absence de gradient de température (question **II.A.2.b)**).

© Libration - La photocopie non autorisée est un délit

Ainsi :

$$\boxed{T(x) = -\frac{I^2}{2\Sigma^2\gamma_n\lambda_n} x^2 + T_C + (T_F - T_C)\frac{x}{L} + \frac{I^2 L}{2\Sigma^2\gamma_n\lambda_n} x}.$$

Alors, la puissance cédée à la source froide est :

$$\mathcal{P}_n^F = \vec{j}_q(x = L) \cdot \Sigma \vec{u}_x = j_q(x = L)\Sigma.$$

Rappelons la relation : $j_q = -\lambda T' + \varepsilon T j_e$.

Conformément à l'énoncé, on exclut la puissance due à l'effet Peltier (déjà calculée) qui correspond au terme $\varepsilon T j_e$.

Ainsi : $\mathcal{P}_n^F = -\lambda_n T'(x = L)\Sigma = \frac{I^2}{\Sigma\gamma_n} L - \frac{\lambda_n \Sigma}{L}(T_F - T_C) - \frac{I^2 L}{2\Sigma\gamma_n} = \boxed{\frac{\lambda_n \Sigma}{L}(T_C - T_F) + \frac{1}{2}\frac{L}{\gamma_n \Sigma} I^2}$.

2.c) On reconnaît tout d'abord un terme de **conduction thermique** $\frac{\lambda_n \Sigma}{L}(T_C - T_F)$. La conduction thermique a tendance à chauffer la source froide aux dépends de la source chaude. En effet, pour $T_C > T_F$, ce terme est bien positif, ce qui correspond à une puissance reçue par la source froide.

Le second terme correspond à la moitié de la puissance dégagée par **effet Joule** dans le barreau n. En effet, sa résistance électrique est $R_n = \frac{1}{\gamma_n}\frac{L}{\Sigma}$ et la puissance correspondante est $\frac{1}{2} R_n I^2$. L'autre moitié de la puissance ainsi dégagée est cédée à la source chaude.

3.a) De même, le barreau p cède à la source froide (en dehors de l'effet Peltier) la puissance :

$$\boxed{\mathcal{P}_p^F = \frac{\lambda_n \Sigma}{L}(T_C - T_F) + \frac{1}{2}\frac{L}{\gamma_n \Sigma} I^2}.$$

Au total : $\boxed{\mathcal{P}_F = \mathcal{P}_p^F + \mathcal{P}_n^F + \mathcal{P}_p^F = \frac{1}{2} R I^2 + G(T_C - T_F) + (\varepsilon_n - \varepsilon_p) T_F I}$.

3.b) R est la **résistance électrique** des deux barreaux n et p (en série). G est la **conductance thermique** des deux barreaux n et p en parallèle.

3.c) Numériquement : $R = 5.2\ 10^{-3}\ \Omega$ et $G = 1.2\ 10^{-2}$ W K^{-1}.

Il faut faire très attention à ce que les soudures ne changent pas la très faible résistance électrique entre les deux sources. Le barreau et les sources doivent être maintenues en contact : la soudure ne doit pas s'intercaler entre un barreau et une source. Il en est de même pour la conductance thermique.

3.d) Si $T_F = 273$ K, $\mathcal{P}_F = -0{,}23$ W.

Si $T_F = 253$ K, $\mathcal{P}_F = 0{,}052$ W.

Dans le deuxième cas, le système ne fonctionne plus en réfrigérateur.

Calculons séparément à $T_F = 273$ K les trois puissances. L'effet Joule correspond à 0,065 W, la conduction thermique à 0,24 W et l'effet Peltier à $-0{,}53$ W. On peut bien négliger l'effet Joule, mais pas la conduction thermique.

Remarque

Il faut prélever de l'énergie à la source froide.

3.e) Au minimum de température, $\mathcal{P}_F = 0$ (le réfrigérateur parvient à peine à maintenir la température de la source froide) :

$$\boxed{T_{F\,min} = \frac{\frac{1}{2} R I^2 + G T_C}{G + (\varepsilon_p - \varepsilon_n) I}}.$$

Ainsi : $T_{F\,min} = 257$ K.

4.a) La source chaude reçoit la moitié du transfert thermique dû à l'effet Joule, l'opposé de la source froide en ce qui concerne la conduction thermique et le transfert thermique Peltier $\mathscr{P}_P^C$ calculé en question **II.C.1.a)**. Ainsi :

$$\boxed{\mathscr{P}_C = \frac{1}{2}RI^2 + G(T_F - T_C) + (\varepsilon_p - \varepsilon_n)T_C I}.$$

⇨ Remarque

En régime stationnaire, la puissance reçue par la source froide par conduction thermique est égale à celle cédée par la source chaude.

Comme précédemment : $\mathscr{P}_e = \mathscr{P}_C + \mathscr{P}_F = 0.17$ W.

Suite aux pertes par effet Joule et conduction thermique, la facture électrique sera nettement plus élevée pour maintenir la même température de la source froide.

4.b) Alors, l'efficacité vaut :

$$\boxed{e = \frac{|\mathscr{P}_F|}{\mathscr{P}_e} = 1.3}.$$

L'efficacité est nettement inférieure à celle d'un réfrigérateur suivant le cycle de Carnot. Cela est dû aux pertes, c'est-à-dire à l'irréversibilité de l'effet Joule et de la conduction thermique.

4.c) Cette fois-ci :

$$\boxed{\mathscr{P}_e = RI^2 + (\varepsilon_p - \varepsilon_n)(T_C - T_F)I}.$$

Le module à effet Peltier est équivalent à une source de force électromotrice $\boxed{U = (\varepsilon_p - \varepsilon_n)(T_C - T_F)}$ montée en opposition et de résistance interne $\boxed{r = R}$. Le schéma est représenté en Fig. 9. En effet, la tension aux bornes du dipôle est $V = U + RI$ et la puissance vaut bien :

$$\mathscr{P}_e = VI.$$

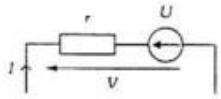


Figure 9

Par rapport à la question **II.C.1.c)**, on note l'apparition d'une résistance interne. La conduction thermique ne modifie pas le schéma électrique équivalent. Elle ne fait que diminuer l'efficacité.

5. Comme chaque module apporte une puissance de réfrigération de 0.23 W, il faut utiliser $50/0.23 = 218$ modules.

L'important est que chaque module Peltier soit bien parcouru par le même courant I : on doit donc les monter électriquement en série.

Du point de vue thermique, cela correspond dans les deux cas à un montage en parallèle par rapport aux deux sources thermiques.

2. Détection des ondes gravitationnelles — D'après Polytechnique

L'expérience Virgo – Réduction de certaines causes de bruit de fond

Introduction

La théorie de la relativité générale prédit l'existence d'ondes gravitationnelles générées par des masses accélérées. Ces ondes se propagent à la vitesse de la lumière c.

L'expérience franco-italienne « Virgo » tente de les mettre en évidence par les variations de chemin optique qu'elles engendrent : un gigantesque interféromètre, avec des bras de 3 km de long, doit pouvoir mesurer des variations de longueur relatives de l'ordre de 10^{-21}, à des fréquences typiques d'ondes gravitationnelles, qui sont de l'ordre de 1 kHz. L'expérience vise à être sensible dans toute la gamme de fréquences comprises entre 10 Hz et 10 kHz.

Une telle précision de mesure n'est pas facile à atteindre. On étudie dans ce problème quelques phénomènes parasites qui peuvent gêner la mesure et les méthodes utilisées pour réduire leur influence.

© Lavoisier – La photocopie non autorisée est un délit

Données numériques et formulaire :

Constante de Planck : $h = 6.62\ 10^{-34}$ J · s ;

Constante de Boltzmann : $k_B = 1{,}38\ 10^{-23}$ J · K^{-1} ;

Vitesse de la lumière : $c = 3.00\ 10^{8}$ m · s^{-1} ;

Champ de gravitation : $g = 9{,}81$ m · s^{-2}.

Tous les coefficients de réflexion et de transmission concernent les amplitudes de l'onde lumineuse.

1. Principe de l'expérience

Préliminaire

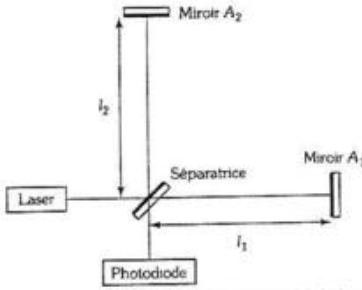
La taille exceptionnellement grande du dispositif interférométrique conduit à s'interroger sur l'homogénéité des effets de l'onde gravitationnelle puis sur les variations temporelles des chemins optiques qu'elle induit.

Q 1.1 Compte tenu des caractéristiques indiquées dans le préambule, montrer qu'une onde gravitationnelle a une amplitude uniforme sur l'ensemble de l'interféromètre.

À quelle condition sur la période T_{og} d'une telle onde peut-on considérer que les perturbations induites par l'onde gravitationnelle sont quasi-statiques ?

Interféromètre de Michelson

On considère l'interféromètre représenté Fig. 1. Les miroirs A1 et A2, parfaitement réfléchissants, ont des coefficients de réflexion en amplitude r_1 et r_2 égaux à -1. La lame séparatrice semi-réfléchissante est supposée sans pertes ; pour un faisceau lumineux incident à 45°, le coefficient de transmission en amplitude t_s est indépendant du sens de la traversée, de valeur $t_s = 1/\sqrt{2}$: toujours pour les amplitudes, le coefficient de réflexion « avant » (côté source) r_s est l'opposé du coefficient de réflexion « arrière » (côté miroir A1) r_s', avec $r_s = -1/\sqrt{2}$ et $r_s' = 1/\sqrt{2}$. On désigne par l_1 et l_2 les longueurs des bras de l'interféromètre, séparatrice – miroir A1 et séparatrice – miroir A2.



Interféromètre de Michelson
Figure 10

L'onde incidente produite par un laser est monochromatique : en tout point du dispositif, l'onde se propage dans le vide et sera décrite par une onde plane scalaire : en notation complexe, son amplitude sera choisie, avec origine au niveau de la séparatrice, de la forme $a_i \exp i(\omega_L t - kx)$ pour une direction de propagation selon Ox, avec $k = \omega_L / c$.

Q 1.2 Déterminer l'amplitude a_{out} de l'onde sortant vers la photodiode en fonction de celle de l'onde incidente a_{in}, de k, l_1 et l_2.

Q 1.3 Exprimer la puissance P_{out} du faisceau sortant en fonction de la puissance d'entrée P_{in}. Montrer que cette expression se met sous la forme :

$$P_{out} = P_{in} \sin^2 k(l_1 - l_2).$$

L'onde gravitationnelle, détectable par l'interféromètre, provoque un léger changement des longueurs des bras ; les longueurs deviennent $l_1 + \frac{1}{2}h_{og}l_1$ et $l_2 - \frac{1}{2}h_{og}l_2$ où h_{og} caractérise l'amplitude de l'onde gravitationnelle. Comme ordre de grandeur, on prendra $h_{og} = 10^{-21}$ pour une fréquence de 1 kHz. Le dispositif expérimental doit donc être sensible aux variations de longueur relatives correspondantes.

Q 1.4 Montrer que, lors du passage d'une onde gravitationnelle, la puissance de sortie varie de δP_{grav} donné par :

$$\delta P_{grav} = \frac{1}{2}P_{in}kh_{og}(l_1 + l_2)\sin 2k(l_1 - l_2).$$

Q 1.5 On pose $\alpha_0 = 2k(l_1 - l_2)$. Déterminer les valeurs de α_0 pour lesquelles le signal $|\delta P_{grav}|$ est maximal.

Q 1.6 Calculer numériquement la valeur maximale de $|\delta P_{grav}|$ pour une expérience de laboratoire utilisant un interféromètre avec des bras de 1 m de longueur, le laser fournissant une puissance de 20 watts à la longueur d'onde 1, 06 µm. Commenter le résultat obtenu.

Bruit statistique de photons

Le faisceau de sortie est constitué de photons chacun d'énergie $h\nu$ où ν est la fréquence de l'onde laser et h la constante de Planck. Sa détection s'effectue à l'aide d'une photodiode qui compte les photons reçus avec un facteur d'efficacité η, avec $0 < \eta < 1$. Soit N le nombre de photons détectés durant un intervalle de temps Δt.

Pour une puissance P_{out} du faisceau de sortie et une durée de comptage Δt données, ce nombre N est une grandeur possédant des fluctuations statistiques dont l'écart-type σ_{ph} est relié à la valeur moyenne $\langle N \rangle$ par la propriété $\sigma_{ph} = \sqrt{\langle N \rangle}$.

Q 1.7 Exprimer $\langle N \rangle$ en fonction de P_{out}.

Q 1.8 À la fluctuation statistique de N, en l'absence d'effet gravitationnel, on peut associer une fluctuation équivalente de P_{out} dont l'écart-type est noté δP_{shot}. Évaluer δP_{shot} en fonction de P_{out}, à l'aide de h, ν, Δt et η. Exprimer alors δP_{shot} en fonction de P_{in}.

Q 1.9 En déduire la valeur du rapport « signal sur bruit » $|\delta P_{grav}|/\delta P_{shot}$. Pour quelles valeurs de $k(l_1 - l_2)$ est-elle maximale ? À quel réglage de l'interféromètre cela correspond-il ? Préciser alors les valeurs de P_{out} et de δP_{grav} : commenter brièvement le résultat.

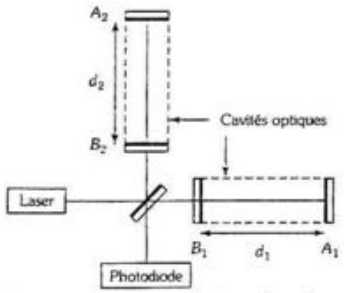
Q 1.10 On définit la sensibilité de l'interféromètre comme la valeur h_{shot} de h_{0g} correspondant à un rapport signal sur bruit de 1. Exprimer h_{shot} en fonction de h, c, η, Δt, P_{in}, $\lambda = c/\nu$, l_1 et l_2.

Q 1.11 Pour détecter les variations temporelles de $h_{0g}(t)$, Δt doit être inférieur aux périodes utiles. Soit $f = 1/\Delta t$ la fréquence d'échantillonnage. Dans l'expérience de laboratoire envisagée en **1.6**, exprimer h_{shot} en fonction de f et l'évaluer avec $\eta = 0,8$ et pour f allant de 10 Hz à 10 kHz. Quelle conclusion peut-on en tirer compte tenu du but à atteindre ?

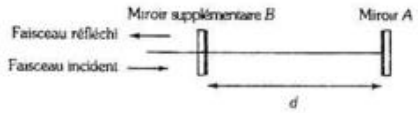
Amélioration du système optique

Une première amélioration possible pour se rapprocher de la sensibilité souhaitée consiste à allonger les bras de l'interféromètre ; celui de l'expérience Virgo a des bras de 3 km.

On modifie de plus le système optique de chaque bras en y formant une « cavité optique » par adjonction, près de la séparatrice, de miroirs B1 et B2, partiellement réfléchissants et identiques ; leur coefficient de réflexion, côté séparatrice, r est réel positif ; celui, côté miroir A1 ou A2, en est l'opposé, soit $r' = -r$. Ces miroirs sont supposés sans pertes avec $r^2 + t^2 = 1$ où t est leur facteur de transmission. La distance entre les miroirs, sensiblement la même dans chaque bras, est notée d (Fig. 2 et 3).



Interféromètre avec cavité optique dans chaque bras
Figure 11



Cavité optique
Figure 12

© Lavoisier - La photocopie non autorisée est un délit

On admettra que, dans chaque bras, le système constitué des deux miroirs en regard est équivalent à un miroir unique dont le coefficient de réflexion global pour l'onde venant de la séparatrice est donné par :

$$r_{FP} = \frac{r - \exp(-2ikd)}{1 - r\exp(-2ikd)} \quad (1)$$

Q 1.12 Montrer que $|r_{FP}| = 1$: interpréter ce résultat. On pose $\beta = 2kd$: quelle est la périodicité de $r_{FP}(\beta)$?

Q 1.13 On pose $r_{FP} = \exp(-i\varphi)$. Montrer que $\frac{d\varphi}{d\beta} = \frac{1 - r^2}{(1-r)^2 + 4r\sin^2(\beta/2)}$. Quelle est la variation de φ pour β allant de $-\pi + p2\pi$ à $\pi + p2\pi$, p entier ? Exprimer $\left.\frac{d\varphi}{d\beta}\right|_{\beta = p2\pi}$; l'évaluer numériquement pour $r = 0,98$.

Calculer de même $\left.\frac{d\varphi}{d\beta}\right|_{\beta = p2\pi \pm \pi}$.

On s'intéresse à la variation de la phase de l'onde réfléchie produite par une modification δd de la distance d due à l'onde gravitationnelle. On règle pour cela les systèmes optiques des bras à $\beta = p2\pi$, p entier.

Q 1.14 Montrer que ce système optique est alors équivalent à une longueur de bras d'un interféromètre simple que l'on précisera. Calculer cette longueur équivalente pour $d = 3$ km et $r = 0,98$. Quelle est l'amélioration de sensibilité par rapport à l'appareil de laboratoire dont les bras ont une longueur de 1 m ?

Q 1.15 Le maximum de sensibilité de l'interféromètre est obtenu lorsqu'il est réglé pour une puissance de sortie nulle. Où part l'essentiel de l'énergie lumineuse entrée dans l'interféromètre ?
Il est possible de la « recycler » pour augmenter la puissance lumineuse dans l'appareil. Avec un recyclage d'un facteur 100, atteint-on la sensibilité souhaitée ?

Conseils méthodologiques. 1) à 3) : Il faut suivre le détail des trajets des deux ondes, pour évaluer la variation d'amplitude, puis le carré du module de l'amplitude résultante. **4) à 6)** : On exploite la relation trouvée, en envisageant d'infimes variations de longueur : un développement limité est souhaitable. **7) à 11)** : La lumière a une structure corpusculaire : puissance et variation de puissance correspondent ainsi à moyenne et fluctuation du débit de photons. **12) à 15)** : Le coefficient de réflexion de la cavité est donné. Pour interpréter les résultats de l'étude, il faut garder en mémoire la signification physique du carré du module et de l'argument de ce coefficient : rapport des puissances et déphasage.

1.1) Se propageant à la vitesse c et étant de fréquence $\nu = 1$ kHz, l'onde gravitationnelle a une longueur d'onde de l'ordre de :

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = 3\ 10^5 \text{ m}.$$

La longueur des bras est par conséquent $\frac{1}{100}$ de la longueur d'onde, on peut considérer l'onde uniforme sur l'échelle de taille de l'interféromètre.

L'hypothèse quasi statique nécessite que la période T_{OG} du phénomène soit très supérieure aux temps caractéristiques mis en jeu dans l'interféromètre.

Ici, on compare T_{OG} au temps de parcours d'un bras, soit $\frac{L}{c}$

$$\boxed{T_{OG} \gg \frac{L}{c}}$$

⇨ **Remarque**

La relation $\lambda = \frac{c}{\nu}$ n'est pas valable que pour les seules ondes électromagnétiques : elle s'applique à tout phénomène se propageant à la vitesse c

On peut donc considérer que pendant le trajet de la lumière dans chaque bras, l'onde gravitationnelle conserve une amplitude instantanée quasi constante : la modification de l'indice sera quasi stationnaire.

1.2) Pour le trajet rencontrant le miroir A_2, en tenant compte :
- d'une réflexion de coefficient r_s,

- d'une propagation sur la distance l_2 ;
- d'une réflexion sur le miroir ;
- d'une nouvelle propagation sur la distance l_2 ;
- d'une transmission à travers la séparatrice ;

on peut écrire :

$$a_2 = r_s \exp(-jkl_2)(-1)\exp(-jkl_2)t_s a_{in}.$$

En raisonnant de même avec l'onde rencontrant le miroir A_1, on obtient :

$$a_1 = -t_s \exp(-j2kl_1) r_s' a_{in}.$$

On somme alors les amplitudes de ces deux ondes cohérentes, car issues de la même onde mère :

$$\boxed{a_{out} = -t_s r_s' [\exp(-j2kl_1) - \exp(-jkl_2)] a_{in}}.$$

avec $-t_s r_s' = -\frac{1}{2}$.

1.3) La puissance moyenne est obtenue en calculant le carré du module de l'amplitude complexe :

$$\frac{P_{out}}{P_{in}} = \left|\frac{a_{out}}{a_{in}}\right|^2 = \frac{1}{4}|\exp(-j2kl_1) - \exp(-jkl_2)][\exp(+j2kl_1) - \exp(+jkl_2)]$$

En utilisant l'expression complexe des fonctions trigonométriques, on obtient :

$$\frac{P_{out}}{P_{in}} = \frac{2 - 2\cos[2k(l_1 - l_2)]}{4},$$

ce qui conduit à la relation attendue :

$$\boxed{\frac{P_{out}}{P_{in}} = \sin^2 k(l_1 - l_2)}.$$

1.4) On substitue à $l_1 - l_2$ la grandeur :

$$l_1 - l_2 + \frac{1}{2} h_{og}(l_1 + l_2),$$

avec ce dernier terme suffisamment petit pour autoriser un développement limité de la forme :

$$\sin^2(x_0 + \varepsilon) \sim \sin^2(x_0) + 2\sin x_0 \cos x_0 \varepsilon.$$

La variation est donc assimilable à :

$$\boxed{\delta P_{grav} = P_{in} \frac{1}{2} h_{og}(l_1 + l_2) k \sin[2k(l_1 - l_2)]},$$

qui est la relation demandée.

1.5) La variation $|\delta P_{grav}|$ est maximale lorsque $|\sin\alpha_0|$ est égal à 1, soit :

$$\boxed{\alpha_0 = \frac{\pi}{2}[\pi]}$$

On parle d'ondes en quadrature.

1.6) Déduisant la valeur de k de la relation $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, on obtient numériquement :

$$|\delta P_{grav}| \sim 10^{-13}\ \text{W}.$$

Cette valeur est extrêmement faible, on peut craindre qu'elle ne soit inférieure à toutes les causes de variations non prises en compte jusqu'ici.

⇨ **Remarque**

Chaque propagation fait apparaître un déphasage représenté par un terme $\exp(-j\varphi)$.

⇨ **Remarque**

$\exp(j\theta) + \exp(-j\theta) = 2\cos\theta$

⇨ **Remarque**

$1 - \cos\theta = 2\sin^2(\theta/2)$

© Librairie - La photocopie non autorisée est un délit

1.7) P_{out} est une puissance moyenne, l'énergie moyenne en Δt s'écrit donc $P_{out}\Delta t$, ce qui correspond à $\frac{P_{out}\Delta t}{h\nu}$ photons en moyenne. Ainsi, le nombre moyen de photons détectés vaut :

$$\boxed{\langle N \rangle = \eta \frac{P_{out}\Delta t}{h\nu}},$$

si l'on tient compte du facteur d'efficacité.

1.8) La variation δP_{shot} donnant une fluctuation du nombre N de l'ordre de σ_{ph} s'écrit : $\delta P_{shot} = \frac{\sigma_{ph} h\nu}{\eta \Delta t}$,

avec $\sigma_{ph} = \sqrt{\langle N \rangle}$. En utilisant le résultat précédent, on obtient donc : $\delta P_{shot} = \sqrt{P_{out}} \sqrt{\frac{h\nu}{\eta \Delta t}}$.

En l'absence d'effet gravitationnel, $\frac{P_{out}}{P_{in}} = \sin^2 k(l_1 - l_2)$, on en déduit l'expression :

$$\boxed{\delta P_{shot} = \sqrt{P_{in}} \sqrt{\frac{h\nu}{\eta \Delta t}} |\sin k(l_1 - l_2)|}.$$

1.9) Le rapport du signal sur le bruit s'écrit par conséquent :

$$\frac{|\delta P_{grav}|}{\delta P_{shot}} = \sqrt{P_{in}} \sqrt{\frac{\eta \delta t}{h\nu}} k\, h_{og}(l_1 + l_2) |\cos k(l_1 - l_2)|.$$

Le rapport signal/bruit est maximal lorsque :

$$\boxed{k(l_1 - l_2) = 0[\pi]},$$

ce qui correspond à un état d'interférences destructives.

Pour ce réglage, P_{out} est nulle sans effet gravitationnel, ainsi que δP_{grav}.

En pratique, pour effectuer la mesure et obtenir un signal non nul, on dérèglera un peu l'interféromètre par rapport à la condition précédente.

⇨ **Remarque**

$\frac{\sin[2k(l_1 - l_2)]}{\sin[k(l_1 - l_2)]} = 2\cos[k(l_1 - l_2)]$

1.10) Pour un rapport signal/bruit unité :

$$h_{shot} = \sqrt{\frac{hc}{\lambda \eta \Delta t}} \frac{\lambda}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{P_{in}}} \frac{1}{l_1 + l_2}$$

⇨ **Remarque**

Pour faire émerger le signal utile du fond lumineux, on se place à l'annulation de celui-ci.

1.11) Numériquement :

- pour $f = 10$ Hz, $\Delta t = 0.1$ s et $h_{shot} = 3 \cdot 10^{-17}$;
- pour $f = 10$ kHz, $\Delta t = 10^{-4}$ s et $h_{shot} = 9 \cdot 10^{-16}$.

Dans tous les cas, on est ici très loin du but à atteindre, c'est-à-dire plusieurs ordres de grandeur en dessous de ce qui est nécessaire !

1.12) D'après la définition donnée du coefficient de réflexion r_{FP} :

$$|r_{FP}|^2 = r_{FP} r_{FP}^* = \frac{(r - \exp(-2ikd))(r - \exp(2ikd))}{(1 - r\exp(-2ikd))(1 - r\exp(2ikd))},$$

donc, en exploitant la relation $\exp(i\theta) + \exp(-i\theta) = 2\cos\theta$, on aboutit à :

$$|r_{FP}|^2 = \frac{r^2 + 1 - 2r\cos(2kd)}{1 + r^2 - 2r\cos(2kd)} = 1.$$

⇨ **Remarque**

Les initiales FP sont celles des physiciens français Fabry et Pérot, inventeurs de ce type de cavité optique.

Le résultat s'interprète aisément : la cavité est composée d'éléments considérés comme exempts de pertes (miroirs et portions de longueurs dans des milieux non absorbants). Ainsi, l'onde réfléchie a même intensité que l'onde incidente.

La loi $r_{FP}(\beta)$ est 2π périodique, ce qui s'interprète bien si l'on invoque les interférences des ondes effectuant des allers-retours dans la cavité délimitée par les miroirs.

⇨ Remarque

Le déphasage correspondant à un aller ou un retour seuls est kd.

1.13) On peut écrire, en faisant apparaître les numérateur et dénominateur en notation algébrique :

$$r_{FP} = \frac{r - \cos\beta + i\sin\beta}{1 - r\cos\beta + ir\sin\beta},$$

on peut donc exprimer l'argument à l'aide de la différence de celui du numérateur et de celui du dénominateur :

$$\mathrm{Arg}(r_{FP}) = \mathrm{Arg}(r - \cos\beta + i\sin\beta) - \mathrm{Arg}(1 - r\cos\beta + ir\sin\beta),$$

ce qui s'exprime à l'aide de l'inverse de la fonction tangente :

$$\varphi = -\mathrm{Arg}(r_{FP}) = -\arctan\left(\frac{\sin\beta}{r - \cos\beta}\right) + \arctan\left(\frac{r\sin\beta}{1 - r\cos\beta}\right)$$

Le calcul de la dérivée par rapport à β du premier terme mène à :

$$-\frac{\cos\beta(r - \cos\beta) - \sin^2\beta}{(r - \cos\beta)^2 + \sin^2\beta},$$

tandis que celle du second terme donne :

$$\frac{r\cos\beta(1 - r\cos\beta) - r^2\sin^2\beta}{(1 - r\cos\beta)^2 + r^2\sin^2\beta}.$$

La différence conduit ainsi à :

$$\frac{d\varphi}{d\beta} = \frac{-(r\cos\beta - 1) + (r\cos\beta - r^2)}{r^2 + 1 - 2r\cos\beta} = \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos\beta}.$$

Il faut alors modifier l'expression du dénominateur :

$$1 + r^2 - 2r\cos\beta = 1 + r^2 - 2r + 2r - 2r\cos\beta = (1 - r)^2 + 2r(1 - \cos\beta).$$

On obtient ainsi ce qui est demandé :

$$\boxed{\frac{d\varphi}{d\beta} = \frac{1 - r^2}{(1 - r)^2 + 4r\sin^2(\beta/2)}}$$

Technique de calcul

$1 - \cos\beta = 2\sin^2(\beta/2)$

- $\frac{d\varphi}{d\beta}$ est maximum pour $\beta = 0[2\pi]$, et alors :

$$\left(\frac{d\varphi}{d\beta}\right)_{max} = \frac{1 + r}{1 - r} ;$$

- $\frac{d\varphi}{d\beta}$ est minimum pour $\beta = \pi[2\pi]$ et :

$$\left(\frac{d\varphi}{d\beta}\right)_{min} = \frac{1 - r}{1 + r}.$$

Dans chacun de ces cas par ailleurs :

- si $\beta = 0[2\pi]$, $\varphi = \pi$ car $r_{FP} = \frac{r - 1}{1 - r} = -1$.

On obtient alors numériquement :

$$\left(\frac{d\varphi}{d\beta}\right)_{max} = 99.$$

© Larousse - La photocopie non autorisée est un délit

- si $\beta = \pi[2\pi]$, $\varphi = 0$ et $\left(\frac{d\varphi}{d\beta}\right)_{min} = 0.01$.

On obtient ainsi une variation très rapide de la phase au voisinage des réglages correspondant à :

$$\beta = p2\pi,$$

avec l'ordre d'interférence p entier.

1.14) Dans un interféromètre de Michelson ordinaire, un bras de longueur ℓ terminé par un miroir présente un coefficient de réflexion :

$$r_{bras} = -\exp(-i2k\ell).$$

Le réglage permettant d'obtenir un coefficient de réflexion égal à -1, en l'absence d'onde gravitationnelle correspond à :

$$2k\ell = 0[2\pi]$$

et tout allongement $\delta\ell$ amène une variation de phase égale à $2k\delta\ell$.

⇨ Remarque

Le signe – provient de la réflexion sur le miroir qui introduit une opposition de phase.

Dans le système étudié, un facteur d'amplification $\frac{d\varphi}{d\beta} = 100$ intervient, si bien qu'un allongement δd induit une variation de phase :

$$d\varphi = \frac{d\varphi}{d\beta}d\beta = \frac{d\varphi}{d\beta}2k\,\delta d.$$

Tout se passe comme si les bras avaient une longueur égale à $100d$, soit 300 km !

Passant de 1 m à 300 km, on accroît la sensibilité d'un facteur $3\,10^5$. On s'approche donc de la limite permettant la détection : pour $\Delta t = 0{,}1$ ms :

$$h_{shot} \sim 3\,10^{-21}.$$

1.15) Les ondes ayant subi une transmission et une réflexion sur la séparatrice interfèrent destructivement avec le réglage choisi ; la conservation de la puissance impose donc que celles qui ont subi 2 réflexions ou 2 transmissions interfèrent constructivement.

La puissance est donc renvoyée vers la source.

⇨ Remarque

L'étude menée comme aux questions 1) et 2) aurait également donné ce résultat.

En recyclant la puissance ainsi perdue, on peut atteindre une augmentation de la puissance disponible d'un facteur 100, ce qui divise par un facteur 10 le niveau de h_{shot}. La sensibilité souhaitée est ainsi atteinte :

$$h_{shot} < 10^{-21}.$$

La suite de ce problème relève du domaine des sciences de l'ingénieur : dans l'option S.I., l'épreuve est en effet commune physique-sciences de l'ingénieur.

3. Banque PT

L'épreuve B comporte 3 parties : une courte de révision de première année sur le prisme, et deux longues traitant de l'interféromètre de Michelson et de la superposition de deux ondes électromagnétiques planes (partie déjà traitée sous une forme similaire dans les Bases **2** du chapitre **9**).

Première partie : spectroscope à prisme

(20 % du barème de ce problème)

Un spectroscope est un appareil destiné à étudier le spectre d'une source lumineuse. Un collimateur permet de réaliser un faisceau de rayons parallèles qui va éclairer un prisme. Un viseur permet ensuite d'étudier la lumière ayant traversé le prisme.

Le prisme utilisé est caractérisé par un indice n qui dépend de la longueur d'onde. Sa section droite est un triangle d'angle A. Le prisme est placé dans l'air dont l'indice sera pris égal à 1. Un rayon incident rencontre la face d'entrée au point I sous l'angle d'incidence i et l'émergent associé ressort par l'autre face au point J sous l'angle i'. On utilisera les angles orientés définis sur la figure suivante :

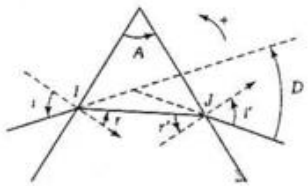


Figure 13

La convention de signe pour les angles est trigonométrique.

On suppose d'abord la lumière monochromatique et l'indice du prisme égal à n.

1.1.1. Rappeler les lois de Descartes pour la réflexion et la réfraction. En déduire des relations sur les angles i et r en I, puis sur les angles r' et i' en J. On suppose que le prisme permet l'existence du rayon émergent et on néglige, dans la suite, toute réflexion. Trouver une relation simple entre r, r' et A.

1.1.2. Établir la relation : $D = i + i' - A$.

En appliquant le principe du retour inverse de la lumière, montrer que, pour une valeur de D possible donnée, il existe deux couples de solutions (i,i'). En déduire l'égalité de i et de i' lorsque D passe par un minimum (supposé unique).

1.1.3. Déterminer la valeur i_0 de i correspondant au minimum de déviation en fonction de n et de A. Établir une relation entre n, l'angle A et la déviation minimale D_m.

1.1.4. En déduire que l'indice n, les angles A et D_m vérifient une relation du type :

$$n = \frac{f\left(\frac{A + D_m}{2}\right)}{f\left(\frac{A}{2}\right)}$$, où f est une fonction que l'on précisera.

1.2.1. On éclaire le prisme avec une lampe à vapeur de mercure, pour laquelle on a mesuré D_m pour différentes longueurs d'onde et obtenu les valeurs de n correspondantes :

λ (µm)	0,4047	0,4358	0,4916	0,5461	0,5770
n	1,803	1,791	1,774	1,762	1,757
$1/\lambda^2$ (µm^{-2})	6,11	5,27	4,14	3,35	3,00

Montrer que n peut se mettre sous la forme $n = a + b/\lambda^2$ où a et b sont des constantes. Est-ce que le prisme est dispersif et pourquoi ?

1.2.2. Pour une lampe à vapeur de cadmium, on mesure un indice égal à $n = 1,777$. En déduire la longueur d'onde et donner la couleur correspondante.

Deuxième partie : interféromètre de Michelson

(40 % du barème de ce problème)

On étudie des phénomènes d'interférences à deux ondes que l'on illustrera à partir de la question **2.2.** à l'aide de l'interféromètre de Micheison.

© Lavoisier – La photocopie non autorisée est un délit

2.1.1. Préciser pour lequel des deux cas suivants il peut y avoir localisation des franges en lumière monochromatique :

a) on utilise une source ponctuelle ;

b) on utilise une source étendue.

Pour obtenir des interférences à deux ondes, on peut utiliser, soit un dispositif à division de front d'onde, soit un dispositif à division d'amplitude. Lequel de ces types de dispositif permet d'observer des interférences localisées ?

Donner un exemple de dispositif à division de front d'onde. Donner un exemple de dispositif à division d'amplitude.

2.1.2. Qu'appelle-t-on longueur de cohérence? Quel est son rôle dans les conditions d'observation des franges d'interférences ?

2.2.1. Un interféromètre de Michelson est constitué par une lame semi-réfléchissante, non absorbante, appelée séparatrice S_P dont les facteurs de transmission et de réflexion sont supposés égaux, et de deux miroirs plans M_1 et M_2 perpendiculaires l'un à l'autre. La lame S_P est inclinée à 45° par rapport aux normales à M_1 et M_2. L'interféromètre est plongé dans l'air. Dans tout le problème, on ne tiendra compte, ni des inconvénients liés à l'épaisseur non négligeable de la séparatrice (inconvénients supposés parfaitement corrigés grâce à une lame compensatrice), ni d'éventuels changements de phases par réflexion. L'indice de l'air sera pris égal à 1.

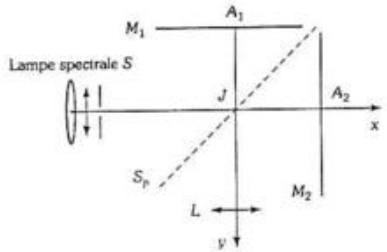


Figure 14

On utilise comme source étendue S une lampe spectrale de symétrie de révolution autour de l'axe SJ. Comment peut-on sélectionner une raie quasi monochromatique de la lumière émise par la lampe ?

2.2.2. L'interféromètre a été réglé de sorte que les deux bras sont égaux ($JA_1 = JA_2$). L'observation se fait en lumière monochromatique, dans le plan focal d'une lentille mince convergente (L) d'axe optique Jy et de distance focale $f' = 1$ m.

a) Qu'observe-t-on ?

b) Pourquoi est-il nécessaire de diaphragmer la lentille (L) ou de limiter l'inclinaison des rayons incidents issus de la source S ?

2.2.3.1. On translate M_2 normalement à son plan de $e = 1,1$ mm dans la direction des x positifs. On considère un rayon incident d'angle d'incidence i (petit devant un radian). Montrer à l'aide d'un schéma que le phénomène d'interférences observé est analogue à celui d'une lame d'air à faces parallèles. Faire un tracé des deux rayons lumineux émergents de l'interféromètre, associés à cet incident. En quel point P de l'écran vont-ils interférer, après passage dans la lentille ? Exprimer la différence de marche en ce point en fonction de l'inclinaison i des rayons émergents de l'interféromètre par rapport à l'axe $(A1,y)$. En déduire l'éclairement sur l'écran et l'ordre d'interférence p au point P associé à l'angle d'incidence i. En quel point de l'écran cet ordre p est-il maximal ?

Dans toute la suite, on se contentera d'une analyse limitée à l'ordre 2, inclus, en i (angle d'incidence).

2.2.3.2. Quel est le lieu de localisation des franges d'interférences ?

2.2.3.3. Avec une raie de longueur d'onde $\lambda = 546,1$ nm dans le vide, et toujours avec $e = 1,1$ mm, déterminer la valeur maximale de l'ordre d'interférence, et en déduire l'ordre d'interférence du premier anneau brillant, puis son rayon. Déterminer, de même, les rayons des deuxième et troisième anneaux brillants. Que constate-t-on ?

2.2.3.4. On place sur le bras JA_1 et parallèlement au miroir M_1, une lame transparente à faces parallèles d'épaisseur $e' = 9{,}5$ µm et d'indice $n = 1.5117$. Calculer la variation, due à l'introduction de cette lame, de l'ordre d'interférence au centre.

Dans toute la suite, on enlève cette lame à faces parallèles.

2.2.4.1. À partir de la situation où les deux bras sont égaux ($JA_1 = JA_2$), on fait tourner le miroir M_2 d'un angle α très faible autour d'un axe passant par A_2 et perpendiculaire au plan passant par J, A_1 et A_2. Montrer à l'aide d'un schéma que le dispositif est équivalent à un coin d'air d'angle α.

2.2.4.2. Comment éclairer le coin d'air sous incidence quasi normale ?

2.2.4.3. Le centre de la source éclaire (après réflexion sur la séparatrice), le miroir M_1 en incidence nonnale ; faire apparaître à l'aide d'un schéma, la position du plan de localisation de la figure d'interférences. Lors d'une observation oculaire, sur quelle surface a-t-on l'impression que les franges sont « peintes » ?

2.2.4.4. Pour observer une image nette et agrandie des interférences sur un écran, on utilise une lentille convergente L' de distance focale 0.2 m (cette lentille remplace la lentille L) et un écran. La lentille est placée à 0,25 cm du miroir M_1, son axe optique correspond à l'axe (Jy) (on rappelle que l'angle et est très faible). Préciser la position de l'écran d'observation et calculer le grandissement.

2.2.4.5. Caractériser le système de franges et donner l'expression de l'interfrange i observé sur l'écran.

Application numérique : $i = 3{,}75$ mm, $\lambda = 546.1$ nm. Donner la valeur de α.

2.2.4.6. On éclaire le coin d'air en lumière blanche ; qu'observe-t-on sur l'arête du coin d'air (ou sur son image) ?

Expliquer pourquoi, si l'angle augmente, la région du coin où l'observation des franges en lumière blanche (teintes de Newton) est observable devient plus étroite.

2.2.5.1. L'interféromètre est réglé comme à la question **2.2.4.**, mais la source primaire est maintenant une lampe à vapeur de sodium dont on suppose que le spectre d'émission ne contient que deux raies intenses, de couleur jaune et de longueur d'onde $\lambda_1 = 589{,}0$ nm et $\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda$ avec $0 < \Delta\lambda \ll \lambda_1$.

On observe alors nettement les franges obtenues dans la question **2.2.4.**. Ensuite, on translate M_2 d'une distance d, et on constate que les franges disparaissent une première fois lorsque $d = 0{,}15$ mm. Expliquer le phénomène.

2.2.5.2. En déduire $\Delta\lambda$ et λ_2.

Conseils méthodologiques. L'épreuve est très proche du cours. Il est nécessaire de bien réviser celui-ci ! On consultera avec profit le chapitre **11** « Interféromètre de Michelson ».

Première partie : spectroscope à prisme

1.1.1. Les lois de Descartes pour la réflexion sont les suivantes :

- les rayons incident et réfléchi sont dans le plan d'incidence ;
- les angles i_1 et r_1 sont opposés : $r_1 = -i_1$ (Fig. 15)

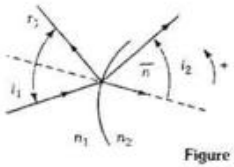


Figure 15

En ce qui concerne la réfraction :

- les rayons incident et réfracté sont dans le plan d'incidence ;
- les angles i_1 et i_2 vérifient : $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$ (Fig. 15).

Alors :

$$\boxed{\sin i = n \sin r} \quad \text{et} \quad \boxed{n \sin r' = \sin i'}.$$

⇨ **Remarque**

Le plan d'incidence est défini comme le plan formé par le rayon incident et la normale $\vec{n}$ à la surface de séparation des deux milieux idiopires) (Fig. 15)

Erreur à éviter

Ne pas omettre la moitié des lois. Les angles sont orientés.

© Larousse - La photocopie non autorisée est un délit

ur la figure 16 :

$$\boxed{\alpha = \frac{\pi}{2} - r} \quad \text{et} \quad \boxed{\beta = \frac{\pi}{2} - r'}$$

es normales aux faces sont colorées). Comme la somme des angles dans un triangle ait π, on déduit $\alpha + \beta + A = \pi$, soit :

$$\boxed{A = r + r'}.$$

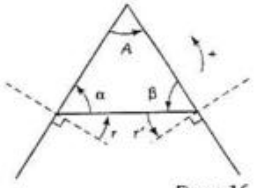


Figure 16

.1.2. On lit sur la figure de l'énoncé :

$$D = i' - r' - r + i.$$

n effet, une rotation de i' mène du rayon sortant sur la normale de la seconde réfraction. Alors une rotation de $-r'$ amène la direction $\vec{IJ}$. Le même raisonnement permet de conclure.

'u la relation de la question **1.1.1.** :

$$\boxed{D = i + i' - A}.$$

)n postule une forme de la courbe $D(i)$ telle que celle indiquée sur la figure 17. S'il existe ne solution pour laquelle le rayon incident possède un angle i et ressort avec un angle i', alors principe du retour inverse de la lumière montre que le trajet inverse (angle d'incidence i' et ayon ressortant avec un angle i) est aussi un rayon lumineux. Ainsi, si i est solution, i' aussi. u minimum de déviation (Fig. 17), $i' = i = i_0$: le trajet est symétrique.

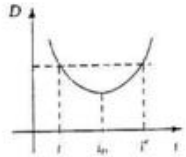


Figure 17

.1.3. Alors, typiquement :

$$i = i' = i_0, \quad r = r' = r_0, \quad A = 2r_0 \quad \text{et} \quad D_m = 2i_0 - A$$

a loi de Descartes $i = n \sin r$ implique :

$$\sin i_0 = n \sin \frac{A}{2}$$

)n déduit :

$$\boxed{n = \frac{\sin i_0}{\sin r_0} = \frac{\sin \dfrac{D_m + A}{2}}{\sin \dfrac{A}{2}}}.$$

..1.4. Cette expression est conforme à l'énoncé avec pour f la onction sinus.

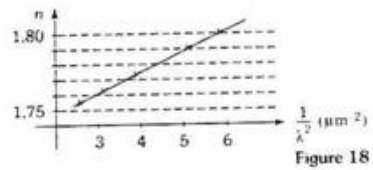


Figure 18

..2.1. On trace la courbe $n = g\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$ en Fig. 18.

)n observe une droite.

'lus précisément, une régression linéaire donne :

$$a = 1{,}712 \quad \text{et} \quad b = 1{,}49\ 10^{-2}\ \mu\text{m}^2$$

vec un coefficient de corrélation $r = 0{,}99995$.

)ans le prisme, chaque longueur d'onde composant la lumière possède la vitesse $(\lambda) = c/n(\lambda)$: il y a dispersion.

'n conséquence, deux longueurs d'ondes différentes repartent dans des direc- ions différentes.

⇨ **Remarque**

$$Y = n = a + bX = a + \frac{b}{\lambda^2}$$

Erreur à eviter

Ne pas oublier l'unité de b.

1.2.2. En lisant dans le tableau, on trouve $\lambda = 0{,}49\ \mu m$. La couleur est bleu-vert.

Seconde partie : interféromètre de Michelson

2.1.1. Avec une source ponctuelle, les interférences sont **non localisées**. Il peut y avoir localisation avec une source étendue.

Pour obtenir des interférences localisées, il faut utiliser un dispositif à **division d'amplitude**, comme l'interféromètre de Michelson.

Les trous d'Young sont un exemple de dispositif interférentiel à division du front d'onde.

2.1.2. La longueur de cohérence spatiale est la taille maximale de la source pour laquelle les interférences restent bien contrastées.

La longueur de cohérence temporelle est la différence de chemin optique maximale autorisant un bon recouvrement des trains d'onde et permettant d'observer des interférences bien contrastées.

2.2.1. On intercale un filtre **interférentiel**.

Un tel filtre, contrairement à un filtre coloré, permet de sélectionner une longueur d'onde donnée avec une **très faible** bande passante. Son fonctionnement est basé sur le phénomène d'interférences.

2.2.2.a) L'interféromètre est au **contact optique** : on observe un écran uniformément éclairé.

b) Il faut rester dans les conditions de Gauss.

2.2.3.1. On considère le schéma équivalent : on ne trace pas les rayons réfléchis sur le miroir M_2, mais leur symétrique par rapport à la séparatrice Sp (Fig. 19). Alors les miroirs M_1 et M_2' (image de M_2) par la séparatrice forment une lame d'air à faces parallèles.

Ils interfèrent au même point P du plan focal image de la lentille. Sa construction à l'aide d'un rayon auxiliaire est indiquée sur la figure 19.

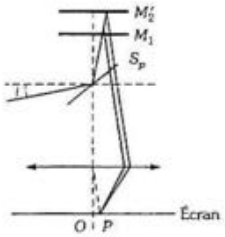


Figure 19

Considérons le schéma de la figure 20 :

$$\delta = (SM)_2 - (SM)_1 = (IJKM) - (IM).$$

En utilisant le principe du retour inverse de la lumière avec une source placée en M, le théorème de Malus implique : $(MH) = (MK)$ (Fig. 20). On déduit :

$$\delta = IJ + JK - IH.$$

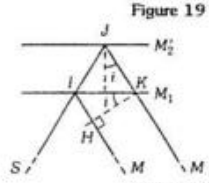


Figure 20

On utilise alors quelques formules de trigonométrie :

$$\tan i = \frac{IK/2}{e}, \quad \sin i = \frac{IH}{IK} \quad \text{et} \quad \cos i = \frac{e}{IJ}.$$

Il en résulte :

$$\delta = 2\frac{e}{\cos i} - IK\sin i = \frac{2e}{\cos i} - 2e\frac{\sin^2 i}{\cos i} = 2e\cos i.$$

L'éclairement au point P d'inclinaison i est alors :

$$\boxed{I(i) = 2I_0\left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}2e\cos i\right)\right)}.$$

où I_0 est l'éclairement en P en occultant l'un des miroirs.

Par définition :

$$\boxed{p(i) = \frac{\delta}{\lambda} = \frac{2e\cos i}{\lambda}}$$

L'ordre est maximal au centre de la figure d'interférence (pour $i = 0$).

⇨ **Remarque**

Le résultat est à connaître absolument.

© Lavoisier - La photocopie non autorisée est un délit

.2.3.2. Les franges d'interférence sont des **anneaux**. En effet, pour une ième inclinaison i = cte, l'éclairement est identique.

es anneaux sont **localisés à l'infini** : on les observe dans le plan focal image 'une lentille convergente.

⇨ **Remarque**

Résultat important du cours.

.2.3.3. Numériquement :

$$p_{max} = \frac{2e}{\lambda} = 4028.56.$$

Erreur à éviter

max n'est pas entier : le point O n'est pas totalement lumineux.

our le premier anneau :

$$p_1 = E(p_{max}) = 4028.$$

Attention à donner le résultat avec au moins un chiffre après la virgule ! Une erreur de 1/2 fausse tous les résultats.

n note $E(x)$ la partie entière de x, c'est-à-dire le plus grand entier inférieur à x.

e même, pour les deuxième et troisième anneaux :

$$p_2 = 4027 \quad \text{et} \quad p_3 = 4026.$$

n calcule l'incidence correspondante :

$$p_1 = 4028 = \frac{2e\cos i_1}{\lambda}, \quad \text{soit} : \ i_1 = \sqrt{2 - \frac{p_1\lambda}{2e}}.$$

⇨ **Remarque**

Les anneaux sont de plus en plus serrés.

nsuite :

$$r_1 = f' i_1 = 1.7\ cm.$$

imilairement : $r_2 = 2.8$ cm et $r_3 = 3.6$ cm.

.2.3.4. Le chemin 2 (avec réflexion sur le miroir M_2) est plus long de $2e$ our les rayons d'incidence nulle ($i = 0$) que le chemin 1.

jouter la lame transparente allonge le trajet 1 de $2(n-1)e'$. Le facteur 2 provient de l'aller-retour.

⇨ **Remarque**

La lame d'indice n est traversée deux fois, d'où le terme $2ne'$.
En revanche, cela raccourcit le trajet dans l'air (d'indice 1) de $2e'$.

e chemin optique varie de (pour $i = 0$) :

$$\Delta\delta(O) = -2(n-1)e'.$$

⇨ **Remarque**

Le signe moins provient du fait qu'on a choisi $\delta = (SM)_2 - (SM)_1$. Un allongement du chemin 1 diminue δ.

ıit une variation d'ordre d'interférence :

$$\boxed{\Delta p(O) = \frac{\Delta\delta(O)}{\lambda} = -\frac{2(n-1)e'}{\lambda}}$$

umériquement :

$$\Delta p(O) = -17.8.$$

.2.4.1. Là encore, on considère le symétrique de M_2 par rapport à la séparatrice (Fig. 21).

e dispositif est équivalent à un coin d'air d'angle α.

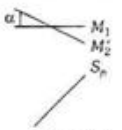


Figure 21

.2.4.2. On place une « petite » source au foyer d'une lentille convergente : le faisceau est ors parallèle (Fig. 22).

n pratique, cette « petite » source est obtenue en plaçant une diaphragme circulaire après une mpe. On intercale généralement un condenseur (lentille de courte focale) pour ne pas perdre op de luminosité.

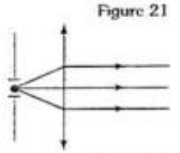


Figure 22

2.2.4.3. Le schéma est représenté sur la figure 23 où l'angle α est exagéré. Les rayons (ou leurs prolongements) se coupent sur M_2'. Les interférences sont localisées sur M_2' (ou M_2). On a l'impression que les interférences y sont peintes.

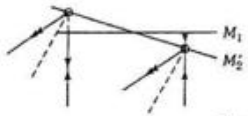


Figure 23

Remarque

En pratique, il est difficile de distinguer les plans de M_1 et M_2 par une observation oculaire. On retiendra que les interférences sont localisées au voisinage des miroirs.

2.2.4.4. La situation est celle de la figure 24. S

Il s'agit simplement de projeter un objet (les franges d'interférences, situées quasiment sur les miroirs) sur l'écran.

La relation de conjugaison de Descartes pour une lentille convergente est :

$$\frac{1}{x'} - \frac{1}{x} = \frac{1}{f'}.$$

Ici : $x = -0{,}25$ m.

soit : $x' = 1$ m.

L'écran se trouve 1 m derrière la lentille.

Le grandissement est (Fig. 24) :

$$\boxed{\gamma = \frac{x'}{x} = -4}.$$

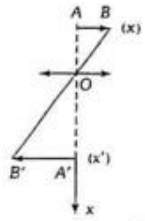


Figure 24

Erreur à éviter

Attention, $x < 0$.

Erreur à eviter

L'écran n'est donc certainement pas dans le plan focal image de la lentille !

2.2.4.5. Les franges sont rectilignes, parallèles à l'arête du coin d'air.

L'interfrange sur les miroirs vaut $i_0 = \frac{\lambda}{2\alpha}$.

En conséquence, celui sur l'écran vaut $i = |\gamma| i_0$.

Numériquement :

$$\boxed{\alpha = 2.9\ 10^{-4}\ \text{rad} = 1.7\ 10^{-2\circ} = 1.0'}.$$

Remarque

Rappelons l'expression de la différence de marche $\delta = 2IJ = 2\alpha x$, x étant repéré par rapport à l'arête du coin d'air (Fig. 25).

2.2.4.6. Sur l'arête du coin d'air, $\delta = 0$. Les interférences sont alors constructives, indépendamment de la longueur d'onde. L'image de l'arête du coin d'air et de son voisinage est blanche. Un peu à côté, des couleurs apparaissent car certaines longueurs d'onde interfèrent destructivement : les couleurs associées sont éteintes, et la lumière résultante est colorée (teintes de Newton).

Si l'angle α augmente, la différence de marche augmente en tout point, sauf sur l'arête où elle est nulle. Si cette différence de marche devient de l'ordre de la longueur de cohérence, le contraste diminue alors et on n'observe plus les teintes de Newton mais une teinte blanche (blanc d'ordre supérieur).

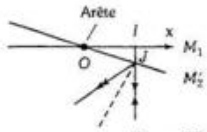


Figure 25

2.2.5.1. Si le spectre contient une seule longueur d'onde λ_1, l'éclairement vaut, en fonction de la différence de marche :

$$I_1(\delta) = 2I_0\left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_1}\delta\right)\right).$$

© Ellipses - La photocopie non autorisée est un délit

Si le spectre contient une autre longueur d'onde λ_2, l'éclairement sur l'écran est la somme des éclairements correspondant à chacune des longueurs d'onde.

Dans ce cas, en supposant les deux raies de même intensité (même « I_0 ») :

$$I = I_1 + I_2 = 2I_0\left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_1}\delta\right)\right) + 2I_0\left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_2}\delta\right)\right).$$

Remarque

En effet deux longueurs d'onde optiques différentes n'interfèrent pas.

On factorise : $\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$.

$$\boxed{I = 4I_0\left(1 + \cos\left(\pi\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right)\delta\right)\cos\left(\pi\left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}\right)\delta\right)\right)}.$$

Le second terme en cosinus correspond à un terme d'interférences, alors que le premier est la visibilité V des interférences. Si V s'annule, alors les interférences disparaissent. Le **brouillage** est dû à la superposition de deux systèmes de franges.

2.2.5.2. Si on translate l'un des miroirs de d, la différence de marche vaut (en incidence quasi normale) (Fig. 26) :

$$\delta = 2\alpha x + 2d.$$

avec, pour simplifier, $x = 0$ au voisinage de l'arête.

Les franges sont observées au voisinage du coin d'air pour $d = 0$.

En effet, la visibilité est alors à peu près égale à 1. Quand d augmente :

$$V = \cos\left(\pi\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right)\delta\right) = \cos\left(2\pi\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right)d\right)$$

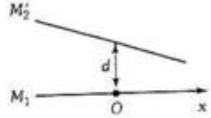


Figure 26

diminue et s'annule pour :

$$2\pi\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right)d = \frac{\pi}{2}.$$

On déduit :

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_1^2} = \frac{1}{4d}.$$

Numériquement : $\Delta\lambda = 5.8\ 10^{-10}$ m.

Alors : $\boxed{\lambda_2 = 589.6\ \text{nm}}$.

Annales

Fenêtre sur les concours actuels

La dernière partie de ce livre est consacrée à la correction de parties entières de sujets posés lors de la session 2008.

1. Étude de quelques aspects de l'hélicoptère. Polytechnique MP

Nous proposons le corrigé de la première des trois parties. Les parties restantes correspondent au cours de Sciences de l'ingénieur.

C'est en novembre 1907 que le premier véritable décollage au monde d'un hélicoptère à plus de 1,50 mètre du sol est réussi, à Coquainvilliers, près de Lisieux (Normandie), il y a donc un peu plus de 100 ans. Cet engin à double rotor de 203 kg (Fig. 1) est piloté par son jeune inventeur et constructeur, Paul Cornu, alors âgé de 26 ans. Le moteur entraînant les rotors est un Antoinette de 24 CV (1 CV = 736 W). D'autres essais significatifs d'hélicoptères emportant un homme sont réalisés la même année par Louis Breguet et Charles Richet à Douai.

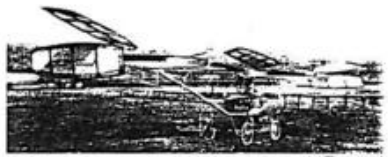


Figure 1
La machine de Paul Cornu (1907)

Un hélicoptère est un aéronef à voilure tournante dont la sustentation et la propulsion sont assurées simultanément par le ou les rotors pendant toutes les phases du vol. L'hélicoptère peut effectuer un vol stationnaire et permet ainsi des missions inaccessibles à la plupart des autres aéronefs. Un hélicoptère moderne de type Robinson R44 est présenté page suivante sur la figure 2.

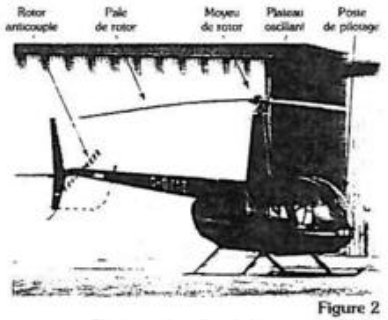


Figure 2
Photographie d'un hélicoptère moderne

Le sujet proposé est composé de trois parties qui abordent plusieurs aspects du fonctionnement d'un hélicoptère :
– la mécanique du vol : le principe de la voilure tournante et le fonctionnement du rotor anti-couple sont étudiés dans la première partie ;

© Lavoisier - La photocopie non autorisée est un délit

– la constitution et l'analyse cinématique de la tête de rotor sont étudiées dans la seconde partie ;
– le contrôle de position verticale par accéléromètre est l'objet de la troisième partie qui conclut le sujet.

I. Principe d'une voilure tournante

Forces aérodynamiques

Un objet placé dans un écoulement d'air subit une force aérodynamique. On décompose cette force en une composante dans le sens du vent relatif : la traînée, et une composante perpendiculaire : la portance. La portance d'un aéronef est créée par l'écoulement de l'air autour de sa voilure. Si le profil conduit à des vitesses relatives différentes entre la partie inférieure et la partie supérieure, la différence de pression ainsi générée induit une force résultante sur la voilure (voir profil sur la figure 3). Dans un écoulement horizontal, l'équilibre vertical de l'aéronef peut être atteint si la portance compense son poids. Le maintien en vol horizontal est assuré par une force de traction qui s'oppose à la traînée.

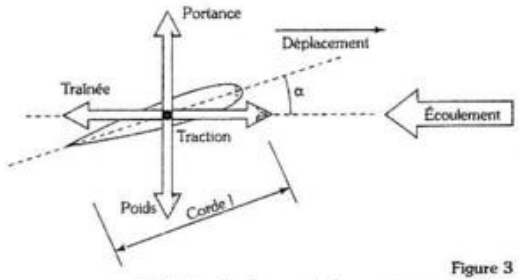


Figure 3
Définition des forces qui s'exercent sur une voilure dans un écoulement fluide

La traînée s'applique dans la direction de l'écoulement (dans le sens du mouvement relatif du fluide) et la portance perpendiculairement à l'écoulement, vers le haut (direction opposée au poids). La portance et la traînée sont données en première approximation par des expressions similaires en fonction de la vitesse V de l'écoulement :

$$f_z = \frac{1}{2}\rho\, S C_z(\alpha) V^2 \text{ pour la portance,}$$

$$f_x = \frac{1}{2}\rho\, S C_x(\alpha) V^2 \text{ pour la traînée.}$$

Dans ces expressions, S désigne la surface projetée du profil de la voilure selon la normale à sa corde (Fig. 3) et ρ la masse volumique de l'air ($\rho = 1,3$ kg · m^{-3} dans les conditions normales). $C_x(\alpha)$ et $C_z(\alpha)$ sont respectivement les coefficients de traînée et de portance : ils dépendent de l'angle d'incidence α (aussi appelé angle d'attaque) que fait la corde du profil avec la direction de l'écoulement.

Voilure tournante

Dans le cas d'un hélicoptère, l'écoulement de l'air est provoqué par le mouvement circulaire des pales par rapport au corps de l'appareil, ce qui crée un mouvement relatif par rapport à l'air.

On considère, dans la suite, que l'hélicoptère est en vol stationnaire (pas de mouvement par rapport au sol) en air calme, dans les conditions normales. Le rotor entraînant les pales tourne autour du cockpit suivant l'axe vertical $(O, \vec{z})$. Cette rotation relative est repérée par l'angle θ (Fig. 4.a).

1.1 Exprimer la vitesse de l'écoulement $V_{air}(r)$ de l'air en fonction de la distance r au moyeu du rotor et de la vitesse angulaire ω de rotation de l'axe.

On considère le cas d'une voilure tournante constituée de deux pales identiques (cas de l'hélicoptère Robinson R44). On néglige les interactions aérodynamiques entre les pales.

Afin d'alléger les calculs qui suivent, la géométrie des pales du rotor principal est simplifiée : les pales sont supposées cylindriques (non de révolution) de longueur R, de largeur l (la corde) (Fig. 4.b). On néglige tous les effets liés à la longueur finie et à la turbulence. L'incidence α correspond à l'angle que fait l'axe $\vec{x}_p$ de la pale avec l'axe $\vec{x}_r$ du rotor.

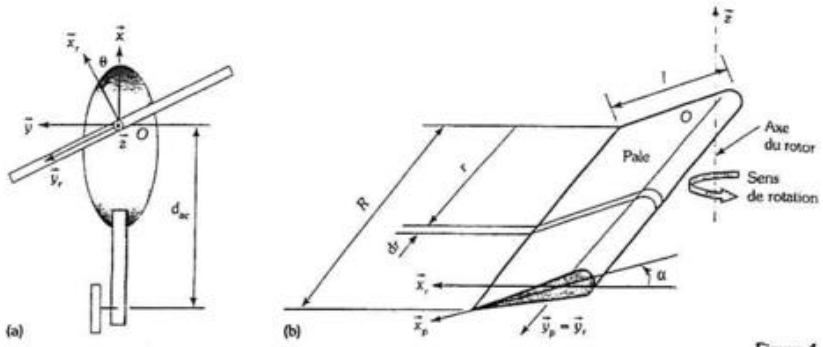


Figure 4

Description du modèle de l'hélicoptère : (a) vue de dessus et repère tournant lié au rotor ; (b) géométrie simplifiée de la pale et repère de la pale

I.2 En utilisant les expressions générales données dans l'introduction, exprimer la portance dF_z et la traînée dF_x d'un élément de pale de longueur dr, de surface projetée $dS = l \cdot dr$ et situé à une distance r de l'axe du rotor. Les lignes d'action de ces forces élémentaires se coupent sur l'axe $(O, \vec{y}_r)$.

I.3 Exprimer les éléments de réduction au point O des torseurs résultants de la portance et de la traînée sur une pale en fonction de sa longueur R et des variables pertinentes.

I.4 Montrer que ces torseurs sont des glisseurs dont le point d'application est situé à une même distance R_g de l'axe du rotor. Déterminer cette distance.

I.5 Donner l'expression du couple total C s'appliquant sur le rotor autour de son axe de rotation par rapport au cockpit. L'incidence est identique sur les deux pales.

I.6 Exprimer la puissance minimale $\mathcal{P}_0$ nécessaire pour obtenir une portance totale F suffisante pour assurer le décollage de l'appareil de masse M en fonction de C_x, C_z et des variables pertinentes.

La dépendance du coefficient de portance C_z avec l'angle d'incidence α de la pale sur l'air (Fig. 3) est modélisée par la loi $C_z = \kappa_0\alpha$ jusqu'à un angle d'incidence limite $\alpha_{max} = 15°$ avec $\kappa_0 = 0,1$ et α exprimé en degrés. Le coefficient de traînée C_x dépend en première approximation du carré du coefficient de portance, selon la relation approchée $C_x = \kappa_1 + \kappa_2 C_z^2$ avec $\kappa_1 = 1,5 \times 10^{-2}$ et $\kappa_2 = 7 \times 10^{-2}$, cette relation n'étant valable que dans l'intervalle $0 \leq \alpha \leq 15°$. Les valeurs numériques proposées pour les κ_i prennent en compte les effets complexes du flux engendré par le rotor ; elles sont obtenues expérimentalement. La dépendance de C_z en fonction de α est présentée sur la figure 5.

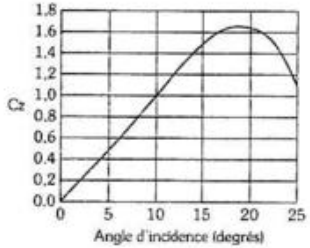


Figure 5

Évolution du coefficient Cz en fonction de l'angle d'incidence

I.7 À puissance constante, quel est qualitativement l'effet d'une augmentation de l'angle d'incidence des pales sur la vitesse de rotation de la voilure et sur le couple de traînée produit ? Peut-on conclure sur la portance ?

En pratique, la vitesse de rotation de la voilure est maintenue quasiment constante au cours du vol (à quelques pourcents près) et le contrôle de cette vitesse au cours des différentes phases du vol est effectué par le pilote grâce à une modulation de la puissance fournie par le moteur. Il est en effet nécessaire de maintenir la vitesse de l'extrémité des pales par rapport à l'air significativement en dessous de la vitesse du son ($c = 340$ m · s^{-1} au niveau de la mer dans les conditions normales). On limite donc la vitesse de l'écoulement d'air à $V_{max} = 0,6\,c$ en bout de pale.

© Ellipses - La photocopie non autorisée est un délit

I.8 Exprimer la vitesse angulaire maximale ω_{max} utilisable en fonction de la longueur R de la pale et de c, pour rester dans le domaine de sécurité. La calculer numériquement pour $R = 5$ m.

On suppose maintenant que le rotor est entraîné à vitesse constante à sa vitesse angulaire limite α_{max}, et que l'hélicoptère est initialement posé au sol avec un angle d'incidence des pales $\alpha = 0°$. La masse totale de l'hélicoptère est $M = 1\,300$ kg et le rotor possède deux pales de longueur $R = 5$ m, de largeur $l = 26$ cm.

I.9 Exprimer la puissance délivrée par le moteur dans cette configuration. La calculer numériquement.

Le pilote actionne maintenant la commande dite « de pas collectif » qui augmente l'angle α d'incidence des pales, tout en maintenant la vitesse du rotor constante à ω_{max} grâce à l'ajustement de la puissance fournie par le moteur.

I.10 Pour quelle valeur de l'angle d'incidence $\alpha_{déc}$ l'hélicoptère va-t-il quitter le sol ? La calculer numériquement, en prenant pour intensité du champ de pesanteur $g = 9,8$ m · s^{-2}.

I.11 Calculer en kW puis en CV, la puissance développée par le moteur au moment du décollage.

I.12 Le rapport puissance/masse des moteurs d'aviation récents atteint environ 2 CV/kg. Expliquer brièvement pourquoi la motorisation a été pendant longtemps la limitation principale des hélicoptères.

En pratique, les pales du rotor principal sont légèrement vrillées par construction ; l'angle d'incidence est de la forme $\alpha(r) = \alpha_1 - \phi r/R$, où α_1 est la partie variable sur laquelle agit le pilote, et ϕ un vrillage obtenu par construction.

I.13 Donner un encadrement portant sur α_1 et ϕ assurant qu'aucun point de la pale n'offre une incidence négative ou excédant l'angle d'incidence limite α_{max}.

I.14 Exprimer les éléments de réduction au point O du torseur résultant de la portance d'une pale vrillée.

I.15 Donner l'angle d'incidence α_{eq} d'une pale non vrillée générant la même portance que la pale vrillée de paramètres (α_1, ϕ). Montrer que cet angle doit respecter la condition $\alpha_{eq} \geq \phi/4$.

I.16 Évaluer la distance R^* au centre de rotation du rotor à laquelle s'applique effectivement la portance F_z^* dans le cas d'une pale vrillée. Exprimer R^*/R_g en fonction de ϕ/α_{eq}. Justifier succinctement l'intérêt du vrillage des pales.

I.17 Calculer maintenant le couple de traînée de l'hélice C^* dans le cadre d'une voilure vrillée. Soit $C(\alpha_{eq})$ le couple de traînée d'une hélice non vrillée pour $\alpha = \alpha_{eq}$. Montrer que le rapport $C^*/C(\alpha_{eq})$ vaut :

$$1 - \frac{7\kappa_1^3\kappa_2\phi}{240\,C_{xeq}}\left(\phi - \frac{24}{7}\alpha_{eq}\right)$$

avec C_{xeq} à identifier. Peut-on définir un angle ϕ_{opt} pour un vrillage optimal en ce qui concerne la traînée ?

Rotor anticouple

Dans la suite de l'énoncé, on considère le cas des pales non vrillées. L'application du couple fourni par le moteur sur l'axe du rotor de l'hélicoptère produit en retour un couple opposé qui tend à faire tourner le corps de l'hélicoptère en sens inverse du rotor. Pour contrer cet effet, plusieurs techniques existent, la plus courante étant d'utiliser un second rotor monté dans un plan vertical à l'extrémité de la queue de l'appareil et dont la portance est cette fois dans un plan horizontal (Fig. 6). On se place toujours dans le cas du vol stationnaire.

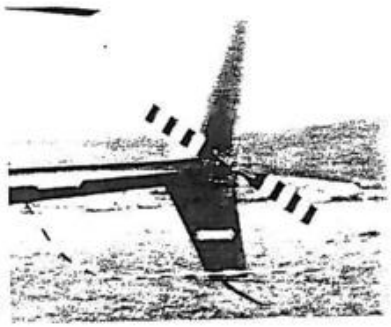


Figure 6

Rotor anticouple d'un hélicoptère Robinson R44

I.18 Lors d'une augmentation de l'angle d'attaque des pales du rotor principal (action du pilote sur le pas collectif) d'un angle α à un angle $\alpha' = \alpha + \delta\alpha$ (où l'angle $\delta\alpha$ est petit) exprimer la variation δC du couple fourni par le moteur. On supposera ω constante lors de la variation.

L'axe du rotor de queue est situé à une distance d de l'axe du rotor principal, et est équipé de deux pales de longueur R_{ar}. La portance et la traînée de ce rotor sont données par les mêmes expressions que pour le rotor prin-

cipal. Comme pour ce dernier, la vitesse angulaire du rotor anticouple est constante au cours du vol et proportionnelle à celle du rotor principal selon $\omega_{ac} = \zeta\omega$. Seul change l'angle d'attaque des pales, commandé par le pilote grâce aux palonniers (pédales). On néglige toute interaction aérodynamique entre les deux rotors et entre les pales elles-mêmes. Les dimensions des pales du rotor anticouple sont : $R_{ac} = 80$ cm, $l_{ac} = 10$ cm, avec les mêmes notations que sur la figure 4.b. Le centre du rotor anticouple est situé à une distance horizontale $d_{ac} = 6$ m de l'axe du rotor principal (Fig. 4.a).

I.19 Donner la vitesse angulaire de rotation du rotor anticouple pour obtenir une vitesse d'écoulement de l'air $V_{air} = 0{,}6\ c$ en bout de pale. La calculer numériquement et en déduire la valeur du rapport de vitesses angulaires ζ.

I.20 Pour une variation d'angle d'incidence $\delta\alpha$ du rotor principal, calculer la variation correspondante $\delta\alpha_{ac}$ de l'angle d'incidence des pales du rotor anticouple pour conserver la direction initiale du corps de l'appareil.

I.21 Est-il nécessaire de modifier l'angle d'incidence des pales du rotor anticouple lors d'une accélération horizontale de l'appareil ?

Conseils méthodologiques. Ce problème étudie quelques considérations sur le vol des hélicoptères. Seules des notions de mécanique de deuxième année sont utiles pour le résoudre (voir les chapitres 1 et 2).

I.1 Un point à la distance r d'un axe en rotation à la vitesse angulaire ω possède la vitesse $\vec{V} = -r\omega\vec{x}_r$. Inversement, si on se place dans le référentiel où la pale est immobile, la vitesse de l'air au point considéré est opposée $\vec{V}_{air} = r\omega\vec{x}_r$.

I.2 On utilise la forme de la portance donnée par l'énoncé :

$$\boxed{dF_z = \frac{1}{2}\rho l\,dr\,C_z(\alpha)r^2\omega^2}$$

De même, pour la traînée, $\boxed{dF_x = \frac{1}{2}\rho l\,dr\,C_x(\alpha)r^2\omega^2}$.

I.3 On évalue les résultantes :

$$F_z = \int_0^R \frac{1}{2}\rho l\,dr\,C_z(\alpha)r^2\omega^2 = \frac{1}{2}\rho l C_z(\alpha)\frac{R^3}{3}\omega^2$$

$$F_x = \int_0^R \frac{1}{2}\rho l\,dr\,C_x(\alpha)r^2\omega^2 = \frac{1}{2}\rho l C_x(\alpha)\frac{R^3}{3}\omega^2$$

Pour le moment, on évalue tout d'abord la contribution infinitésimale de la portion entre r et dr (Fig. 7)

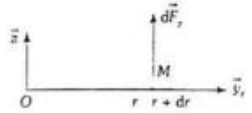


Figure 7

$$d\vec{\Gamma}_{O,portance} = \overrightarrow{OM} \wedge d\vec{F}_z = r\vec{y}_r \wedge \frac{1}{2}\rho l\,dr\,C_z(\alpha)r^2\omega^2\vec{z} = \frac{1}{2}\rho l\,dr\,C_z(\alpha)r^3\omega^2\vec{x}_r$$

Ainsi, $\boxed{\vec{\Gamma}_{O,portance} = \int_0^R \frac{1}{2}\rho l\,dr\,C_z(\alpha)r^3\omega^2\vec{x}_r = \frac{1}{2}\rho l C_z(\alpha)\frac{R^4}{4}\omega^2\vec{x}_r}$

Erreur à éviter

La formulation de l'énoncé V_{air} n'est pas très claire. Plus précisément, il s'agit de la vitesse de l'air par rapport à la pale, soit l'opposé de la vitesse d'un point de la pale (dans le référentiel terrestre).

Remarque

Les coefficients de portance et de traînée sont supposés uniformes le long de l'aile (on néglige donc les effets de bord).

Remarque

$\vec{F}_z = F_z\vec{z}$ et $\vec{F}_x = F_x\vec{x}_r$.

Erreur à éviter

Ce découpage est **obligatoire** vu le caractère inhomogène de la force.

Erreur à éviter

Il s'agit de bien projeter chaque vecteur.

© Lavoisier - La photocopie non autorisée est un délit

e même, $d\vec{\Gamma}_{O,traînée} = \overrightarrow{OM} \wedge d\vec{F}_x = r\vec{y}_r \wedge \frac{1}{2}\rho l\,dr\,C_x(\alpha)r^2\omega^2\vec{x}_r = -\frac{1}{2}\rho l\,dr\,C_x(\alpha)r^3\omega^2\vec{z}$

$\boxed{\vec{\Gamma}_{O,traînée} = -\int_0^R \frac{1}{2}\rho l\,dr\,C_x(\alpha)r^3\omega^2\vec{z} = -\frac{1}{2}\rho l C_x(\alpha)\frac{R^4}{4}\omega^2\vec{z}}$.

a traînée s'oppose évidemment au mouvement de rotation de la pale, ce qui explique le signe moins de l'expression précédente.

4 On cherche à montrer que les éléments de réduction du torseur de portance sont les mêmes que ceux correspondant une force unique $\vec{F}_z$ appliquée en un point M_0. La résultante est évidemment identique dans les deux cas (et vaut $\vec{F}_z$). Le moment en O de cette force unique appliquée au point M_0 est, en prenant $\overrightarrow{OM_0} = R_g\vec{y}_r$,

$$\vec{\Gamma}_O = \overrightarrow{OM_0} \wedge \vec{F}_z = R_g\vec{y}_r \wedge \frac{1}{2}\rho l C_z(\alpha)\frac{R^3}{3}\omega^2\vec{z} = \frac{1}{2}\rho l C_z(\alpha)R_g\frac{R^3}{3}\omega^2\vec{x}_r$$

Ainsi, en identifiant avec l'expression donnée à la question 3 de $\vec{\Gamma}_{O,portance}$, on obtient $R_g/3 = R/4$, soit $\boxed{R_g = \frac{3}{4}R}$. Tout se passe comme si une force unique $\vec{F}_z$ s'exerçait au point situé à la distance $R_g = 3R/4$ de l'axe de rotation.

On procède rigoureusement de la même manière pour la traînée, avec un résultat similaire.

5 Les deux moments liés aux portances exercées sur les deux pales se compensent (Fig. 8).

En revanche, les moments de traînée s'ajoutent, et

$$\boxed{\vec{C} = -2\frac{1}{2}\rho l C_x(\alpha)\frac{R^4}{4}\omega^2\vec{z} = -\rho l C_x(\alpha)\frac{R^4}{4}\omega^2\vec{z}}$$

6 Au minimum, $F = 2F_z$ doit compenser le poids Mg. Ainsi,

$$\rho l C_z(\alpha)\frac{R^3}{3}\omega^2 \geq Mg$$

La puissance fournie par le rotor aux pales s'oppose exactement à la puissance de traînée en vol stationnaire, soit

$$\mathcal{P} = |C|\,\omega = \rho l C_x(\alpha)\frac{R^4}{4}\omega^3 = F\frac{C_x(\alpha)}{C_z(\alpha)}\frac{3R}{4}\omega$$

Ainsi, $\boxed{\mathcal{P}_0 = Mg\frac{C_x(\alpha)}{C_z(\alpha)}\frac{3R}{4}\omega}$.

7 On supposera dans cette question que l'angle α est inférieur à 15° (ce sont les conditions usuelles d'utilisation, et au-delà, on ne connaît pas la loi de variation de C_x).

D'après la relation précédente $\mathcal{P} = |C|\,\omega = \rho l C_x(\alpha)\frac{R^4}{4}\omega^3$.

$\mathcal{P}$ reste constante alors que l'angle d'incidence α augmente, on déduit que la vitesse de rotation ω diminue (car alors C_x augmente). De plus, le couple de traînée $C = \mathcal{P}/\omega$ augmente (en norme).

Pour ce qui concerne la portance $F = \rho l C_z(\alpha)\frac{R^3}{3}\omega^2$, comme la vitesse angulaire diminue alors que le coefficient de portance $C_z(\alpha)$ augmente, on ne peut pas conclure simplement quant à son sens de variation.

8 Clairement, $\boxed{R\omega_{max} = 0{,}6c}$.

Numériquement, $\omega_{max} = 40{,}8\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1} = 6{,}5\ \text{tours}\cdot\text{s}^{-1}$.

9 On effectue donc l'application numérique $\mathcal{P} = |C|\,\omega = \rho l C_x(0)\frac{R^4}{4}\omega^3$, soit $\mathcal{P} = 54\ \text{kW} = 73\ \text{CV}$, comparable à la puissance d'un moteur de voiture en mouvement.

Remarque

La force de portance est non uniforme, et de plus en plus intense au fur et à mesure que la distance à l'axe de rotation augmente. Cela explique pourquoi $R_g > R/2$.

Remarque

Les vecteurs $\vec{x}_r$ correspondant aux deux pales sont opposés.

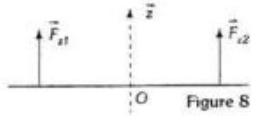


Figure 8

Remarque

On applique pour cela le théorème du moment cinétique scalaire au système rotor-pales. La dérivée du moment cinétique est nulle (régime stationnaire) et les moments non nuls sont exercés par le moteur ainsi que le couple de traînée. Les couples moteur et de traînée sont donc opposés, ainsi que leurs puissances.

I.10 L'hélicoptère quitte le sol quand $F = Mg$, soit $\boxed{\rho l C_z(\alpha)\frac{R^3}{3}\omega^2 = Mg}$.
On déduit $C_z(\alpha) = 0{,}54$
Comme $C_z = \kappa_0\alpha$, cela correspond à un angle $\boxed{\alpha = \frac{C_z}{\kappa_0} = 5{,}4^\circ}$.

I.11 Alors, similairement à la question 9. d'après la formule donnant la puissance, sachant que $C_x = \kappa_1 + \kappa_2 C_z^2 = 0{,}035$, $\mathcal{P} = 126\ \text{kW} = 170\ \text{CV}$.
Cette puissance nécessaire au décollage est supérieure à la puissance initiale avant inclinaison des pales : mais maintenir un hélicoptère prêt à décoller nécessite une part notable de sa consommation nominale. .

I.12 Le rapport puissance/masse nécessaire pour le décollage est donc de l'ordre de $0{,}13\ \text{CV}\cdot\text{kg}^{-1}$. Sachant que les moteurs cités par l'énoncé ont un rapport voisin de $2\ \text{CV}\cdot\text{kg}^{-1}$, cela signifie que la masse totale de l'hélicoptère divisée par la masse du moteur est au maximum de l'ordre de $2 / 0{,}13 \approx 15$. Avec des moteurs moins performants, la masse utile de l'hélicoptère devrait être inférieure. Si le moteur n'est pas assez performant, le décollage est même impossible.

I.13 Les valeurs extrêmales de l'angle d'incidence sont obtenues pour les extrémités de la pale
$\boxed{\alpha(0) = \alpha_1 \le \alpha_{max}}$ et $\boxed{\alpha(R) = \alpha_1 - \Phi \ge 0}$

I.14 On reprend le raisonnement des questions I.2 et I.3 :

$$dF_z^* = \frac{1}{2}\rho l\,dr\,C_z(\alpha(r))r^2\omega^2 = \frac{1}{2}\rho l\,dr\,C_z(\alpha_1 - \Phi\frac{r}{R})r^2\omega^2$$

$$dF_z^* = \frac{1}{2}\rho l\,dr\,\kappa_0(\alpha_1 - \Phi\frac{r}{R})r^2\omega^2$$

Pour obtenir la résultante, on intègre cette expression : $F_z^* = \int_0^R \frac{1}{2}\rho l\,dr\,\kappa_0(\alpha_1 - \Phi\frac{r}{R})r^2\omega^2 = \frac{1}{2}\rho l\kappa_0(\frac{\alpha_1}{3} - \frac{\Phi}{4})R^3\omega^2$

Pour le moment en O , on procède encore de manière infinitésimale :

$$d\vec{\Gamma}^*_{O,\text{portance}} = \overrightarrow{OM} \wedge d\vec{F}_z^* = r\vec{y}_r \wedge \frac{1}{2}\rho l\,dr\,C_z(\alpha)r^2\omega^2\vec{z} = \frac{1}{2}\rho l\,dr\,C_z(\alpha)r^3\omega^2\vec{x}_r$$

$$d\vec{\Gamma}^*_{O,\text{portance}} = \frac{1}{2}\rho l\,dr\,\kappa_0(\alpha_1 - \Phi\frac{r}{R})r^3\omega^2\vec{x}_r \text{ et } \boxed{\vec{\Gamma}^*_{O\,\text{portance}} = \int_0^R d\vec{\Gamma}^*_{O,\text{portance}} = \frac{1}{2}\rho l\kappa_0(\frac{\alpha_1}{4} - \frac{\Phi}{5})R^4\omega^2\vec{x}_r}$$

I.15 On veut vérifier la condition $F_z(\alpha_{eq}) = F_z^*(\alpha_1, \Phi)$.

soit d'après l'expression de la question I.3, $\frac{1}{2}\rho l C_z(\alpha_{eq})\frac{R^3}{3}\omega^2 = \frac{1}{2}\rho l\kappa_0(\frac{\alpha_1}{3} - \frac{\Phi}{4})R^3\omega^2$.

En exprimant $C_z(\alpha_{eq}) = \kappa_0\alpha_{eq}$, on aboutit à $\boxed{\alpha_{eq} = \alpha_1 - \frac{3}{4}\Phi}$

Comme $\alpha_1 \ge \Phi$.

$\boxed{\alpha_{eq} \ge \frac{\Phi}{4}}$

⇨ **Remarque**

Le résultat est évidemment compris entre α_1 et $\alpha_1 - \Phi$ valeurs extrêmales de l'inclinaison de la pale

I.16 C'est le même principe qu'à la question I.4 : R^* vérifie $R^*\vec{y}_r \wedge F_z\vec{z} = \vec{\Gamma}^*_{O,\text{portance}}$ d'où

$$R^*\frac{1}{2}\rho l\kappa_0(\frac{\alpha_1}{3} - \frac{\Phi}{4})R^3\omega^2 = \frac{1}{2}\rho l\kappa_0(\frac{\alpha_1}{4} - \frac{\Phi}{5})R^4\omega^2$$

Après simplification, on aboutit à $R^* = R\dfrac{\frac{\alpha_1}{4} - \frac{\Phi}{5}}{\frac{\alpha_1}{3} - \frac{\Phi}{4}} = \frac{3}{4}R\dfrac{\alpha_1 - \frac{4\Phi}{5}}{\alpha_1 - \frac{3\Phi}{4}}$

Alors, $\boxed{\frac{R^*}{R_0} = \frac{\alpha_{eq} - \frac{\Phi}{20}}{\alpha_{eq}} = 1 - \frac{1}{20}\frac{\Phi}{\alpha_{eq}} < 1}$

Le vrillage permet d'avoir un point d'application effectif de la portance plus proche de l'axe de rotation. On peut imaginer que les contraintes exercées sur les pales sont moindres

© Lavoisier - La photocopie non autorisée est un délit

17 On reprend là encore le raisonnement des questions I.3 et I.4 : $dF_x^* = \frac{1}{2}\rho l\,dr\,C_x(\alpha)r^2\omega^2$

chant que $C_x(\alpha) = \kappa_1 + \kappa_2\kappa_0^2\alpha^2 = \kappa_1 + \kappa_2\kappa_0^2\left(\alpha_1 - \Phi\frac{r}{R}\right)^2$.

insi. $dF_x^* = \frac{1}{2}\rho l\,dr\left(\kappa_1 + \kappa_2\kappa_0^2\left(\alpha_1 - \Phi\frac{r}{R}\right)^2\right)r^2\omega^2$.

n aboutit, en découpant chaque pale en morceaux élémentaires, à

$$C^* = -2\int_0^R r\,dF_x^* = -\rho l\omega^2\int_0^R dr\left(\kappa_1 + \kappa_2\kappa_0^2\left(\alpha_1 - \Phi\frac{r}{R}\right)^2\right)r^3$$

⇨ **Remarque**

On n oubliera pas le facteur 2 correspondant aux deux pales

it $C^* = -\rho l\omega^2 R^4\left(\frac{\kappa_1}{4} + \kappa_2\kappa_0^2(\frac{\alpha_1^2}{4} - \frac{2\alpha_1\Phi}{5} + \frac{\Phi^2}{6})\right)$

n rappelle l'expression $C(\alpha_{eq}) = -\rho l C_x(\alpha_{eq})\frac{R^4}{4}\omega^2$ avec $C_x(\alpha_{eq}) = \kappa_1 + \kappa_2\kappa_0^2\alpha_{eq}^2 = \kappa_1 + \kappa_2\kappa_0^2\left(\alpha_1 - \frac{3}{4}\Phi\right)^2$

nalement, $\dfrac{C^*}{C(\alpha_{eq})} = \dfrac{\frac{\kappa_1}{4} + \kappa_2\kappa_0^2\left(\frac{\alpha_1^2}{4} - \frac{2\alpha_1\Phi}{5} + \frac{\Phi^2}{6}\right)}{\frac{\kappa_1}{4} + \frac{\kappa_2\kappa_0^2}{4}\left(\alpha_1 - \frac{3}{4}\Phi\right)^2} = \dfrac{\kappa_1 + \kappa_2\kappa_0^2\left((\alpha_1 - \frac{3}{4}\Phi)^2 - \frac{\alpha_1\Phi}{10} + \frac{5}{48}\Phi^2\right)}{\kappa_1 + \kappa_2\kappa_0^2\left(\alpha_1 - \frac{3}{4}\Phi\right)^2}$

n posant $C_{xeq} = C_x(\alpha_{eq})$.

$$\frac{C^*}{C(\alpha_{eq})} = 1 + \frac{\kappa_2\kappa_0^2\left(\frac{5}{48}\Phi^2 - \frac{\alpha_1\Phi}{10}\right)}{C_{xeq}}) = 1 + \frac{\kappa_2\kappa_0^2\left(\frac{5}{48}\Phi^2 - \frac{(\alpha_{eq} + \frac{3}{4}\Phi)\Phi}{10}\right)}{C_{xeq}}$$

u final, $\boxed{\frac{C^*}{C(\alpha_{eq})} = 1 + \frac{\kappa_2\kappa_0^2\Phi}{C_{xeq}}\left(-\frac{\alpha_{eq}}{10} + \frac{7}{240}\Phi\right)}$, ce qui est exactement l'expression de l'énoncé

est intéressant que le couple de traînée soit le plus faible possible (en valeur absolue). On se place ici à portance fixée, 'est-à-dire à α_{eq} fixé. Il s'agit donc de minimiser C^* , ou de manière équivalente le rapport $\frac{C^*}{C(\alpha_{eq})}$.

u minimum de cette expression, sa dérivée (par rapport à Φ) s'annule :

$2\Phi_{opt} - \frac{24}{7}\alpha_{eq} = 0$ ce qui conduit à $\boxed{\Phi_{opt} = \frac{12}{7}\alpha_{eq}}$

Cette expression satisfait bien la condition de la question I.15.

⇨ **Remarque**

Ce résultat s'établit comme précédemment en appliquant le théorème du moment cinétique scalaire sur l'axe $\vec{z}$ au système constitué du rotor et des pales

.18 Si la vitesse angulaire de rotation du rotor est constante, le moteur délivre un ouple exactement opposé à celui de traînée :

$$C = \rho l C_x(\alpha)\frac{R^4}{4}\omega^2 = \rho l\left(\kappa_1 + \kappa_2\kappa_0^2\alpha^2\right)\frac{R^4}{4}\omega^2$$

Ainsi, $\boxed{\delta C = \rho l\kappa_2\kappa_0^2\alpha\frac{R^4}{2}\omega^2 d\alpha}$

Erreur à éviter

Ici, C se rapporte au couple délivré par le moteur et non au couple de traînée comme précédemment (question 5). Il existe donc une différence de signe

I.19 Comme à la question I.13, on aboutit à $\boxed{\omega_{ac} = 0.6\dfrac{c}{R_{ac}}}$

Numériquement, $\omega_{ac} \approx 255$ rad·s^{-1} ≈ 40 tours·s^{-1}

Comme on pouvait s'y attendre, le rotor anticouple possède une vitesse de rotation plus importante que le rotor principal.

On déduit $\zeta \approx 6.2$.

I.20 Rappelons que le rotor anticouple évite que l'hélicoptère se mette en rotation autour de l'axe Oz suite à l'action du moment de traînée. Pour que le corps de l'appareil conserve une direction constante, il est nécessaire que la somme des moments extérieurs projetés sur l'axe Oz soit nulle. Les moments intervenant sont celui de traînée exercé sur les pales du rotor principal et celui correspondant à la **portance** sur le rotor anticouple.

Évaluons ce dernier, en notant $O'y$ l'axe du rotor anticouple (Fig. 9)

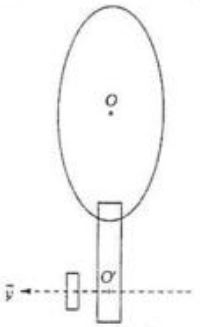


Figure 9

$$\mathcal{M}_{ac\ portance}(Oz) = \mathcal{M}_{ac\ portance}(O'z) + (\overrightarrow{O'O} \wedge \vec{F}_{ac\ portance}).\vec{u}_z$$

On en déduit :

$$\mathcal{M}_{ac}(Oz) = 0 + d_{ac}F_{ac\ portance} = d_{ac}\rho l_{ac}^2 C_z(\alpha_{ac})\frac{R_{ac}^3}{3}\omega_{ac}^2 = d_{ac}\rho l_{ac}^2\kappa_0\alpha_{ac}\frac{R_{ac}^3}{3}\omega_{ac}^2$$

Pour que l'appareil garde son orientation (par rapport à une rotation autour de l'axe Oz), la somme des moments extérieurs exercés sur l'hélicoptère et projetés sur Oz doit être nulle :

$$C_{portance} + \mathcal{M}_{ac}(Oz) = 0$$

En variation infinitésimale, cela donne

$$\delta C_{portance} + \delta\mathcal{M}_{ac}(Oz) = -\rho l\kappa_2\kappa_0^2\alpha\frac{R^4}{2}\omega^2\delta\alpha + \rho l_{ac}^2\kappa_0 d_{ac}\frac{R_{ac}^3}{3}\omega_{ac}^2\delta\alpha_{ac} = 0$$

soit $\delta\alpha_{ac} = \dfrac{3}{2}\dfrac{l}{l_{ac}}\kappa_0\kappa_2\dfrac{R^4}{R_{ac}^3 d_{ac}}\dfrac{\omega^2}{\omega_{ac}^2}\alpha\delta\alpha = \dfrac{3}{2}\dfrac{l}{l_{ac}}\kappa_0\kappa_2\dfrac{R}{d_{ac}}\zeta\alpha\delta\alpha$

Il resterait à vérifier que l'hélicoptère ne se met pas en rotation autour de l'axe $O'y$ suite au moment de traînée sur le rotor anticouple !

I.21 Jusqu'à maintenant, on a seulement étudié les vols stationnaires. La généralisation au cas d'une accélération horizontale semble assez hasardeuse.

Pour obtenir une accélération horizontale, l'hélicoptère doit un peu « piquer du nez » afin que la projection de la portance sur l'horizontale ne soit pas nulle. Une manière de réaliser cela est de changer l'angle d'incidence des pales au cours de leur rotation (pales légèrement plus inclinées lorsqu'elles passent derrière). Du coup, il semble nécessaire de modifier l'angle d'inclinaison des pales du rotor anticouple afin que l'hélicoptère ne tourne pas (autour de l'axe Oz).

Erreur à éviter

Les axes des deux rotors sont orthogonaux, le couple de traînée exercé sur le rotor anticouple n'a donc aucune composante selon l'axe Oz.

Technique de calcul

C'est la relation des torseurs

Remarque

Il serait nettement plus rapide d'écrire directement que le moment de la force est égal au bras de levier d_{ac} multiplié par le module de la force $F_{ac\ portance}$

Remarque

Remarquons qu'une fois le sens de rotation du rotor choisi, celui du rotor anticouple est imposé !

© L'Avisteir - La photocopie non autorisée est un délit

2. L'humidité dans l'air. — Centrale MP

La deuxième partie de l'épreuve portait sur le programme de chimie. La correction détaillée de la partie de physique (qui correspond à une grosse moitié du sujet) est ci-après.

La vapeur d'eau désigne la phase gazeuse de l'eau, composé chimique présent sur Terre sous forme solide, liquide ou gazeuse.

Dans tout le problème nous désignons par :

- « air sec », un mélange gazeux de dioxygène et de diazote ;
- « air humide », un mélange gazeux de dioxygène, de diazote et de vapeur d'eau ;
- « air humide saturant », un mélange gazeux de dioxygène, de diazote et de vapeur d'eau en équilibre avec de l'eau liquide.

L'air, sec ou humide, en dehors des conditions de saturation, se comporte comme un mélange idéal de gaz parfaits. Chacun des constituants y est décrit par sa pression partielle p ou sa fraction massique x (ou encore sa fraction molaire w).

Les conditions normales de pression correspondent à $P_{atm} \approx p^\circ = 1$ bar. On rappelle qu'une température de 0 °C équivaut à 273.16 K.

Si l'on fait subir des transformations thermodynamiques à une masse d'air, en évitant de provoquer un quelconque phénomène de condensation, les fractions molaires des gaz restent constantes. Dans ce problème, on admet que seule l'eau est susceptible de se condenser. En conditions saturantes, on admet que la pression partielle en eau est uniquement fonction de la température de l'air. On la note alors $p^{sat}_{H_2O}(T)$.

On appelle température de rosée, la température à laquelle il faut refroidir, à pression constante, une masse d'air humide pour atteindre la saturation, c'est-à-dire l'apparition de la première goutte d'eau liquide.

On appelle pression de vapeur saturante à la température T, notée $p^{sat}_{H_2O}(T)$, la valeur maximale que peut atteindre la pression partielle de vapeur d'eau au sein d'un air humide.

On appelle humidité absolue, la masse de vapeur d'eau présente dans un kilogramme d'air humide.

On appelle humidité relative à la température T, le rapport, noté HR et exprimé en %, entre la pression partielle de vapeur d'eau et la pression de vapeur saturante : $HR(T) = 100 \cdot p_{H_2O}/p^{sat}_{H_2O}(T)$.

Dans ce problème nous allons étudier quelques dispositifs permettant la mesure de l'humidité relative de l'atmosphère.

I.A – PRESSION DE VAPEUR SATURANTE DE L'EAU

L'équilibre physique $H_2O_{liq} \rightleftharpoons H_2O_{vap}$ peut être vu comme un équilibre chimique de constante d'équilibre $K^0(T)$.

I.A.1) Donner l'expression de cette constante $K^0(T)$ en fonction des activités des deux constituants physico-chimiques. Que vaut $a^{liq}_{H_2O}$, activité de l'eau liquide ? Quelle est l'expression de $a^{vap}_{H_2O}$, activité de l'eau dans la phase vapeur, en fonction de la pression de vapeur d'eau $p^{sat}_{H_2O}(T)$ et de la pression standard p^0 ?

I.A.2) Rappeler l'expression de $d\ln K^0(T)/dT$ en fonction de l'enthalpie molaire standard de vaporisation $\Delta_{vap}H^0_{H_2O}(T)$, de la constante des gaz parfaits R, ($R = 8.31$ J/mol/K) et de la température absolue T.

I.A.3) Dans le domaine de température étudié dans ce problème, $\Delta_{vap}H^0_{H_2O}(T)$ peut être approché par l'expression : $\Delta_{vap}H^0_{H_2O}(T) = R(a - bT)$ où a et b sont des constantes positives.

Montrer que l'expression $p^{sat}_{H_2O}(T) = p_{ref} \cdot (u/T)^\eta \exp(-\upsilon/T)$ est compatible avec le modèle proposé et exprimer les paramètres υ et η en fonction des données.

On donne $p_{ref} = 1$ Pa.

Tracer l'allure de $p^{sat}_{H_2O}(T)$ pour $T \leq 600$ K avec $u = 50\,292$ K, $\eta = 6.2896$ et $\upsilon = 7\,205.76$ K.

Quelle est la valeur de $p^{sat}_{H_2O}(T)$ à la température de 100 °C ? Commenter.

Quelle est la valeur de $p^{sat}_{H_2O}(T)$ à la température ambiante de 20 °C ?

I.B – ISOTHERMES DE L'EAU, DIAGRAMME DE CLAPEYRON

Le diagramme ci-contre (Fig. 10) est le diagramme d'état de l'eau en représentation de Clapeyron (pression, volume massique).

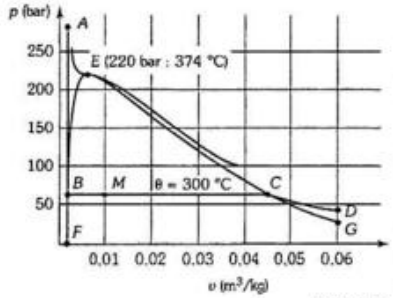


Figure 10

I.B.1) Est-il possible d'obtenir de l'eau liquide à une température supérieure à 100 °C ? Si oui, comment procéder ?

I.B.2) Le long de l'isotherme θ = 300 °C, entre les points figuratifs *A* et *B* dans quel état physique se trouve l'eau ? Même question entre les points *C* et *D*, et finalement entre les points *B* et *C*. Identifier sur le diagramme les courbes de rosée et d'ébullition ainsi que le point critique.

I.B.3) Considérons un système de masse m_{H_2O} dont le point figuratif est le point *M*.

Montrer qu'il est possible d'exprimer les fractions massiques d'eau sous forme liquide $\left(x_{liq} = m^{liq}_{H_2O}/m_{H_2O}\right)$ et sous forme vapeur $\left(x_{vap} = m^{vap}_{H_2O}/m_{H_2O}\right)$ en fonction des longueurs des segments *BM*, *MC* et *BC*. Pour un kilogramme d'eau dans un état dont le point figuratif est le point *M*, déterminer la masse et le volume de chacune des deux phases. Même question pour un système dont le point figuratif est le point *B*, puis le point *C*.

I.C – MESURE DU TAUX D'HUMIDITÉ DANS L'AIR

I.C.1) *Dispositif à condensation*

L'air dont on souhaite mesurer l'humidité relative est contraint à traverser une tuyère calorifugée (Fig. 11). Au col de celle-ci est disposé un petit miroir. On peut mesurer sa température T_{mir} et détecter la présence ou non de buée sur sa surface par l'intermédiaire d'un dispositif optique. L'air aspiré à travers la turbine subit une détente supposée adiabatique réversible. Un système régule la vitesse du moteur, afin qu'à chaque instant, la vapeur d'eau au niveau du miroir soit juste saturante. On néglige la quantité d'eau condensée sur le miroir, de sorte que le taux d'humidité reste constant lors de l'écoulement. On pose pour l'air en écoulement $\gamma = C_p/C_v$ et on considère cette grandeur comme constante dans le domaine d'étude, égale à 1,4.

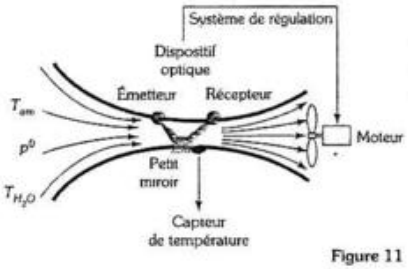


Figure 11

Le système thermodynamique étudié est le mélange de gaz contenu dans le petit volume V_{atm} (Fig. 12).

On suppose les grandeurs thermodynamiques définies et uniformes au sein de ce système.

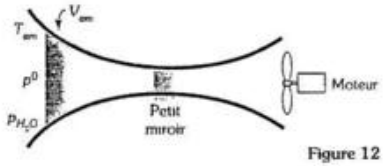


Figure 12

a) Compte tenu de la nature de la transformation, quelle est la relation entre la température et la pression du système à l'entrée de la tuyère (T_{atm}, p_{atm}) et ces mêmes grandeurs au niveau du miroir (T_{mir}, p_{mir}) ?

b) Lorsque le dispositif optique détecte une baisse notable de réflectivité du miroir, on admet que celui-ci est recouvert de buée. Quelle est, dans ce cas, l'expression littérale de la pression partielle en vapeur d'eau du système au niveau du petit miroir ?

c) À partir de la température T_{mir} mesurée par le capteur situé au niveau du miroir, de l'expression de la pression totale du mélange d'air au niveau du miroir P_{mir} et de l'expression de la pression de vapeur saturante de l'eau établie dans la partie I.A, établir l'expression de l'humidité relative du mélange à l'entrée du dispositif, en fonction des variables T_{mir} et T_{atm}.

d) *Application numérique* : la température relevée au niveau du miroir vaut 10 °C. Calculer alors l'humidité relative de l'air lorsque T_{atm} = 20 °C.

I.C.2) *Capteur capacitif cylindrique*

Un diagramme, établi par Mollier, permet de relier certaines grandeurs physiques relatives à l'humidité (Fig. 13).

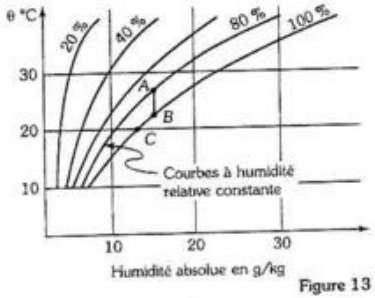


Figure 13

a) Soit un volume d'air dans un état initial représenté par le point *A* (27 °C et humidité relative de 80 %). On réalise un refroidissement isobare jusqu'à 20 °C (point *C*) en passant par le point *B*. Que se passe-t-il au point *B* ? Entre les points *A* et *B*, l'humidité absolue a-t-elle varié ? L'humidité relative a-t-elle varié ? Mêmes questions entre les points *B* et *C*.

b) Le capteur étudié dans cette partie est constitué de deux cylindres métalliques de rayons respectifs R_1 et R_2 et d'épaisseur *e* très faible (Fig. 14). Entre les deux cylindres conducteurs se trouve un matériau isolant et poreux, appelé diélectrique, de permittivité $\varepsilon \equiv \varepsilon_0$ lorsqu'il est placé dans l'air sec. Lorsque le capteur est en présence d'air humide, le diélectrique absorbe les molécules d'eau contenues dans l'air ambiant jusqu'à l'établissement d'un état d'équilibre. À température donnée, la permittivité électrique dépend donc du taux d'humidité de l'air (nous la noterons $\varepsilon = \varepsilon(HR)$). D'un point de vue électrique, le diélectrique se comporte comme le vide à condition de remplacer ε_0 par $\varepsilon = \varepsilon(HR)$ dans toutes les équations. De plus, les effets de bords sont négligés, c'est-à-dire que la longueur des cylindres est supposée grande devant les autres dimensions.

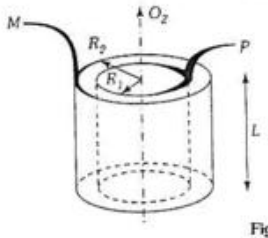


Figure 14

Établir l'expression du champ électrique dans l'espace entre les armatures lorsqu'elles sont soumises à une différence de potentiel $U = V_P - V_M$. On notera *Q* la charge portée par l'armature centrale.

c) Établir l'expression de la capacité du condensateur formé par les deux cylindres.

d) On place ce capteur dans le mélange d'air humide étudié en début de paragraphe et on refroidit à nouveau le mélange de 27 °C à 20 °C en suivant à nouveau les étapes $A \to B \to C$ puis on revient à l'état initial en suivant les étapes $C \to B \to A$. On relève les variations de capacité données par le capteur au cours de ces transformations (Fig. 15). La réponse en trait gras correspond à la réponse réelle du capteur et celle en trait fin correspond à la réponse idéale attendue.

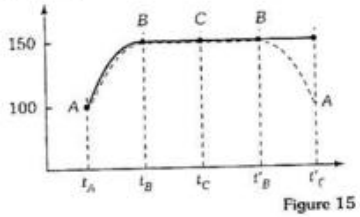


Figure 15

Que se passe-t-il à l'intérieur du diélectrique à partir du point *B* ? Que faudrait-il faire pour éviter ce problème ?

e) En fait, il est possible de faire circuler un courant électrique dans l'armature interne du capteur. Les connexions sont telles que le vecteur densité volumique de courant de charges électriques est uniforme dans cette électrode et orienté suivant $\vec{e}_z$. Quel est l'intérêt de faire circuler un courant dans cette électrode ?

f) La résistance électrique d'une feuille métallique de longueur *l*, de section droite *s* et de résistivité ρ est donnée par la relation $R = \rho\, l/s$.

© Ladrière - La photocopie non autorisée est un délit

Établir l'expression de la résistance de l'armature interne (on rappelle que l'épaisseur e est très faible devant les autres dimensions du capteur).

Application numérique : $\rho = 10^{-6}\ \Omega \cdot m$, $L = 10$ cm, $R_1 = 1$ mm et $e = 1\ \mu m$.

g) En supposant que toute la puissance dissipée par effet Joule dans l'électrode centrale serve à la vaporisation de l'eau liquide, déterminer le temps pendant lequel on doit faire circuler un courant constant de 100 mA dans l'armature centrale pour vaporiser totalement une gouttelette d'eau sphérique de rayon $r = 0{,}5$ mm. On donne : $\Delta_{vap}H^0_{H_2O}(20\ °C) = 2\,474$ kJ/kg et $\rho_{H_2O} = 1\,000$ kg/m³.

h) À partir de quelle température doit-on faire circuler un courant dans l'électrode centrale ?

Afin de suivre l'évolution de la température du mélange air-vapeur d'eau, on exploite les variations de résistance de l'alliage constituant l'armature externe en fonction de la température.

Les relevés effectués en laboratoire ont conduit aux résultats de la figure 16.

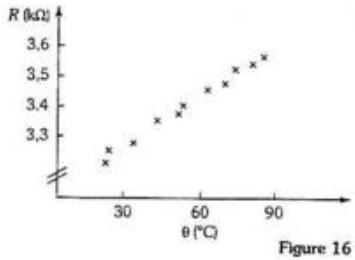


Figure 16

i) Proposer, dans le domaine de température étudié, une loi numérique approchée $R(\theta)$ sous la forme $R(\theta) = R_0(1 + \alpha\theta)$.

I.C.3) *Mesure de la température*

L'électrode servant de capteur de température est insérée dans le montage ci-après figure 17.

Le dernier module est un amplificateur de différence tel que $U_1 = K(u_1 - u_2)$, expression dans laquelle u_1 et u_2 désignent les tensions d'entrée du module.

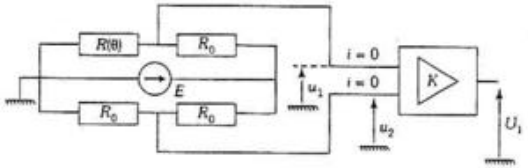


Figure 17

a) Exprimer la tension U_1 en fonction de la température et des paramètres du montage. Quel est l'inconvénient majeur de ce montage ?

b) Pour compenser ce défaut, on utilise le montage complémentaire représenté figure 18 où ⊗ représente un multiplieur et Σ un sommateur. Un multiplieur est un composant dont la tension de sortie v est proportionnelle au produit des tensions d'entrée, $v = k(e_1 \times e_2)$.

Un sommateur est un montage dont la tension de sortie v_s est égale à la somme des tensions d'entrée, $v_s = (e_1 + e_2)$. Exprimer la tension de sortie U_2 en fonction de la température et des paramètres du montage. Quelle valeur doit-on donner au produit KkE pour pallier le défaut du premier montage ?

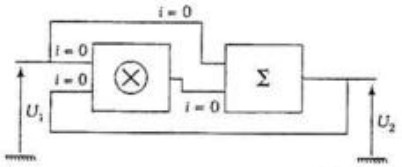


Figure 18

I.C.4) *Mesure de la capacité C(HR)*

a) Afin de mesurer la capacité $C(HR)$ on réalise le montage ci-après figure 19. On se place en régime sinusoïdal forcé. Quelle est l'expression de $U_{C(HR)}$, amplitude de la tension aux bornes de la capacité $C(HR)$, en fonction de R', L, $C(HR)$ et E_0 ? Exprimer cette tension en fonction du facteur de qualité Q, de la pulsation propre du montage ω_0 et de la tension E_0. À quelle condition sur Q cette tension présente-t-elle un maximum ?

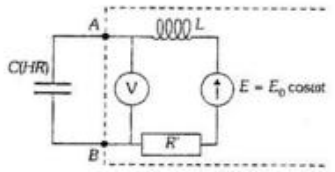


Figure 19

Quelle est l'expression de la pulsation ω_{max} correspondant à ce maximum en fonction de ω_0 et Q ? Exprimer l'écart relatif $|\omega_{max} - \omega_0| / \omega_0$ en fonction de Q. À l'aide d'un générateur de tension alternatif de fréquence variable et d'un voltmètre, on recherche la fréquence pour laquelle la tension mesurée est maximale. Afin d'évaluer l'ordre de grandeur du facteur de qualité, on pourra, dans cette question utiliser les valeurs numériques suivantes : $R' = 10\ \Omega$, $L = 100$ mH, $C(HR) = 100$ pF. Évaluer l'écart relatif $|\omega_{max} - \omega_0| / \omega_0$ dans ce cas.

Peut-on confondre ω_0 et ω_{max} ?

b) Afin de disposer le capteur à l'extérieur d'un bâtiment et le dispositif de mesure à l'intérieur, on utilise un câble coaxial de longueur 5 m (Fig. 20). Entre les points A et B, on connecte le câble et le capteur. D'un point de vue électrique, le câble se comporte comme un condensateur de capacité $C_{câble} = 100$ pF, de plus il est sensible aux variations d'humidité de l'air ambiant.

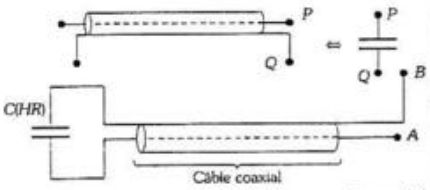


Figure 20

Quel est le montage équivalent de ce système ? Quelle est la capacité mesurée par le système d'exploitation ? Quel est l'inconvénient majeur de ce montage ?

c) Afin de pallier cet inconvénient on réalise le dispositif de la figure 21.

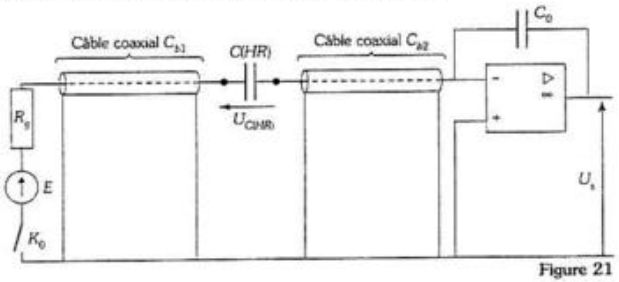


Figure 21

L'amplificateur opérationnel est supposé parfait $(i^+ = i^- = 0\ A)$ et fonctionnant en régime linéaire $(v^+ = v^-)$. Pour $t < 0$ le condensateur C_0 est déchargé et on ferme l'interrupteur à l'instant $t = 0$. Quel est le schéma électrique équivalent du montage proposé ? On notera C_{b1} et C_{b2} les capacités des câbles coaxiaux servant à la liaison.

Établir les expressions des variations temporelles des tensions U_{Cb1}, aux bornes du câble coaxial 1, et $U_{C(HR)}$ aux bornes du capteur. Quelles sont les valeurs limites de ces tensions au bout d'un temps très long ? Après un temps long ($t_\infty \gg r_g(C_{b1} + C(HR))$), on mesure la tension de sortie U_S.

Déterminer alors :

- la charge portée par le câble de capacité C_{b1} ;
- la charge portée par le capteur $C(HR)$;
- la charge portée par le câble de capacité C_{b2} ;
- la charge portée par la capacité C_0 ;
- la tension de sortie U_S mesurée.

Quel est l'avantage de ce circuit ? Quel est son inconvénient majeur ?

© Lavoisier – La photocopie non autorisée est un délit

Conseils méthodologiques. Ce problème mêlait quelques notions élémentaires de thermochimie dans les premières questions à des considérations plus physiques concernant les changements d'état (chapitre 15), l'électrostatique et en particulier les condensateurs (chapitre 5, savoir-faire 5), et l'électrocinétique (chapitre 4).

I.A Pression de vapeur saturante de l'eau

I.A.1) À l'équilibre chimique, la constante de réaction K° s'identifie au quotient réactionnel Q, qui s'exprime comme le produit des activités $Q = \prod_i a_i^{\nu_i}$:

$$\boxed{K^\circ(T) = Q = \frac{a_{H_2O}^{vap}}{a_{H_2O}^{liq}}}$$

L'eau liquide étant seule dans sa phase, son activité vaut 1 : $a_{H_2O}^{liq} = 1$.

De manière similaire, l'eau vapeur est assimilée à un gaz parfait et $a_{H_2O} = p_{H_2O}/p^\circ$. De plus, comme il y a équilibre liquide-vapeur, $p_{H_2O} = p_{H_2O}^{sat}$. Ainsi, $a_{H_2O} = p_{H_2O}^{sat}/p^\circ$.

I.A.2) D'après la relation de Van t Hoff, on obtient $\dfrac{d\ln K^\circ}{dT} = \dfrac{\Delta_{vap}H^\circ_{H_2O}}{RT^2}$

I.A.3) On utilise les résultats des deux dernières questions : $\dfrac{d\ln K^\circ}{dT} = \dfrac{d\ln \frac{p_{H_2O}^{sat}}{p^\circ}}{dT} = \dfrac{d}{dT}\left(\ln\frac{p_{rel.}}{p^\circ} + \eta\ln\frac{u}{T} - \frac{v}{T}\right) = -\frac{\eta}{T} + \frac{v}{T^2}$

La comparaison avec la relation de Van't Hoff donne $\boxed{v = a}$ et $\boxed{\eta = b}$

La courbe est tracée sur la Fig. 22.

À $T = 100$ °C, on obtient $p_{H_2O}^{sat} = 1{,}0\cdot10^5$ Pa. Ce résultat n'est pas surprenant. En effet, sous la pression atmosphérique $p_{atm} = 1.013\cdot10^5$ Pa, l'eau bout à 100 °C, ce qui signifie que la température d'équilibre liquide-vapeur pour l'eau est de 100 °C si $p = p_{atm}$. Inversement, si on fixe la température à 100 °C, la pression d'équilibre liquide-vapeur (c'est-à-dire la pression de vapeur saturante) est égale à la pression atmosphérique.

À $T = 20$ °C, on obtient $p_{H_2O}^{sat} = 2.4\cdot10^3$ Pa. On remarque que $p_{H_2O}^{sat}(T)$ augmente rapidement avec la température entre 20 °C et 100 °C.

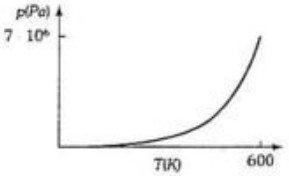


Figure 22

I.B Isothermes de l'eau, diagramme de Clapeyron

I.B.1) Il est possible d'obtenir de l'eau liquide à une température supérieure à 100 °C. Il suffit de comprimer de manière isotherme de l'eau initialement sous forme vapeur.

I.B.2) Entre A et B, la pression varie notablement alors que le volume massique est quasiment constant. On a donc une phase peu compressible, c'est la phase liquide.

Entre C et D, la pression diminue notablement alors que le volumique massique augmente : cela correspond à la phase vapeur (sèche).

La courbe BC correspond à la coexistence liquide-vapeur, il est bien connu qu'en cas de coexistence liquide-vapeur, les isothermes sont aussi des isobares (et réciproquement).

En suivant l'isotherme $ABCD$ de A vers B, la première bulle de vapeur apparaît en B (auparavant le système est entièrement en phase liquide). La frontière (FBE) correspond donc à la courbe d'ébullition. De manière identique, la courbe (ECG) correspond à la courbe de rosée. Le point E est alors le point critique.

I.B.3) Il s'agit du théorème des moments que nous allons redémontrer. On exprime le volume d'eau :

$$V = m_{H_2O}v_M = V_{liq} + V_{vap} = m_{H_2O}^{liq}v_B + m_{H_2O}^{vap}v_C = m_{H_2O}^{liq}v_B + (m_{H_2O} - m_{H_2O}^{liq})v_C$$

Erreur à éviter

Attention à ne pas mélanger les différentes expressions des activités suivant la nature des composants

Remarque

Précisons que la température doit être inférieure à la température critique

Remarque

Si la vapeur est assimilée à un gaz parfait, la courbe isotherme CD correspond à un fragment d'hyperbole $p = rT/v$

Erreur à éviter

v est un volume massique, alors que V est un volume

En effet, on rappelle qu'en B (C), seule la phase liquide (vapeur) existe. On en déduit $m_{H_2O}^{liq}(v_B - v_C) = m_{H_2O}(v_M - v_C)$

soit $\boxed{x_{liq} = \dfrac{v_C - v_M}{v_C - v_B}}$

On peut donc aisément vérifier qu'en B, $x_{liq} = 1$: la seule phase présente est la phase liquide. Ainsi, $m_{H_2O}^{liq} = 1$ kg et on lit $V_{liq} = V_B = 0.01/5 = 2\cdot10^{-3}$ m^3.

De manière similaire, seule la phase vapeur existe en C. Ainsi, $m_{H_2O}^{vap} = 1$ kg, et on lit $V_{vap} = V_C = 0.045$ m^3.

Au point M,

$$x_{liq} = \frac{MC}{BC} = \frac{0.045 - 0.01}{0.045 - 0.002} = 0{,}81$$

Alors, $m_{H_2O}^{liq} = 0.81\times1 = 0.81$ kg et $V_{H_2O}^{liq} = 0.81\times0.002 = 1.6\cdot10^{-3}$ m^3.

On déduit $m_{H_2O}^{vap} = 0.19$ kg et $V_{H_2O}^{vap} = 0.045\times0.19 = 8.5\cdot10^{-3}$ m^3.

I.C Mesure du taux d'humidité dans l'air

I.C.1) a) La transformation est adiabatique réversible, donc on peut appliquer la loi de Laplace $p^{1-\gamma}T^\gamma = cte$.

On déduit $\boxed{p_{atm}^{1-\gamma}T_{atm}^\gamma = p_{miroir}^{1-\gamma}T_{miroir}^\gamma}$

b) Par définition, au seuil d'apparition de l'eau liquide sur le miroir (en présence de vapeur d'eau), $\boxed{p_{H_2O}^{vap} = p_{H_2O}^{sat}(T_{miroir})}$

c) Par définition, $HR(T_{atm}) = 100\dfrac{p_{H_2O}(\text{entrée})}{p_{H_2O}^{sat}(T_{atm})}$

La relation déduite de la loi de Laplace au a) est toujours valide en remplaçant les pressions par les pressions partielles en eau (il y a proportionnalité entre la pression totale et la pression en eau). Ainsi,

$$p_{H_2O}(\text{entrée})^{1-\gamma}T_{atm}^\gamma = p_{H_2O}^{sat}(T_{miroir})^{1-\gamma}T_{miroir}^\gamma$$

On obtient donc

$$HR(T_{atm}) = 100\left(\frac{T_{miroir}}{T_{atm}}\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}\frac{p_{H_2O}^{sat}(T_{miroir})}{p_{H_2O}^{sat}(T_{atm})}$$

$$= 100\left(\frac{T_{miroir}}{T_{atm}}\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}\left(\frac{T_{atm}}{T_{miroir}}\right)^{\eta}\exp\left(-v\left(\frac{1}{T_{miroir}} - \frac{1}{T_{atm}}\right)\right)$$

d) Numériquement, on obtient 59 %.

I.C.2) a) En B, l'humidité relative atteint 100 %, ce qui signifie que de l'eau liquide apparaît, en équilibre avec l'eau vapeur.

Entre A et B, l'humidité absolue ne varie pas. En effet, le trajet est une verticale sur le diagramme de Mollier, ce qui signifie que l'abscisse (humidité absolue) est constante. Cela s'interprète par le fait que l'humidité relative vient d'atteindre en B la valeur 100 %. Ainsi, quasiment toute l'eau est restée sous la forme de vapeur.

Entre B et C, on constate à la lecture de la courbe que l'humidité absolue diminue. En effet, l'air reste saturé en eau. Mais, comme la température diminue, la quantité d'eau sous forme vapeur contenue dans l'air diminue.

b) Par invariance par translation le long de Oz et par invariance par rotation autour de ce même axe, les grandeurs d'intérêt telles que le potentiel électrique V et la norme du champ électrique $\|\vec{E}\|$ ne dépendent que de r (on utilise les coordonnées cylindriques). Comme

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V = -\frac{dV}{dr}\vec{u}_r$$

on déduit $\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$

Erreur à éviter

Pour appliquer cette loi, le système doit être un gaz parfait. On doit donc négliger la faible quantité de vapeur d'eau qui se liquéfie.

Remarque

On aurait aussi pu utiliser des plans de symétrie pour trouver la direction du champ électrique. Si M est un point quelconque, le plan contenant M et l'axe Oz, ainsi que celui contenant M et perpendiculaire à l'axe Oz sont des plans de symétrie des charges. Ainsi, le champ électrique est dirigé dans la direction commune à ces deux plans.

© Librairie – La photocopie non autorisée est un délit

On dispose alors de suffisamment de symétries pour appliquer le théorème de Gauss sur un cylindre d'axe Oz, de rayon r tel que $R_1 < r < R_2$ et de hauteur L (en pointillés sur la Fig. 2) :

$$\iint_{(S)} \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \iint_{(S)} E\,dS = E\iint_{(S)} dS = ES = \frac{Q}{\varepsilon}$$

Comme $S = 2\pi rL$, on déduit $\boxed{\vec{E} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon rL}\vec{u}_r}$

c) Il faut alors évaluer le potentiel électrique (à une constante près) : $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$ s'écrit ici : $E = \frac{Q}{2\pi\varepsilon rL} = -V'(r)$.

Ainsi, $V(r) = -\frac{Q}{2\pi\varepsilon L}\ln r + cte$

On déduit $U = V(R_1) - V(R_2) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon L}\ln\frac{R_2}{R_1}$.

Alors, la capacité est donnée par $Q = CU$, soit $\boxed{C = \frac{2\pi\varepsilon L}{\ln\frac{R_2}{R_1}}}$

d) Lors du retour de B vers A, la capacité conserve la valeur correspondant à un air saturé en eau au lieu de retrouver sa valeur initiale. On peut donc supposer que l'eau liquide ne quitte pas le diélectrique.

Il faudrait inclure par exemple un dispositif forçant l'écoulement de l'air au travers du condensateur (soufflerie) afin d'évacuer l'eau piégée. Il est aussi possible d'inclure un chauffage (voir question suivante).

e) Le courant circulant dans l'armature va chauffer le milieu par effet Joule. L'eau piégée dans le diélectrique va alors se vaporiser et quitter le dispositif.

f) Il faut identifier les données dans l'expression rappelée par l'énoncé : L est la longueur de la feuille, et la section droite est $2\pi R_1 \times e$ (surface grisée de la Fig. 24).

Au final, $\boxed{R = \frac{\rho L}{2\pi R_1 e}}$

Numériquement, $R = 15.9\ \Omega$

g) La puissance dissipée par effet Joule est $P = RI^2$, donc l'énergie servant à vaporiser l'eau pendant Δt est $P\Delta t = RI^2\Delta t$.

Vaporiser une masse m d'eau liquide à pression constante nécessite une énergie $m\Delta H^\circ_{vap}(H_2O) = \rho\frac{4}{3}\pi r^3\Delta H_{vap}(H_2O)$.

Au final, on doit égaler les deux quantités précédentes, d'où

$$\boxed{\Delta t = \frac{\rho\frac{4}{3}\pi r^3\Delta H_{vap}(H_2O)}{RI^2}}$$

Numériquement, $\Delta t = 8.1$ s. Le dispositif est donc efficace.

h) Il faut chauffer à partir du point B (ce qui correspond à une température de 22 °C) car entre B et A l'eau liquide doit avoir totalement disparu.

i) On trace la droite moyenne passant par les points expérimentaux.

L'ordonnée à l'origine vaut R_0 et on obtient $R_0 = 3.0\ k\Omega$. La pente p s'identifie à $R_0\alpha$. Or,

$$p = \frac{(3.55 - 3.25)\ 10^3}{90 - 30} = 5\ \Omega\cdot K^{-1}$$

On déduit $\alpha = 1.7\cdot 10^{-3} K^{-1}$

Erreur à éviter

Le produit scalaire $\vec{E}.\overrightarrow{dS}$ est différent de 0 seulement sur la surface latérale du cylindre.

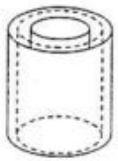


Figure 23

Remarque

On peut vérifier l'homogénéité : une capacité est bien homogène à ε_0 multipliée par une longueur.

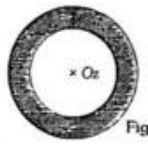


Figure 24

Erreur à éviter

Le courant circule dans la direction $\vec{u}_r$. La section droite est perpendiculaire à cette direction.

Remarque

Si on disposait des valeurs expérimentales, il faudrait mener une régression linéaire.

Erreur à éviter

Attention à ne pas oublier les unités.

© Lavoisier - La photocopie non autorisée est un délit

I.C.3) a) On applique un diviseur de tension sur la branche constituée des deux résistances R_0 et $R(\theta)$ (Fig. 25).

Ainsi, $u_1 = E\frac{R(\theta)}{R_0 + R(\theta)}$

De même, on montre $u_2 = E/2$.

Au final, $U_1 = K(u_1 - u_2) = \frac{KE}{2}\left(\frac{2R(\theta)}{R_0 + R(\theta)} - 1\right) = \frac{KE}{2}\frac{R(\theta) - R_0}{R_0 + R(\theta)} = \boxed{\frac{KE\alpha\theta}{2(2 + \alpha\theta)}}$

Le défaut majeur est la non-linéarité entre la température et la tension mesurée.

b) À la sortie du multiplieur, $v = kU_1U_2$ alors qu'à la sortie du sommateur, $U_2 = U_1 + v$. On combine ces deux résultats : $U_2 = U_1 + kU_1U_2$, soit $U_2(1 - kU_1) = U_1$. On aboutit à

$$U_2 = \frac{U_1}{1 - kU_1} = \frac{1}{\frac{1}{U_1} - k} = \frac{1}{\frac{2(2 + \alpha\theta)}{KE\alpha\theta} - k} = \frac{KE\alpha\theta}{2(2 + \alpha\theta) - kKE\alpha\theta}$$

Ainsi, si $kKE = 2$.

$$\boxed{U_2 = \frac{KE\alpha\theta}{4} = \frac{\alpha}{2k}\theta}$$

et la relation entre la température et la grandeur mesurée par le capteur est linéaire.

I.C.4) a) On utilise encore un simple diviseur de tension, en utilisant la notation complexe :

$$\underline{U}_{C(HR)} = \underline{E}\frac{\frac{1}{jC(HR)\omega}}{R' + jL\omega + \frac{1}{jC(HR)\omega}}$$

Pour obtenir les amplitudes, on doit considérer le module de l'expression précédente :

$$U_{C(HR)} = \left|\underline{U}_{C(HR)}\right| = E_0\frac{\frac{1}{C(HR)\omega}}{\sqrt{R'^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C(HR)\omega}\right)^2}}$$

On rappelle que la pulsation propre d'un circuit RLC série vérifie $LC\omega_0^2 = 1$ et le facteur de qualité $Q = L\omega_0 / R$, soit

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Ainsi, $U_{C(HR)} = E_0\frac{\frac{1}{R'C(HR)\omega}}{\sqrt{1 + \left(\frac{L\omega}{R'} - \frac{1}{R'C(HR)\omega}\right)^2}} = E_0\frac{\frac{Q\omega_0}{\omega}}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$

On regarde à quelle condition $U^2_{C(HR)}$ présente un maximum :

$$U^2_{C(HR)} = E_0^2\frac{\frac{Q^2\omega_0^2}{\omega^2}}{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2} = \frac{E_0^2}{\frac{\omega^2}{Q^2\omega_0^2} + \left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1\right)^2}$$

Cette dernière fonction est maximale si son dénominateur

$$f(\omega) = \frac{\omega^2}{Q^2\omega_0^2} + \left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1\right)^2$$

Erreur à éviter

Cela n'est possible que parce que ces deux résistances sont parcourues par le **même** courant. En effet, les courants entrant dans les bornes + et - de l'amplificateur différentiel sont nuls.

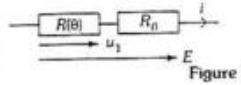


Figure 25

Erreur à éviter

Utiliser la notation complexe en régime sinusoïdal forcé doit être un réflexe.

Erreur à éviter

Ces expressions sont à connaître.

Technique de calcul

Cela permet d'éliminer la racine carrée.

est minimal. Or, l'existence d'un minimum est conditionnée par l'annulation de la dérivée

$$f'(\omega) = \frac{2\omega}{Q^2\omega_0^2} + 2\frac{2\omega}{\omega_0^2}\left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1\right) = \frac{2\omega}{\omega_0^2}\left(\frac{1}{Q^2} + 2\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 2\right)$$

Les solutions sont $\omega = 0$ et $\boxed{\omega_{max} = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}}$

La première solution n'est pas intéressante car on cherche un minimum à l'intérieur de l'intervalle des fréquences permises ($\omega \geq 0$).

La seconde solution n'existe que pour $\boxed{Q > \frac{1}{\sqrt{2}}}$

On exprime alors $\frac{|\omega_{max} - \omega_0|}{\omega_0} = 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$

Numériquement, $Q = 3.1 \cdot 10^3$ et $\frac{|\omega_{max} - \omega_0|}{\omega_0} = 2.5 \cdot 10^{-8}$. Il est alors clair que ω_0 et ω_{max} sont indistinguables.

b) Le câble coaxial et le capteur correspondent au montage indiqué sur la Fig. 26. En effet, il suffit simplement de remplacer le câble par son schéma équivalent.

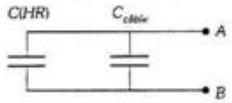


Figure 26

Ainsi, l'étude précédente est toujours valable, à condition de remplacer la capacité $C(HR)$ par la capacité équivalente à celle des deux capacités en parallèle :

$$C_{\text{||}} = C(HR) + C_{câble}$$

Cependant, comme $C_{câble}$ dépend du taux d'humidité, on ne peut déduire d'une telle mesure $C(HR)$ et donc le taux d'humidité.

c) À nouveau, on remplace les câbles coaxiaux par leur schéma équivalent : un condensateur placé entre leur centre et leur périphérie, reliée ici à la masse. On obtient le schéma de la Fig. 27.

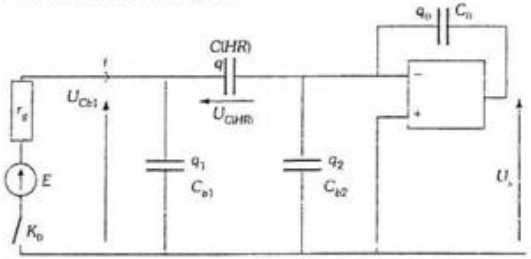


Figure 27

L'amplificateur opérationnel fonctionne en régime linéaire, donc $V_+ = V_- = 0$. On en déduit alors immédiatement que la tension aux bornes de C_{b2} est nulle. Ainsi, la charge portée par ce condensateur est nulle et ainsi que l'intensité qui le parcourt. La quantité C_{b2} n'a donc aucune influence sur le système (on pourrait supprimer ce condensateur équivalent sans problème).

Pour écrire les équations régissant le montage, on va successivement utiliser les lois des mailles et des nœuds.

Technique de calcul

En toute rigueur, il resterait à montrer qu'à cette annulation de la dérivée correspond bien un minimum de f. Cela se montre sans difficulté en étudiant les limites de f au bord de l'intervalle d'étude $\omega \in]0, +\infty[$.

Remarque

Dans la fin du problème on s'intéresse aux perturbations créées par le câble alimentant le condensateur de mesure.

Remarque

Les capacités en parallèle s'ajoutent.

Remarque

Les deux capacités sont du même ordre de grandeur et on peut donc supposer qu'il en est de même pour leurs variations liées au taux d'humidité.

Remarque

$i = q$

© Lavoisier - La photocopie non autorisée est un délit

Par la loi des mailles, on établit aisément (une fois K_0 fermé) :

$$E - r_g i = U_{Cb1} = \frac{q_1}{C_{b1}} = U_{C(HR)} = \frac{q}{C(HR)}$$

On en déduit $r_g i = E - \frac{q}{C(HR)}$ et $q_1 = \frac{C_{b1}}{C(HR)}q$

La loi des nœuds donne (Fig. 28) :

$$i = i_1 + (i - i_1) = \dot{q}_1 + \dot{q}$$

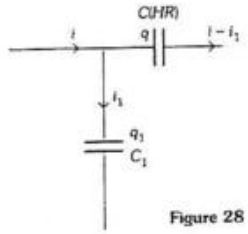


Figure 28

On remplace dans cette dernière expression les résultats de la loi des mailles, et

$$\frac{1}{r_g}\left(E - \frac{q}{C(HR)}\right) = \dot{q}\left(1 + \frac{C_{b1}}{C(HR)}\right)$$

soit $r_g C(HR)\left(1 + \frac{C_{b1}}{C(HR)}\right)\dot{q} + q = C(HR)E$

On pose alors $\tau = r_g(C_{b1} + C(HR))$, et $\tau\dot{q} + q = C(HR)E$. On résout

$$q(t) = C(HR)E + A\exp(-\frac{t}{\tau})$$

Si le condensateur-capteur est initialement déchargé, $q(0) = 0$ (une éventuelle charge initiale n'aura aucune influence sur les valeurs finales) et

$$q(t) = C(HR)E(1 - \exp(-\frac{t}{\tau}))$$

On obtient donc

$$\boxed{U_{Cb1} = U_{C(HR)} = \frac{q}{C(HR)} = E\left(1 - \exp(-\frac{t}{\tau})\right)}$$

Après un temps très long, U_{Cb1} et $U_{C(HR)}$ tendent vers E.

On déduit les charges finales des condensateurs : $C_{b1}E$ pour le premier câble coaxial et $C_{HR}E$ pour le condensateur-capteur. Comme on l'a expliqué plus haut, le deuxième câble coaxial reste non chargé.

On s'intéresse ensuite à la capacité C_0. Le courant qui la parcourt est le même que celui qui parcourt le condensateur-capteur (car aucun courant ne rentre dans la borne inverseuse et dans le condensateur C_{b2}). Ainsi, en notant q_0 la charge de l'armature de gauche du condensateur C_0,

$$i - i_1 = q = \dot{q}_0$$

On déduit $q_0(t) = q(t) + \text{cte}$. Comme initialement, les deux condensateurs sont déchargés, on montre que la constante est nulle. Ainsi, la charge finale de C_0 est la même que celle du capteur, c'est-à-dire $C_{HR}E$. Enfin,

$$U_s = -\frac{q_0}{C_0}$$

et la valeur finale de U_s est donc $-\frac{C_{HR}}{C_0}E$. Une mesure de U_s permet donc d'obtenir C_{HR} si les valeurs de E et C_0 sont connues.

Le montage permet de mesurer la capacité du condensateur-capteur en s'affranchissant des capacités parasites des câbles coaxiaux (qui sont sensibles à l'humidité de l'air ambiant). Par ailleurs, la longueur des câbles permet de placer le capteur à l'extérieur et le reste du montage à l'intérieur. Ainsi, C_0 n'est pas influencée par l'humidité relative à l'extérieur. En revanche, on peut s'interroger sur la compatibilité du dispositif de chauffage proposé précédemment avec le fonctionnement de ce montage.

Technique de calcul

La solution est la somme d'une solution particulière (ici constante) et de la solution homogène associée.

Remarque

Tout le calcul précédent n'est pas nécessaire pour obtenir ce résultat ! Après un temps long, les condensateurs sont équivalents à des coupe-circuit, et on aboutit au résultat voulu.

3. Quelques oscillations. — Mines MP

Dans tout ce problème, les vecteurs sont surmontés d'un chapeau $\hat{a}$ s'ils sont unitaires, d'une flèche $\vec{a}$ dans le cas contraire. Les nombres complexes sont soulignés : $\underline{z} \in \mathbb{C}$.

Lorsqu'une bille sphérique roule sur une piste de forme circulaire suspendue en un point, le couplage entre la bille et la piste engendre un mouvement spectaculaire, objet de ce problème.

Une sphère homogène, de centre C, de rayon r et de masse m, est mobile dans un plan vertical en restant en contact avec un rail PP', de masse M, que l'on modélise par une portion de cercle de centre O et de rayon R, dont l'axe de symétrie est vertical.

Le moment d'inertie de la sphère par rapport à un axe passant par C est $J = 2mr^2/5$.

Le référentiel fixe orthonormé direct $R_g = (O,\hat{i},\hat{j},\hat{k})$ où $\hat{i}$ est vertical dirigé vers le bas est supposé galiléen (Fig. 29). On pourra également utiliser les vecteurs mobiles polaires unitaires $\hat{r}$ et $\hat{\alpha}$ représentés sur la figure 29.

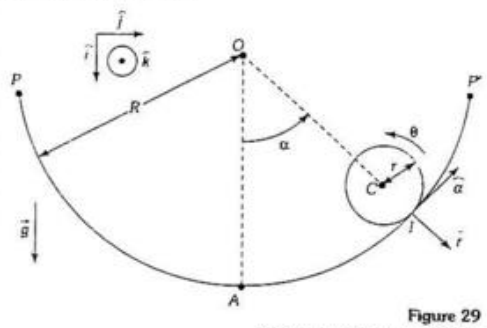


Figure 29
Sphère mobile sur un rail fixe

Le mouvement de la sphère est repéré par deux paramètres : l'angle α que fait $\overrightarrow{OC}$ avec $\hat{i}$ et l'angle de rotation θ autour de l'axe horizontal qui porte $\hat{k}$. À chaque instant t, on appelle I le point de contact de la sphère avec le rail. On note A le point du rail situé sur son axe de symétrie. L'accélération de la pesanteur est $\vec{g} = g\hat{i}$.

I. – Rail fixe

La sphère roule sans glisser sur le rail fixe. Initialement, elle est au repos et $\overrightarrow{OC}$ fait un angle α_0 avec $\hat{i}$. Le système comprend deux degrés de liberté cinématiques, α et θ.

1) Écrire la condition de roulement sans glissement de la sphère sur le rail sous la forme d'une relation linéaire liant r, R, $\theta = d\theta/dt$ et $\dot{\alpha} = d\alpha/dt$. Contrôler la pertinence de la relation obtenue, d'une part en comparant les signes respectifs de θ et de $\dot{\alpha}$, et d'autre part en analysant la situation lorsque $r = R$.

2) Déterminer l'expression de l'énergie mécanique totale E_i du système. En déduire l'équation différentielle vérifiée par la fonction $\alpha(t)$.

3) Déterminer la période T_{po} des petites oscillations.

On considère deux rails circulaires de même rayon R. Sur chaque rail, on place à l'instant initial une sphère de rayon r, de masse m en des points repérés par le même angle α_0 (situation déjà représentée sur la figure 29). Les sphères sont lâchées au même instant, avec une vitesse initiale nulle. Les deux rails sont de nature différente, de sorte que la première sphère roule sans glisser et que la seconde glisse sans rouler.

4) En utilisant des arguments énergétiques qualitatifs, déterminer quelle est la sphère qui arrive la première au point le plus bas A. Le résultat est-il modifié si les masses des sphères sont différentes ?

5) Établir une expression intégrale du temps τ mis par la sphère la plus rapide pour atteindre le point A. Comment peut-on, sans calcul supplémentaire, obtenir le temps τ' mis par la sphère la plus lente pour atteindre ce point ? Déterminer le rapport τ'/τ.

© Lavoisier – La photocopie non autorisée est un délit

II. – Rail suspendu

Les points P et P' sont attachés en O par des fils inextensibles de masse négligeable, ce qui permet au rail d'osciller autour de l'axe horizontal passant par O. La position du milieu A du rail est repérée par l'angle β représenté sur la figure 30. Le centre de masse G du rail se trouve à chaque instant sur la droite OA à une distance ℓ de O. On note $J' = MR^2$ le moment d'inertie du rail par rapport à son axe de rotation. On appelle respectivement N et T les composantes de la force de réaction du rail sur la sphère au point I selon $\hat{r}$ et $\hat{\alpha}$. La sphère roule sans glisser sur le rail, qui est maintenant en forme de quart de cercle, les grandeurs α et θ sont les mêmes que celles utilisées dans la partie I.

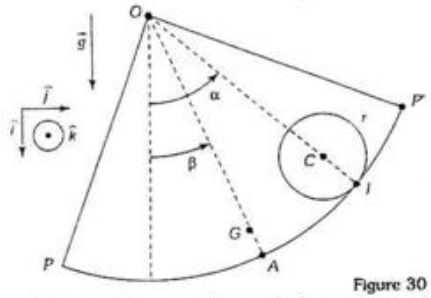


Figure 30
Sphère mobile sur un rail suspendu. Les angles α et β sont mesurés par rapport à la verticale et l'on note $\overline{OG} = \ell$

II.A. *Description du mouvement*

6) Écrire la condition de roulement sans glissement reliant $\dot{\theta}$, $\dot{\alpha}$ et $\dot{\beta} = d\beta/dt$.

7) Exprimer dans R_g le moment cinétique $\overrightarrow{\sigma_{1C}}$ de la sphère en C et en déduire l'expression du moment cinétique $\overrightarrow{\sigma_{1O}}$ de la sphère en O.

8) Exprimer dans R_g le moment cinétique $\overrightarrow{\sigma_{2O}}$ du rail en O.

9) Exprimer dans R_g l'énergie cinétique E_{CS} de la sphère, l'énergie cinétique E_{CR} du rail et enfin l'énergie cinétique E_{CT} de l'ensemble rail-sphère.

10) Appliquer le théorème du moment cinétique en O à l'ensemble rail-sphère et en déduire une équation différentielle liant les fonctions $\alpha(t)$ et $\beta(t)$.

11) Appliquer le théorème du moment cinétique en C à la sphère seule et en déduire l'expression de T en fonction de $\ddot{\theta} = d^2\theta/dt^2$, puis, en utilisant le résultat de la question 6, en fonction de $\ddot{\alpha} = d^2\alpha/dt^2$ et $\ddot{\beta} = d^2\beta/dt^2$.

12) Appliquer le théorème du moment cinétique en O au rail seul et en déduire la relation différentielle :

$$A\frac{d^2\beta}{dt^2} - B\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -Mg\ell\sin\beta \qquad (1)$$

On exprimera la constante A en fonction de M, m et R et la constante B en fonction de m, r et R.

13) Déduire des résultats précédents la relation :

$$A'\frac{d^2\alpha}{dt^2} - B\frac{d^2\beta}{dt^2} = -mg(R-r)\sin\alpha \qquad (2)$$

On exprimera la constante A' en fonction de m, r et R. Vérifier que l'équation (2) est en accord avec le résultat de la question 2.

14) Retrouvez les équations (1) et (2) à partir de considérations énergétiques. Démontrer que $AA' > B^2$.

15) Que traduit l'absence de termes en α et β dans les équations (1) et (2) ?

II.B. *Modes d'oscillation*

On considère dans cette sous-partie que les angles α et β sont l'un et l'autre voisins de zéro, ce qui permet de linéariser les équations (1) et (2). On pose $D = Mg\ell$ et $D' = mg(R-r)$. On cherche les solutions du système linéarisé sous la forme :

$$\alpha(t) = \mathrm{Re}(\underline{\alpha}_0 e^{i\omega t}) \quad \text{et} \quad \beta(t) = \mathrm{Re}(\underline{\beta}_0 e^{i\omega t}) \qquad (3)$$

où $\underline{\alpha}_0$ et $\underline{\beta}_0$ sont deux nombres complexes, $i^2 = -1$.

On appelle pulsation propre du système tout réel positif ω qui permet d'obtenir des solutions *non nulles* du système linéarisé sous la forme (3).

16) Déterminer les pulsations propres ω_1 et ω_2 du système ($\omega_1 > \omega_2$) en fonction de A, A', B, D et D'.
On considère dorénavant que les conditions initiales du système sont

$$\alpha(t=0) = \alpha_0 \quad \text{et} \quad \alpha(t=0) = \beta(t=0) = \dot{\beta}(t=0) = 0 \qquad (4)$$

17) Montrer que si $\alpha_0 \neq 0$, la solution β du système linéarisé est une fonction de la forme $\beta(t) = \eta[\cos(\omega_1 t) - \cos(\omega_2 t)]$. On ne cherchera pas forcément à déterminer la constante η en fonction des paramètres du système.
On réalise le montage expérimental de la figure 30 avec les paramètres physiques suivants :

$r = 1{,}27 \times 10^{-2}$ m, $R = 19 \times 10^{-2}$ m
$M = 90 \times 10^{-3}$ kg, $m = 67 \times 10^{-3}$ kg
$\ell = 17{,}7 \times 10^{-2}$ m, $g = 9{,}81$ m · s^{-2}

On dispose d'un système de mesure qui permet d'enregistrer la valeur de l'angle β en fonction du temps. Pour des conditions initiales du type (4), avec α_0 suffisamment faible, on obtient l'enregistrement représenté sur la figure 31.

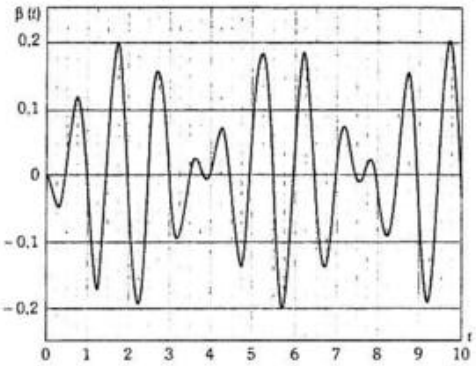


Figure 31
Enregistrement de β en radians en fonction de t en secondes

18) Déterminer à partir de la figure 31, une valeur approximative des pulsations propres du système expérimental. Cette estimation est-elle compatible avec les valeurs théoriques ?

III. – Oscillations électriques

19) On considère le montage électrique de la figure 32. Trouver les équations différentielles vérifiées par les charges $q_1(t)$ et $q_2(t)$ des deux condensateurs.

20) Quel est le lien entre ce montage et l'oscillateur mécanique de la partie II. Relier les constantes A, A', B, D et D' de la partie II aux caractéristiques des composants du montage de la figure 32.

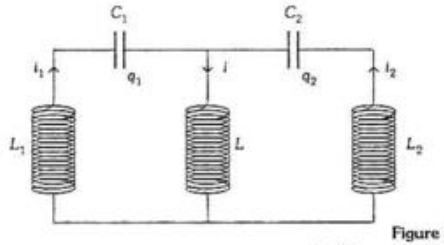


Figure 32
Oscillateur électrique

Conseils méthodologiques. Le sujet aborde principalement la mécanique de deuxième année, appliquée aux solides (chapitres 1 à 3).

1) La relation cinématique pour la sphère solide permet d'écrire :

$$\vec{v}(C) = \vec{v}(I) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{IC}.$$

Exprimée dans le repère mobile, cette expression prend la forme :

$$(R-r)\dot{\alpha}\vec{u}_\alpha = \dot{\theta}\vec{k} \wedge (-r\vec{u}_r) = -r\dot{\theta}\vec{u}_\alpha$$

La relation cinématique demandée est donc $\boxed{(R-r)\dot{\alpha} + r\dot{\theta} = 0}$.

⇨ **Remarque**

La vitesse du point I est nulle d'après l'hypothèse de roulement sans glissement : le support est immobile, donc la vitesse du point de contact I de la sphère est nulle.

Lorsque la bille roule dans le sens trigonométrique sur la figure 33 (θ croît) et le centre de masse C effectue une rotation autour de O dans le sens horaire : $\dot{\alpha}$ et $\dot{\theta}$ sont ainsi de signes contraires.
Lorsque les rayons ont même valeur, la sphère a exactement la taille de la cavité (Fig. 34). L'absence de glissement au point de contact (il s'agit en réalité de l'arc de cercle d'intersection de la sphère et du cylindre) interdit tout mouvement de rotation propre de la sphère. θ est donc nécessairement nul.

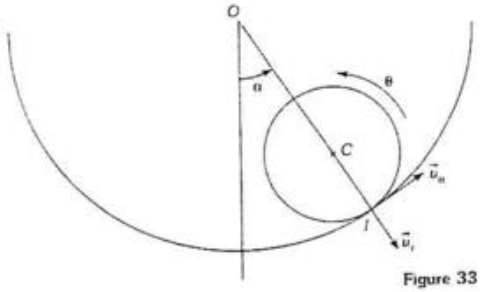


Figure 33

2) Si le système mécanique considéré est constitué de la seule bille, il s'agit d'un solide donc il n'y a pas lieu de prendre en compte de puissance des forces intérieures.
Par ailleurs, les forces extérieures sont :
• les forces de pesanteur conservatives, donc dérivant d'une énergie potentielle $E_p = -mgx_C$, à une constante additive près que l'on choisit librement,
• les forces de contact appliquées par le support, qui ont une puissance nulle dans le référentiel d'étude, car $\vec{v}(I) = \vec{0}$.
D'autre part, l'énergie cinétique s'obtient par application du théorème de Koenig :

$$E_c = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2.$$

En utilisant les résultats déjà obtenus, on aboutit à une énergie mécanique somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle :

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}m(R-r)^2\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 - mg(R-r)\cos\alpha$$

Le mouvement de ce système conservatif s'effectue avec conservation de l'énergie mécanique :

$$\frac{dE_m}{dt} = 0$$

Grâce à l'expression de J donnée dans l'énoncé, il vient :

$$\frac{dE_m}{dt} = m(R-r)^2\dot{\alpha}\ddot{\alpha} + \frac{2}{5}mr^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mg(R-r)\sin\alpha\dot{\alpha} = 0$$

En exploitant le résultat de la première question et après simplification, l'équation différentielle portant sur $\alpha(t)$ apparaît :

$$\boxed{\ddot{\alpha} + \frac{5}{7}\frac{g}{R-r}\sin\alpha = 0.}$$

3) Pour de faibles amplitudes d'oscillation, l'évolution devient harmonique par une linéarisation : $\sin\alpha \approx \alpha$.
L'équation différentielle prend la forme $\ddot{\alpha} + \omega_0^2\alpha = 0$, avec une pulsation

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{5}{7}\frac{g}{R-r}}.$$

La période correspondante s'exprime donc selon : $\boxed{T_{p0} = 2\pi\sqrt{\frac{7}{5}\frac{R-r}{g}}}$

4) Le glissement sans roulement ne s'accompagne d'aucune mise en rotation de la boule dans son référentiel barycentrique, $\theta = 0$. L'énergie cinétique est donc composée du seul terme de translation $\frac{1}{2}m(R-r)^2\dot{\alpha}^2$.
Pour une même valeur de α, inférieure à α_0, donc une même diminution d'énergie potentielle depuis l'état initial, la vitesse angulaire de rotation $\dot{\alpha}$ est supérieure en

⇨ **Remarque**

C'est l'absence de glissement sur le support fixe qu'il est utile d'invoquer ici.

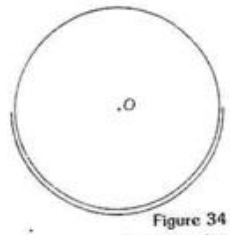


Figure 34
Cas particulier d'égalité des rayons

⇨ **Remarque**

C'est une équation analogue à celle d'un pendule pesant, il s'agit d'un oscillateur anharmonique.

⇨ **Remarque**

Pour un pendule simple, la période d'oscillation est $2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$.

© Le monde : Le plan complet sans évidemment est un délit

absence de terme de rotation propre à ce qu'elle serait dans le cas du roulement sans glissement. La sphère qui parvient la première au point A est donc celle qui ne roule pas.

La durée mise en jeu ne dépend pas de la masse, comme il est courant dans les problèmes où les seules forces qui travaillent sont gravitationnelles.

Le calcul y conduit aisément comme l'atteste l'équation obtenue au 2).

5) Dans le cas de la sphère qui glisse, l'équation énergétique s'écrit $E_c = E_p(\alpha_0)$, soit

$$\frac{1}{2}m(R-r)^2\dot{\alpha}^2 = mg(R-r)[\cos\alpha - \cos\alpha_0].$$

Pendant la phase de mouvement au cours de laquelle α passe de α_0 à 0, soit un quart de période, $\alpha(t)$ est une fonction décroissante donc

$$\dot{\alpha} = -\sqrt{\frac{2g}{R-r}(\cos\alpha - \cos\alpha_0)}.$$

En intégrant $\tau = \int_0^t dt = \int_{\alpha_0}^{0} \frac{d\alpha}{\dot{\alpha}}$ sur cet intervalle, on aboutit à l'expression intégrale $\tau = \sqrt{\frac{R-r}{2g}}\int_0^{\alpha_0} \frac{d\alpha}{\sqrt{\cos\alpha - \cos\alpha_0}}$.

Pour la sphère qui roule sans glisser, l'expression de l'énergie cinétique est $E_c = \frac{1}{2}\frac{7}{5}m(R-r)^2\dot{\alpha}^2$, au lieu de $\frac{1}{2}m(R-r)^2\dot{\alpha}^2$, du fait de la prise en compte de la rotation $\dot{\theta}$. Par conséquent, pour une même diminution d'énergie potentielle, la vitesse angulaire $\dot{\alpha}$ est modifiée d'un facteur $\sqrt{\frac{5}{7}}$:

$$\frac{\dot{\alpha}'(t)}{\dot{\alpha}(t)} = \sqrt{\frac{5}{7}}.$$

On en déduit le rapport des durées découlant du calcul précédemment effectué : $\boxed{\frac{\tau'}{\tau} = \sqrt{\frac{7}{5}}}$.

6) La relation s'obtient une nouvelle fois par identification de la vitesse du centre C grâce à la relation cinématique : $\vec{v}(C) = \vec{v}(I) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{IC}$. On aboutit à

$$(R-r)\dot{\alpha}\vec{u}_\alpha = R\dot{\beta}\vec{u}_\alpha + \dot{\theta}\vec{k} \wedge (-r\vec{u}_r) = (R\dot{\beta} - r\dot{\theta})\vec{u}_\alpha,$$

sachant que la vitesse du point I de la boule est la même que celle du point du rail coïncidant (hypothèse de non-glissement).

La relation cinématique attendue est $\boxed{(R-r)\dot{\alpha} = R\dot{\beta} - r\dot{\theta}}$.

7) C est le centre de masse donc on applique le théorème de Koenig :

$$\vec{\sigma}_{/0} = \vec{\sigma} + \overrightarrow{OC} \wedge m\vec{V}_C.$$

avec $\vec{\sigma} = \vec{\sigma}_{/C} = J\dot{\theta}\vec{k}$.

En exprimant $\overrightarrow{OC} \wedge m\vec{V}_C = m(R-r)^2\dot{\alpha}\vec{k}$, on aboutit à $\boxed{\vec{\sigma}_{/0} = (J\dot{\theta} + m(R-r)^2\dot{\alpha})\vec{k}}$.

8) De la même manière, pour ce mouvement de rotation d'axe fixe : $\boxed{\vec{\sigma}_{/0} = J'\dot{\beta}\vec{k}}$.

9) Toujours par un théorème de Koenig, mais relatif à l'énergie cinétique cette fois :

$$E_{CS} = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m(R-r)^2\dot{\alpha}^2 \quad \text{et} \quad E_{CR} = \frac{1}{2}J'\dot{\beta}^2.$$

Par sommation de ces deux termes, $\boxed{E_{CT} = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m(R-r)^2\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}J'\dot{\beta}^2}$.

10) Le point O étant un point fixe, on peut appliquer le théorème du moment cinétique dans le référentiel galiléen :

$$\frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_{ext}).$$

Les expressions précédentes donnent, en incluant les moments en O des poids :

$$J\ddot{\theta} + m(R-r)^2\ddot{\alpha} + J'\ddot{\beta} = -mg(R-r)\sin\alpha - Mg\ell\sin\beta.$$

⇨ **Remarque**

C'est l'identité des masses grave et d'inertie qui est ici sous-jacente.

⇨ **Remarque**

$\vec{\sigma}$ désigne le moment cinétique propre.

⇨ **Remarque**

Pour une liaison pivot idéale, le moment par rapport à l'axe des actions de liaison est nul.

© Lavoisier - La photocopie non autorisée est un délit

Avec le résultat de la question 6, on aboutit à :

$$\boxed{(J' + J\frac{R}{r})\ddot{\beta} + (m(R-r)^2 + J\frac{R-r}{r})\ddot{\alpha} = -mg(R-r)\sin\alpha - Mg\ell\sin\beta.}$$

11) Dans le référentiel barycentrique, rappelons qu'il n'y a pas lieu de tenir compte des forces d'inertie.

$\frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_C(\vec{T})$ s'écrit $J\ddot{\theta} = rT$.

Finalement, on déduit $\boxed{J\left(\frac{R}{r}\ddot{\beta} - \frac{R-r}{r}\ddot{\alpha}\right) = rT.}$

12) La force exercée par la sphère sur le rail est opposée à celle exercée par le rail sur la sphère, soit $-\vec{T} - \vec{N}$.

On en déduit par application du théorème du moment cinétique en O :

$$J'\ddot{\beta} = -Mg\ell\sin\beta - RT.$$

Par élimination de T entre cette équation et celle de la question précédente, on aboutit à l'expression (1) proposée en posant :

$$\boxed{A = J\frac{R^2}{r^2} + J' = \frac{2}{5}mR^2 + MR^2} \quad \text{et} \quad \boxed{B = J\frac{R(R-r)}{r^2} = \frac{2}{5}mR(R-r).}$$

13) L'application de la loi du moment cinétique à l'ensemble rail-sphère, au point fixe O, permet d'écrire :

$$J'\ddot{\beta} + J\ddot{\theta} + m(R-r)^2\ddot{\alpha} = -Mg\ell\sin\beta - mg(R-r)\sin\alpha.$$

En utilisant alors l'équation (1) et le résultat de la question 6), on aboutit à l'équation (2) attendue, avec

$$A' = m(R-r)^2 - \frac{2}{5}mr(R-r) + \frac{2}{5}mR(R-r) = \frac{7}{5}m(R-r)^2.$$

Fixer β toujours nul conduit au cas étudié à la question 2) :

$$\frac{7}{5}m(R-r)^2\ddot{\alpha} = -mg(R-r)\sin\alpha.$$

14) D'un point de vue énergétique, pour le système complet, il est important de constater que les seules forces qui travaillent sont les forces de pesanteur. En effet,

- la liaison pivot en O est supposée idéale et son point d'application est fixe dans le référentiel d'étude,
- le contact entre sphère et rail est non dissipatif du fait de l'absence de glissement.

Il est donc possible de retrouver les équations du mouvement en dérivant une intégrale première d'énergie de la forme :

$$\frac{dE_T}{dt} = 0 = \frac{dE_c}{dt} + \frac{dE_p}{dt},$$

où l'énergie potentielle des forces de pesanteur est, à une constante additive près,

$$E_p = -mg(R-r)\cos\alpha - Mg\ell\cos\beta.$$

L'inégalité recherchée est établie en notant que les constantes A et A' exprimées ci-dessus sont positives et en minorant leur produit :

$$A = \frac{2}{5}mR^2 + MR^2 > \frac{2}{5}mR^2, \quad A' > \frac{2}{5}m(R-r)^2, \quad B^2 = \left[\frac{2}{5}mR(R-r)\right]^2.$$

$$\boxed{AA' > B^2}$$

15) L'absence de termes en dérivée première est une conséquence du non-amortissement du système oscillant, du fait du caractère non dissipatif des actions de contact et de liaison.

16) Les pulsations propres du système sont les pulsations des oscillations harmoniques que celui-ci peut adopter ; on les obtient en cherchant des régimes pour lesquels $\alpha(t) = -\omega^2\alpha$ et $\beta(t) = -\omega^2\beta$.

Le système d'équations différentielles (1) (2) devient alors un système algébrique :

$$\begin{cases} A'\ddot{\alpha}(t) - B\ddot{\beta}(t) = -D'\alpha \\ -B\ddot{\alpha}(t) + A\ddot{\beta}(t) = -D\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (D' - A'\omega^2)\underline{\alpha} + B\omega^2\underline{\beta} = 0 \\ B\omega^2\underline{\alpha} + (D - A\omega^2)\underline{\beta} = 0 \end{cases}$$

⇨ **Remarque**

Les moments du poids et de la réaction normale disparaissent ; par exemple, $\vec{\mathcal{M}}_C(\vec{N}) = \overrightarrow{CI} \wedge \vec{N} = \vec{0}$ car $\vec{N} \parallel \overrightarrow{CI}$.

⇨ **Remarque**

On invoque la loi des actions réciproques.

⇨ **Remarque**

On peut remarquer l'invariance des équations par renversement du temps : $t \to -t$.

⇨ **Remarque**

On parle de régime harmonique ou de régime d'oscillations temporelles sinusoïdales.

Un tel système de Cramer n'admet de solutions non trivialement nulles que si son déterminant est nul :

$$\Delta = (D' - A'\omega^2)(D - A\omega^2) - B^2\omega^4 = 0.$$

L'équation en ω ainsi obtenue n'admet que deux solutions positives, ce sont les deux pulsations propres du système linéarisé.

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{AD' + A'D + \sqrt{(AD' - A'D)^2 + 4B^2DD'}}{2(AA' - B^2)}}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{AD' + A'D - \sqrt{(AD' - A'D)^2 + 4B^2DD'}}{2(AA' - B^2)}}.$$

La linéarité du problème permet de chercher la solution générale comme combinaison linéaire des modes propres de pulsations ω_1 et ω_2.

$$\beta(t) = C_1 \cos\omega_1 t + D_1 \sin\omega_1 t + C_2 \cos\omega_2 t + D_2 \sin\omega_2 t.$$

17) Une résolution complète est possible, qui utilise les relations déduites du système algébrique (cf. 16)) entre $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ pour chacun des modes. On peut ensuite exploiter les conditions initiales et calculer toutes les amplitudes des divers termes.
On se contente toutefois ici d'une résolution allégée, puisque l'expression de l'amplitude η n'est pas demandée. On invoque pour ce faire la valeur nulle de la vitesse initiale des deux solides pour affirmer que les deux modes ne présentent que des termes en $\cos\omega_1 t$ et $\cos\omega_2 t$, dont la dérivée est nulle à $t = 0$. Ainsi,

$$\beta(t) = C_1 \cos\omega_1 t + C_2 \cos\omega_2 t,$$

avec la condition supplémentaire de nullité $\beta(0) = 0$ qui impose la relation $C_1 = -C_2$. En notant η la constante C_1, on obtient l'expression attendue.

18) L'expression temporelle de $\beta(t)$ peut se réécrire comme un produit de deux fonctions sinusoïdales :

$$\beta(t) = -2\eta \sin\frac{(\omega_1 + \omega_2)t}{2} \sin\frac{(\omega_1 - \omega_2)t}{2}.$$

On décrit cette évolution comme une modulation
- par le terme le plus lentement variable, c'est-à-dire $\sin\frac{(\omega_1 - \omega_2)t}{2}$,
- de l'amplitude des oscillations les plus rapides $\sin\frac{(\omega_1 + \omega_2)t}{2}$.

Sur l'oscillogramme proposé, il est possible de déterminer les deux périodes caractéristiques :
- $T_b = 7.5$ s pour l'évolution lente de l'amplitude.
- $T_0 = 1$ s pour les oscillations rapides.

Puisque $\omega_1 > \omega_2$, il est possible d'en déduire

$$\boxed{\omega_1 - \omega_2 = \frac{4\pi}{T_b}} \text{ et } \boxed{\omega_1 + \omega_2 = \frac{4\pi}{T_0}}.$$

Numériquement, $\omega_1 = 7.13$ rad $\cdot s^{-1}$ et $\omega_2 = 5.44$ rad $\cdot s^{-1}$.

Il est possible d'autre part de calculer les pulsations attendues, compte tenu des valeurs des paramètres du système. On obtient successivement :

$A = 4.22\ 10^{-3}$ kg m^2, $B = 9.01\ 10^{-4}$ kg m^2, $A' = 2.94\ 10^{-3}$ kg m^2, $D = 0.156$ J et $D' = 0.116$ J.

À l'aide de l'expression établie au 16), on calcule les valeurs théoriques prévues pour les pulsations $\omega_{1\,th} = 7.17$ rad s^{-1} et $\omega_{2\,th} = 5.51$ rad $\cdot s^{-1}$. Les valeurs prédéterminées et les résultats expérimentaux concordent à mieux que 1 %.

19) Avec les orientations indiquées sur le schéma de l'énoncé, la loi des nœuds s'écrit

$$i = i_1 + i_2 = -\frac{dq_1}{dt} + \frac{dq_2}{dt}$$

⇒ **Remarque**

Il s'agit d'une équation bicarrée dont les solutions sont opposées 2 à 2.

⇒ **Remarque**

A $t = 0$, la dérivée du terme $\cos(\omega t + \varphi)$ est nulle si $\varphi = 0[\pi]$.

⇒ **Remarque**

Les battements sont d'autant plus visibles que les pulsations ω_1 et ω_2 sont proches.

⇒ **Remarque**

La dimension de D est celle du produit d'une force par une longueur, c'est donc une énergie.

© Ellipses - La photocopie non autorisée est un délit

D'autre part, les lois des mailles donnent :

$$\begin{cases} \frac{q_1}{C_1} = L\frac{di}{dt} + L_1\frac{di_1}{dt} \\ \frac{q_2}{C_2} = -L\frac{di}{dt} - L_2\frac{di_2}{dt} \end{cases}$$

⇒ **Remarque**

Il est impératif d'être très attentif aux orientations.

À l'aide de ces 3 équations, on obtient le système différentiel régissant l'évolution des charges :

$$\begin{cases} (L + L_1)\ddot{q}_1 - L\ddot{q}_2 = -\frac{q_1}{C_1} \\ (L + L_2)\ddot{q}_2 - L\ddot{q}_1 = -\frac{q_2}{C_2} \end{cases}$$

20) En identifiant les coefficients apparus ici à ceux figurant dans les équations (1) et (2), on peut proposer

$$B = L,\ A = L + L_1,\ A' = L + L_2,\ D = \frac{1}{C_1} \text{ et } D' = \frac{1}{C_2}.$$

Bien entendu, ce choix n'est pas unique et se fait notamment à une constante multiplicative près. On remarque l'inégalité $B^2 < AA'$ assurément vérifiée, qui permet la détermination des pulsations propres (question 16).

Les deux oscillateurs couplés sont analogues en utilisant la correspondance entre les angles mécaniques et les charges électriques.

4. Épreuve de Physique A. — Banque PT

Les trois premiers quarts de l'épreuve A sont étudiés ci-après.

Les deux parties A et B de cette épreuve sont indépendantes.

Partie A. – Paramètres primaires d'une ligne coaxiale

Un câble coaxial est constitué par deux cylindres coaxiaux parfaitement conducteurs, de même axe Oz, et de rayons respectifs r_1, r_2 et $(r_2 + e)$, et de longueur ℓ (Fig. 35). La longueur de la ligne ℓ est assez grande devant r_1 et r_2 pour que l'on puisse négliger les effets d'extrémités : on considère que **les symétries et invariances sont les mêmes que si la longueur ℓ était infinie**.

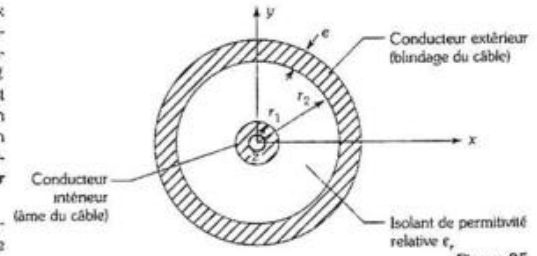


Figure 35

L'espace entre les deux conducteurs contient un isolant, homogène et isotrope de permittivité relative $\varepsilon_r = 2.0$. On rappelle que la permittivité absolue ε de l'isolant est liée à sa permittivité relative par la relation $\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r$, la notation ε_0 désignant la permittivité absolue du vide.

Pour les applications numériques, on prendra : $r_1 = 0.15$ cm, $r_2 = 0.50$ cm, $\ell = 10$ m, $e = 0.10$ cm, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H.m^{-1}, $\varepsilon_0 = 8.85.10^{-12}$ F.m^{-1}.

1. Le conducteur **intérieur** est porté au potentiel V_1 constant et le conducteur **extérieur au potentiel V_2, qu'on suppose nul**. Les conducteurs, en équilibre électrostatique, portent alors respectivement les charges électriques + Q et − Q, supposées uniformément réparties sur les deux seules surfaces des conducteurs qui sont de rayon r_1 et r_2.

1.1. Montrer que le champ électrique est radial et que sa valeur algébrique ne dépend que de r, soit $\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$.

1.2.a) Établir l'expression de $E(r)$ en fonction de Q, de la permittivité $\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r$ de l'isolant, de r et de ℓ, en distinguant les trois cas : $r < r_1$, $r_1 < r < r_2$ et $r_2 < r < (r_2 + e)$. Il est rappelé que l'expression de $E(r)$ demandée se

déduit de celle obtenue dans le cas d'un câble coaxial « à vide » en remplaçant la permittivité absolue ε_0 du vide par celle, ε, du matériau isolant.

b) Montrer que, dans le domaine $r > (r_2 + e)$, $E(r) = 0$.

1.3.a) Tracer le graphe de $E(r)$.

b) Commenter **physiquement** les éventuelles discontinuités de $E(r)$ à la traversée des cylindres de rayons r_1, r_2 et $(r_2 + e)$.

1.4. Exprimer la tension $U_{12} = V_1 - V_2$ en fonction de Q, $\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r$, ℓ, r_1 et r_2.

1.5. Montrer que la capacité par unité de longueur du câble coaxial, notée C_l, est donnée par : $C_l = \dfrac{2\pi\varepsilon}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$.

1.6. En déduire **simplement** l'expression de l'énergie électrostatique W_e emmagasinée par le câble coaxial de longueur ℓ.

1.7. Calculer la valeur numérique de C_l.

1.8. Calculer la valeur numérique de W_e pour une tension $U_{12} = 10$ V entre les armatures du câble.

2. Le câble coaxial est chargé (à sa sortie) par une résistance R_u et alimenté en entrée par un générateur de tension continue E_G (Fig. 36).

Le conducteur intérieur constitue le conducteur aller du courant électrique d'intensité I.

Le conducteur extérieur constitue le conducteur retour de ce courant.

Les conducteurs sont parcourus dans toute leur épaisseur par des courants volumiques de densités uniformes $\vec{j}_1$ et $\vec{j}_2$ de même direction que Oz. On considère de nouveau que les **symétries et invariances sont les mêmes que si la longueur ℓ était infinie.**

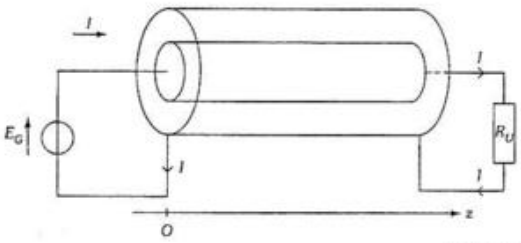


Figure 36

2.1. Montrer que le champ magnétique est orthoradial et que sa valeur algébrique ne dépend que de r, soit : $\vec{B} = B(r)\vec{u}_\theta$.

2.2. Établir les expressions de $B(r)$, en fonction de μ_0, I, r_1, r_2 et de e, en distinguant quatre domaines à définir.

2.3.a) Tracer l'allure du graphe de $B(r)$.

b) Observe-t-on des discontinuités de $B(r)$ à la traversée des cylindres de rayons r_1, r_2 et $(r_2 + e)$? Aurait-on pu le prévoir avant de traiter les questions 2.1 à 2.2 ? Pourquoi ?

2.4.a) Rappeler l'expression de la densité volumique d'énergie magnétique en un point de l'espace, en fonction du champ magnétique en ce point.

Dans toute la suite, on néglige, notamment pour alléger les calculs, la part de l'énergie magnétique emmagasinée dans l'âme – région $r < r_1$ – et celle localisée dans le blindage – région $r_2 < r < (r_2 + e)$ – du câble coaxial.

b) Exprimer, **dans ces conditions**, l'énergie magnétique W_m emmagasinée par le câble coaxial de longueur ℓ, en fonction de μ_0, I, r_1, r_2 et de ℓ.

2.5. En déduire l'expression de l'inductance propre du câble coaxial par unité de longueur notée L_l.

2.6. Calculer la valeur numérique de L_l.

2.7. Le câble coaxial est parcouru par un courant d'intensité $I = 0{,}10$ A.

Calculer la valeur numérique de l'énergie magnétique W_m emmagasinée par le câble coaxial.

3. Les conducteurs intérieur et extérieur ont une conductivité $\gamma = 5.8.10^7$ S.m^{-1}.

3.1. Exprimer la résistance des conducteurs par unité de longueur, notée R_l, en fonction de γ, r_1, r_2, et de $r_3 = (r_2 + e)$.

© Larousse - La photocopie non autorisée est un délit

3.2. Calculer la valeur numérique de R_l.

3.3. On souhaite régler la tension E_G du générateur pour obtenir un courant d'intensité $I = 0.20$ A. La ligne est chargée par $R_u = 50\ \Omega$. Calculer la valeur numérique de E_G.

Partie B. – Propagation des signaux dans une ligne sans perte

Pour tenir compte des phénomènes de propagation dans le câble coaxial, on modélise une portion du câble de longueur élémentaire dz par le circuit suivant (modèle de la ligne sans perte) (Fig. 37) :

L_l correspond à l'inductance propre par unité de longueur de la ligne.

C_l correspond à la capacité par unité de longueur de la ligne.

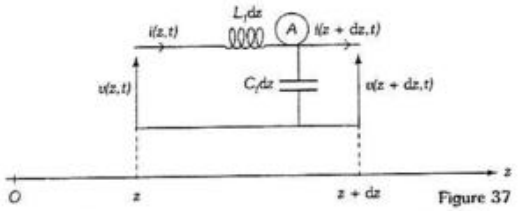


Figure 37

Dans toute la suite, on suppose que les fonctions $v(z,t)$ et $i(z,t)$ sont, sur le plan mathématique, de classe C^2.

1. Équation de propagation

1.1. Écrire la loi des nœuds au point A et en déduire que $v(z,t)$ et $i(z,t)$ vérifient l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial i}{\partial z} = -C_l \frac{\partial v}{\partial t}.$$

1.2. En appliquant la loi des mailles, montrer que $v(z,t)$ et $i(z,t)$ vérifient également l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial v}{\partial z} = -L_l \frac{\partial i}{\partial t}.$$

1.3. Montrer que $v(z,t)$ et $i(z,t)$ vérifient une équation de d'Alembert $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2}$, la notation c désignant la vitesse de propagation des signaux dans cette ligne.

1.4.a) Préciser l'expression de cette vitesse c de propagation, en fonction de L_l et C_l.

b) Vérifier l'homogénéité de ce dernier résultat.

1.5. Calculer la valeur numérique de la vitesse de propagation c, compte tenu des résultats obtenus aux questions A.1.7 et A.2.6.

*On **admet** que les solutions générales de l'équation de propagation sont :*

$$\begin{cases} v(z,t) = v_a\left(t - \dfrac{z}{c}\right) + v_b\left(t + \dfrac{z}{c}\right) \\ i(z,t) = i_a\left(t - \dfrac{z}{c}\right) + i_b\left(t + \dfrac{z}{c}\right) \end{cases}$$

1.6. Quelle est la signification physique de ces solutions ?

1.7.a) On se place dans le cas où $\begin{cases} v(z,t) = v_a\left(t - \dfrac{z}{c}\right) \\ i(z,t) = i_a\left(t - \dfrac{z}{c}\right) \end{cases}$ On posera : $u = t - \dfrac{z}{c}$

En utilisant l'équation aux dérivées partielles donnée à la question B.1.2, montrer l'existence d'une quantité R_c, fonction de L_l et de c, telle que :

$$v_a\left(t - \frac{z}{c}\right) = R_c\, i_a\left(t - \frac{z}{c}\right) + V_{a0}$$, V_{a0} étant une constante qu'on ne demande pas de déterminer.

b) Établir de la même façon, et en posant $w = t + \frac{z}{c}$, que $v_b\left(t+\frac{z}{c}\right) = -R_c\, i_b\left(t+\frac{z}{c}\right) + V_{b0}$ (attention au signe devant R_c !). V_{b0} étant une constante qu'on ne demande pas de déterminer.

1.8.a) R_c est appelée résistance caractéristique du câble coaxial. Exprimer R_c en fonction de L_l et de C_l.

b) Calculer la valeur numérique de R_c, compte tenu des résultats obtenus aux questions A.1.7 et A.2.6.

Dans toute la suite du problème, on suppose que les constantes V_{a0} et V_{b0} sont nulles.

2. Ligne en régime permanent sinusoïdal

On applique à l'entrée de la ligne une tension sinusoïdale de pulsation ω.

Le câble coaxial est chargé par un dipôle d'impédance complexe $\underline{Z}_u$, nommée dans la suite « impédance de charge » (Fig. 38).

L'ensemble du dispositif fonctionne en régime permanent sinusoïdal.

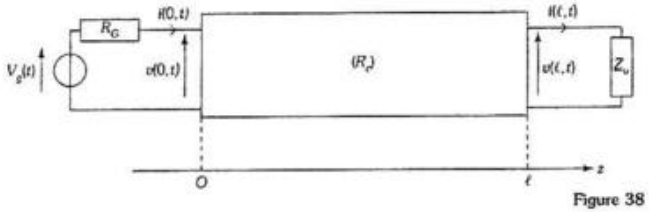


Figure 38

Le générateur fournit une force électromotrice sinusoïdale : $v_g(t) = V_g \cos(\omega t)$.

À la tension $v(z,t) = V(z)\cos(\omega t + \varphi_v(z))$, on associe la grandeur complexe $\underline{v}(z,t) = \underline{V}(z)e^{j\omega t}$.

À l'intensité $i(z,t) = I(z)\cos(\omega t + \varphi_i(z))$, on associe la grandeur complexe $\underline{i}(z,t) = \underline{I}(z)e^{j\omega t}$.

On a alors pour les amplitudes complexes les relations suivantes, dans lesquelles $\underline{V}_a$ et $\underline{V}_b$ sont deux constantes complexes qu'on déterminera ultérieurement :

$$\begin{cases} \underline{V}(z) = \underline{V}_a e^{-jkz} + \underline{V}_b e^{jkz} \\ \underline{I}(z) = \dfrac{\underline{V}_a}{R_c} e^{-jkz} - \dfrac{\underline{V}_b}{R_c} e^{jkz} \end{cases} \quad \text{avec } k = \frac{\omega}{c}$$

2.1. Par un calcul **qui n'est pas demandé ici**, on établit la constance de la quantité $\frac{1}{2}\Re\left[\underline{V}(z)\cdot\underline{I}^*(z)\right]$, la notation $\Re$ signifiant « partie réelle de », $\underline{I}^*(z)$ étant le complexe conjugué de $\underline{I}(z)$. Après avoir exprimé cette quantité en fonction de $V(z)$ et $I(z)$, amplitudes des tensions $v(z,t)$ et intensité $i(z,t)$, et de $\phi(z)$, déphasage de $v(z,t)$ par rapport à $i(z,t)$, expliquer de façon soignée et argumentée à quoi correspond, **sur le plan physique**, cette constance.

2.2. Exprimer $\underline{V}(0)$ et $\underline{I}(0)$ en fonction de $\underline{V}_a$ et $\underline{V}_b$ et de R_c.

2.3. En déduire $\underline{V}_a$ et $\underline{V}_b$ en fonction de $\underline{V}(0)$, $\underline{I}(0)$ et de R_c, puis en fonction de $\underline{V}(0)$, de R_c et du quotient $\underline{Z}(0) = \dfrac{\underline{V}(0)}{\underline{I}(0)}$.

2.4. On nomme « impédance complexe en un point d'abscisse z de la ligne », la quantité complexe définie par $\underline{Z}(z) = \dfrac{\underline{V}(z)}{\underline{I}(z)}$; établir la relation suivante : $\underline{Z}(z) = R_c \cdot \dfrac{\underline{Z}(0) - jR_c\tan(kz)}{R_c - j\underline{Z}(0)\tan(kz)}$.

© Ediscience - La photocopie non autorisée est un délit

2.5. Montrer que « l'impédance ramenée à l'entrée de la ligne », par définition égale à $\underline{Z}(0)$, est liée à « l'impédance de charge $\underline{Z}_u$ » par la relation suivante :

$$\underline{Z}(0) = R_c\,\frac{\underline{Z}_u + jR_c\tan(k\ell)}{R_c + j\underline{Z}_u\tan(k\ell)}$$

2.6.a) Exprimer $\underline{V}(0)$ en fonction de V_g, de R_G et de $\underline{Z}(0)$.

b) En déduire, compte tenu des résultats de la question B.2.3, que $\underline{V}_a = \frac{1}{2}V_g\frac{\underline{Z}(0)+R_c}{\underline{Z}(0)+R_G}$ et $\underline{V}_b = \frac{1}{2}V_g\frac{\underline{Z}(0)-R_c}{\underline{Z}(0)+R_G}$.

2.7. On ferme la ligne sur sa résistance caractéristique, c'est-à-dire qu'**on choisit : $\underline{Z}_u = R_c$**.

a) Que vaut alors « l'impédance ramenée à l'entrée de la ligne » $\underline{Z}(0)$?

b) Que peut-on dire, alors, de la valeur de $\underline{V}_b$?

c) Exprimer alors $\underline{V}(z)$ et $\underline{I}(z)$ en fonction de $\underline{V}_a$ de R_c et du produit (kz). **Commenter physiquement.**

d) Donner les expressions de la tension $v(\ell,t)$ et de l'intensité $i(\ell,t)$ en fonction de V_g, R_c, R_G, ω, c, ℓ et t.

On note, dans les questions 2.8 à 2.10 ci-dessous, λ la longueur d'onde associée à la pulsation ω, pour la propagation dans cette ligne coaxiale.

2.8. On ferme la ligne par un court-circuit.

a) En déduire l'expression de l'impédance ramenée $\underline{Z}(0)$.

b) La partie réelle de $\underline{Z}(0)$ est nulle ; montrer que cette propriété est cohérente avec celle évoquée à la question 2.1.

c) Que vaut l'impédance ramenée $\underline{Z}(0)$ pour une ligne de longueur $\ell = \lambda/4$ (ligne quart d'onde) ?

2.9. On « ferme » la ligne par un circuit ouvert.

a) En déduire l'expression de l'impédance ramenée $\underline{Z}(0)$.

b) La partie réelle de $\underline{Z}(0)$ est nulle ; y a-t-il cohérence de cette propriété avec celle évoquée à la question 2.1 ?

c) Que vaut l'impédance ramenée $\underline{Z}(0)$ pour une ligne de longueur $\ell = \lambda/4$ (ligne « quart d'onde ») ?

2.10. On veut adapter une antenne FM de type dipôle replié dont l'impédance complexe – ici réelle – vaut $R_{ant} = 300\ \Omega$, à l'entrée d'un tuner dont l'impédance complexe d'entrée, également réelle, vaut 75 Ω. À cette fin, on relie l'antenne au tuner (voir figure 39) par une ligne de longueur ℓ ; l'adaptation est réalisée lorsque l'impédance ramenée $\underline{Z}(0)$ est égale à R_{ant}, impédance de l'antenne.

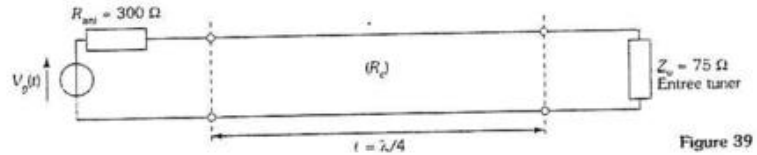


Figure 39

Déterminer – et calculer – la résistance caractéristique R_c de la ligne d'adaptation si sa longueur vaut : $\ell = \lambda/4$.

Conseils méthodologiques. Cette épreuve classique étudie une ligne coaxiale sous différentes approches : électrostatique (chapitre 5), magnétostatique (chapitre 6), et physique ondulatoire (chapitre 8).

A.1.1. On utilise les symétries et les invariances en imaginant la longueur du câble infinie. Soit M un point quelconque hors de l'axe Oz. le plan contenant M et l'axe Oz est un plan de **symétrie** des charges, le champ électrique en M appartient donc à ce plan. Il en va de même du plan contenant M et perpendiculaire à l'axe.

Le champ électrique est donc dirigé selon l'intersection de ces deux plans, il est radial : $\vec{E} \parallel \vec{u}_r$.

La distribution de charges est invariante par toute translation selon l'axe Oz et selon toute rotation autour de cet axe : le champ électrique ne dépend donc ni de la cote z, ni de l'angle θ.

Finalement, $\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$.

1.2.a. On applique le **théorème de Gauss** au cylindre S d'axe Oz, de hauteur ℓ et de rayon r.

$$\oiint_{(S)} \vec{E}.\vec{dS} = \iint_S E\,dS = E(r)\iint_S dS = E(r)2\pi r\ell.$$

Selon la valeur de r, la charge intérieure au cylindre S s'écrit :

- si $r < r_1$, $Q_{int} = 0$.
- si $r_1 < r < r_2$, $Q_{int} = +Q$.
- si $r_2 < r < (r_2 + e)$, $Q_{int} = 0$.

Le champ électrique n'est donc non nul qu'**entre les conducteurs** et s'écrit $\boxed{E(r) = \dfrac{Q}{2\pi\varepsilon r\ell}}$.

b. On reprend le raisonnement précédent, avec $Q_{ext} = Q - Q + 0 = 0$: il n'y a en effet pas de charge sur la surface extérieure de rayon $r_2 + e$.

On peut à ce stade expliquer la nullité de la charge externe. Le conducteur extérieur étant au même potentiel que l'infini, il ne peut y avoir de ligne de champ à l'extérieur du câble (pour $r > (r_2 + e)$). En effet, le potentiel décroît le long d'une ligne de champ et ne peut ainsi passer de la valeur nulle sur le câble, à la valeur nulle à l'infini, sans rester **uniformément** nul.

1.3.a.

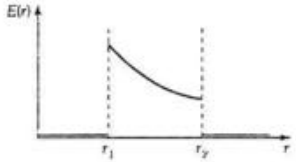


Figure 40

b. Le champ présente une discontinuité à la traversée de la surface de chacun des conducteurs :

- en $r = r_1$, la discontinuité de la composante normale est $\dfrac{Q}{2\pi\varepsilon r_1\ell}$, égale à $\dfrac{\sigma_1}{\varepsilon}$, où σ_1 est la densité surfacique de charge $\dfrac{Q}{2\pi r_1\ell}$.
- en $r = r_2$, la discontinuité est $-\dfrac{Q}{2\pi\varepsilon r_2\ell}$, égale à $\dfrac{\sigma_2}{\varepsilon}$, où σ_2 est la densité surfacique de charge $-\dfrac{Q}{2\pi r_2\ell}$.

1.4. On fait **circuler** le champ électrique sur un segment radial joignant les deux conducteurs : $V_1 - V_2 = -\int_2^1 \vec{E}.\vec{dl}$.

Ainsi, $\boxed{V_1 - V_2 = \int_{r_1}^{r_2} \dfrac{Q}{2\pi\varepsilon r\ell}dr = \dfrac{Q}{2\pi\varepsilon\ell}\ln\dfrac{r_2}{r_1}}$.

1.5. Par définition, $Q = C_\ell(V_1 - V_2)$.

On déduit $\boxed{C_\ell = \dfrac{2\pi\varepsilon}{\ln\dfrac{r_2}{r_1}}}$

1.6. On peut exprimer l'énergie emmagasinée comme celle d'un **condensateur** de capacité C_ℓ, portant la charge Q :

$$W_e = \frac{Q^2}{2C_\ell}.$$

On aboutit à l'expression $\boxed{W_e = \dfrac{Q^2}{4\pi\varepsilon\ell}\ln\dfrac{r_2}{r_1}}$.

© Lavoisier - La photocopie non autorisée est un délit

1.7. $C_\ell = 9.24 \cdot 10^{-11}$ F·m^{-1}

1.8. $W_e = \dfrac{1}{2}C_\ell U_{12}^2 = 4.62 \cdot 10^{-8}$ J.

2.1. On reprend l'examen des symétries et invariances.

- Soit M un point quelconque hors de l'axe Oz, le plan passant par M et contenant l'axe est un plan de **symétrie des courants**, c'est donc un plan d'antisymétrie du champ $\vec{B}$. Le champ magnétique en M est perpendiculaire à ce plan, donc orthoradial : $\vec{B}(M) \parallel \vec{u}_\theta$.
- La distribution de courants est invariante par **rotation** autour de l'axe Oz, le champ magnétique est donc indépendant de l'angle θ.
- De même, l'invariance par **translation** le long de l'axe Oz montre que le champ magnétique est indépendant de z.

Au final, $\boxed{\vec{B} = B(r)\vec{u}_\theta}$.

2.2. C'est cette fois par le théorème d'Ampère que l'on peut accéder à $B(r)$. Le contour d'Ampère retenu est un cercle C d'axe Oz et de rayon r, orienté selon $\vec{u}_\theta$. La circulation de $\vec{B}$ sur ce cercle s'écrit

$$\oint_C \vec{B}.\vec{dl} = 2\pi r B(r).$$

En vue d'exprimer les intensités, on peut déduire les densités de courant de l'intensité totale parcourant chaque conducteur :

$$\vec{j}_1 I = \frac{I}{\pi r_1^2}\vec{u}_z \quad \text{et} \quad \vec{j}_2 = -\frac{I}{\pi[(r_2 + e)^2 - r_2^2]}\vec{u}_z$$

L'intensité du courant enlacé par C dépend de r :

- si $r < r_1$, $I_e = \pi r^2 j_1 = I\dfrac{r^2}{r_1^2}$, donc $B(r) = \mu_0\dfrac{Ir}{2\pi r_1^2}$.
- si $r_1 < r < r_2$, $I_e = I$, donc $B(r) = \mu_0\dfrac{I}{2\pi r}$.
- si $r_2 < r < (r_2 + e)$, $I_e = I + j_2\pi(r^2 - r_2^2)$, donc $B(r) = \mu_0\dfrac{I}{2\pi r}\left[1 - \dfrac{r^2 - r_2^2}{(r_2 + e)^2 - r_2^2}\right]$
- si $r > (r_2 + e)$, $I_e = 0$, donc $B(r) = 0$.

2.3.a.

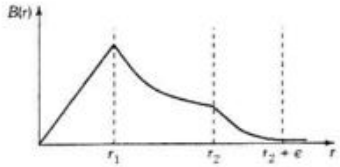


Figure 41

b. Il n'y a pas de discontinuité du champ magnétique car les courants sont volumiques et non surfaciques.

2.4.a. La densité volumique d'énergie magnétique est $u_m = \dfrac{B^2}{2\mu_0}$.

b. Les hypothèses faites sur la contribution négligeable de l'énergie magnétique dans l'épaisseur des conducteurs permet de ne considérer que l'énergie emmagasinée entre ceux-ci. On procède à une intégration sur l'espace délimité par les conducteurs :

$$W_m = \int_{r_1}^{r_2}\int_0^{2\pi}\int_0 \frac{1}{2\mu_0}\left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\right)^2 dr\,r d\theta\,dz$$

On peut intégrer successivement sur z, θ puis r et il vient :

$$\boxed{W_m = \ell\int_{r_1}^{r_2}\frac{\mu_0 I^2}{4\pi r}dr = \frac{\mu_0 I^2\ell}{4\pi}\ln\frac{r_2}{r_1}}$$

2.5. Cette énergie correspond à l'énergie du champ magnétique propre, elle est liée à l'inductance L_l' par $W_m = \frac{1}{2}(L_l' I)I^2$. On en déduit L_l' :

$$\boxed{L_l' = \frac{\mu_0}{2\pi}\ln\frac{r_2}{r_1}}.$$

2.6. Numériquement, $L_l' = 2{,}41 \cdot 10^{-7}$ H·m^{-1}.

2.7. $W_m = \frac{1}{2}L_l' I^2 = 1{,}21 \cdot 10^{-8}$ J.

3.1. Pour un cylindre conducteur de section S, longueur ℓ et conductivité γ, la résistance s'écrit $R = \frac{1}{\gamma}\frac{\ell}{S}$, donc la résistance linéique est $R_l = \frac{1}{\gamma S}$.

Pour le conducteur intérieur, $S = \pi r_1^2$, la résistance linéique est donc $R_{l,int} = \frac{1}{\gamma\pi r_1^2}$; tandis que pour le conducteur extérieur, l'expression devient $R_{l,ext} = \frac{1}{\gamma\pi(r_3^2 - r_2^2)}$.

Dans le schéma électrique de l'énoncé, les résistances des conducteurs intérieur, extérieur et terminal sont **en série** ; il convient donc d'**ajouter** les résistances linéiques précédentes :

$$\boxed{R_l = \frac{1}{\gamma\pi r_1^2} + \frac{1}{\gamma\pi(r_3^2 - r_2^2)}}.$$

3.2. Numériquement, $R_l = 2{,}94 \cdot 10^{-3}\ \Omega \cdot \text{m}^{-1}$.

3.3. La résistance totale à travers laquelle s'écoule I est $R_u + (R_l'\ell)$ soit $50{,}03\Omega \approx 50\Omega$.

La résistance du câble étant négligeable, $E_G = R_u I = 10$ V.

B.1.1. Au point A, $i(z,t) = i(z + \mathrm{d}z, t) + C_l \mathrm{d}z \frac{\partial v(z + \mathrm{d}z)}{\partial t}$.

Or, pour $\mathrm{d}z$ tendant vers 0, on peut assimiler $i(z,t) - i(z + \mathrm{d}z, t)$ à $-\frac{\partial i}{\partial z}\mathrm{d}z$ et $u(z + \mathrm{d}z)$ à $u(z)$. On en déduit la relation proposée $\boxed{\frac{\partial i}{\partial z} = -C_l \frac{\partial v}{\partial t}}$.

1.2. La loi des mailles donne : $v(z,t) = L_l \mathrm{d}z \frac{\partial i(z)}{\partial t} + v(z + \mathrm{d}z, t)$, que l'on transforme de la même manière grâce à $v(z,t) - v(z + \mathrm{d}z, t) = -\frac{\partial v}{\partial z}\mathrm{d}z$. Finalement, $\boxed{\frac{\partial v}{\partial z} = -L_l \frac{\partial i}{\partial t}}$.

1.3. En dérivant partiellement l'équation de la question 1.1 par rapport à t et l'équation du 1.2 par rapport à z, on arrive à **découpler** les équations :

$$\boxed{\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = L_l C_l \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}}.$$

⇒ **Remarque**

Il y a égalité des dérivées secondes croisées (Schwarz).

On procède de même en échangeant les variables et on obtient une équation de d'Alembert pour i : $\frac{\partial^2 i}{\partial z^2} = L_l C_l \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}$.

1.4.a. La célérité c qui apparaît dans ces calculs est $\boxed{c = \frac{1}{\sqrt{L_l C_l}}}$.

b. $L_l'\omega$ est une impédance électrique.

$\frac{1}{C_l'\omega}$ est également une impédance, donc leur rapport $\frac{1}{L_l C_l' \omega^2}$ n'a pas d'unité.

⇒ **Remarque**

ω est ici une pulsation.

On en déduit que $c = \frac{1}{\sqrt{L_l C_l}}$ a la dimension de $\ell\omega$ c'est-à-dire le rapport d'une longueur par un temps, qui est une vitesse.

1.5. Les similitudes dans les expressions ramènent le résultat à $\boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu_0}}}$, c'est-à-dire le rapport de la vitesse de la lumière dans le vide par $\sqrt{\varepsilon_r}$, $c = 2{,}12 \cdot 10^8$ m·s^{-1}.

© Larousse – La photocopie non autorisée est un délit

1.6. Chaque expression est la superposition de deux ondes **progressives** se propageant en sens contraires. Plus précisément, l'onde de la forme $f(t - z/c)$ (respectivement $f(t + z/c)$) se déplace dans le sens des z croissants (respectivement décroissants).

1.7.a. On retient l'onde progressive selon les z croissants. Par dérivée d'une composée, $\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}v_g}{\mathrm{d}u}$. De même, $\frac{\partial i}{\partial t} = \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}u}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\mathrm{d}i_g}{\mathrm{d}u}$.

L'équation découlant de la loi des mailles s'écrit donc $\frac{\mathrm{d}v_g}{\mathrm{d}u} = L_l c \frac{\mathrm{d}i_g}{\mathrm{d}u}$. En intégrant par rapport à la variable u on aboutit à la relation demandée, avec $\boxed{R_c = L_l c}$.

⇒ **Remarque**

La constante V_{g0} est une constante d'intégration.

b. On procède de même en notant que $\frac{\partial w}{\partial z} = +\frac{1}{c}$, ce qui explique le changement de signe.

1.8.a. Compte tenu de l'expression de c, $\boxed{R_c = \sqrt{\frac{L_l}{C_l}}}$.

b. $R_c = 51\ \Omega \sim 50\ \Omega$, valeur usuelle.

2.1. Le déphasage Φ intervient dans les amplitudes complexes via un terme exponentiel, $\exp(i\Phi)$. Ainsi,

$$\frac{\underline{V}\underline{I}^*}{2} = \frac{V(z)I(z)\exp(-i\Phi)}{2}$$

et par suite, la partie réelle correspond à $\frac{V(z)I(z)}{2}\cos\Phi$ qui est la puissance active.

La constance traduit la **conservation de la puissance**, due à l'absence de pertes dans la ligne (les résistances ont été négligées).

2.2. $\underline{V}(0) = \underline{V}_a + \underline{V}_b$ et de même $\underline{I}(0) = \frac{\underline{V}_a}{R_c} - \frac{\underline{V}_b}{R_c}$.

2.3. $\underline{V}_a = \frac{1}{2}\underline{V}(0) + \frac{1}{2}R_c\underline{I}(0)$ et $\underline{V}_b = \frac{1}{2}\underline{V}(0) - \frac{1}{2}R_c\underline{I}(0)$.

En utilisant l'impédance $\underline{Z}(0)$, $\boxed{\underline{V}_a = \underline{V}(0)\frac{R_c + \underline{Z}(0)}{2\underline{Z}(0)}}$.

De la même manière, $\boxed{\underline{V}_b = \underline{V}(0)\frac{-R_c + \underline{Z}(0)}{2\underline{Z}(0)}}$.

2.4. On reporte les expressions de $\underline{V}(z)$ et $\underline{I}(z)$ en exploitant les formulations de $\underline{V}_a$ et $\underline{V}_b$ précédentes. Après simplification par $\frac{\underline{V}(0)}{2\underline{Z}(0)}$, il vient :

$$\underline{Z}(z) = R_c \frac{(\underline{Z}(0) + R_c)e^{-ikz} + (\underline{Z}(0) - R_c)e^{+ikz}}{(\underline{Z}(0) + R_c)e^{-ikz} - (\underline{Z}(0) - R_c)e^{+ikz}},$$

que l'on peut réécrire en utilisant les fonctions trigonométriques :

$$\underline{Z}(z) = R_c \frac{\underline{Z}(0)\cos(kz) - iR_c\sin(kz)}{-i\underline{Z}(0)\sin(kz) + R_c\cos(kz)}.$$

La simplification par $\cos(kz)$ conduit au résultat attendu.

2.5. A la cote $z = \ell$, l'impédance $\underline{Z}(\ell)$ s'identifie à l'impédance terminale $\underline{Z}_u$. On résout donc l'équation

$$\underline{Z}_u = R_c \frac{\underline{Z}(0) - iR_c\tan(k\ell)}{R_c - i\underline{Z}(0)\tan(k\ell)},$$

où l'inconnue est $\underline{Z}(0)$, ce qui conduit à la relation demandée.

2.6.a. A la cote $z = 0$, le câble et sa charge sont vus comme une impédance $\underline{Z}(0)$, ce qui permet de se ramener à un **diviseur d'impédances**. On en déduit la relation :

$$\boxed{\underline{V}(0) = \frac{\underline{Z}(0)}{\underline{Z}(0) + R_G}V_0}.$$

b. On reprend la relation $\underline{V}_e = \underline{V}(0)\dfrac{R_c + \underline{Z}(0)}{2\underline{Z}(0)}$ et on opère la substitution de $\underline{V}(0)$, il vient,

$$\underline{V}_e = \frac{\underline{Z}(0)}{\underline{Z}(0) + R_G} V_g \frac{R_c + \underline{Z}(0)}{2\underline{Z}(0)} = \frac{1}{2} V_g \frac{R_c + \underline{Z}(0)}{\underline{Z}(0) + R_G}$$

On procède de même avec $\underline{V}_b$.

2.7.a. L'expression de la question 2.5. avec $\underline{Z}_u = R_c$ conduit à une simplification par $(1 + j\tan(k\ell))$ et il reste $\underline{Z}(0) = R_c$. En fait, en tout point de la ligne, l'impédance est identique à l'impédance caractéristique.

b. L'amplitude complexe $\underline{V}_b$ s'annule.

c. $\underline{V}(z) = \underline{V}_e e^{-ikz}$ et $\underline{I}(z) = \dfrac{\underline{V}_e}{R_c} e^{-ikz}$: l'onde est **progressive** sur le câble, car seule demeure l'onde incidente (selon les z croissants). On dit qu'il y a **adaptation** d'impédance au niveau de la charge.

d. En prenant la partie réelle de $\underline{v}(\ell, t)$ on obtient $\boxed{v(\ell, t) = \frac{1}{2} V_g \frac{2R_c}{R_c + R_G} \cos(\omega t - \omega\ell / c).}$ L'intensité parcourant la résistance de charge est $\boxed{i(\ell, t) = \frac{1}{2} V_g \frac{2}{R_c + R_G} \cos(\omega t - \omega\ell / c).}$

2.8.a. Puisque $\underline{Z}_u = 0$, $\underline{Z}(0) = jR_c \tan(k\ell)$.

b. La charge placée à l'extrémité du câble n'absorbe pas de puissance, car la tension y est nulle. Or, la ligne est supposée sans pertes, on en déduit que l'ensemble câble-charge est **non dissipatif**. Vu de l'entrée, son impédance n'a pas de **partie résistive**.

c. $\lambda = \dfrac{2\pi}{k}$, donc $k\ell = \pi / 2$ de tangente infinie. L'impédance ramenée en entrée est **infinie** : la ligne quart-d'onde fermée sur un court-circuit se comporte comme un **circuit ouvert** !

2.9.a. L'impédance terminale est infinie, donc $\boxed{\underline{Z}(0) = -jR_c \dfrac{1}{\tan(k\ell)}}$.

b. Le circuit ouvert est **non dissipatif** car l'intensité le parcourant est nulle. On retrouve une situation identique à celle du 2.8.b., avec la même conclusion.

c. Cette fois, l'impédance ramenée en entrée est nulle : la ligne quart-d'onde fermée sur un circuit ouvert se comporte comme un **court-circuit**.

2.10. Puisque $\tan(k\ell)$ est infini (ligne quart d'onde), on peut écrire à l'aide du résultat de la question 2.5 :

$$\underline{Z}(0) = \frac{R_c^2}{\underline{Z}_u}.$$

Dans le cas présent, on veut déterminer R_c, sachant que $\underline{Z}(0) = R_{ant}$ et $\underline{Z}_u = R_u = 75\ \Omega$. On en déduit

$$R_c = \sqrt{R_{ant} R_u} = 150\ \Omega.$$

© Lavoisier - La photocopie non autorisée est un délit

Index

A

action de contact 79
ailette de refroidissement 477
antenne 274
apodisation 409
approximation des régimes quasi stationnaires (ARQS) 217
axe instantané de rotation 48

B

bande passante 110
barycentre 10
bilan d'énergie électromagnétique 222
brouillage 318

C

câble coaxial 156, 193
capacité 144
cavité 296
centre de masse 10
champ
  de pesanteur 11
  des vitesses d'un solide 48
  électromoteur 419, 420
  électrostatique 141
  lointain 249
  magnétique terrestre 201, 453
  magnétostatique 177
changement de phase 494
chauffage par micro-ondes 485
chute d'une cheminée 93
coefficient
  de Newton 460
  de réflexion en amplitude 283
coefficients de Fourier 111
coin d'air 351, 360
compensatrice 349
compresseur 493
condensateur 144
conductance thermique 459, 468
conducteur 144
  parfait 281
conduction 458
conductivité 220
conducto-convectif 460
conservation
  de la charge 214
  de l'énergie mécanique 58
contact optique 351
contraste 314
convection 459
corps
  noir 462
  opaque 460
  pur 494
courant de Foucault 418
courbe de Fanno 513
critère de Rayleigh 414
cycle Brayton 509

D

débit massique 491
degré de liberté d'un solide 82
démarrage d'un véhicule 99
densité
  surfacique
    de charge 141
    de courant 177
  volumique
    de charge 141
    de courant 177
    d'énergie électrique 145
    d'énergie électromagnétique 215
déphasage 314, 315
déphaseur 136
diagramme
  de Bode 110
  d'état 494
différence de marche 315, 320
diffraction 383
  par un miroir 406
dipôle
  magnétique 180
  oscillant 249
directivité du rayonnement d'une antenne 274
dispersion 281
division
  d'amplitude 349
  du front d'onde 316, 319

E

échangeur 493
écoulement en régime permanent 491
écrantage 169
effet
  de peau 236
  de serre 479
  Peltier 527
électrostatique 141
énergie électromagnétique 258
épaisseur de peau 238
équation
  de conservation de la charge 214, 219
  de D'Alembert 243
  de diffusion 459
  de dispersion 279, 289
  de la chaleur 459
  de Maxwell 213
  de Poisson 142, 178
  de propagation 243
  intégrale 217
  locale 217
équilibre
  d'un pont 34
  électrostatique des conducteurs 144
  entre deux phases 494
  liquide-vapeur 495
  radiatif 461
expérience Virgo 539

F

facteur de qualité 111
fente d'Young 319
filtre linéaire 109
flux thermique 457
fondamental 111
force
  de Laplace 417
  électromotrice d'induction 419, 420
forces intérieures et extérieures 13
four à induction 238
frange 313
  d'égale épaisseur 355
  d'égale inclinaison 353
fréquence de coupure 285
frottement 80

G

générateur 421
glissement 80
guide d'onde 284

H

harmonique 111
haut-parleur 421, 442

I

inductance
  mutuelle 419
  propre 418, 424
induction 418
  de Lorentz 420, 429
  de Neumann 418, 426
interférence
  avec une source étendue 318
  en lumière polychromatique 317
  optique 313
interféromètre
  de Fizeau 340
  de Mach-Zehnder 379
  de Michelson 349
interfrange 323

J

jauge
  de Coulomb 178
  de Lorentz 215

L

lame d'air 351, 362
lévitation magnétique 206
liaison 82
  parfaite 83
  pivot 83
  rotule 83
liquide saturant 495
loi
  d'Ohm 223
    généralisée 421
  de déplacement de Wien 462
  de Descartes 293
  de Fourier 458
  de la résultante cinétique 10
  de Lenz 418
  de Planck 461, 469
  de Stefan 462, 471
  des nœuds 220
  du moment cinétique 12
lois de Coulomb 80
longueur d'onde 245
lumière polychromatique 317
lunette astronomique 411

M

magnétostatique 177
marée 73
Maxwell 213
mécanique du solide 47
métal réel 303
miroir magnétique 209
mode TE_{n0} 285
modulation 126
moment
  cinétique 12
  d'inertie 49
  d'un système de forces 10
moteur 421
  à courant continu 440
  asynchrone 445
  linéaire 450
  synchrone 197

N

nuage orageux 160

O

onde
  électromagnétique 243
  évanescente 290
  gravitationnelle 539
  guidée 284
  incidente 282
  plane 244
  progressive 244
  réfléchie 282, 291
  sphérique 272
  stationnaire 262, 265, 284
onduleur 125

P

passe-bande 110
passe-bas 110
passe-haut 110
pendule de torsion 63
pivotement 80
plan d'onde 244
plasma 279
polarisation 246
  circulaire 247, 256
  rectiligne 246
pompe de chaleur 522
potentiel
  électrostatique 141
  magnétostatique 177
  vecteur 178
poulie 14, 55
premier principe
  pour les écoulements en régime permanent 492
  pour les systèmes ouverts 492
pression de vapeur saturante 495
principe d'Huygens-Fresnel 383
prisme 546
propriétés de symétrie
  du champ électrostatique 142
  du champ magnétostatique 178
pseudo-dérivateur 113
pseudo-intégrateur 113
puissance
  des actions intérieures à un solide 50
  volumique cédée à la matière 216
pulsation
  plasma 279

Q

quantité de mouvement 10

R

rails de Laplace 429
rayonnement
  dipolaire 249
  thermique 460
référentiel
  barycentrique 11
réflexion sur un conducteur parfait 281
réfrigérateur 527
réfrigération 516
régime sinusoïdal forcé 109
relation de passage 143, 180, 214
réponse linéaire d'Onsager 528
réseau 390
  par réflexion 414
résistance thermique 459, 468, 475
résolution 411
rotation autour d'un axe fixe 49
roue de Barlow 429, 439
roulement 80
  à billes 61

S

séparatrice 349
série de Fourier 111
singe 14
sinus
  cardinal 385
sismographe 134
solénoïde 182, 184, 186
spectre 112
supraconducteur 186

T

température des planètes 479
théorème
  d'Ampère 178
  de Coulomb 144
  de Gauss 142
  de König 12, 13
  de la puissance cinétique 13
  de la résultante cinétique 10
  d'Huygens 49
  du centre de masse 10
  du moment cinétique 12
thermalisation 482
titre massique en vapeur 495
torseur cinématique 48
train d'onde 313
transfert thermique 457
translation
  d'un diaphragme 401
  d'un solide 48
transparence 385
transvasement 494
turbine 493
turboréacteur 506
tuyère 493

V

valeur moyenne 111
vapeur
  saturante 495
  saturante sèche 495
  sèche 495
vecteur
  de Poynting 216
  densité de flux thermique de conduction 458
  d'onde 245
vitesse
  de glissement 79
  de groupe 280
  de phase 280

© Librairie Vuibert – La photocopie non autorisée est un délit