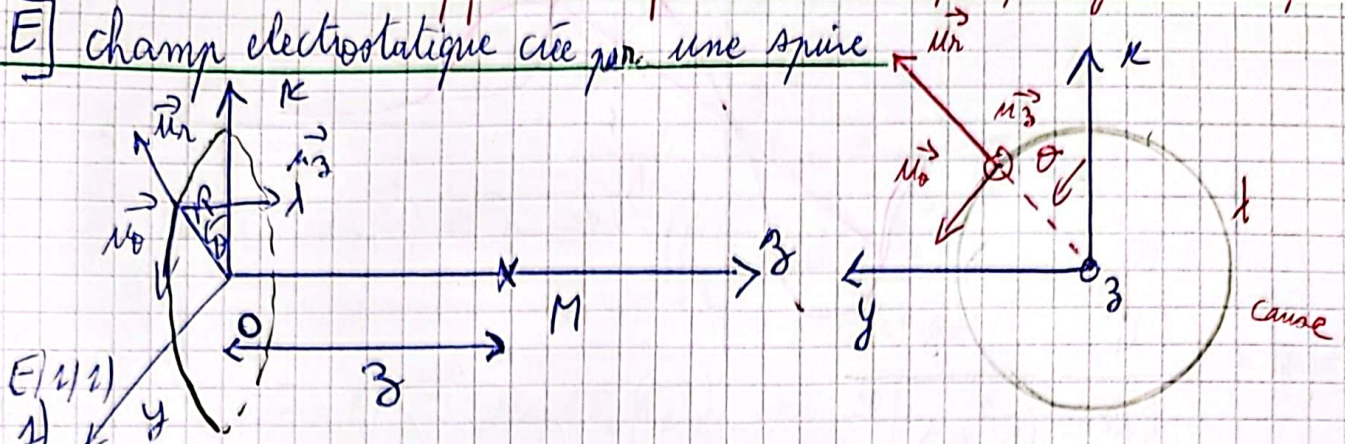
Rappel champ Electrostatique / Magnétostatique :

E] champ électrostatique crée par une spire



E] 1/2)

1) Tout plan contenant l'axe (Oz) est un plan de symétrie de la distribution de charges donc le champ $\vec{E}$ est porté par $\vec{u_z}$. on dit que l'axe (Oz) est un axe de symétrie. $E(-z) = -E(z)$

La distribution de charges est invariante par rotation d'angle θ, donc le champ ne dépend pas de θ.

2) Tout plan de symétrie de la distribution de charges est un plan de symétrie du champ électrostatique car $\vec{E}$ est un vrai vecteur.

* Tout plan de symétrie de la distribution du courant est un plan d'antisymétrie du champ magnétique car $\vec{B}$ est un pseudo-vecteur

3) $$\delta\vec{E}(M) = \frac{\delta Q(P)}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{PM}}{PM^3}$$

$$\vec{PM} = \vec{PO} + \vec{OM} = -R\vec{u_r} + z\vec{u_z}$$

$$\vec{E}(M) = \int_{P\in D}\frac{\delta Q(P)}{4\pi\varepsilon_0}\times\frac{R\vec{u_r} + z\vec{u_z}}{PM^3}$$

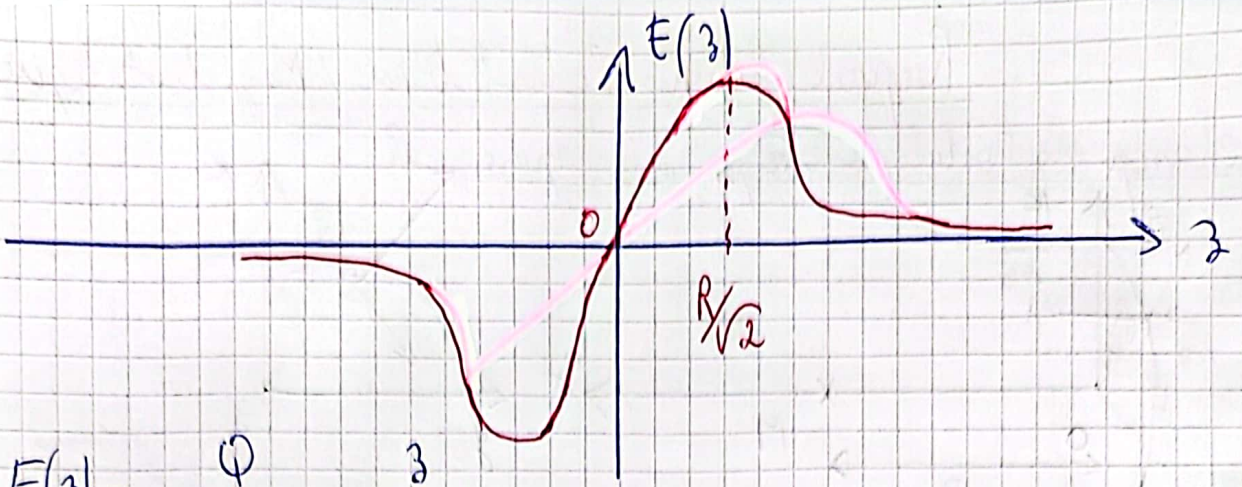
or $\vec{E}(M) = E(M)\vec{u_z} \Rightarrow \vec{E}(M) = \int\frac{\delta Q(P)}{4\pi\varepsilon_0} = \frac{z\vec{u_z}}{PM^3}$

or $PM = \|\vec{PM}\| = \|-R\vec{u_r} + z\vec{u_z}\| \Rightarrow PM = \sqrt{R^2+z^2} = de$

$$\Rightarrow \vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 PM^3}\left[\int\delta Q(P)\right] z\vec{u_z}$$

$$\vec{E}(M) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{(R^2+z^2)^{3/2}}\vec{u_z}$$

Scanné avec CamScanner



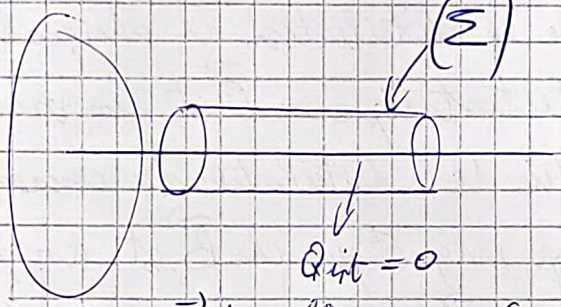
$$E(z) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{z}{(R^2+z^2)^{3/2}}$$

E/2/1) le plan $(M; \vec{u_r}; \vec{u_z})$ est un plan de symétrie de la distribution de charges donc $M \in$ à ce plan.

donc $\vec{E} = E_r \vec{u_r} + E_z \vec{u_z} \perp \vec{u_\theta} \Rightarrow \vec{E_\theta} = 0$.

E/2/2) la distribution de charges est invariante par rotation d'angle θ.

E/2/3)

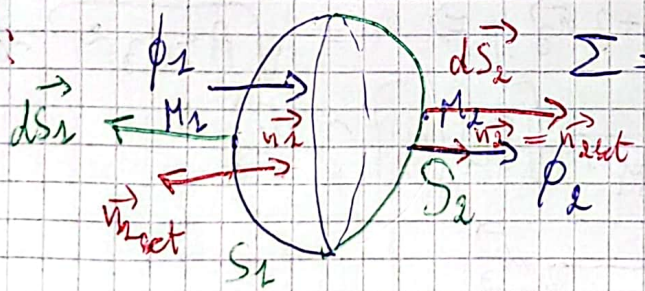


$$\oiint_\Sigma \vec{E} \cdot d\vec{S}(M) = 0 \Rightarrow \vec{E} \text{ est à flux } \underline{CV} \text{ (conservatif)} \; (*)$$

$$\hookrightarrow \underbrace{\int_{M_1}^{M_2} \vec{E}(M) \cdot d\vec{l}(M)}_{\mathcal{C}_{M_1 \to M_2}} = -\underbrace{\left[V(M_2) - V(M_1)\right]}_{\text{tension}}$$

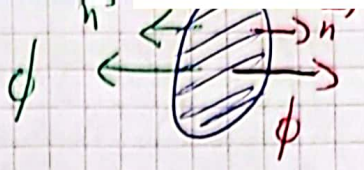
$$\Rightarrow \oint \vec{E}(M) \cdot d\vec{l}(M) = 0 \quad \text{car } M_2 = M_1$$

(*) :



$\Sigma = S_1 \cup S_2$

⚠ $\phi = \iint_{\Sigma} \vec{X} \cdot ds \, \vec{n}$



le sens de $\vec{n}$ est celui de ϕ.

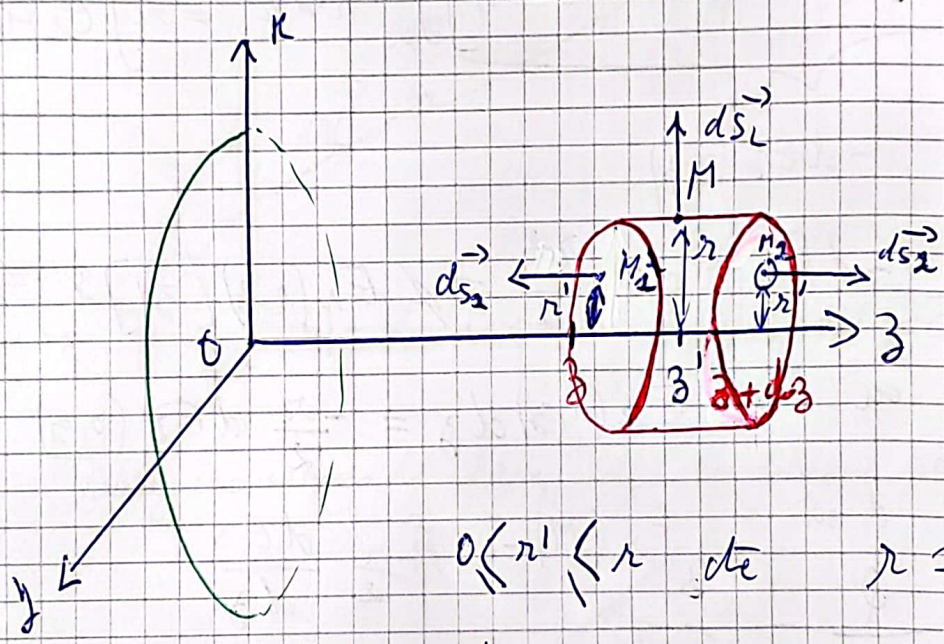
$$\oiint_{\Sigma} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S}(M) = 0 \Rightarrow \iint_{S_1} \vec{E}(M_1) \cdot \underbrace{d\vec{S_1}}_{= dS_1 \vec{n_{1ext}}} + \iint_{S_2} \vec{E}(M) \cdot \underbrace{d\vec{S}}_{dS_2 \vec{n_{2ext}}}$$

or
$$\begin{cases} \phi_1 = \iint \vec{E}(M_1) dS_1 \, \vec{n_1} \quad -\vec{n_{1ext}} \\ \phi_2 = \iint \vec{E}(M_2) dS_2 \, \vec{n_2} \quad \vec{n_{2ext}} \end{cases}$$

donc $-\phi_1 + \phi_2 = 0 \Rightarrow \phi_1 = \phi_2$

donc $\vec{E}$ est à flux conservatif.

E) 2/4)



$0 \leq r' \leq r$ cte $\quad r \simeq 0$

$z \leq z' \leq z + dz$ avec $dz \simeq 0$.

$$\underbrace{\oiint \vec{E}(M) \cdot d\vec{S}(M)}_{\frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = 0} = \iint_{M_1 \in S_1} \vec{E}(M_1) \cdot d\vec{S_1} + \iint_{M \in S_L} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S_L} + \iint_{M_2 \in S_2} \vec{E}(M_2) d\vec{S_2}$$

donc $0 = \iint_{M_1 \in S_1} \vec{E}(r', z) \, d\vec{S_1} (-\vec{u_z}) + \iint \vec{E}(r, z') \, dS_L \vec{u_r} + \iint \vec{E}(r', z+dz) \, dS_2 \vec{u_z}$

Scanné avec CamScanner

donc $0 = \iint \left[E_z(r', z+dz) - E_z(r', z) \right] dS$

$+ \iint E_r(r, z')\, dS_L\, \vec{u_r}$ où $dS_2 = dS_1 = dS$.

donc $0 = \iint \left[E_z(r', z+dz) - E_z(r', z) \right] dr' r' d\theta$

$+ \iint E_r(r, z') r\, d\theta\, dz'$

donc $0 = \int d\theta \int \left[E_z(r', z+dz) - E_z(r', z) \right] r' dr' = r \int E_r(r, z')\, dz'$

$\begin{cases} 0 \leqslant r' \leqslant r \text{ avec } r \simeq 0 \\ 0 \leqslant z' \leqslant z + dz \end{cases}$

$dz \simeq 0 \Rightarrow z' = z$

$\Rightarrow - \underbrace{\left[E_z(0, z+dz) - E_z(0, z) \right]}_{-dE_z(0,z)} \int_0^r r' dr' = r \int E_r(r, z)\, dz'$

donc $-dE_z(0,z) \cdot \frac{r^2}{2} = E_r(r,z) \left[z' \right]_{z'}^{z'+dz}$

d'où $E_r(r,z)\, dz = -\frac{r}{2}\, dE_z(0,z)$

d'où $E_r(M) = -\frac{r}{2} \frac{dE_z}{dz}$

$E_z = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{z}{(R^2+z^2)^{3/2}}$

$E_r = -\frac{r}{2} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{d}{dz} \left(\frac{z}{(R^2+z^2)^{3/2}} \right)$

$E_r(M) = -\frac{r}{2} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{d}{dz} \left[z (R^2+z^2)^{-3/2} \right]$

$= -\frac{r}{2} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left[(R^2+z^2)^{-3/2} - \frac{3}{2} \times 2z \times z (R^2+z^2)^{-5/2} \right]$

$= -\frac{r}{2} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} (R^2+z^2)^{-5/2} \left[R^2 + z^2 - 3z^2 \right]$

Scanné avec CamScanner

$$E_r = \frac{-rQ}{8\pi\varepsilon_0} \frac{R^2 - 2z^2}{(R^2+z^2)^{5/2}}$$

les lignes de champ sont des courbes ouvertes dirigées de +q vers l'infini.

les Distributions vue de l'infini sont considérées ponctuelles. les lignes de champs sont des des demi-droites.

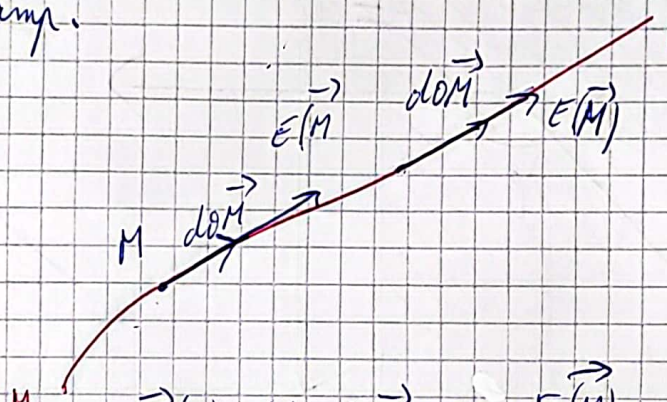
à grande distance les lignes de champ sont des demi droites

à grande distance les surfaces équipotentielles sont des sphères

4/ les lignes de champ sont perpendiculaires aux équipotentielles.

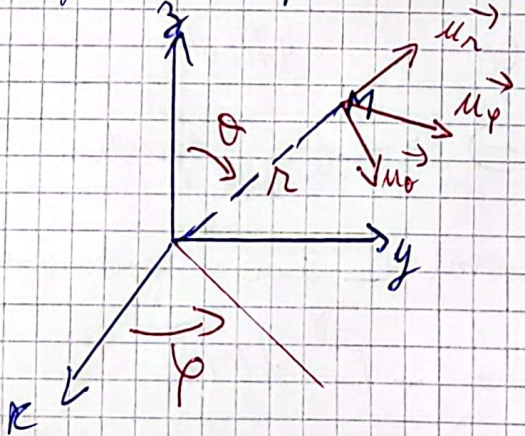
Au centre le champ est nul car le point O est un centre de symetrie.

Rappel: une ligne de champ est une courbe tangente en chacun de ses points au champ.



$$\vec{E}(M) = K.\, d\vec{OM} \quad \text{ou} \quad \vec{E}(M) \wedge d\vec{OM} = \vec{0}$$

Question: Tracez les lignes de champ de $\vec{E}$ en chaque point.



$$\vec{E}(M) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{OM}}{OM^3} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{u_r}$$

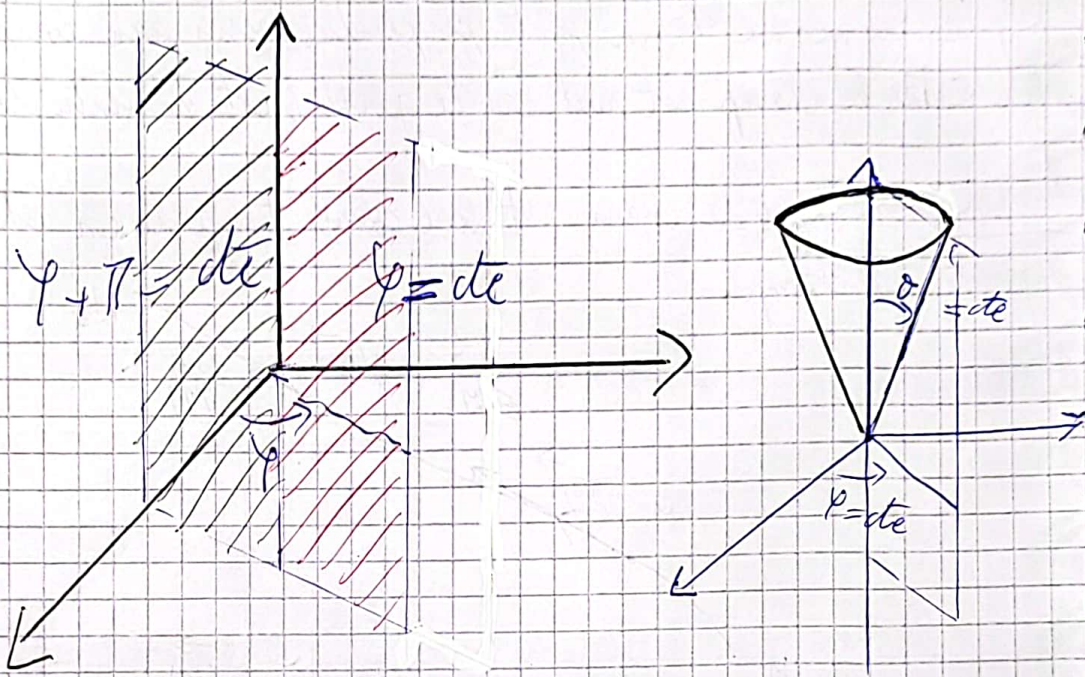
$$\vec{E}(M) \wedge d\vec{OM} = \vec{0} \rightarrow \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} dr \\ r\,d\theta \\ r\sin\theta\, d\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Scanné avec CamScanner

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ -r \sin\theta \, d\varphi = 0 \\ r \, d\theta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d\varphi = 0 \\ d\theta = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \begin{cases} \varphi = cte \\ et \\ \theta = cte \end{cases}$ équation d'un demi-plan

équation d'un cône.



La surface équipotentielle est l'ensemble des pts M tq $V(M) = cte$

$$V(M) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 OM} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$V(M) = cte \Rightarrow r = cte$ équation d'une sphère

Les lignes de champ sont $\perp$ aux surfaces équipotentielles

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{OM}$$

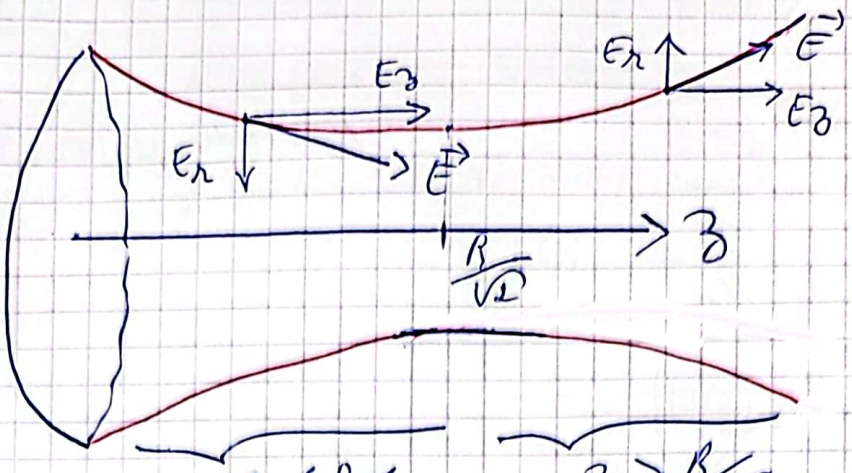
$$\Rightarrow V(M') - V(M) = -\vec{E}(M) \cdot \vec{MM'}$$

Soient M et M' 2 pts très proches appartenant à la même surface équipotentielle ; donc $V(M') = V(M)$

Scanné avec CamScanner

donc $-\vec{E}.\overrightarrow{MM'} = 0$ d'où $\vec{E} \perp \overrightarrow{MM'}$.

E/S)



$z < \frac{R}{\sqrt{2}}$ $\quad$ $z > \frac{R}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow R^2 - 2z^2 > 0$ $\quad$ $\Rightarrow R^2 - 2z^2 < 0$

$\Rightarrow E_r < 0$ $\quad$ $\Rightarrow E_r > 0$.

Scanné avec CamScanner

Analyse de Fourrier :

Objectif :

en sup : $u_e(t) = U_{em}\cos(\omega t + \varphi_e)$ → [ ] → $u_s(t) = U_{sm}\cos(\omega t + \varphi_s)$; U_{sm} ? ; φ_s ?

$$U_{sm} = |\underline{H}(j\omega)|\, U_{em}$$

$$\varphi_s = \varphi_e + \arg\left(\underline{H}(j\omega)\right)$$

en Spé

$u_e(t)$ est périodique → [ ] → $u_s(t) = ?$

I) Décomposition d'un signal périodique :

1) Théorème de Fourrier :

Tout signal périodique $s(t)$ peut se décomposer en une somme de signaux sinusoïdaux de pulsation $n\omega$ (de période $\frac{T}{n}$)

$$\begin{cases} s(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t) \\ s(t) = C\cos(\omega t + \varphi) \\ s(t) = \underline{A}\, e^{j\omega t} + \underline{B}\, e^{-j\omega t} \end{cases}$$

$$n = 0 \Rightarrow T_0 = \frac{T}{0} \to \infty$$

$$s(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)$$

avec : * a_0 est la composante continue, elle représente la valeur moyenne de $s(t)$

* $s_n(t) = a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)$ est le terme harmonique de rang n.

* $s_1(t) = a_1\cos(\omega t) + b_1\sin(\omega t)$ est le terme fondamental.

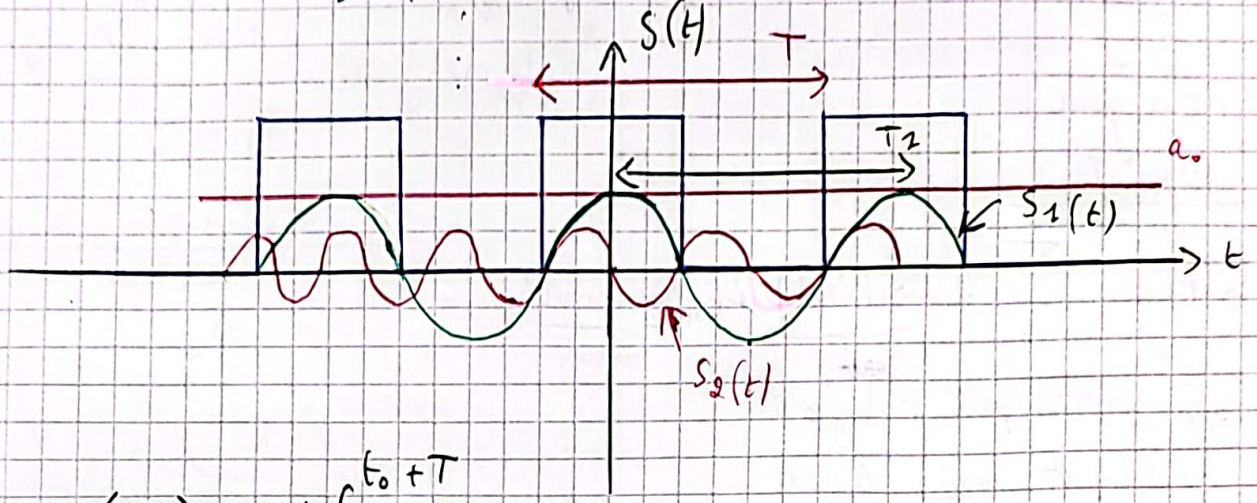
Scanné avec CamScanner

Exp: $S(t) = a_0 + a_1\cos(\omega t) + b_1\sin(\omega t) \rightarrow S_1(t) \rightarrow T_1 = T$

$+ a_2\cos(2\omega t) + b_2\sin(2\omega t) \rightarrow S_2(t) \rightarrow T_2 = \frac{T}{2}$

$+ a_3\cos(3\omega t) + b_3\sin(3\omega t) \rightarrow S_3(t) \rightarrow T_3 = \frac{T}{3}$

$\vdots$



i) $a_0 = \langle S(t) \rangle = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} S(t)\,dt$

ii) $a_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} S(t)\cos(n\omega t)\,dt$

iii) $b_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} S(t)\sin(n\omega t)\,dt$

Démo:

i) $\langle S(t) \rangle = \langle a_0 + \sum a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t) \rangle$

$= \underbrace{\langle a_0 \rangle}_{a_0} + \sum a_n \underbrace{\langle \cos(n\omega t) \rangle}_{=0} + b_n \underbrace{\langle \sin(n\omega t) \rangle}_{=0}$

$\langle S(t) \rangle = a_0$

ii) $\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} S(t)\cos(n\omega t)\,dt = 2\langle S(t)\cos(n\omega t) \rangle$

$= 2\left\langle \left(a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k\cos(k\omega t) + b_k\sin(k\omega t)\right).\cos(n\omega t) \right\rangle$

$= 2a_0 \underbrace{\langle \cos(n\omega t) \rangle}_{0} + 2\sum_{k=1}^{+\infty} a_k a_k \langle \cos(k\omega t)\cos(n\omega t) \rangle + b_k \langle \sin(k\omega t).\cos(n\omega t) \rangle$.

Scanné avec CamScanner

$$= \sum_k a_k \left[\overbrace{\langle \cos((k+n)\omega t) \rangle}^{0} + \overbrace{\langle \cos((k-n)\omega t) \rangle}^{k+n \to 0,\ k=n \to 1} \right]$$

$$+ \sum_k b_k \left[\underbrace{\langle \sin((k+n)\omega t) \rangle}_{0} + \underbrace{\langle \sin((k-n)\omega t) \rangle}_{k+n \to 0,\ k=n \to 0} \right] = a_{k=n}$$

de même pour b_n

2) propriétés :

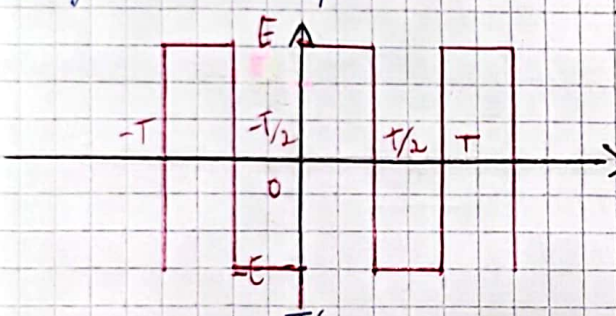
$$S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \underbrace{\cos(n\omega t)}_{\text{pair}} + b_n \underbrace{\sin(n\omega t)}_{\text{impair}}$$

↳ Si $S(t)$ est pair : $b_n = 0$

↳ Si $S(t)$ est impair : $a_n = 0$

3) Exemples :

a) Signal créneaux impair :



$S(t)$ impair $\Rightarrow a_0 = 0$ et $a_{n \geq 1} = 0$

$b_n = ?$ Soit $t_0 = -T/2$

$$S(t) = \begin{cases} -E & \text{si } -T/2 < t < 0 \\ +E & \text{si } 0 < t < T/2 \end{cases}$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} S(t) \sin(n\omega t)\, dt = \frac{2}{T} \left(\int_{-T/2}^{0} S(t) \sin(n\omega t)\, dt + \int_{0}^{T/2} S(t) \sin(n\omega t)\, dt \right)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \left[\int_{-T/2}^{0} -E \sin(n\omega t)\, dt + \int_{0}^{T/2} E \sin(n\omega t)\, dt \right]$$

$$= \frac{2E}{T} \left[\int_{T/2}^{0} -E \sin(-n\omega t)(-dt) + \int_{0}^{T/2} E \sin(n\omega t)\, dt \right]$$

$$= \frac{2E}{T} \times 2 \times \int_{0}^{T/2} \sin(n\omega t)\, dt$$

$$= \frac{4E}{T} \frac{1}{n\omega} \left[-\cos(n\omega t) \right]_0^{T/2}$$

$$= \frac{4E}{T} \frac{1}{n \frac{2\pi}{T}} \left[-\cos\left(n \frac{2\pi}{T} \times \frac{T}{2}\right) + 1 \right] = \frac{2E}{n\pi} \left[1 - (-1)^n \right]$$

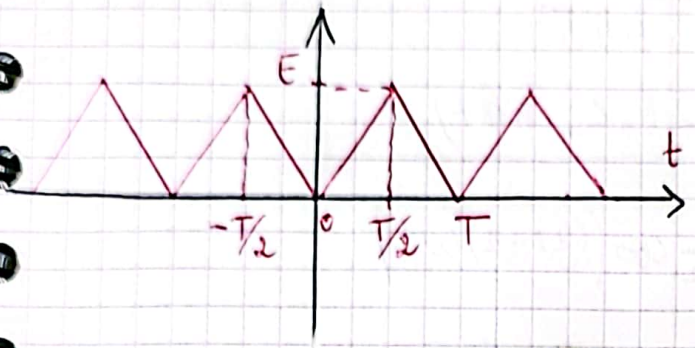
Scanné avec CamScanner

donc $b_n = \begin{cases} 0 & \text{Si } n = 2p \\ \frac{4E}{(4p+1)\pi} & \text{Si } n = 2p+1 \end{cases}$

$$S(t) = \cancel{a_0}^{0} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cancel{\cos(n\omega t)}^{0} + b_n \sin(n\omega t)$$

$$S(t) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{nE}{(2p+1)\pi} \sin\left((2p+1)\omega t\right)$$

b) Signal triangulaire pair:



$S(t)$ est pair $\Rightarrow b_n = 0$

Soit $t_0 = -T/2 \Rightarrow S(t) = \begin{cases} -at & -T/2 < t < 0 \\ at & 0 < t < T/2 \end{cases}$

avec a est la pente $= \frac{E-a}{T/2-0} = \frac{2E}{T}$

$$a_0 = \langle S(t) \rangle = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} S(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{T}\left[\int_{-T/2}^{0} -at\,dt + \int_{0}^{T/2} at\,dt\right]$$

$$= \frac{2}{T}\left[\int_{0}^{T/2} at\,dt\right]$$

$$= \frac{\cancel{2}a}{\cancel{T}} \times \frac{1}{\cancel{2}} \frac{T^{\cancel{2}}}{4}$$

$$= \frac{2E}{\cancel{T}} \times \frac{\cancel{T}}{4}$$

$$a_0 = \frac{E}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} S(t)\cos(n\omega t)\,dt = \frac{2}{T}\left[\int_{-T/2}^{0} -at\cos(n\omega t)\,dt + \int_{0}^{T/2} at\cos(n\omega t)\,dt\right]$$

$$= \frac{2a}{T}\left[2\int_{0}^{T/2} t\cos(n\omega t)\,dt\right]$$

$$= \frac{8E}{T^2}\int_{0}^{T/2} t \times \left(\frac{1}{n\omega}\sin(n\omega t)\right)' dt$$

Scanné avec CamScanner

$$= \frac{8E}{T^2}\left[\left[\frac{1}{n\omega}t\sin(n\omega t)\right]_0^{T/2} - \int_0^{T/2}\frac{1}{n\omega}\sin(n\omega t)\,dt\right]$$

$$= \frac{8E}{T^2}\times\frac{1}{n\frac{2\pi}{T}}\left[\frac{T}{2}\sin\left(n\frac{2\pi}{T}\times\frac{T}{2}\right) + \left[\frac{1}{n\omega}\cos(n\omega t)\right]_0^{T/2}\right]$$

$$= \frac{4E}{T n\pi}\,\frac{1}{n\frac{2\pi}{T}}\left(\cos\left(n\frac{2\pi}{T}\times\frac{T}{2}\right) - 1\right)$$

$$= \frac{2E}{n^2\pi^2}\left((-1)^n - 1\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2p \\ \dfrac{-4E}{(2p+1)^2\pi^2} & \text{si } n = 2p+1 \end{cases}$$

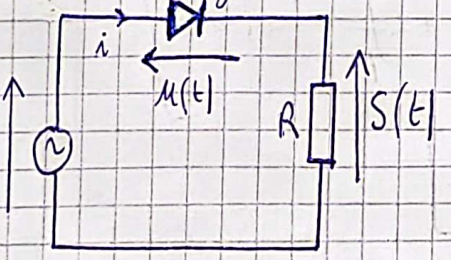
donc $S(t) = a_0 + \sum_{n\geq 1} a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)$

$$= a_0 - \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{4E}{(2p+1)^2\pi^2}\cos\left((2p+1)\omega t\right)$$

T.P: Redressement monoalternance et double alternance:

) Tracez la caractéristique d'une diode idéale

) on considère le montage suivant:



$e(t) = E\sin(\omega t)$

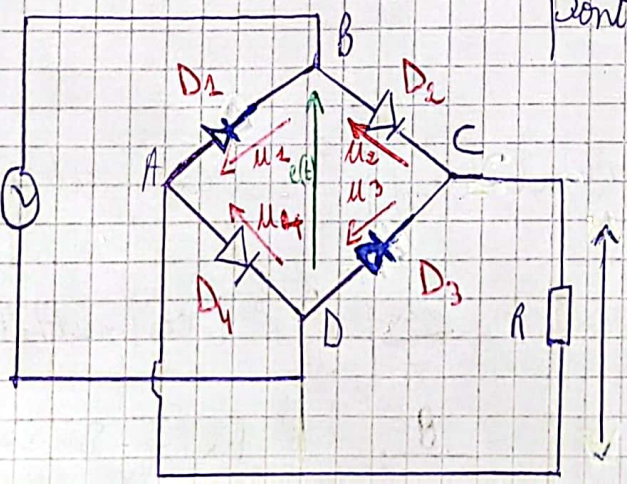
) tracez $S(t)$

) développez $S(t)$ en série de Fourrier.

n considère le montage suivant

pont de graetz

diode école mines 2021



$= E\sin(\omega t)$

$S(t) = V_C - V_A$

$e(t) = V_B - V_D$

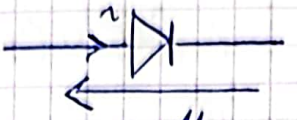
Scanné avec CamScanner

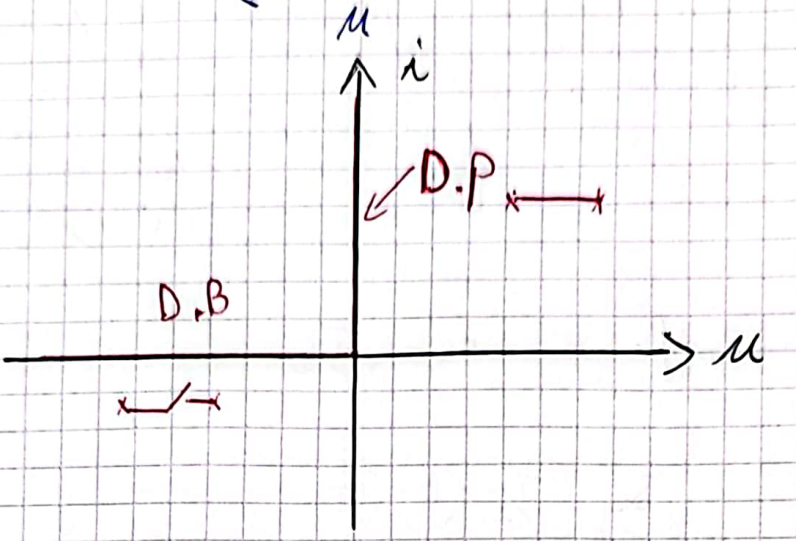
3/a) tracez $S(t)$

3/b) décomposer $S(t)$ en série de Fourrier.

Réponse :

1) La caractéristique est la représentation de $i = f(u)$ (effet ← i, cause ← u)

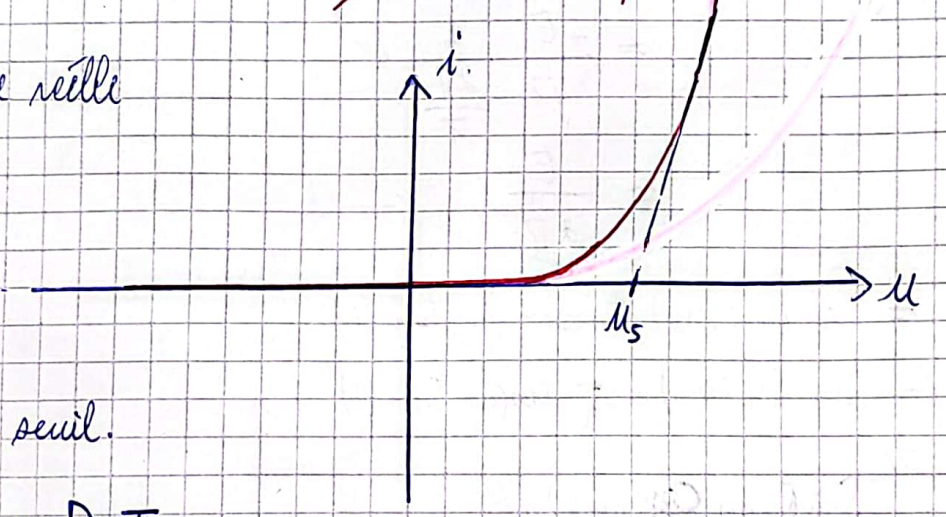




Si $u < 0$; $i = 0$ Diode bloquée

Si $u = 0$; $i > 0$ Diode passante

Rq : diode réelle



u_S = tension seuil.

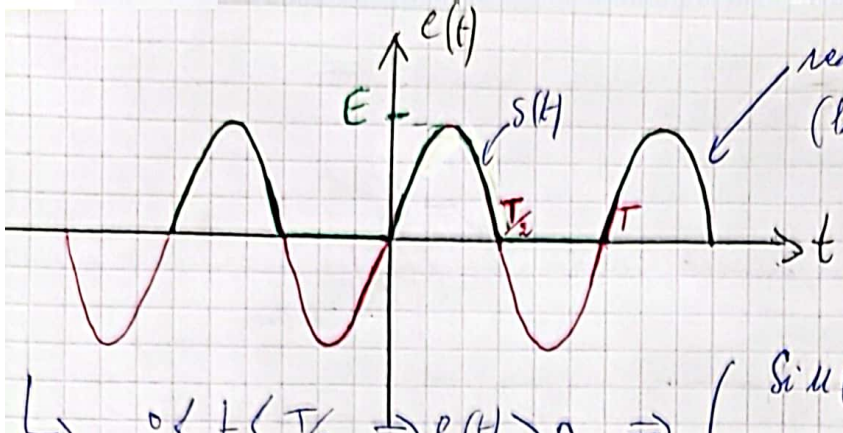
D.R → D.I

pente très grande ≃ |

$u_S \simeq 0$ (si $u_S \ll E$)

2) a) $\begin{cases} e(t) = S(t) + u(t) \\ S(t) = R\,i(t) \end{cases}$

Scanné avec CamScanner



redressement monoalternance (la diode elimine la partie négative)

↳ $0 < t < T/2 \Rightarrow e(t) > 0 \Rightarrow$ $\begin{cases} \text{Si } u(t) < 0 \Rightarrow i = 0 \Rightarrow S(t) = 0 \\ \quad \Rightarrow e(t) = u(t) < 0 \text{ ABS car } e(t) > 0 \\ \text{Si } u(t) = 0 \Rightarrow i(t) > 0 \Rightarrow e(t) = S(t) > 0 \end{cases}$

↳ $T/2 < t < 0 \Rightarrow e(t) < 0 \Rightarrow$ $\begin{cases} \text{Si } u(t) < 0 \Rightarrow i = 0 \Rightarrow S(t) = 0 \\ \quad \Rightarrow e(t) = u(t) < 0 \text{ OK} \\ \text{Si } u(t) = 0 \Rightarrow i(t) > 0 \Rightarrow e(t) = S(t) > 0 \\ \quad \text{ABS car } e(t) < 0 \end{cases}$

2|b) $\begin{cases} S(t) = E \sin(\omega t) & \text{Si } 0 < t < T/2 \\ S(t) = 0 & \text{Si } T/2 < t < T \end{cases}$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^{T/2} E\sin(\omega t) = \frac{E}{T}\frac{-1}{\omega}\left[\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\right]_0^{T/2}$$

$$= \frac{+E}{T}\,\frac{1}{\frac{2\pi}{T}} \times 2$$

$$= \frac{E}{\pi}$$

$\cos(a \mp b) = \cos(a)\cos(b) \mp \sin(a)\sin(b)$

$\sin(a \mp b) = \sin(a)\cos(b) \mp \cos(a)\sin(b)$

$$a_n = \frac{2}{T}E\int_0^{T/2} \sin(\omega t)\cos(n\omega t)\,dt \qquad \sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]$$

$$= \frac{E}{T}\left[\int_0^{T/2} \sin\left((n+1)\omega t\right)dt + \int_0^{T/2} \sin\left((n-1)\omega t\right)dt\right]$$

$$= \frac{E}{T}\left[\frac{-1}{(n+1)\omega}\left[\cos\left((n+1)\omega t\right)\right]_0^{T/2} + \frac{1}{(n-1)\omega}\left[\cos\left((n-1)\omega t\right)dt\right]_0^{\frac{T}{2}}\right]$$

$$= \frac{E}{T}\left[\frac{-1}{(n+1)\omega}\left[\cos\left((n+1)\pi\right) - 1\right] + \frac{1}{(n-1)\omega}\left[\cos\left((n-1)\pi\right) - 1\right]\right]$$

$$= \frac{E}{T}\left[\frac{-1}{(n+1)\omega}\left[(-1)^{n+1} - 1\right] + \frac{1}{(n-1)\omega}\left[(-1)^{n-1} - 1\right]\right)$$

Scanné avec CamScanner

$$a_n = \frac{E}{T}\left[\frac{1}{(n+1)\omega}\left((-1)^n+1\right) + \frac{1}{(n-1)\omega}\left((-1)^{n-1}-1\right)\right]$$

$$= \frac{E}{T}\left((-1)^n+1\right)\left[\frac{1}{(n+1)\omega} - \frac{1}{(n-1)\omega}\right] = \frac{E}{2\pi}\,\frac{\left[1-(-1)^{n+1}\right]}{n^2-1} \times (n-1-n-1)$$

donc $a_n = \frac{E}{\pi}\,\frac{1-(-1)^{n+1}}{1-n^2} = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2p+1 \\ \frac{2E}{(1-4p^2)\pi} & \text{si } n = 2p \end{cases}$

$$b_n = \frac{2E}{T}\int_0^{T/2} \sin(\omega t)\sin(n\omega t)\,dt$$

$\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$

$$= \frac{2E}{T} \times \frac{1}{2}\int_0^{T/2}\left[\cos\left((1-n)\omega t\right) - \cos\left((1+n)\omega t\right)\right]dt$$

$$= \frac{E}{T}\left[\frac{\sin\left((1-n)\omega t\right)}{(1-n)\omega} - \frac{\sin\left((1+n)\omega t\right)}{(1+n)\omega}\right]_0^{T/2}$$

$$= \frac{E}{T\omega}\left[\frac{\sin\left((n-1)\omega t\right)}{(n-1)\omega} - \frac{\sin\left((n+1)\omega t\right)}{(n+1)}\right]_0^{\pi/2}$$

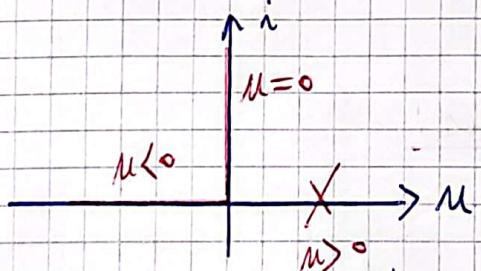
$$b_n = \frac{E}{2\pi}\left[\frac{\sin\left((n-1)\frac{2\pi}{T} \times \frac{T}{2}\right) - 0}{(n-1)} - \frac{\sin\left((n+1)\frac{2\pi}{T} \times \frac{T}{2} - 0\right)}{(n+1)}\right]$$

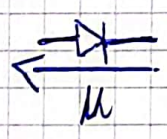
$$= \frac{E}{2}\left[\frac{\sin\left((n-1)\pi\right)}{(n-1)\pi} - \frac{\sin\left((n+1)\pi\right)}{(n+1)\pi}\right]$$

$$b_n = \frac{E}{2}\,\frac{\sin\left((n-1)\pi\right)}{(n-1)\pi} \quad \begin{cases} \to 0 & \text{si } n \neq 1 \\ \to E/2 & \text{si } n = 1 \end{cases} \qquad \text{d'où}$$

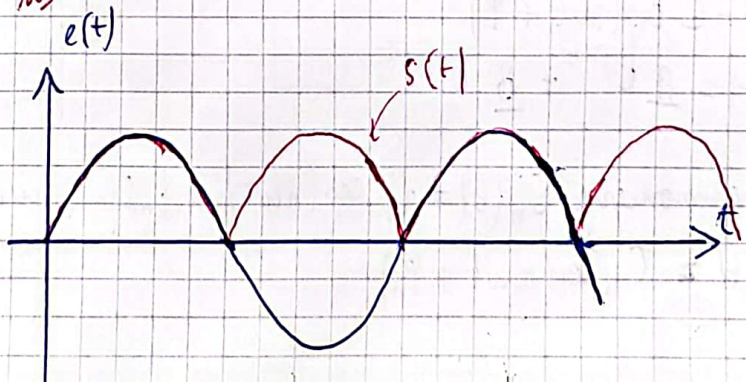
$$a_n = \frac{E}{\pi}\,\frac{1-(-1)^{n+1}}{1-n^2} = \begin{cases} \to 0 & \text{si } n = 2p+1 \\ \to \frac{2E}{(1-4p^2)\pi} & \text{si } n = 2p \end{cases}$$

3)a)



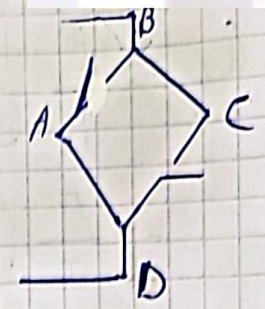


Voir ci-après



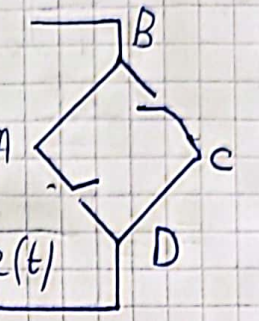
Scanné avec CamScanner

Si $0 < t < T/2 \Rightarrow e(t) > 0 \Rightarrow \begin{cases} D_1 \text{ et } D_3 \text{ bloquées} \\ D_2 \text{ et } D_4 \text{ passantes} \end{cases}$



d'où $\begin{cases} V_A = V_D \\ V_C = V_B \end{cases} \Rightarrow V_B - V_D = V_C - V_A \Rightarrow S(t) = e(t)$

Si $T/2 < t < T \Rightarrow e(t) < 0 \Rightarrow \begin{cases} D_1 \text{ et } D_3 \text{ passantes} \\ D_2 \text{ et } D_4 \text{ bloquées} \end{cases}$



d'où $\begin{cases} V_A = V_B \\ V_D = V_C \end{cases} \Rightarrow V_B - V_D = V_A - V_C \Rightarrow S(t) = -e(t)$

$$S(t) = \underset{\text{D.R}}{S(t)} + \underset{\text{S.R}}{S_{S.R}\left(t + \frac{T}{2}\right)} \quad \text{or} \quad S_{S.R}(t) = \frac{E}{\pi} + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{2E}{(1-4p^2)\pi} \cos(2p\omega t) + \frac{E}{2}\sin(\omega t)$$

↑ double redressé ; ↑ Simple redressé

$$S_{S.R}\left(t + \frac{T}{2}\right) = \frac{E}{\pi} + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{2E}{(1-4p^2)\pi} \cos\left(2p\omega t + 2p\omega\frac{T}{2}\right) + \frac{E}{2}\sin\left(\omega t + \omega\frac{T}{2}\right)$$

or $\omega\frac{T}{2} = \frac{2\pi}{T} \times \frac{T}{2} = \pi$

$\rightarrow 2p\omega\frac{T}{2} = 2p\pi \Rightarrow \cos\left(2p\omega t + 2p\omega\frac{T}{2}\right) = \cos(2p\omega t)$

$\rightarrow \sin\left(\omega t + \omega\frac{T}{2}\right) = \sin(\omega t + \pi) = -\sin(\omega t)$

donc $S_{S.R}\left(t + \frac{T}{2}\right) = \frac{E}{\pi} + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{2E}{(1-4p^2)\pi} \cos(2p\omega t) - \frac{E}{2}\sin(\omega t)$

d'où $S_{D.R}(t) = \frac{2E}{\pi} + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{4E}{(1-4p^2)\pi} \cos(2p\omega t)$

Rq : $b_n = 0$ car $S_{D.R}(t)$ est pair

5) Autre forme de la serie de Fourrier :

$x(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$

$x(t) = C\cos(\omega t + \varphi)$

$x(t) = \underline{A}\, e^{j\omega t} + \underline{B}\, e^{-j\omega t}$

l'harmonique $S_n(t) = a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)$ peut s'écrire sous la forme

$S_n(t) = C_n\cos(n\omega t + \varphi_n)$

Scanné avec CamScanner

donc $S(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$

$$\begin{cases} C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \\ \tan(\varphi_n) = \dfrac{-b_n}{a_n} \end{cases}$$

en effet ; * $S_n(t) = C_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$

$= C_n \cos(\varphi_n)\cos(n\omega t) + (-C_n \sin(\varphi_n)) \sin(n\omega t)$

* $S_n(t) = a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$

par identification : $\begin{cases} a_n = C_n \cos(\varphi_n) \\ b_n = -C_n \sin(\varphi_n) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_n^2 + b_n^2 = C_n^2 \\ \dfrac{b_n}{a_n} = -\tan(\varphi_n) \end{cases}$

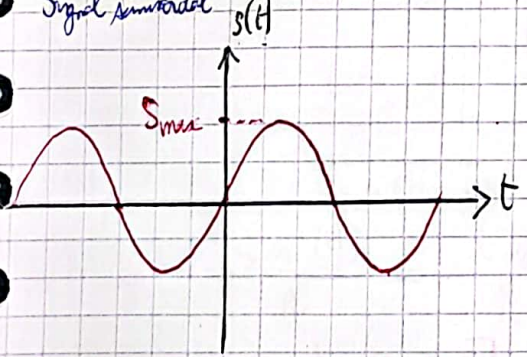
$$\Rightarrow \begin{cases} C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \\ \tan(\varphi_n) = \dfrac{-b_n}{a_n} \end{cases} \qquad C_0 = a_0$$

On définit la valeur efficace d'un signal par : $S_{eff} = \sqrt{\langle S^2(t) \rangle}$

avec $\langle S^2(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} S^2(t)\,dt$

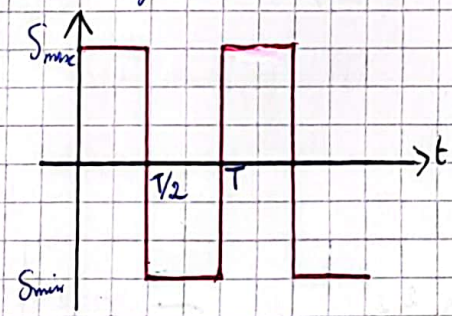
Exps :

Signal sinusoïdal

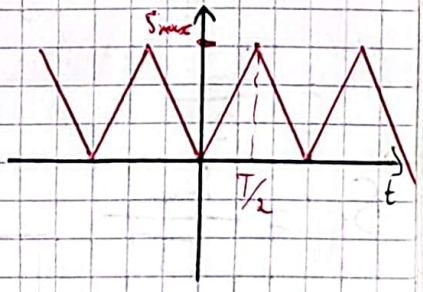


$S(t) = S_{max} \sin(\omega t)$

Signal créneaux



Signal triangulaire



Calculer la valeur efficace

Scanné avec CamScanner

Signal sinusoïdal :

$$S_{eff}^2 = \langle S^2(t) \rangle = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} S_{max}^2 \sin^2(\omega t)\,dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} S_{max}^2 \frac{1-\cos(2\omega t)}{2}\,dt$$

$$= \frac{S_{max}^2}{2T}\left[T - \frac{1}{2\omega}\left[\sin(\omega t)\right]_{-T/2}^{T/2}\right]$$

$$= \frac{S_{max}^2}{2} \Rightarrow S_{eff} = \frac{S_{max}}{\sqrt{2}}$$

Signal créneaux :

$$S_{eff}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T S^2(t)\,dt = \frac{1}{T}\left[\int_0^{T/2} S_{max}^2\,dt + \int_{T/2}^{T} (-S_{max})^2\,dt\right]$$

$$= \frac{S_{max}^2}{T}\int_0^T dt = S_{max}^2$$

donc $S_{eff} = S_{max}$

Signal triangulaire :

$$S_{eff}^2 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} S^2(t)\,dt = \frac{1}{T}\left[\int_{-T/2}^{0} (-at)^2\,dt + \int_0^{T/2} (at)^2\,dt\right]$$ avec a est la pente $= \frac{2S_{max}}{T}$

$$S_{eff}^2 = \frac{1}{T} \times a^2 \times \left[\int_{-T/2}^{0} t^2\,dt + \int_0^{T/2} t^2\,dt\right] = \frac{1}{T}\left(\frac{2S_{max}}{T}\right)^2 \times \left[\frac{t^3}{3}\right]_{-T/2}^{T/2}$$

$$= \frac{4S_{max}^2}{T^2} \times \frac{2}{3} \times \left(\frac{T}{2}\right)^3$$

$$= \frac{S_{max}^2}{3}$$

$$S_{eff} = \frac{S_{max}}{\sqrt{3}}$$

En général :

$$\boxed{S_{eff}^2 = C_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{C_n^2}{2}}$$

Formule de Parseval

Scanné avec CamScanner

Démo:

$$S_{eff}^2 = \langle s^2(t) \rangle = \left\langle \left(C_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \cos(n\omega t + \varphi_n) \right)^2 \right\rangle$$

$$S_{eff}^2 = \langle C_0^2 \rangle + 2C_0 \underbrace{\left\langle \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \cos(n\omega t + \varphi_n) \right\rangle}_{0} + \left\langle \left(\sum_{n=1}^{+\infty} C_n \cos(n\omega t + \varphi_n) \right)^2 \right\rangle$$

$$S_{eff}^2 = C_0^2 + \left\langle \left(\sum_{n=1}^{+\infty} C_n \cos(n\omega t + \varphi_n) \right)^2 \right\rangle$$

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2a(b+c) + 2bc$$

$$S_{eff}^2 = C_0^2 + \left\langle \sum_{n=1}^{+\infty} C_n^2 \cos^2(n\omega t + \varphi_n) \right\rangle + 2 \left\langle \sum_{n=2}^{+\infty} C_n \cos(n\omega t + \varphi_n) \times \sum_{k=n+1}^{+\infty} C_k \cos(k\omega t + \varphi_k) \right\rangle$$

$$= C_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} C_n^2 \underbrace{\langle \cos^2(n\omega t + \varphi_n) \rangle}_{1/2} + \sum_{n=1}^{+\infty} C_n C_k \left[\underbrace{\langle \cos((k+n)\omega t + \varphi_n + \varphi_k) \rangle}_{0} + \right.$$

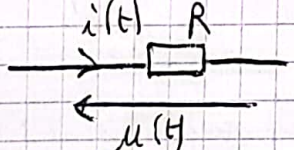
$$\underbrace{\left. \langle \cos((k-n)\omega t + \varphi_n - \varphi_k) \rangle \right]}_{0}$$

car $k \neq n$

d'où la formule de parseval

Signification physique de la valeur efficace d'un signal:

la valeur efficace d'un signal est la valeur qu'il faut donner à ce signal en régime continu pour dissiper la même puissance dans un résistor.



$$p(t) = u(t)\, i(t) = \frac{u^2(t)}{R}$$

$$P_{moy} = \frac{\langle u^2(t) \rangle}{R} = \frac{U_{eff}^2}{R}$$

(*) pour un signal continu $u(t) = u_0$

$$\Rightarrow U_{eff}^2 = \langle u^2(t) \rangle = \langle u_0^2 \rangle = u_0^2 \Rightarrow \frac{14,1}{\sqrt{2}} = 10\,V$$

$$P_{moy} = \frac{u_0^2}{R} \quad (1)$$

Scanné avec CamScanner

(*) pour un signal sinusoidal $u(t) = U_{max}\cos(\omega t + \varphi)$

$\Rightarrow U_{eff}^2 = \frac{U_{max}^2}{2} \Rightarrow P_{moy}^{24,2V} \rightarrow P_{moy} = 1kW$

$P_{moy} = \frac{U_{max}^2}{2R}$ (2)

par identification: $\frac{U_0^2}{R} \leftrightarrow \frac{U_{max}^2}{2R} \Rightarrow U_0 = \frac{U_{max}}{\sqrt{2}} = U_{eff}$

Si $u_0(t) = C_0 \rightarrow P_{moy} = \frac{\langle u_0^2(t)\rangle}{R} = \frac{C_0^2}{R} = P_0$

Si $u_1(t) = C_1\cos(\omega t + \varphi_1) \rightarrow P_{moy} = \frac{\langle u_1^2(t)\rangle}{R} = \frac{C_1^2}{2R} = P_1$

Si $u_2(t) = C_2\cos(2\omega t + \varphi_2) \rightarrow P_{moy} = \frac{\langle u_2^2(t)\rangle}{R} = \frac{C_2^2}{2R} = P_2$

$\vdots$

Si $u_n(t) = C_n\cos(n\omega t + \varphi_n) \rightarrow P_{moy} = \frac{\langle u_n^2(t)\rangle}{R} = \frac{C_n^2}{2R} = P_0$

Si $u(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} C_n\cos(n\omega t + \varphi_n)$:

$\rightarrow P_{moy_T} = \frac{\langle u^2(t)\rangle}{R} = \frac{C_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{C_n^2}{2}}{R} = \frac{C_0^2}{R} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{C_n^2}{2R}$

$= P_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} P_n$

donc $\boxed{P_{moy_T} = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n}$

A considère $u(t)$ comme décomposée en série de Fourrier, on dirait que le résistor décompose le signal, puis somme les puissances moyennes de chaque terme sinusoïdal.

La puissance moyenne totale dissipée par un signal périodique est la somme des puissances moyennes dissipées par chaque terme du signal périodique.

c) Serie de Fourrier en notation complexe:

La décomposition en série de Fourrier peut s'écrire sous la forme:

$S(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \underline{C_n} e^{jn\omega t}$ avec $\underline{C_n} = \frac{a_n - jb_n}{2}$ et $\underline{C_0} = C_0 = a_0$

Démo:

$S(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)$

$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\left(\frac{e^{jn\omega t} + e^{-jn\omega t}}{2}\right) + b_n\left(\frac{e^{jn\omega t} - e^{-jn\omega t}}{2j}\right)$

Scanné avec CamScanner

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{a_n - j b_n}{2} \right) e^{j n \omega t} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{a_n + j b_n}{2} \right) e^{-j n \omega t}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{a_n + j b_n}{2} \right) e^{-j n \omega t} \underset{n=-n'}{=} \sum_{n'=-1}^{-\infty} \left(\frac{a_{-n'} + j b_{-n'}}{2} \right) e^{j n' \omega t} \quad (*)$$

$$\downarrow n' = n$$

$$= \sum_{-\infty}^{n=-1} \left(\frac{a_{-n} + j b_{-n}}{2} \right) e^{j n \omega t}$$

$$\text{or} \begin{cases} a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{T+t_0} S(t) \cos(n\omega t) dt \\ b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{T+t_0} S(t) \sin(n\omega t) dt \end{cases}$$

d'où $\begin{cases} a_{-n} = a_n \\ b_{-n} = -b_n \end{cases}$

donc $(*) = \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{a_n - j b_n}{2} \right) e^{j n \omega t}$

donc $S(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{a_n - j b_n}{2} \right) e^{j n \omega t} + \sum_{-\infty}^{-1} \left(\frac{a_n - j b_n}{2} \right) e^{j n \omega t}$

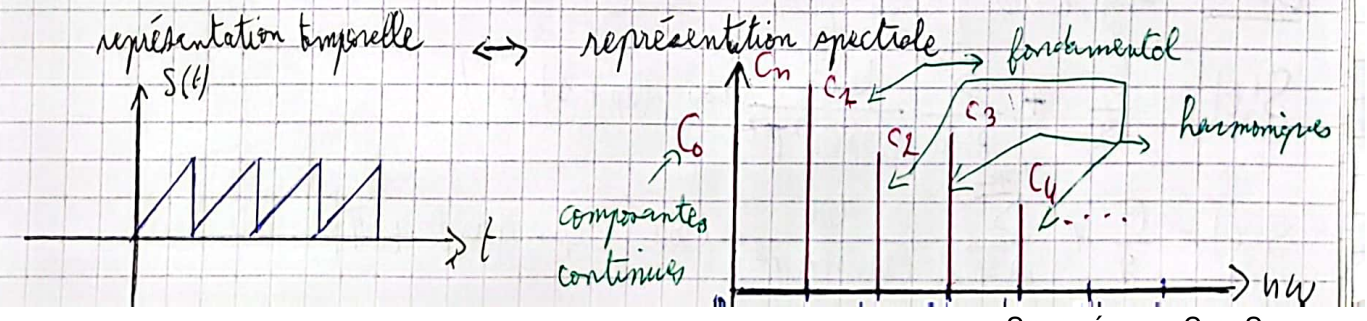
d'où $S(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \underline{C_n} e^{j n \omega t}$ avec $\underline{C_n} = \frac{a_n - j b_n}{2}$ et $\underline{C_0} = a_0$

⚠ $|\underline{C_n}| = \frac{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{2} = \frac{C_n}{2} \neq C_n$.

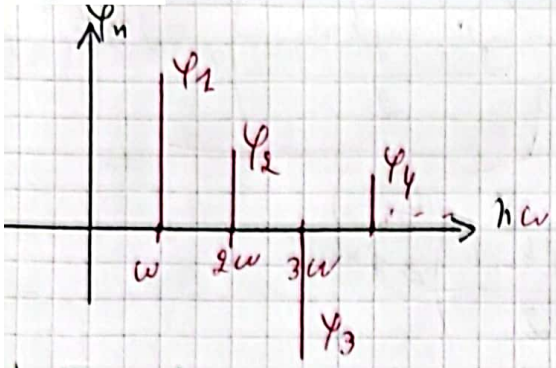
$S(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$

7) Spectre de Fourrier :

a) définition : C'est la représentation en batons de C_n et de φ_n en fonction de $n\omega$ ou de n.



Scanné avec CamScanner



C_0 peut être négative

$C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ est toujours > 0.

si il y'a un signe moins il entre dans la phase φ_n qui peut être < 0

c) Exemples: Tracez le spectre de Fourrier.

EX1: Signal créneaux impair.

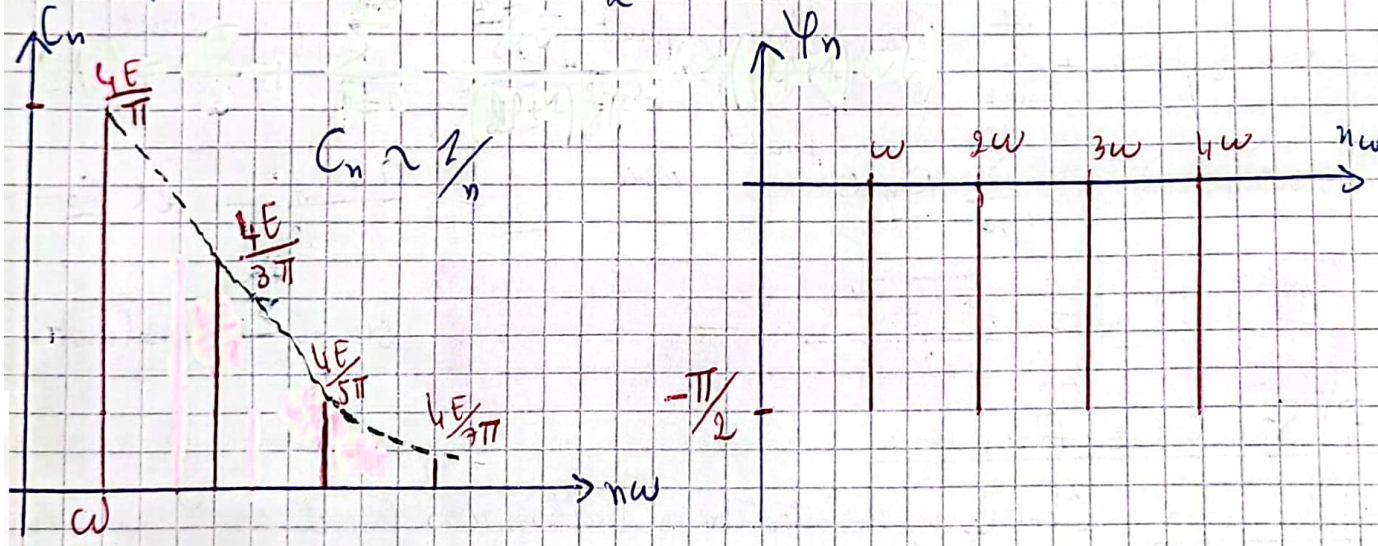
$$S(t) = \sum_{p=0}^{+\infty} \underbrace{\frac{4E}{(2p+1)\pi}}_{b_{2p+1}} \sin((2p+1)\omega t)$$

$$= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{4E}{(2p+1)\pi} \cos\left((2p+1)\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= C_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

(*) $C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = b_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2p \\ \frac{4E}{n\pi} & \text{si } n = 2p+1 \end{cases}$

(*) $C_0 = 0$; $\varphi_n = -\frac{\pi}{2}$ avec $n = 2p+1$



EX2: Signal triangulaire pair

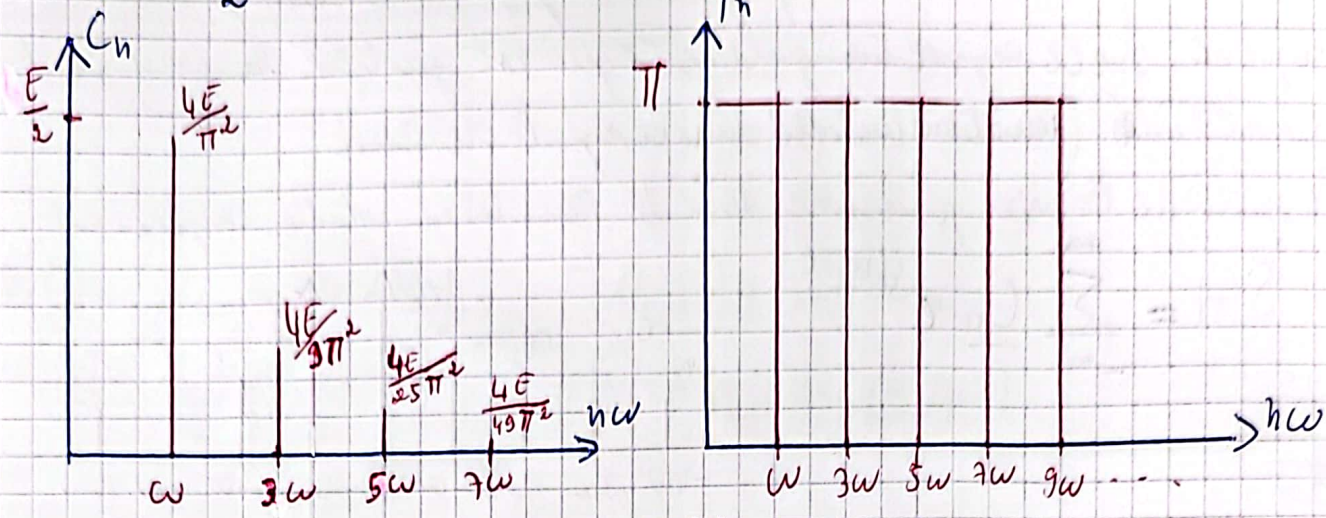
$$S(t) = \frac{E}{2} - \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{4E}{(2p+1)^2\pi^2} \cos((2p+1)\omega t)$$

$$S(t) = \frac{E}{2} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{4E}{(2p+1)^2\pi^2} \cos((2p+1)\omega t + \pi)$$

Scanné avec CamScanner

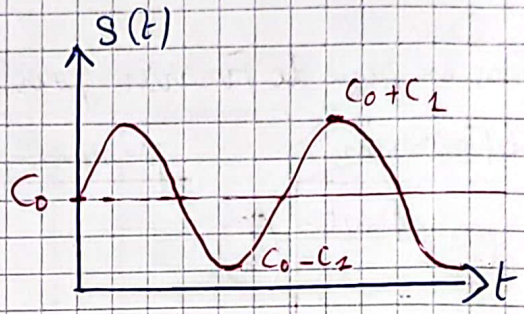
$$C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = |a_n| = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2p \\ \frac{4E}{n^2\pi^2} & \text{si } n = 2p+1 \end{cases}$$

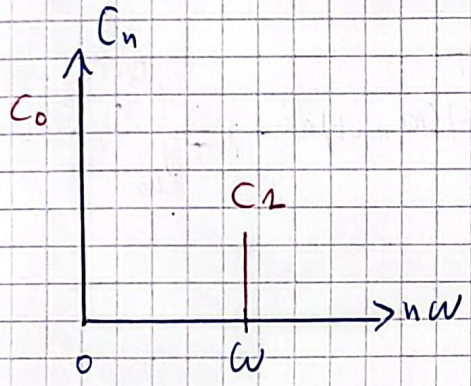
$$C_0 = \frac{E}{2} \quad ; \quad \varphi_n = \pi$$



EX3: Signal sinusoïdal.

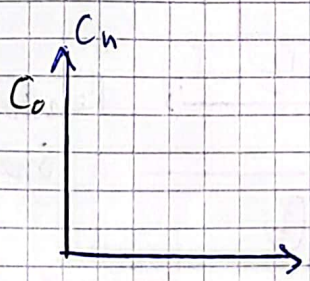
$$S(t) = C_0 + C_1 \cos(\omega t + \varphi)$$



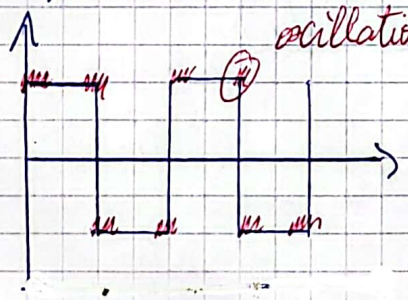


EX4: Signal continu :

$$S(t) = C_0$$



$2\Omega\omega \rightarrow \frac{T}{2\Omega}$



Scanné avec CamScanner

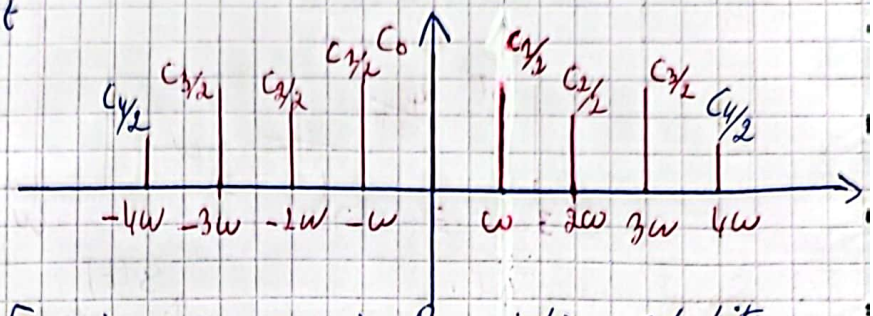
pour un signal créneaux $C_n \sim \frac{1}{n}$

pour un signal triangulaire $C_n \sim \frac{1}{n^2}$

donc le signal créneaux comporte beaucoup plus d'harmoniques en haute fréquence que le signal triangulaire ce qui justifie la présence des discontinuités (variations brutales) dans le signal créneaux.

Le spectre de Fourrier pour une serie de Fourrier en notation complexe est:

$$S(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \underline{C_n}\, e^{jn\omega t}$$



La décomposition en serie de Fourrier pour un signal periodique est dite transformée de Fourrier

pour un signal périodique:

$$S(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \underline{C_n}\, e^{jn\omega t} \quad (1)$$

avec $\underline{C_n} = \frac{a_n - j b_n}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} S(t)\cos(n\omega t)\,dt - j\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} S(t)\sin(n\omega t)\,dt \right)$

$$\underline{C_n} = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} S(t)\left(\cos(n\omega t) - j\sin(n\omega t)\right)dt$$

$$\underline{C_n} = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} S(t)\, e^{-jn\omega t}\,dt \quad (2)$$

Représentation Temporelle $\xrightarrow{(2)}$ Représentation Spatiale

Représentation Spatiale $\xrightarrow{(1)}$ Représentation Temporelle

pour un signal non périodique: (résultats admis à ne pas apprendre)

Transformée de Fourrier

$$S(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \underline{C}(\omega)\, e^{j\omega t}\,d\omega$$

joue le rôle de $n\omega$ avec n de façon continue

Scanné avec CamScanner

② $\underline{C}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$ Transformée de Fourrier inverse

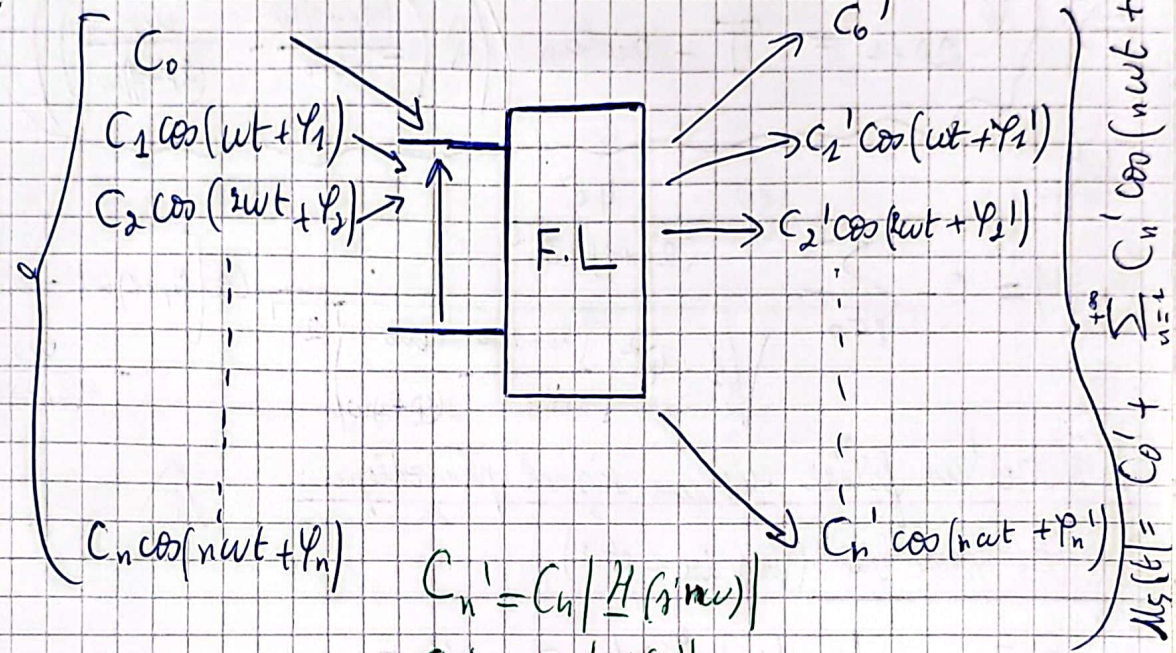
II) Filtrage d'un signal périodique:

Rappel:

$$u_e(t) = U_{em}\cos(\omega t + \varphi_e)$$
$$u_s(t) = U_{s_m}\cos(\omega t + \varphi_s)$$
$$\Rightarrow \begin{cases} U_{s_m} = |\underline{H}(j\omega)|\, U_{em} \\ \varphi_s = \varphi_e + \arg(\underline{H}(j\omega)) \end{cases}$$

1) Théorème de Superposition:

$$u_e(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$$



$$C_n' = C_n\,|\underline{H}(jn\omega)|$$
$$C_0' = C_0\,|\underline{H}(0)|$$
$$\varphi_n' = \varphi_n + \arg(\underline{H}(jn\omega))$$

2) Exps

↳ filtre passe bande $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{1}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$

↳ Signal triangulaire pair

$$u_e(t) = \frac{E}{2} - \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{4E}{(2p+1)^2\pi^2}\cos((2p+1)\omega t)$$
$$= \frac{E}{2} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{4E}{(2p+1)^2\pi^2}\cos((2p+1)\omega t + \pi)$$

↳ $u_s(t) = ?$

Scanné avec CamScanner

$$C_0' = C_0 \times H(0) = \frac{E}{2} \times 0 = 0$$

$$C_n' = |H(jn\omega)| C_n = \frac{C_n}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{n\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{n\omega}\right)^2}}$$

$$C_n' = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2p \\ \dfrac{\frac{4E}{(2p+1)^2 \cdot \pi^2}}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{(2p+1)\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{(2p+1)\omega}\right)^2}} & \text{si } n = 2p+1 \end{cases}$$

$$\varphi_n' = \varphi_n + \arg(H(j\omega)) = \varphi_n + \arg(1) - \arg\left(1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \left\{ \varphi'_{2p+1} = \pi - \arctan\left(Q\left(\frac{(2p+1)\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{(2p+1)\omega}\right)\right) \right\}$$

Ccl :

$$u_s(t) = 0 - \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\frac{4E}{(2p+1)^2\pi^2}}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{(2p+1)\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{(2p+1)\omega}\right)^2}} \cos\left[(2p+1)\omega t - \arctan\left(Q\frac{(2p+1)\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{(2p+1)\omega}\right)\right]$$

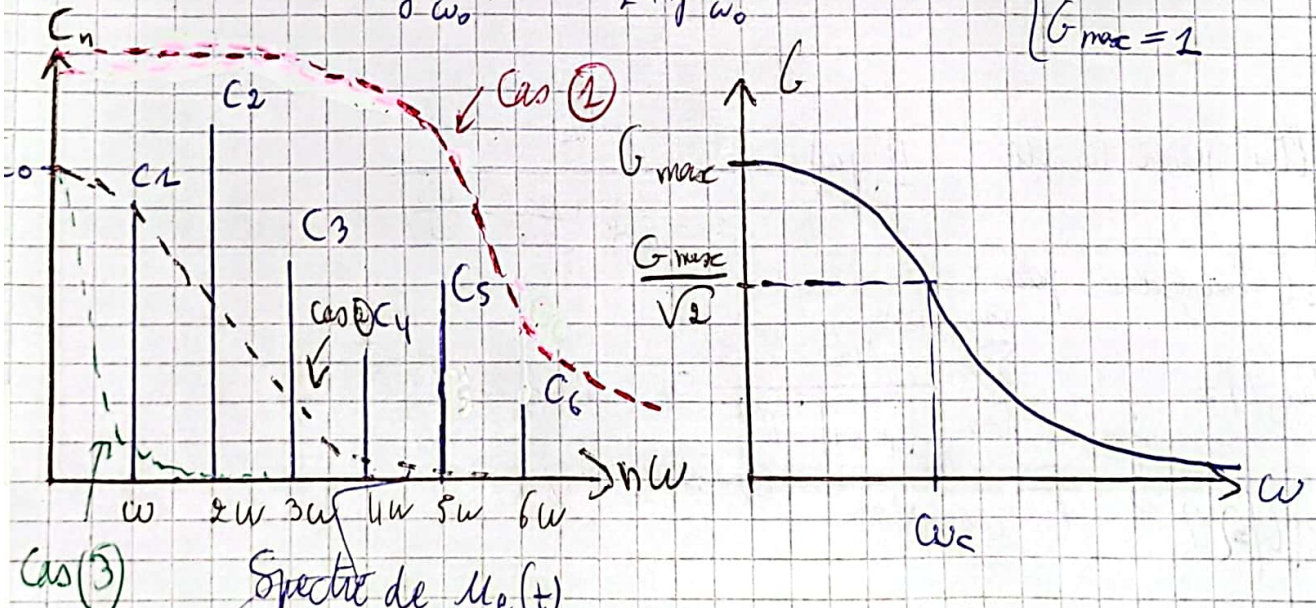
3) Effet d'un filtre sur un signal périodique :

a) Filtre passe bas : (voir doc 1 et 2)

Ex 1 : Filtre passe bas de 1er ordre avec $H_0 = 1$

$$H(j\omega) = \frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

Rq : $\begin{cases} \omega_0 = \omega_c \\ G_{max} = 1 \end{cases}$



Cas (3) Spectre de $u_e(t)$

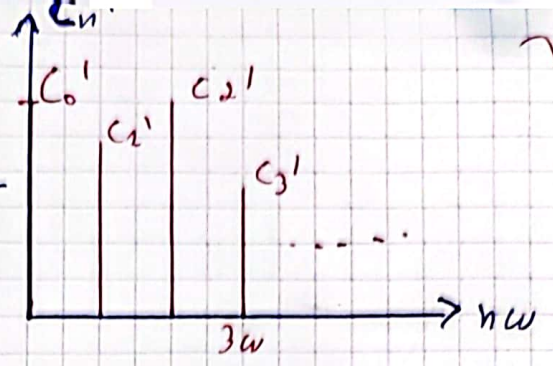
Scanné avec CamScanner

Cas n°1 : $\omega_c \gg \omega$

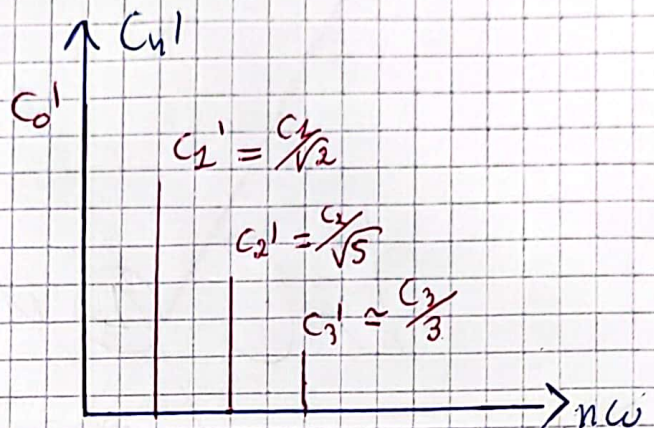
$$C_n' = |H(jn\omega)| C_n = \frac{C_n}{\sqrt{1+\left(\frac{n\omega}{\omega_c}\right)^2}}$$

Δ $C_0' = C_0$ $\forall \frac{\omega}{\omega_c}$

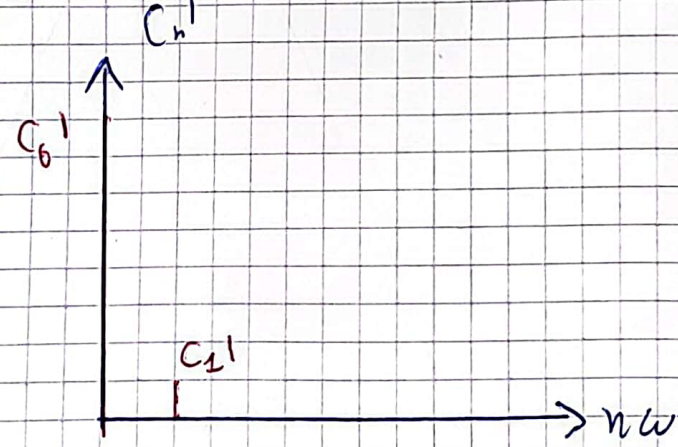
$\omega \ll \omega_c \Rightarrow C_n' \simeq C_n$



Cas n°2 : $\omega = \omega_c \Rightarrow C_n' = \frac{C_n}{\sqrt{1+n^2}} \underset{n^2 \gg 1}{\simeq} \frac{C_n}{n}$

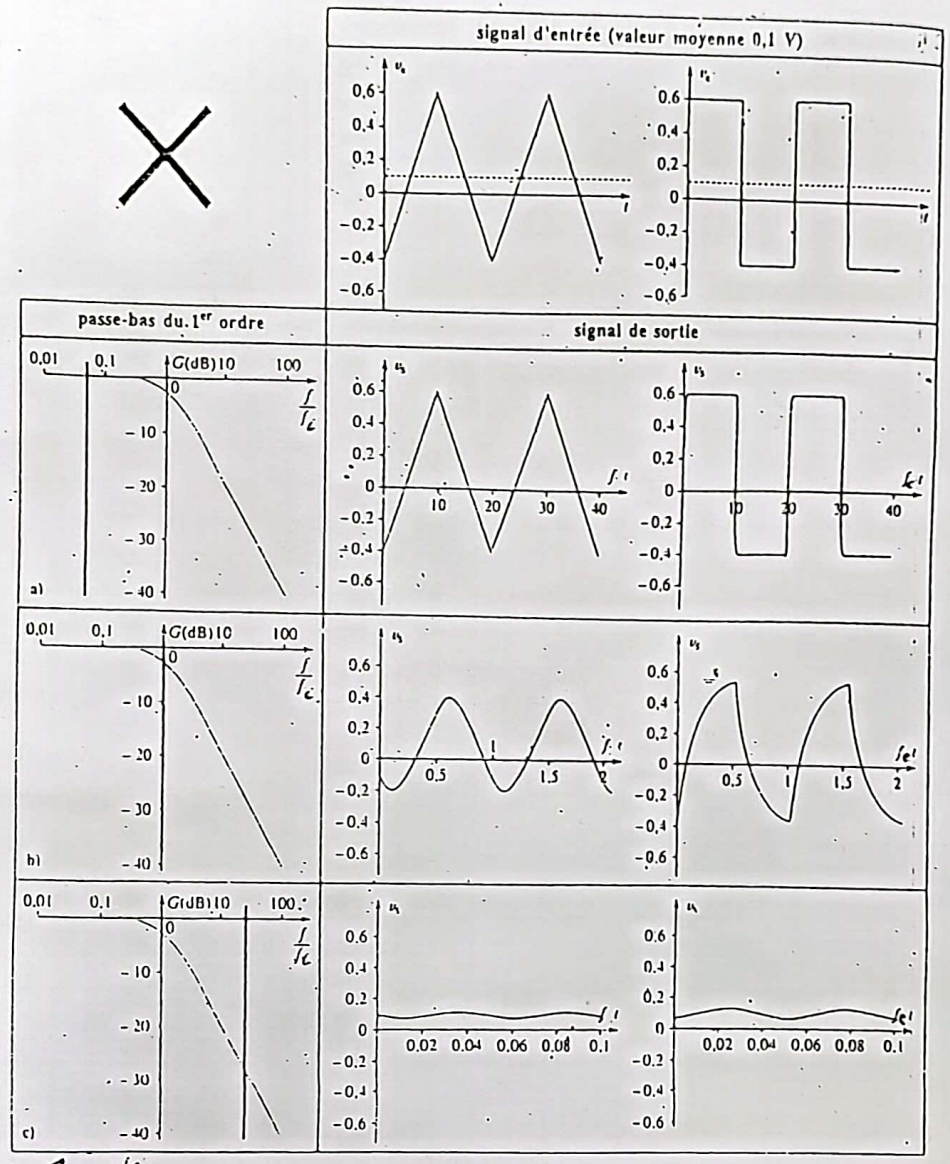


Cas n°3 : $\omega_c \ll \omega \Rightarrow C_n' \simeq 0$ avec $n \neq 0$.

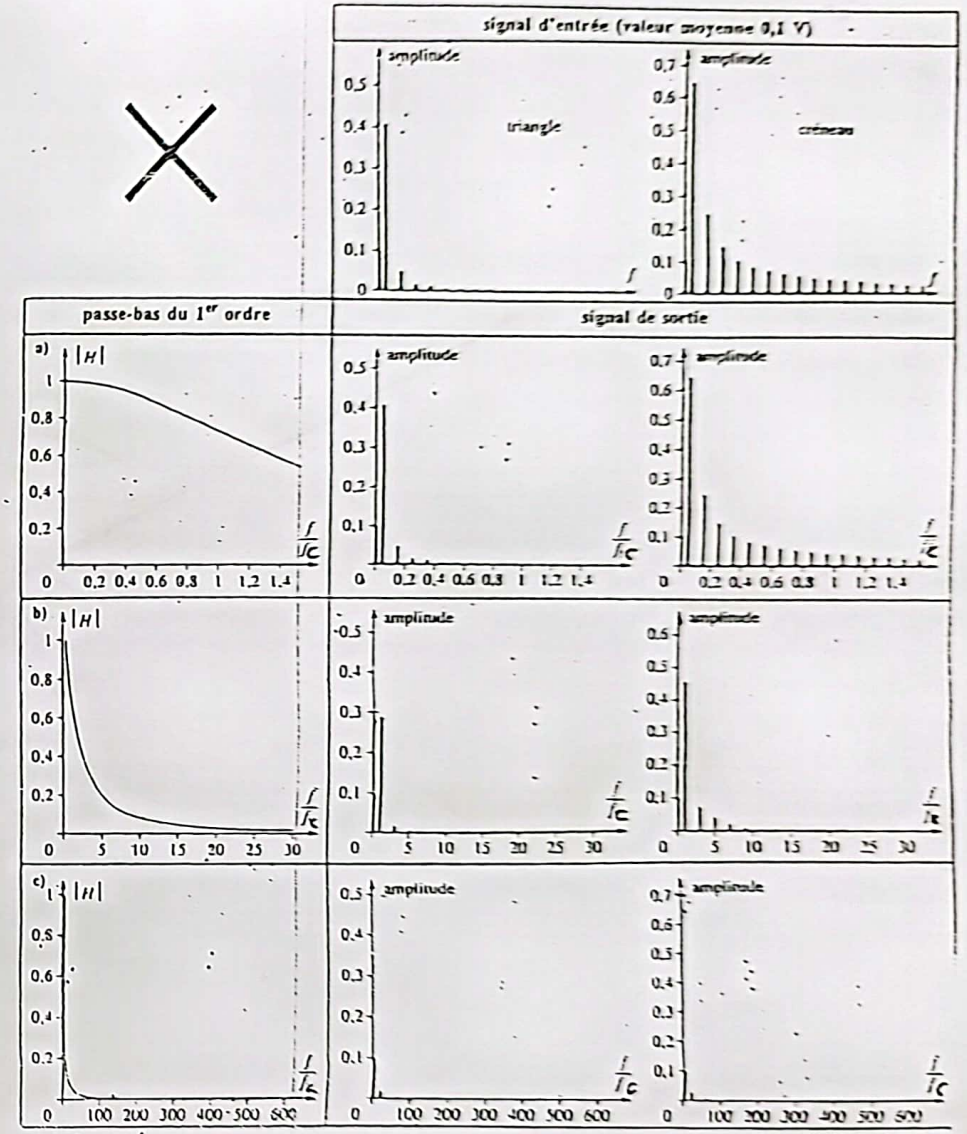


Spectres de $u_s(t)$

Scanné avec CamScanner

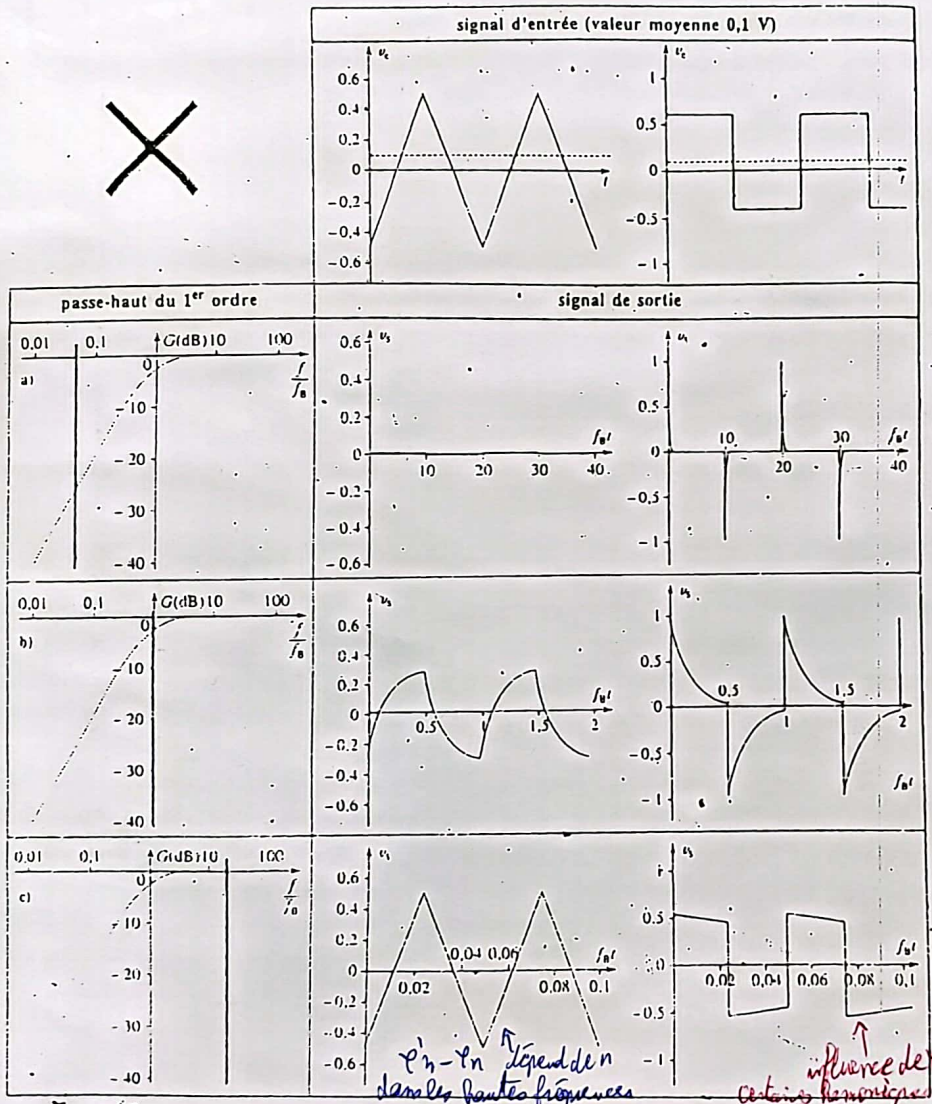


Doc. 1 $f = \frac{f_c}{20}$: signal dans la bande passante. Le signal de sortie est transmis sans déformation importante sauf au niveau des discontinuités du créneau. b. $f = f_c$: signal en limite de bande passante. Le signal de sortie est fortement déformé. Sa valeur moyenne (0,1 V) est identique à celle du signal d'entrée. c. $f = 20 f_c$: signal hors de la bande passante. L'ondulation du signal de sortie est très faible. Seule la composante continue est transmise sans atténuation



Doc. 2 $f = \frac{f_c}{20}$. Seuls les harmoniques de rang élevé sont atténués. Ceci explique la déformation du signal de sortie au niveau des discontinuités.
b. $f = f_c$. Seuls la composante continue et quelques harmoniques sont transmis. Le signal de sortie est très déformé.
c. $f = 20 f_c$. Seule la composante continue est transmise. Les différents harmoniques sont très atténués.

Scanné avec CamScanner



Doc. 3 $f = \frac{f_c}{20}$: signal hors de la bande passante. Le signal de sortie n'est pas transmis. Il ne reste que des pics d'amplitude 1 V au niveau des discontinuités du signal créneau. b. $f = f_c$: signal en limite de bande passante. Le signal est fortement déformé. Sa valeur moyenne est nulle. Le signal correspondant au créneau conserve les discontinuités de 1 V du signal d'entrée. c. $f = 20 f_c$: signal dans la bande passante. Le signal est voisin de la composante variable du signal d'entrée.

$\varphi_2' - \varphi_n$ dépend de n dans les hautes fréquences

influence de φ_n certains harmoniques sont déphasés de façons différentes

$\varphi_2' - \varphi_1 \neq \varphi_2 - \varphi_1$
$\neq \varphi_n' - \varphi_n$
$\Rightarrow$ déformation du signal

Doc. 4 . $f = \frac{f_c}{20}$. Seuls les harmoniques de rang élevé sont transmis. Ils créent l'impulsion d'amplitude 1 V dans le cas du créneau. b. $f = f_c$. La composante continue est éliminée et le fondamental est atténué. Le signal de sortie est très déformé. c. $f = 20 f_c$. Seule la composante continue est éliminée. Le signal de sortie correspond à la composante variable du signal d'entrée. Sa déformation est dû au déphasage introduit par le filtre.

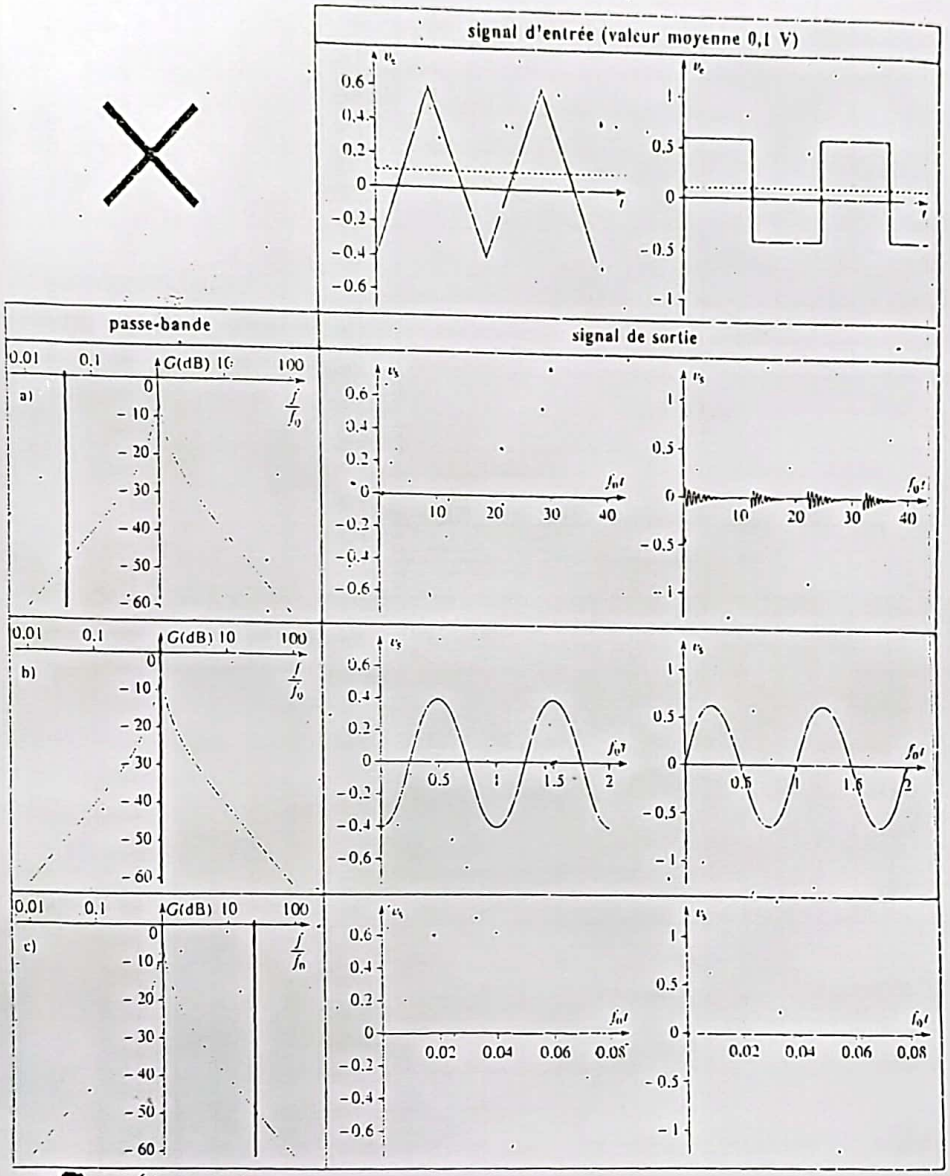
b) filtre passe haut (voir doc 3 et 4) :

$H(j\omega) = H_0 \frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}$

Rq : $\omega_0 = \omega_c$ et $G_{max} = 1$

$H_0 = 1$

Scanné avec CamScanner



Doc. 5 $f = \frac{f_0}{20}$: signal hors de la bande passante. Le signal n'est pas transmis, il ne reste que des oscillations de faible amplitude semblables à celles du régime pseudo-périodique amorti dans le cas du créneau. b. $f = f_0$: signal dans la bande passante. Le signal de sortie est sinusoïdal de fréquence f_0. c. $f = 20 f_0$: signal hors de la bande passante. Le signal de sortie est quasiment nul.

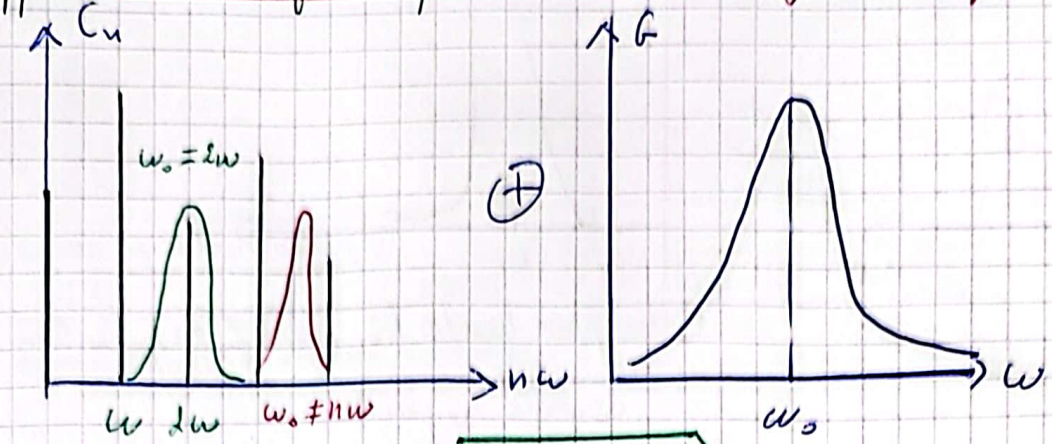
Doc. 6 $f = \frac{f_0}{20}$ Seuls les harmoniques de fréquence voisine de f_0 sont transmis. Leur amplitude est négligeable dans le cas du triangle et dans le cas du créneau, ils créent le signal pseudo-périodique de fréquence f_0 observé.
b. $f = f_0$. Seule la composante de fréquence f est transmise. Le signal de sortie est quasiment sinusoïdal.
c. $f = 20 f_0$. Aucun des harmoniques n'est transmis. Le signal de sortie est négligeable.

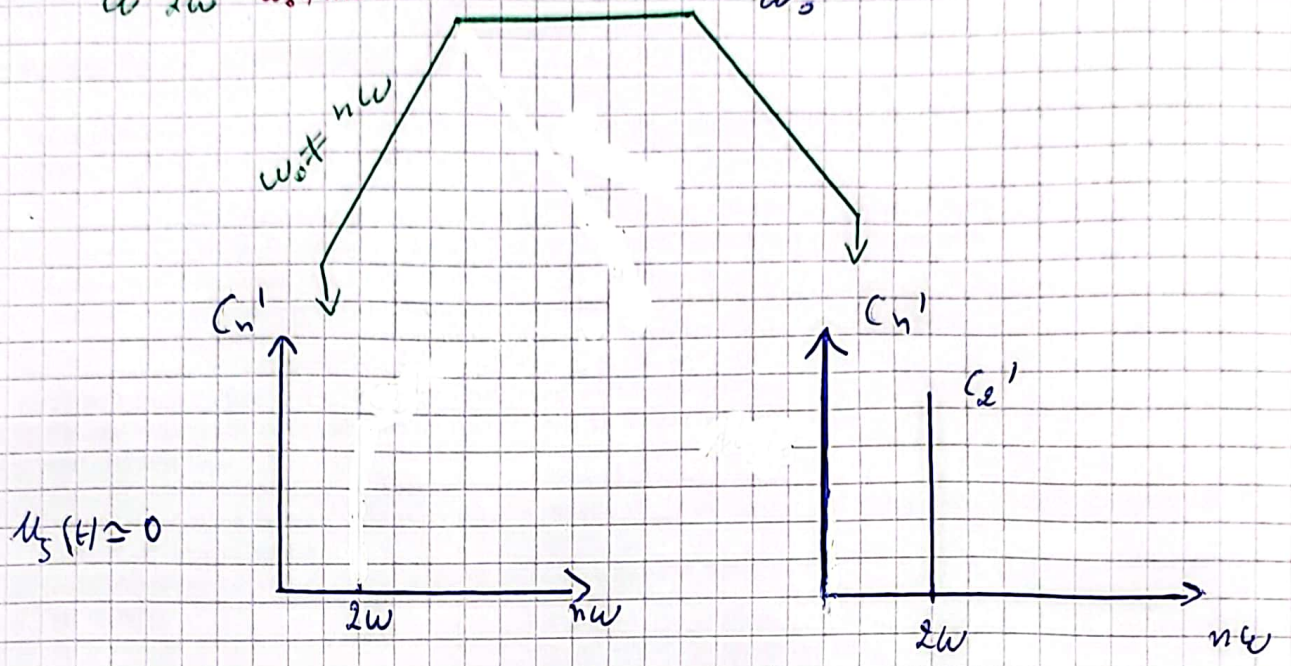
c) Filtre passe bande (voir doc Sect 6) : $H(j\omega) = \frac{H_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$

$H_0 = 1$ et $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q} \ll \omega_0$ filtre très sélectif.

Scanné avec CamScanner

Application du filtre passe bande : (Analyseur de fourrier CNC 1997)





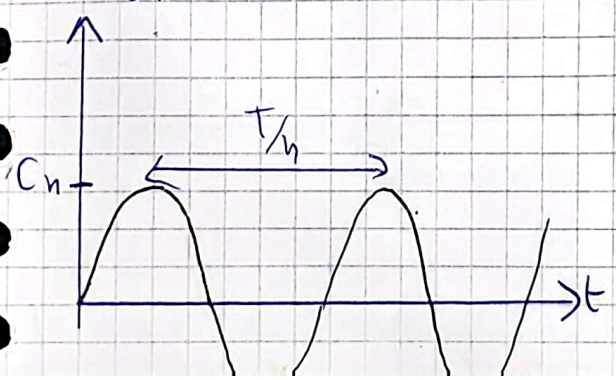
$$C_n' = |\underline{H}(j n\omega)|\, C_n = \frac{C_n}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{n\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{n\omega}\right)^2}}$$

le filtre est très selectif $Q \gg 1 \Rightarrow$ $\begin{cases} C_n' \simeq 0 & \text{si } \omega_0 \neq n\omega \\ C_n & \text{si } \omega_0 = n\omega \end{cases}$

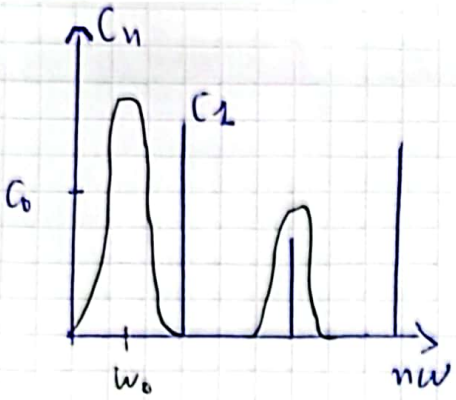
$$\varphi_n' = \varphi_n - \arctan Q\left(\frac{n\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{n\omega}\right)$$

$$\Rightarrow u_s(t) = C_n' \cos(n\omega t + \varphi_n')$$
$$= C_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n)$$

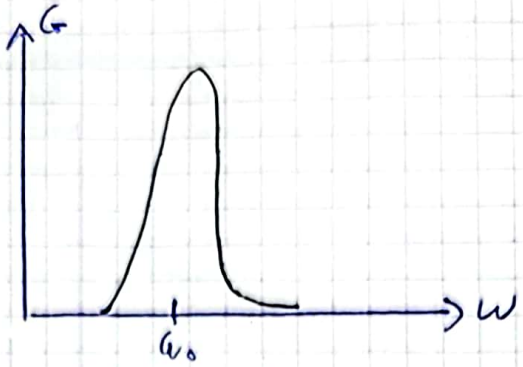
$$\varphi_n' = \varphi_n - \arctan\left(Q\left(\frac{n\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{n\omega}\right)\right) \Rightarrow \varphi_n' = \varphi_n$$



Scanné avec CamScanner



+



Filtre passe bande très sélectif de pulsation centrale réglable.

Scanné avec CamScanner

Concours Commun Marocain		Session : 1997
MP et TSI	Epreuve de Physique II	Durée : 4 h

Les différentes parties de ce sujet sont indépendantes.
Les correcteurs apprécieront des copies correctement présentées. Les numéros des questions traitées seront clairement indiqués.

Première Partie : Electronique ; Analyseur de Fourier.

Les amplificateurs opérationnels utilisés sont idéaux et fonctionnent en régime linéaire. Pour les applications numériques, on prendra $R_0 = 1M\Omega$, $R_1 = 10k\Omega$, $R_2 = 3k\Omega$, $R_b = R_e$, $C_0 = 3nF$.

1. Déterminer en régime sinusoïdal de pulsation ω, le rapport u_s / i_1 dans le montage (M) de la figure 1. En déduire que la partie A du montage (M) est équivalente à une inductance L et une résistance R_e placées en parallèle.
2. Déterminer de même le rapport u_s / i_2 dans le montage (M) de la figure 1.
3. En déduire un schéma équivalent au montage (M), comportant, en plus de la résistance R_0, une résistance R, une capacité C et une inductance L. Donner les expressions de L, R et C en fonction des éléments du montage (M).
4. Déterminer la fonction de transfert complexe $\underline{H}(j\omega) = u_s / u_e$ du montage (M).
5. La figure 2 donne l'allure du module de $\underline{H}(j\omega)$, noté $H(\omega)$, en fonction de ω.
   a. Donner l'expression de la pulsation ω_0 pour laquelle ce module est maximal, ainsi que l'expression de ce module maximal noté H_{max}.
   b. Calculer numériquement C_A et R_A pour avoir $\omega_0 = 2000\pi$ rd.s^{-1} et $H_{max} = 0,5$.
   c. Soient les pulsations ω_1 et ω_2 définies par $H(\omega_1) = H(\omega_2) = H_{max} / 10$. Ecrire (sans la résoudre) l'équation qui permet de calculer ces deux pulsations.
   d. Avec les valeurs numériques du 5b, la résolution de cette équation donne $\omega_1 = 0,994\ \omega_0$ et $\omega_2 = 1,006\ \omega_0$. Commenter ces valeurs.
6. On place désormais en tension d'entrée un signal périodique de période T_0, avec $T_0 = 10^{-3}$s. La décomposition en série de Fourier de ce signal s'écrit sous la forme : $u_e(t) = E_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(2\pi n \frac{t}{T_0}\right)$

Les coefficients a_n sont tous inférieurs à 1 volt (afin d'éviter tout risque de saturation des amplificateurs opérationnels du montage).

   a. Former, en représentation complexe, la décomposition en série de Fourier de la tension de sortie $u_s(t)$.
   b. C_A et R_A ayant les valeurs calculées en 5b, donner une expression simple approchée de $u_s(t)$.

7. Expliquer comment peut-on, en ajustant les valeurs de certains éléments du montage, mesurer successivement les coefficients de la décomposition en série de Fourier du signal d'entrée.

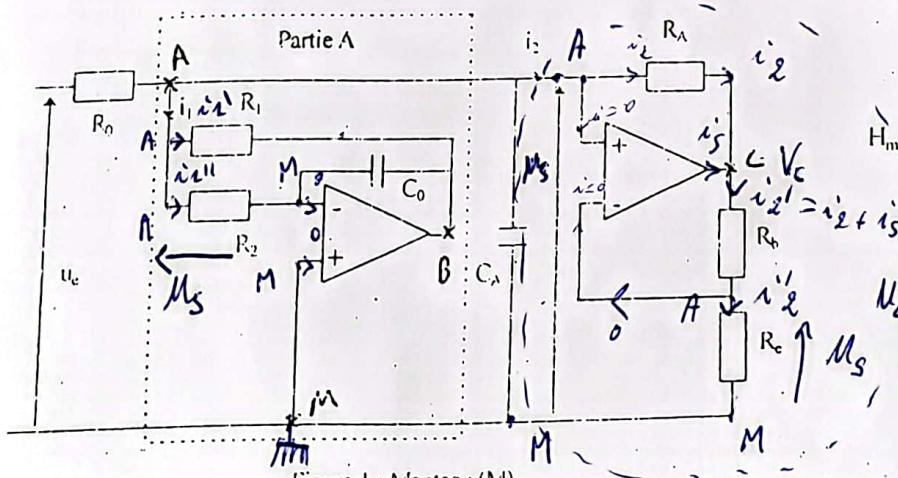


Figure 1 : Montage (M)

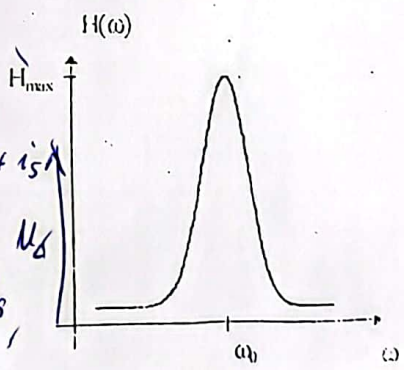


Figure 2

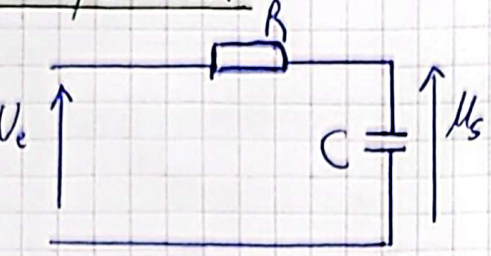
Montage à résistance négative

Scanné avec CamScanner

4) Caractères intégrateur et dérivateur :

a) Caractère intégrateur ; Filtre passe bas :

Exp : circuit RC.



$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U_s}}{\underline{U_e}} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \frac{1}{RC}$$

↳ En B.F : $\omega \ll \omega_0 \Rightarrow \underline{U_s} \simeq \underline{U_e}$

→ En H.F : $\omega \gg \omega_0$ ⟶ $\underline{U_s} \simeq 0$

↳ $\underline{U_s} \simeq \frac{1}{j\frac{\omega}{\omega_0}} \underline{U_e} = \frac{\omega_0}{j\omega} \underline{U_e}$

en notation réelle :

$$U_s(t) = \omega_0 \int U_e(t)\,dt + cte$$

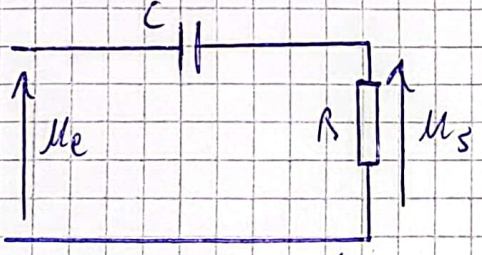
Ce filtre passe bas joue le rôle d'un intégrateur en H.F

→ $f(t) = at + b \Rightarrow \int f(t)\,dt = at^2 + bt + c$

Voir Doc 1 et 2 cas ©.

b) Caractère dérivateur : Filtre passe haut :

Exp : circuit CR.



$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U_s}}{\underline{U_e}} = \frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \frac{1}{RC}$$

→ En H.F : $\omega_0 \ll \omega \Rightarrow \underline{U_s} \simeq \underline{U_e}$

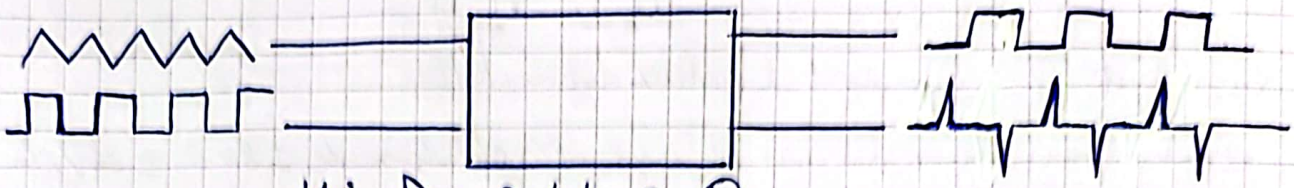
Scanné avec CamScanner

En B.F : $\omega \ll \omega_0$ $\rightarrow \underline{u_s} = 0$

$\hookrightarrow \underline{u_s} = \frac{j\omega}{\omega_0} \underline{u_e}$

En notation réelle : $u_s(t) = \frac{1}{\omega_0} \frac{du_e}{dt}$

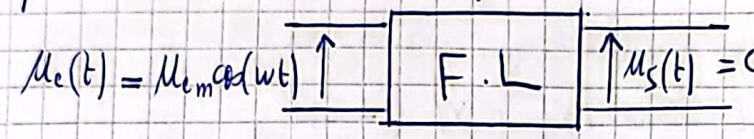
Ce filtre passe haut joue le rôle d'un dérivateur en B.F.



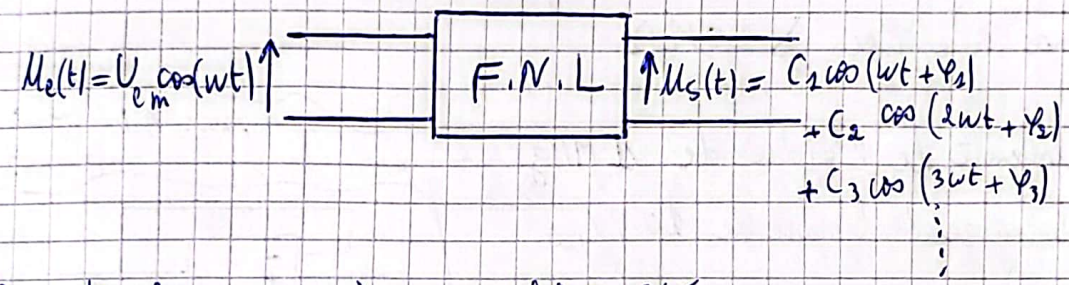
Voir Doc 3 et 4 cas (a)

5) Taux de distorsion harmonique :

On applique un signal sinusoïdal $u_e(t) = U_{e\,max} \cos(\omega t)$ à l'entrée d'un filtre quelconque alors le fondamental du signal de sortie correspond à la linéarité du filtre



$\Rightarrow \delta_h = 0$



et les autres harmoniques à sa non linéarité.

On définit le taux de distorsion harmonique par :

$$\delta_h = \frac{S_{eff}(n \geq 2)}{S_{eff}(n=1)} = \frac{\sqrt{\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{C_n^2}{2}}}{\sqrt{\frac{C_1^2}{2}}} = \frac{\sqrt{\sum_{n=2}^{+\infty} C_n^2}}{C_1}$$

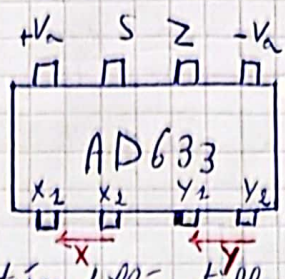
Le filtre est d'autant plus linéaire que δ_h est voisin de 0.

Scanné avec CamScanner

Chapitre 2 : Modulation et démodulation d'amplitude :

I) Le multiplieur analogique :

1) présentation :



- $(X_1 ; X_2)$ et (Y_1, Y_2) sont 2 entrées différentielles
- V_a et $-V_a$ sont deux bornes d'une alimentation de $\pm 8V$ à $\pm 18V$; la valeur typique est $\pm 15V$
- Z est une tension d'entrée, S est la sortie.

Le multiplieur réalise l'opération : $\boxed{S(t) = K X(t) Y(t) + Z(t)}$ $\quad K = 0,1\ V^{-1}$

Rq :

- Souvent $Z(t)$
- le multiplieur accepte des tensions $|X|$ et $|Y| \leqslant 12V$

2) Caractéristiques :

↳ impédance d'entrée $> 10 M\Omega$

↳ bande passante de l'ordre de 1 MHz

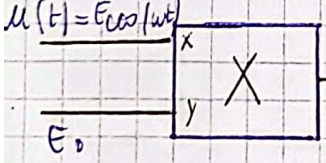
↳ vitesse de balayage de l'ordre de $10\ V/\mu s$.

↳ tension décalage de l'ordre de 5 mV

Ccl : Les défauts du multiplieur sont négligeables.

II) Multiplication des signaux :

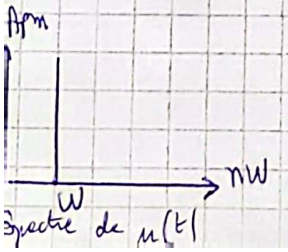
1) Multiplication d'un signal sinusoïdal par une tension constante :

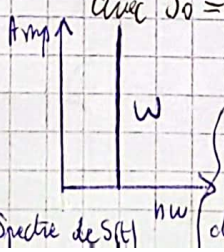


$S(t) = kXY$

$= S_0 \cos(\omega t)$

avec $S_0 = k E_0 E$



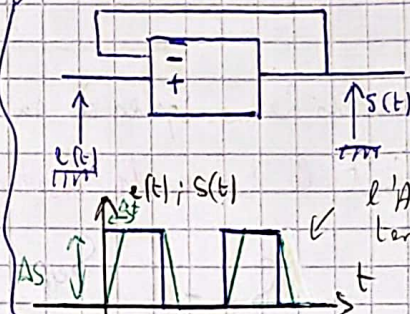


$\sigma = \left(\frac{dS}{dt}\right)_{max}$

$= S_{max} \times \omega$

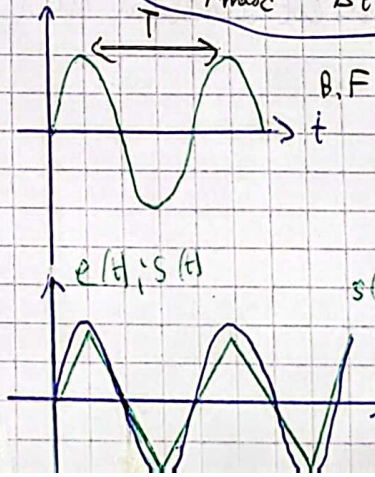
déduit de la multiplication

pour A.O $\sigma = 0,5\ V.\mu s^{-1}$



vitesse de balayage (slew rate)

$\sigma = \left(\frac{dS}{dt}\right)_{max} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$



Scanné avec CamScanner

On remarque qu'il n'y a pas d'enrichissement de spectre donc la multiplieur a réalisé une opération linéaire (c'est juste dans ce cas particulier car le multiplieur est non linéaire).

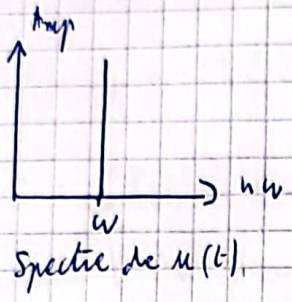
2) Multiplication d'un signal sinusoïdal par lui même :

App 1 :

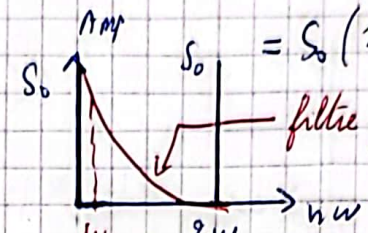
$u(t) = E\cos(\omega t)$ → [X] → $S(t) = KXY$

$= KE^2\cos^2(\omega t)$

$= S_0\left(1 + \cos(2\omega t)\right)$ avec $S_0 = \frac{KE^2}{2}$



Spectre de $u(t)$.



Spectre de $S(t)$

Si on rajoute au multiplieur un filtre passe bas tq $f_c \ll f$:

$S(t)$ → [F.P. Bas $f_c \ll f$] → $\Omega(t) = S_0 = K\frac{E^2}{2} = K\left(\frac{E}{\sqrt{2}}\right)^2$

$= K E_{eff}^2$

× 10

E_{eff}^2

voir T.D.

E_{eff}

Montage final :

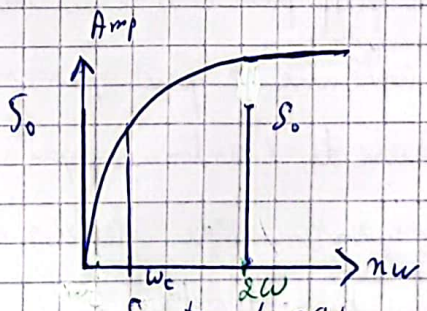
$u(t) = E\cos(\omega t)$ → [X] → $S(t)$ → [F.P. Bas $f_c \ll f$] → $\Omega(t) = S_0$

Ce montage permet de mesurer la valeur efficace d'un signal

App 2 :

$u(t) = E\cos(\omega t)$ → [X] → $S(t)$ → [F.P. Haut $f_c \ll f$] → $\Omega(t) = S_0\cos(2\omega t)$

Spectre de $u(t)$

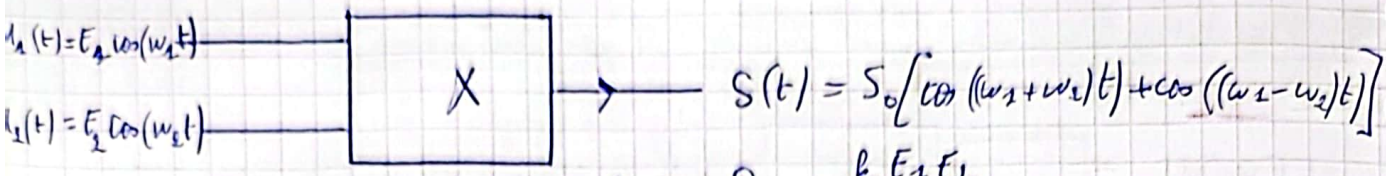


Spectre de $S(t)$

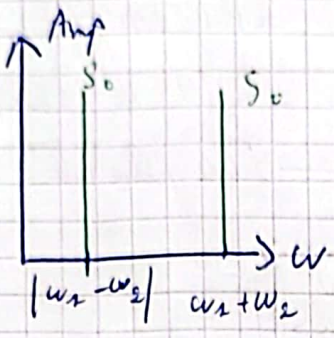
Scanné avec CamScanner

Le montage joue le rôle d'un doubleur de fréquence.

3) Multiplication de 2 signaux sinusoïdaux de ω différents:

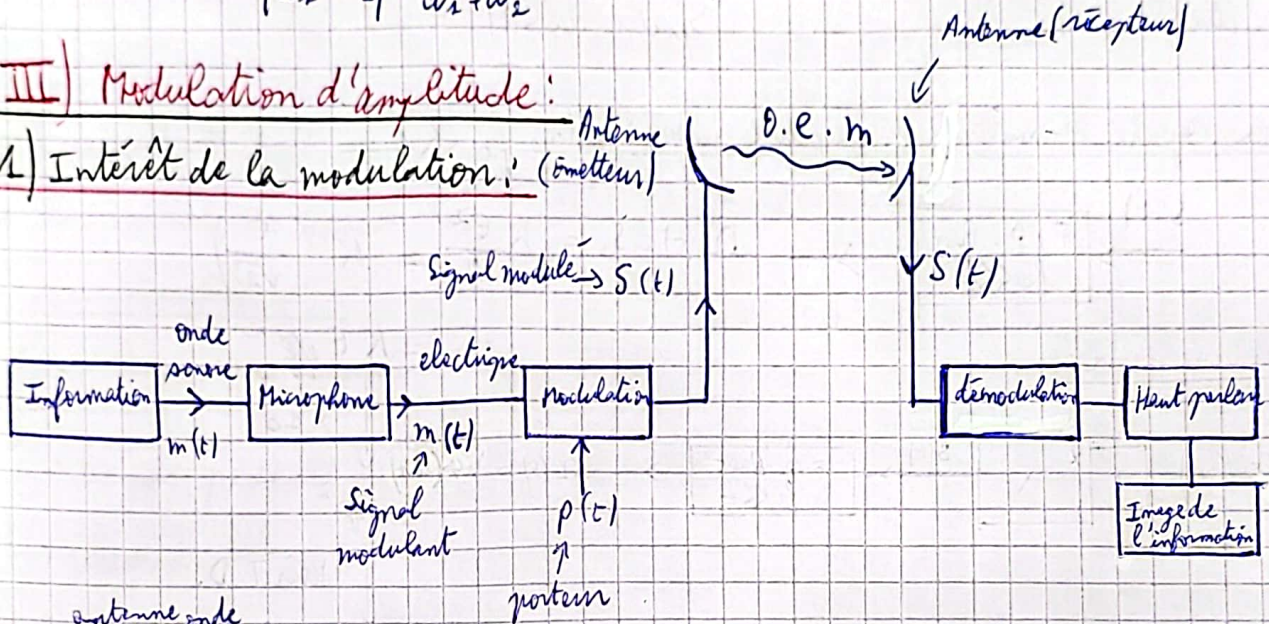


avec $S_0 = \dfrac{k E_1 E_2}{2}$



III) Modulation d'amplitude:

1) Intérêt de la modulation:



$L \sim \lambda = C \cdot T = \dfrac{C}{f}$ (antenne onde)

$f = 1\,KHz \rightarrow L = \dfrac{3.10^8}{10^3} = 300\,Km$

$f = 30\,GHz \rightarrow L = 1\,cm$

$L = \lambda/2$ demi onde (antenne)

$L = \lambda/4$ quart d'onde (antenne)

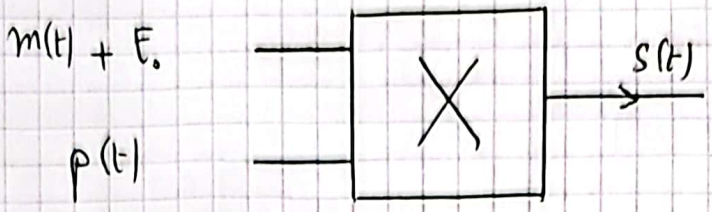
La modulation est utilisée pour transmettre un signal de fréquence faible (signal informatif ou modulant $m(t)$). pour cela on utilise un signal porteur $p(t)$ de haute fréquence.

En effet, l'antenne ne peut pas emettre un signal sauf si la longueur d'onde est de l'ordre de la taille de l'antenne. par exemple une onde de fréquence de l'ordre de 1KHz nécessite une antenne de plusieurs centaines de Km. Ce qui est irréalisable en pratique donc il faut porter le signal $m(t)$ de basse fréquence par un signal porteur de haute fréquence. La démodulation permet de récupérer

Scanné avec CamScanner

l'information.

2) Spectre de S(t) :



E_0 est la composante continue.

$m(t) = m_0 \cos(2\pi f_m t)$

$p(t) = p_0 \cos(2\pi f_p t)$ avec $f_p \gg f_m$.

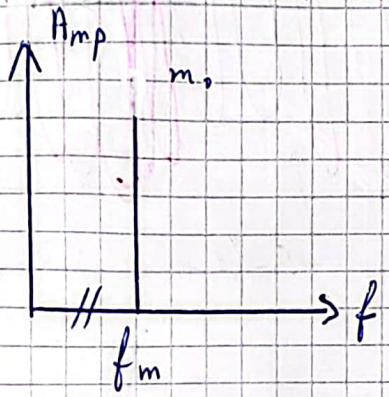
$S(t) = KX(t)Y(t) = K(E_0 + m(t)) \times p(t)$

$$S(t) = KE_0P_0\left[1 + \frac{m_0}{E_0}\cos(2\pi f_m t)\right]\cos(2\pi f_p t).$$

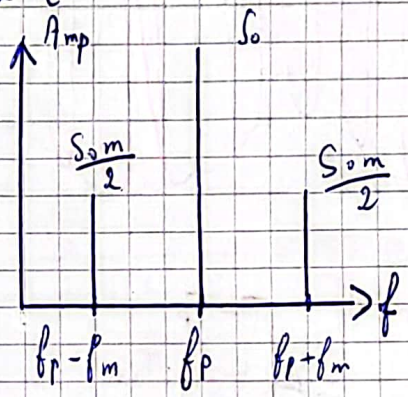
on pose $S_0 = KE_0P_0$ et $m = \frac{m_0}{E_0}$ est le taux de modulation.

$$S(t) = S_0\left[1 + m\cos(2\pi f_m t)\right]\cos(2\pi f_p t)$$

$$S(t) = S_0\cos(2\pi f_p t) + \frac{S_0 m}{2}\left[\cos(2\pi(f_p + f_m)t) + \cos(2\pi(f_p - f_m)t)\right]$$

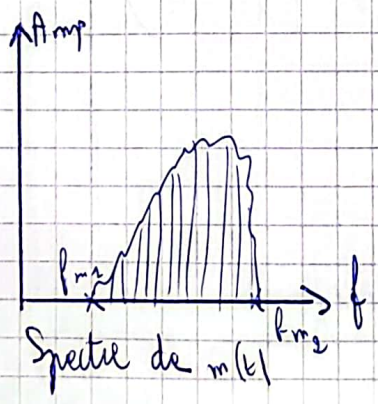


Spectre de m(t)

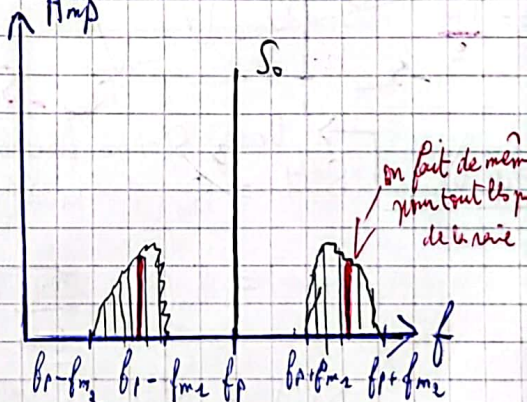


Spectre de S(t)

$S_0 = KE_0P_0$ ⟵ ne dépend pas de m_0 donc du signal informatique.



Spectre de m(t)



Spectre de S(t)

Scanné avec CamScanner

3) L'allure de S(t) :

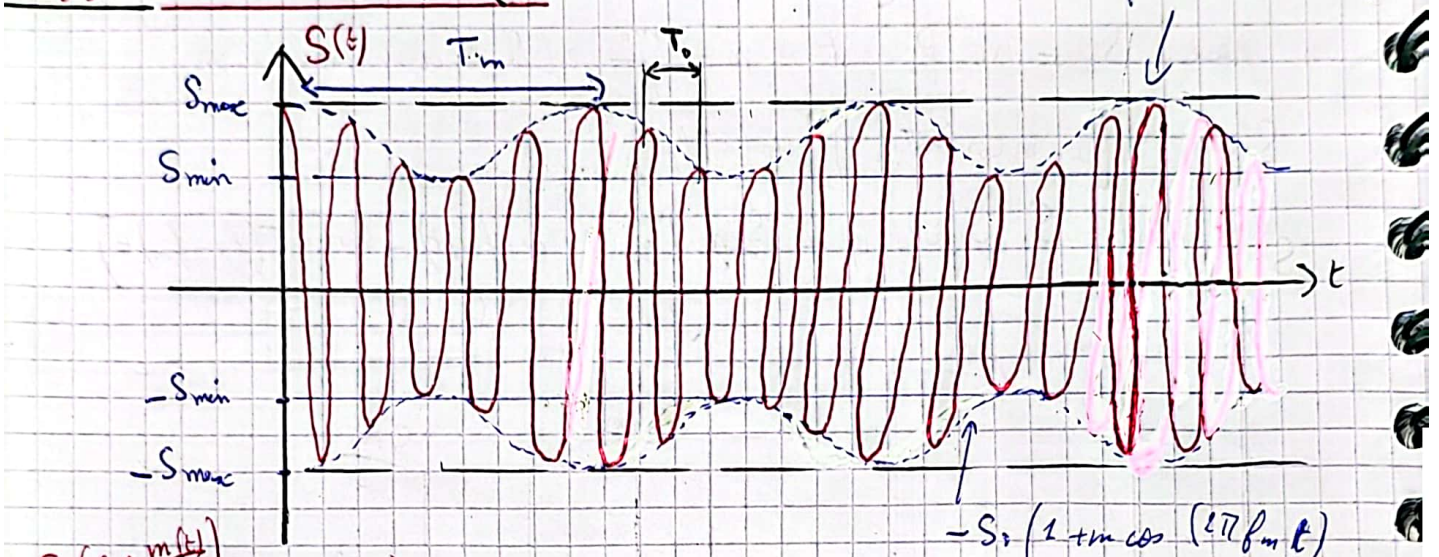
$$S(t) = S_0 \underbrace{\left[1 + m\cos(2\pi f_m t)\right]}_{\text{fonction de variation faible (enveloppe)}} \underbrace{\cos(2\pi f_p t)}_{\text{fonction de variation rapide.}}$$

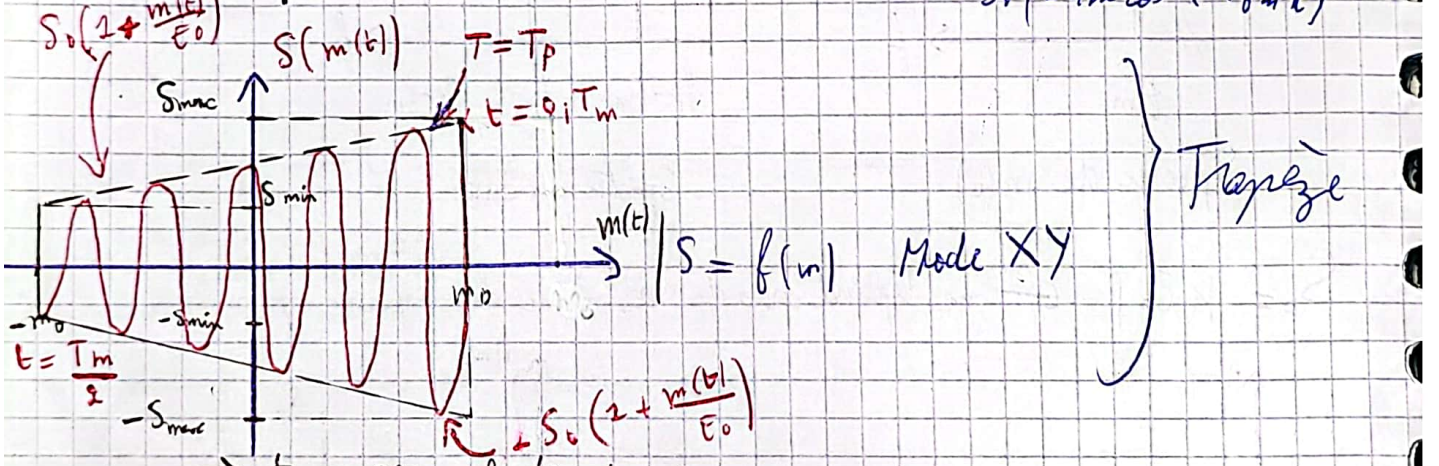
$S_{max} = S_0(1+m)$ $\quad S_{min} = S_0(1-m)$

$m < 1$ $\quad m > 1$

(+) $\quad$ (-)

Cas 1 : Sous modulation $m < 1$:





Objectif : tracer S(t) en fonction de m(t)

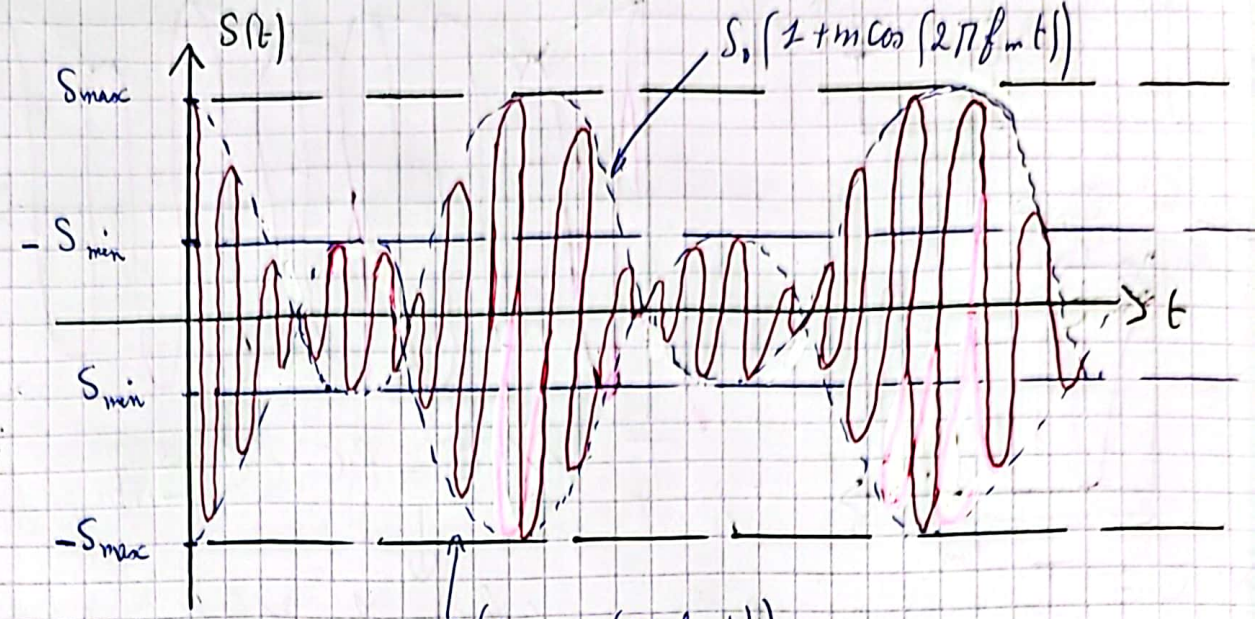
$$S(t) = S_0\left(1 + m\cos(2\pi f_m t)\right)\cos(2\pi f_p t)$$

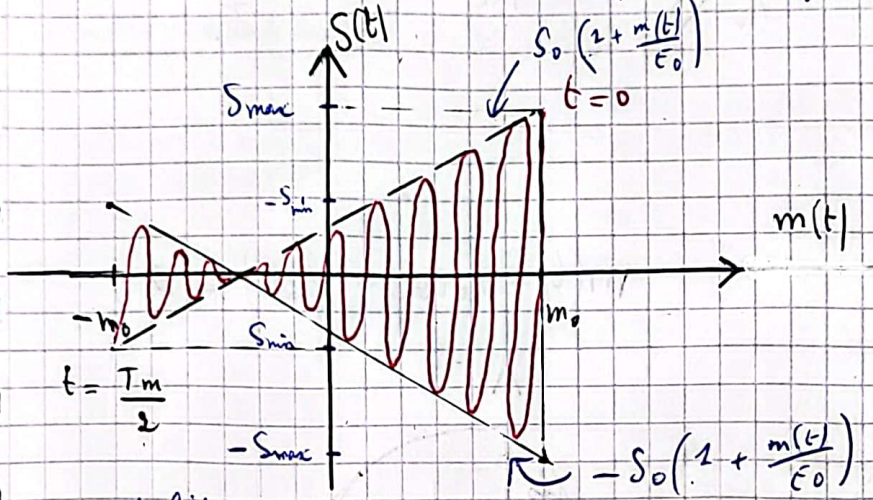
$$= S_0\left(1 + \underbrace{\frac{m_0}{E_0}\cos(2\pi f_m t)}_{m(t)}\right)\cos(2\pi f_p t)$$

$$S(t) = S_0\left(1 + \frac{m(t)}{E_0}\right)\cos(2\pi f_p t)$$

Scanné avec CamScanner

Cas 2 : Sur modulation $m > 1$



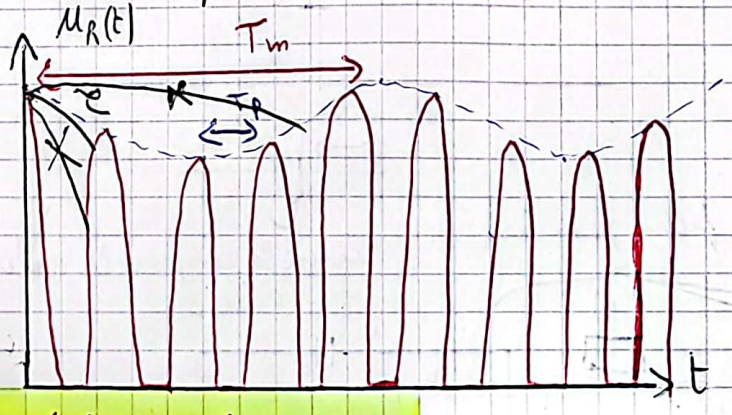


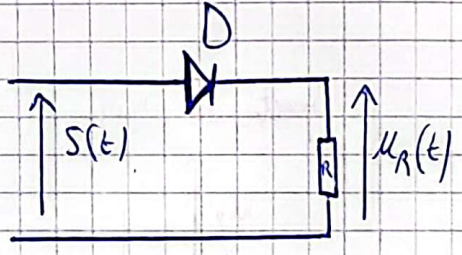
On définit le taux de modulation par :

$$\frac{S_{max}-S_{min}}{S_{max}+S_{min}} = \frac{S_0(1+m)-S_0(1-m)}{S_0(1+m)+S_0(1-m)} = \frac{2m}{2} = m$$

IV) Démodulation d'amplitude :

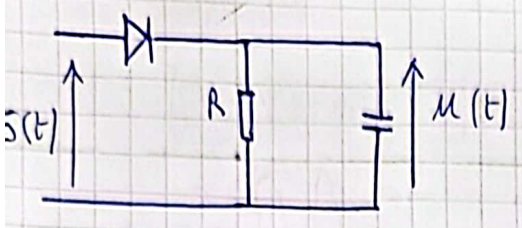
1) Démodulation par détection d'enveloppe :

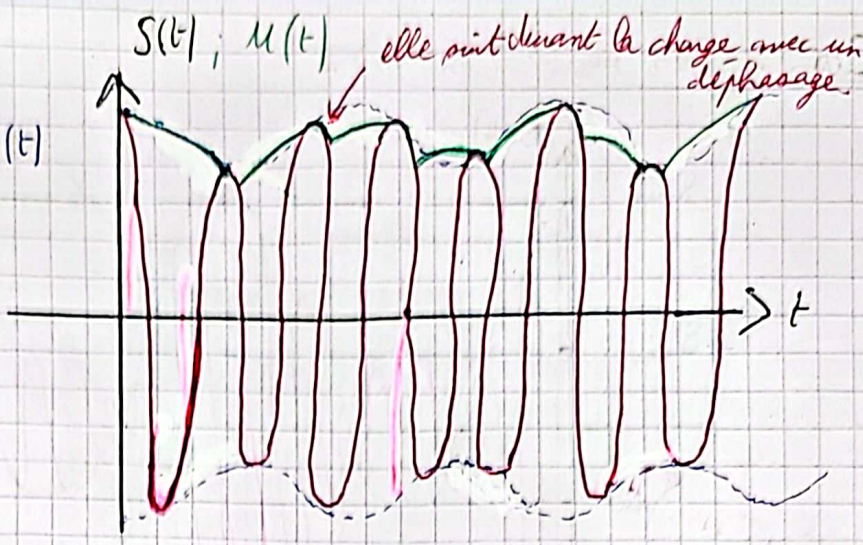




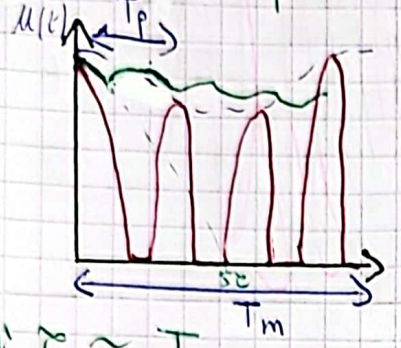
$$T_p \ll \tau \ll T_m$$

Scanné avec CamScanner





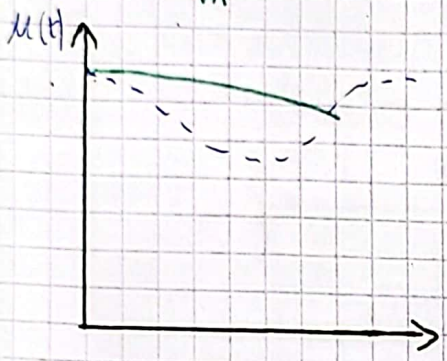
Si $\tau \simeq T_p$



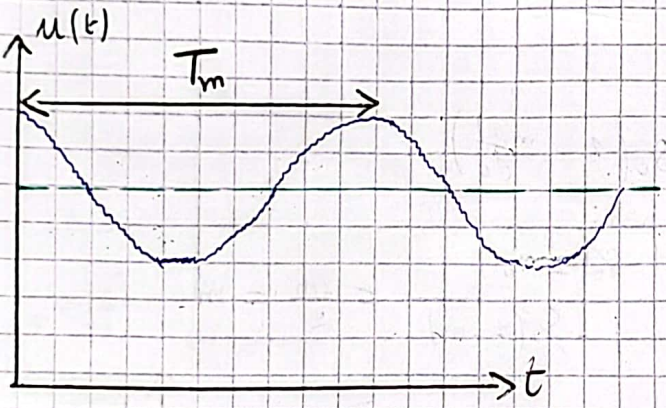
$$T_p \ll \tau = RC \ll T_m$$

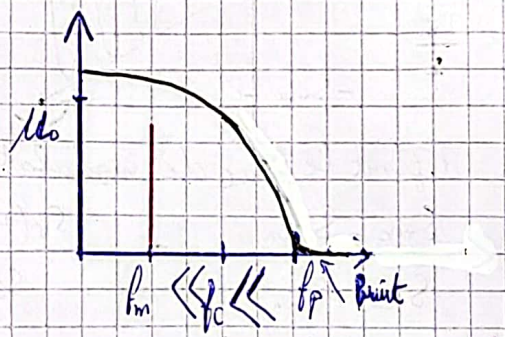
$$f_m = \frac{1}{T_m} \ll f_c = \frac{1}{RC} \ll f_p = \frac{1}{T_p}$$

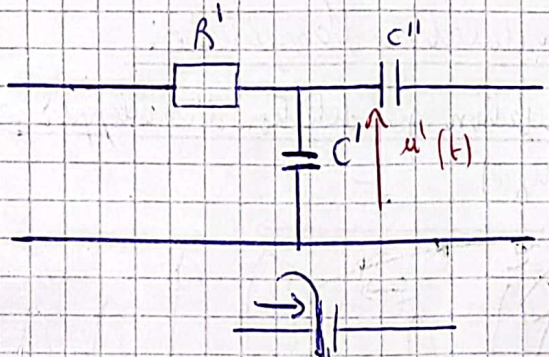
Si $\tau \simeq T_m$



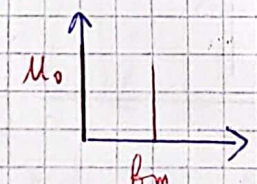
$$m(t) = m_0 \cos(2\pi f_m t) \neq u(t)$$







Spectre de $u'(t)$:

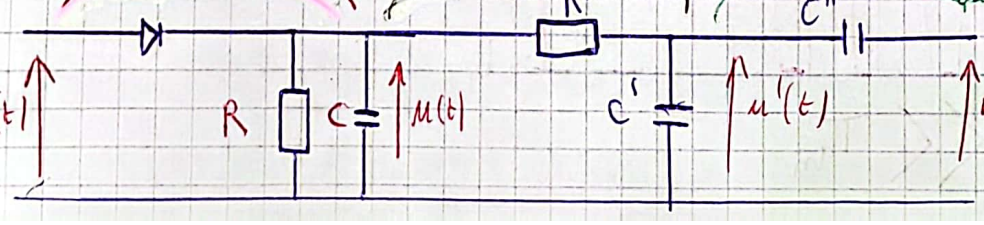


éliminé la composante continue.

Condensateur

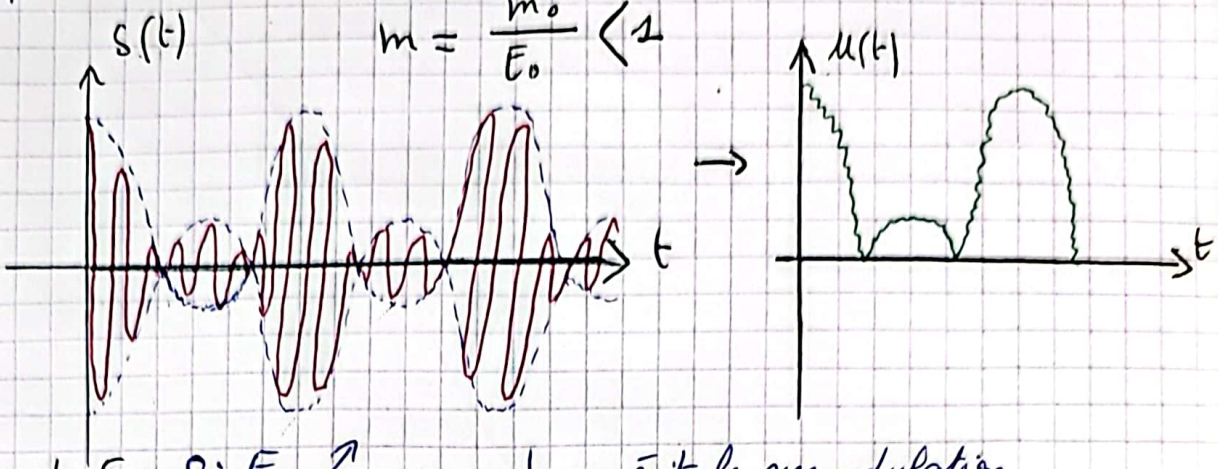
Résumé :

Détecteur de crête — filtre passe bas



Scanné avec CamScanner

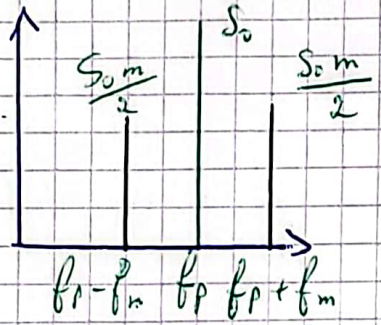
Remarque: la démodulation par détection d'enveloppe n'est pas valable dans le cas de surmodulation. En effet le détecteur de crête n'est pas un détecteur d'enveloppe.



Avantage de E_0 : Si $E_0 \nearrow \Rightarrow m \searrow$ on évite la surmodulation.

Inconvénient de E_0 : $S_0 = K E_0 P_0$

$$\frac{S_0 m}{2} = \frac{K E_0 P_0}{2} \times \frac{m_0}{E_0} = \frac{K P_0 m_0}{2}.$$



Si $E_0 \nearrow \Rightarrow S_0 \nearrow$

or $P \sim$ Amplitude^2

puissance ↗

donc $P \nearrow$

↓

téléphone déchargé rapidement après appel....

Démonstration par calcul. (voir document).

Scanné avec CamScanner

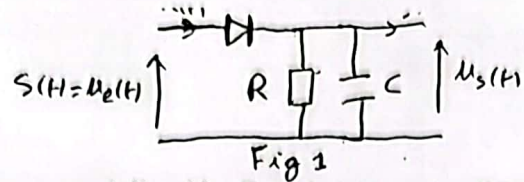


Fig 1

Le courant de sortie i_s est négligeable. Dans le but de simplifier l'étude du fonctionnement de ce démodulateur, il est admis que la tension d'entrée $s(t)$ est de la forme $u_e(t) = U_m \cos(\omega t)$, tension sinusoïdale, de période T.
La caractéristique $i = f(u)$ de la diode à jonction idéale est donnée, à titre d'information (figure 2) :

Figure 2

1) La diode est supposée passante : elle se comporte comme un conducteur de résistance négligeable. L'intensité $i(t)$ du courant est positive, et est de la forme $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi)$.
   1.1 Proposer un schéma simplifié du montage représenté à la figure 1.
   1.2 Donner la relation entre les tensions $u_e(t)$ et $u_s(t)$.
   1.3 La tension de sortie s'écrit, en notation complexe, $\underline{u_s}(t) = \underline{Z}\ \underline{i}(t)$. Déterminer l'impédance complexe $\underline{Z}$.
   1.4 Expliciter, en fonction des données de l'énoncé (c'est-à-dire U_m, R, C et ω), l'expression de l'intensité maximale I_m.
   1.5 Même question pour l'expression de φ.
   1.6 En déduire l'intervalle dans lequel les valeurs du déphasage φ peuvent se situer.
   1.7 À partir de $t = 0$, l'intensité $i(t)$ décroît. À l'instant t_o, ce courant $i(t)$ s'annule une première fois. Exprimer, en fonction de φ et ω, le temps t_o.
   1.8 En déduire, en fonction de U_m et φ, la valeur U_o de la tension $u_e(t = t_o)$.
   1.9 Préciser l'état de la diode à une date immédiatement postérieure à t_o.

2) La diode est supposée bloquée : elle se comporte comme un interrupteur ouvert. L'intensité $i(t)$ du courant est nulle, et la tension u aux bornes de la diode est négative.
   2.1 Proposer un schéma simplifié du montage représenté à la figure 2.
   2.2 Le montage est devenu un circuit R-C, en régime libre et transitoire de décharge d'un condensateur. Rappeler l'équation différentielle satisfaite par la tension $u_s(t)$.
   2.3 Soit $t' = (t - t_o)$. Établir l'expression de la tension $u_s(t')$.
   2.4 Tracer l'allure de la courbe représentative de la tension $u_s(t')$.
   2.5 Quelle inégalité doit-il y avoir entre les tensions $u_e(t)$ et $u_s(t)$ pour que la diode reste effectivement bloquée ?

3) Tracer, sur le même graphe, l'allure des courbes représentatives des tensions $u_e(t)$ et $u_s(t)$.

4) Préciser, sur le graphe précédent, les intervalles de temps pour lesquels la diode est passante, et ceux pour lesquels la diode reste bloquée.

5) La tension d'entrée $u_e(t)$ est maintenant le signal modulé :

$$s(t) = v_p(t).v_m(t) = A\,[1 + B\cos(\omega_m t)]\cos(\omega_p t).$$

Comment choisir le produit $R.C$ pour, simultanément, éliminer la porteuse et « récupérer » le signal modulant ?

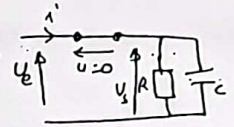
Scanné avec CamScanner

Démodulation du signal

1.1 Diode passante (idéale) ≡ court circuit

$\forall t$: $u_e = u + u_s$.

1.2 ici $u=0 \Rightarrow$ $\boxed{u_e(t) = u_s(t)}$



1.3 $\underline{u_s} = \underline{Z}\,\underline{i}$ avec $\underline{Z} = \underline{Z_R} // \underline{Z_C} \Rightarrow \boxed{\frac{R}{1+jRC\omega} = \underline{Z}}$

1.4 $u_e(t) = u_m \cos \omega t = u_s(t) = Re\left(U_m e^{j\omega t}\right) = Re\left(\underline{i}\,\underline{Z}\right) \Rightarrow \boxed{I_m = |\underline{i}| = \left|\frac{U_s}{Z}\right| = \frac{U_m}{R}\sqrt{1+R^2C^2\omega^2}}$

1.5 $\underline{u_s} = U_m e^{j\omega t} = \underline{Z}\,\underline{i} = |Z| e^{j\psi} \cdot I_m \cdot e^{j\omega t} e^{j\varphi} \Rightarrow \boxed{\varphi = -\psi = \arctan RC\omega}$

1.6 BF : $\omega \to 0$; $\varphi = 0$, HF $\omega \to \infty$ $\varphi \to \pi/2$ donc $0 \le \varphi \le \pi/2$

1.7 $\grave{a}\ t=0$ $i(t=0) = I_m \cos\varphi > 0$: i décroît et s'annule pour $t = t_0$

donc $i(t_0) = 0 \Rightarrow \omega t_0 + \varphi = \frac{\pi}{2}$ d'où $\boxed{t_0 = \frac{\pi}{2\omega} - \frac{1}{\omega}\arctan RC\omega}$

1.8 : on a $\omega t_0 + \varphi = \frac{\pi}{2}$ donc $\omega t_0 = \frac{\pi}{2} - \varphi$.

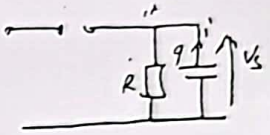
d'où $U_s(t_0) = U_e(t_0) = U_m \cos(\omega t_0) = U_m \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = U_m \sin\varphi >$

1.9. Pour $t > t_0$ $i(t > t_0) < 0$ la diode est bloquante $i = 0$

en effet $i(t = t_0^+ + \varepsilon) = I_m \cos(\omega t_0 + \varphi + \omega\varepsilon) = I_m \cos\left(\frac{\pi}{2} + \omega\varepsilon\right) = -I_m \sin\omega\varepsilon <$

1. Lorsque la diode est bloquée $D = CO$: $i = 0$

2.1. schéma équivalent



2.2 $u_s = \frac{1}{C} q = u_R = Ri = -R\frac{dq}{dt} = -RC\frac{du_s}{dt}$

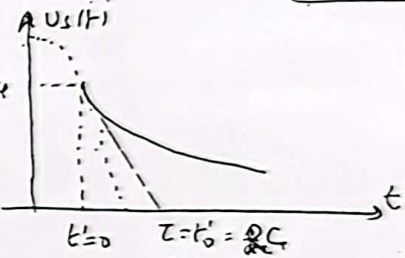
d'où $\frac{du_s}{dt} + \frac{1}{RC} u_s = 0$, j'pose $\tau = RC$.

$$\boxed{\frac{du_s}{dt} + \frac{1}{\tau} u_s = 0}$$

2.3 On pose $t' = t - t_0$: $u_s(t') = A e^{-t'/\tau}$ avec la condition initiale

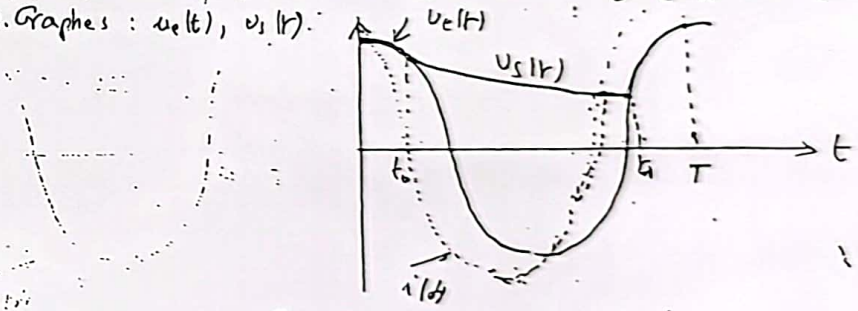
$u_s(t'=0) = 0 = u_s(t=t_0) = U_m \sin\varphi = A$. on obtient $\boxed{u_s(t') = U_m \sin\varphi \cdot e^{-t'/\tau}}$

2.4. Allure de $u_s(t')$ =



2.5. La diode est bloquée si $u_d \le 0$ or $\forall t$: $u_d = u_e - u_s$ donc : $u_e(t) \le u_s(t)$

3. Graphes : $u_e(t)$, $u_s(t)$.



4. D passante : $[0, t_0]$: $u_e = u_s$.

D bloquante $[t_0, T]$: $u_e \le u_s$.

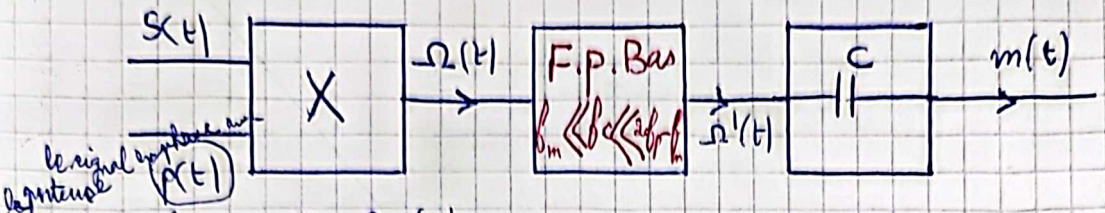
5. La tension d'entrée est le signal modulé (d'amplitude lentement variable : $A(t) = \left[A(1 + B\cos\Omega_m t)\right] \cdot \cos\omega_p t \simeq A(t) \cdot \cos\omega_p t$

Pour pouvoir récupérer l'enveloppe càd A il faut choisir la cte de temps $\tau = RC \gg T_p$: le condensateur n'a pas le temps de se décharger.

Scanné avec CamScanner

2) Démodulation synchrone:

Cette méthode consiste à multiplier le signal modulé $S(t)$ par un signal de même fréquence (synchrone) que le signal porteur et en phase avec ce signal.

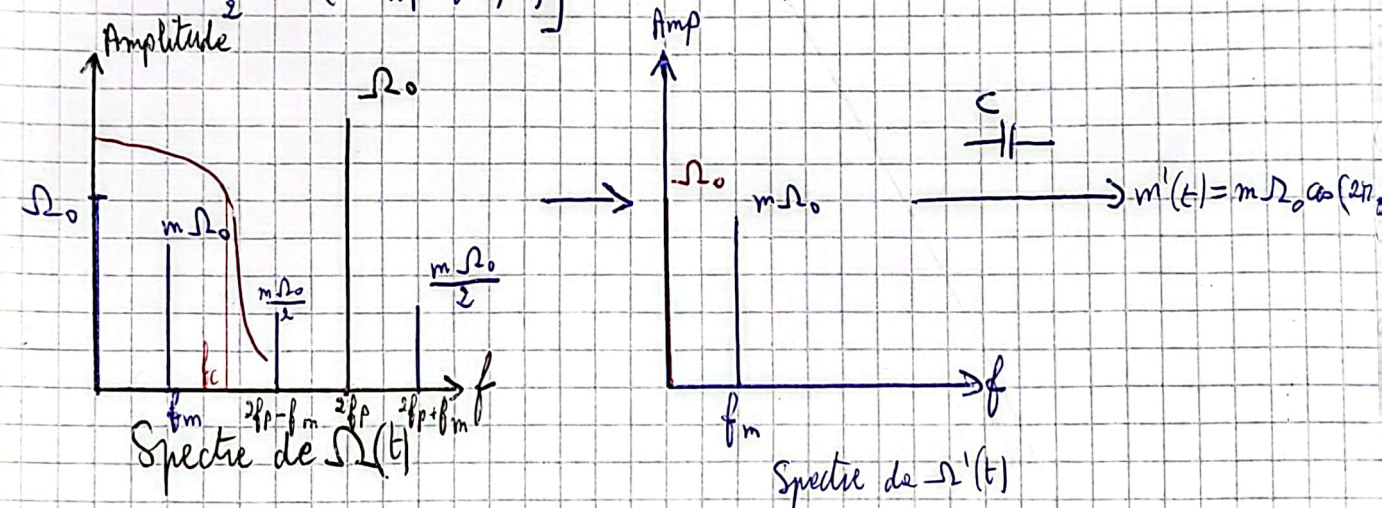


Tracez le spectre $\Omega(t)$.

$$\Omega(t) = KS(t)p(t) = KS_0\left[1 + m\cos(2\pi f_m t)\right]\cos(2\pi f_p t)\, P_0 \cos(2\pi f_p t)$$

$$\Omega(t) = \underbrace{\frac{KS_0P_0}{2}}_{\Omega_0}\left[1 + m\cos(2\pi f_m t)\right]\left[1 + \cos(2 \times 2\pi f_p t)\right]$$

$$= \Omega_0\left[1 + \cos(4\pi f_p t) + m\cos(2\pi f_m t) + \frac{m}{2}\cos\left(2\pi(2f_p + f_m)t\right) + \frac{m}{2}\cos(2\pi(2f_p - f_m)t)\right]$$



Boucle à verrouillage de phase

Scanné avec CamScanner

Boucle à verrouillage de phase

Toute la difficulté de la méthode par détection synchrone consiste à fabriquer, dans le récepteur, le signal $p(t)$ qui est exactement en phase avec la porteuse. Cette opération, appelée *reconstitution de porteuse*, repose sur l'emploi d'une boucle à verrouillage de phase qui comprend les éléments suivants.

◇ Un multiplieur identique à celui qui a déjà été utilisé.

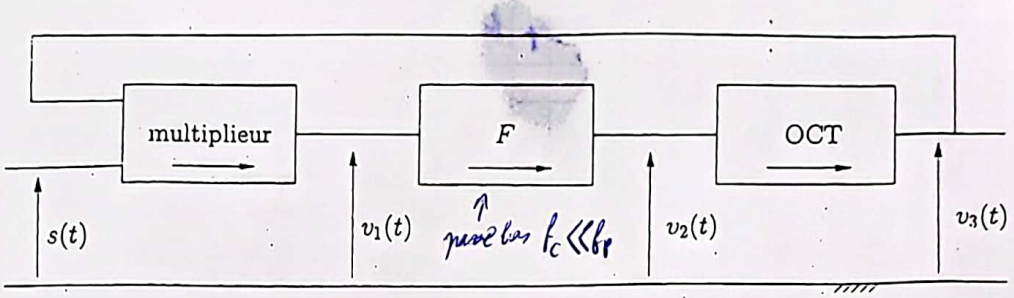
◇ Un filtre passe-bas, noté F, dont la fréquence de coupure est très inférieure à f_p. Pour simplifier, on supposera que sa fonction de transfert vaut 1 pour tous les signaux de fréquence très inférieure à f_p, et vaut 0 pour les signaux de fréquence supérieure à f_p.

◇ Un oscillateur contrôlé en tension (noté OCT), qui délivre un signal sinusoïdal $v_3(t)$ d'amplitude constante E_3 et dont la pulsation est commandée par la tension $v_2(t)$:

$$v_3(t) = E_3 \sin[\omega_p t - \varphi(t)] \quad \text{où} \quad \frac{d\varphi}{dt} = k_3 v_2(t).$$

La *pulsation instantanée* $\omega(t)$ du signal v_3 en sortie de l'OCT est définie comme la dérivée par rapport au temps du terme qui est dans le sinus :

$$\omega(t) \overset{\text{déf.}}{=} \frac{d[\omega_p t - \varphi(t)]}{dt} = \omega_p - \frac{d\varphi}{dt}.$$



La boucle est dite verrouillée quand la pulsation instantanée du signal de sortie $v_3(t)$ est égale à la pulsation instantanée du signal entrant $s(t)$.

1. Le signal entrant est le signal modulé $s(t) = S[1 + km(t)]\cos(\omega_p t)$ où $m(t) = E\cos(\Omega t)$. ($\Omega = \omega_m$) Après avoir soigneusement exprimé $v_1(t)$, donner l'expression de la tension $v_2(t)$ en fonction de φ. En déduire l'équation différentielle vérifiée par φ en supposant $|\varphi| \ll 1$ (situation proche du verrouillage).

2. En déduire que, après un temps caractéristique noté τ à définir, φ tend vers zéro (situation de verrouillage). Quelle est alors l'expression du signal $v_3(t)$?

3. Quelle(s) opération(s) doit-on faire subir au signal $v_3(t)$ obtenu pour le transformer, à un facteur près, en $p(t) = P_0\cos(\omega_p t)$ (reconstitution de la porteuse) ?

4. En déduire le schéma-bloc du dispositif complet de démodulation par détection synchrone, depuis l'entrée qui reçoit le signal modulé $s(t)$, jusqu'à la sortie qui délivre le signal sonore $m(t)$.

Scanné avec CamScanner

$v_2(t) = k S(t) v_3(t) = kS\left[1 + Ke(t)\right] \cos(\omega_p t) \times E_3 \sin(\omega_p t - \varphi)$

or $e(t) = E\cos(\Omega t)$ "signal informatif".

$\cos(a)\sin(b) = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) - \sin(a-b)\right]$

$v_2(t) = \underbrace{\frac{kSE_3}{2}}_{v_0}\left[1 + KE\cos(\Omega t)\right]\left[\sin(2\omega_p t - \varphi) - \sin(\varphi)\right]$

$v_2(t) = v_0\left[\sin(2\omega_p t - \varphi) - \sin\varphi + \frac{KE}{2}\sin((2\omega_p + \Omega)t - \varphi) + \frac{KE}{2}\sin((2\omega_p - \Omega)t + \varphi)\right.$

$\left. - \frac{KE}{2}\sin(-\Omega t + \varphi) + \frac{KE}{2}\sin(\Omega t - \varphi)\right]$.

$\downarrow$

$v_2(t) = v_0\left[0 - \sin\varphi + 0 + 0 - \frac{KE}{2}\sin(-\Omega t + \varphi) + \frac{KE}{2}\sin(-\Omega t - \varphi)\right]$

$v_2(t) = v_0\left[-\sin(\varphi) + KE\cos(\Omega t)(-\sin\varphi)\right]$

$= -v_0\left[1 + KE\cos(\Omega t)\right]\sin(\varphi)$

4) $\frac{d\varphi}{dt} = K_3 v_2(t) = K_3(-v_0)\left[1 + KE\cos(\Omega t)\right]\sin\varphi$

or $\sin\varphi \simeq \varphi \Rightarrow \frac{d\varphi}{dt} = -K_3 v_0\left[1 + KE\cos(\Omega t)\right]\varphi$

$\int_0^t \frac{d\varphi}{\varphi} = -\int_0^t K_3 v_0\left[1 + KE\cos(\Omega t)\right]dt$

$\Rightarrow \ln\left(\frac{\varphi(t)}{\varphi_0}\right) = -K_3 v_0 - K_3 v_0 \frac{KE}{\Omega}\left(\sin(\Omega t) - \sin(0)\right)$

$\Rightarrow \varphi(t) = \varphi_0 e^{-K_3 v_0 t} e^{-A\sin(\Omega t)}$ avec $A = \frac{K_3 v_0 KE}{\Omega}$

$\Rightarrow \varphi(t) = \varphi_0 e^{-t/\tau} e^{-A\sin(\Omega t)}$

avec $\tau = \frac{1}{K_3 v_0}$ d'où $\varphi(t > 5\tau) \simeq 0 \Rightarrow v_3(t) = E_3\sin(\omega t - \varphi)$

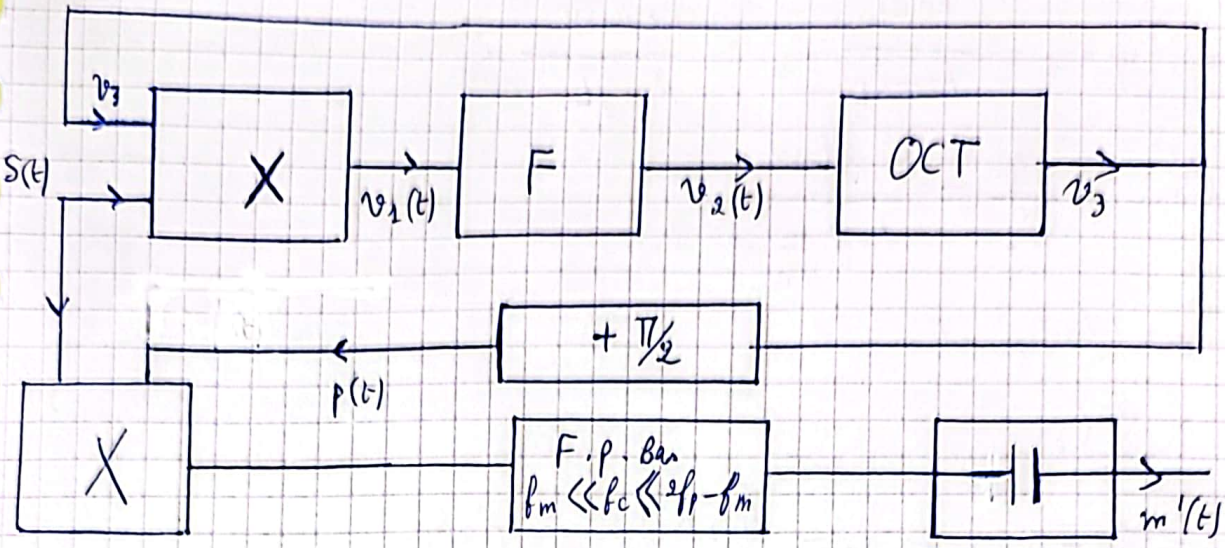
$= E_3\sin(\omega t)$

3) $v_3(t) = E_3\sin(\omega_p t)$

$\downarrow$ déphasage $+\pi/2$

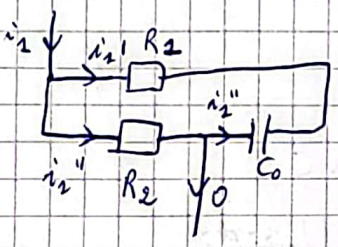
$p(t) = E\sin(\omega_p t + \pi/2) = P_0\cos(\omega_p t)$ avec $P_0 = E_3$

Scanné avec CamScanner



Corrigé CNC 1997 physique 2:

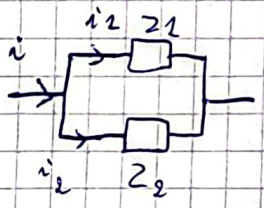
Voir Schéma.



$u_s = R_2 \times i_2''$ or d'après la loi de diviseur de courant :

$$i_2'' = \frac{R_1}{R_1 + R_2 + Z_{C_0}} i_1$$

Rappel :

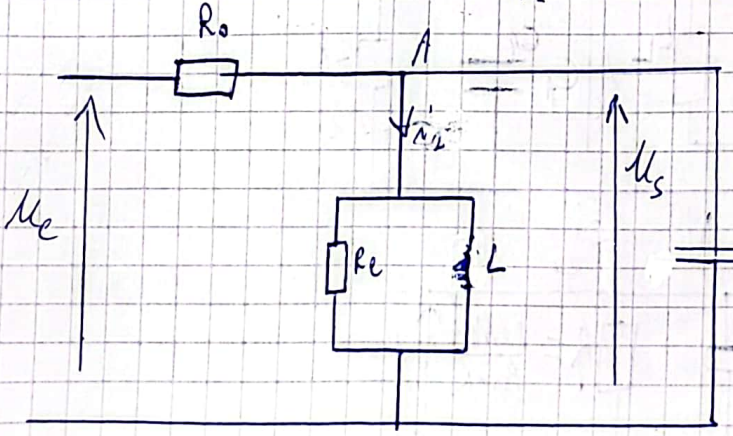


$$i_2 = \frac{Y_1}{Y_1 + Y_2} i = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} i$$

$$u_s = R_2 \times \frac{R_2}{R_1 + R_2 + Z_{C_0}} \times i_1$$

$$\Rightarrow \frac{u_s}{i_1} = \frac{R_2 R_2}{R_1 + R_2 + \frac{1}{jC_0\omega}}$$

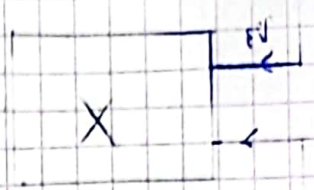
$$\Rightarrow \frac{u_s}{i_1} = \frac{j R_1 R_2 C_0 \omega}{1 + j(R_1 + R_2) C_0 \omega}$$



Scanné avec CamScanner

$$u_s = Z_{eq}\, i_1 = \frac{R_e Z_L}{R_e + Z_L}\, i_2 = \frac{R_e\, jL\omega}{R_e + jL\omega}\, i_1$$

d'où $\dfrac{u_s}{i_2} = \dfrac{jL\omega}{1 + j\dfrac{L}{R_e}\omega}$

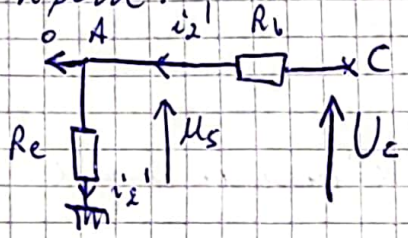


donc par identification :

$$\begin{cases} L = R_1 R_2 C_0 \\ \dfrac{L}{R_e} = (R_1 + R_2) C_0 \end{cases} \Rightarrow R_e = \frac{(R_1 R_2) C_0}{(R_1 + R_2) C_0} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

$i_2' = i_2 + i_s$

R_0 et R_e en série.



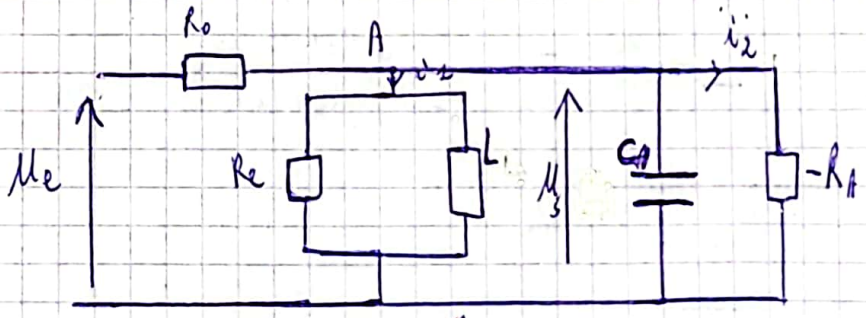
2) $u_s = \dfrac{R_e}{R_e + R_0}\, u_c$ or $R_e = R_0 \Rightarrow u_s = \dfrac{u_c}{2}$ ①

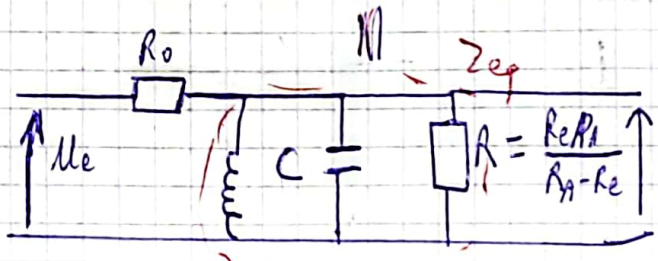
$V_A - V_c = R_A \times i_2$ or $\begin{cases} u_s = V_A - V_M = V_A \\ u_c = V_c - V_M = V_c \end{cases}$

$\Rightarrow u_s - u_c = R_A \times i_2$ ②

de ① et ② $u_s - 2u_s = R_A i_2 \Rightarrow u_s = (-R_A) i_2$.

3)





Scanné avec CamScanner

4) $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{Z_{eq}}{R_0 + Z_{eq}} = \dfrac{1}{1 + \dfrac{R_0}{Z_{eq}}}$

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + R_0\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{Z_C} + \frac{1}{Z_L}\right)}$$

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + \frac{R_0}{R} + \frac{R_0}{jL\omega} + jR_0C\omega} = \frac{1}{\frac{R+R_0}{R} + j\left[R_0C\omega - \frac{R_0}{L\omega}\right]}$$

$$\underline{H}(j\omega) = \underbrace{\frac{R}{R+R_0}}_{H_0} \frac{1}{1 + j\frac{RR_0}{R+R_0}\left[C\omega - \frac{1}{L\omega}\right]}$$

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + jR'\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} H_0 = \dfrac{R}{R+R_0} \\ R' = \dfrac{RR_0}{R+R_0} \end{cases}$$

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + j\left(R'C\omega - \frac{R'}{L\omega}\right)}$$

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} \quad \text{tq} \quad \begin{cases} \dfrac{Q}{\omega_0} = R'C \\ Q\omega_0 = \dfrac{R'}{L} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q^2 = R'^2\dfrac{C}{L} \\ Q = R'\sqrt{\dfrac{C}{L}} \end{cases}$$

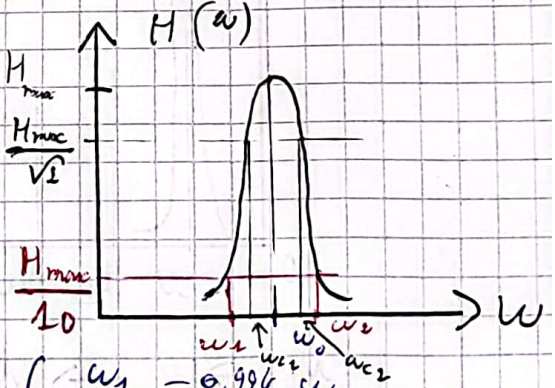
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

5) $H(\omega) = |\underline{H}(j\omega)| = \dfrac{H_0}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$

a) $H(\omega) = H_{max}$ si $\omega = \omega_0 = \omega_r$ et $H_{max} = H_0$

b) $H(\omega_{1,2}) = \dfrac{H_{max}}{10} = \dfrac{H_{max}}{\sqrt{100}}$

$$\frac{H_0}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} = \frac{H_0}{\sqrt{1+99}}$$



$$\Rightarrow Q\left(\frac{\omega_{1,2}}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_{1,2}}\right) = \sqrt{99} \rightarrow \begin{cases} \omega_1 = 0{,}994\,\omega_0 \\ \omega_2 = 1{,}006\,\omega_0 \end{cases}$$

$0{,}012\,\omega_0 \ll \omega_0 \Rightarrow \Delta\omega_c = \omega_{c_2} - \omega_{c_1} \ll \omega_0$

$\omega_{c_2} - \omega_{c_1} <= \omega_2 - \omega_1$

$\Rightarrow Q = \dfrac{\omega_0}{\Delta\omega_c} \gg 1$

$\Rightarrow$ Filtre très très sélectif.

Scanné avec CamScanner

6) $u_s(t) = C_0' + \sum_{n=1}^{+\infty} C_n' \cos(n\omega t + \varphi_n')$

$C_0' = |\underline{H}(0)| C_0 = 0 \times E_0 = 0$

$C_n' = |\underline{H}(jn\omega)| C_n = \dfrac{a_n \cdot H_0}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{n\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{n\omega}\right)^2}}$ or $T = T_0 \Rightarrow \omega = \omega_0$

on $T = 10^{-3}$ s

$\omega_0 = 2000\pi$ rad/s $= \frac{2\pi}{T_0}$

$\Rightarrow T_0 = 2\cdot 10^{-3}$ s

donc $C_n' = \dfrac{a_n \cdot H_0}{\sqrt{1+Q^2\left(n - \frac{1}{n}\right)^2}}$

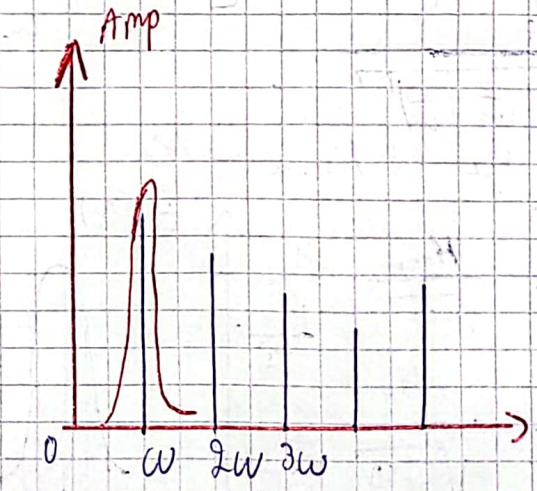
$\varphi_n' = \varphi_n^{\,0} - \arctan Q\left(n - \frac{1}{n}\right)$

b) $Q \gg 1 \Rightarrow \begin{cases} C_n' = 0 & \text{si } n \neq 1 \\ C_n' = a_n \times H_0 \text{ si } n = 1 \text{ et } \varphi_1' = 0 \end{cases}$

d'où $u_s(t) = C_1' \cos(\omega t + \varphi_1') = H_0 a_1 \cos(\omega t + \varphi_1')$

$\underline{u_s(t)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \underline{C_n'} e^{j(n\omega t)}$ avec $\underline{C_n'} = C_n' e^{j\varphi_n'} \rightarrow |C_n'| = C_n'$

7)

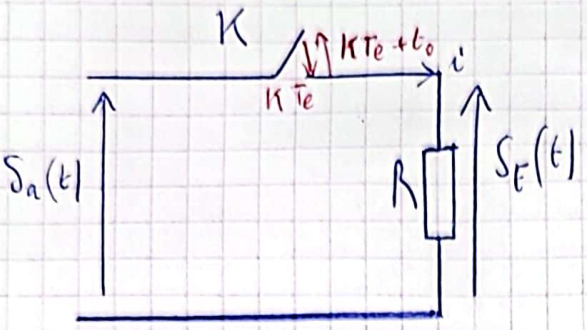


$\omega_0 \rightarrow \omega \rightarrow u_s(t) = H_0 \times a_1 \times \cos(\omega t)$

$\omega_0 = 2\omega \rightarrow u_s(t) = H_0 \times a_2 \times \cos(2\omega t)$

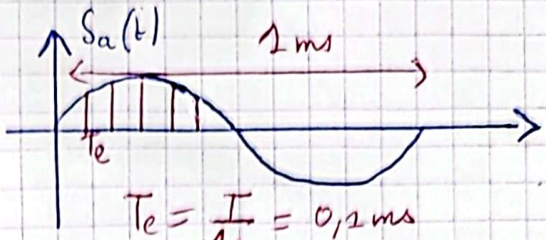
il faut varier ω_0 sans varier H_0 donc il faut varier le paramètre intervenant dans ω_0 et pas dans H_0 et donc c'est C_t qu'il faut varier

Scanné avec CamScanner



K fermé : $S_E(t) = S_a(t)$

K ouvert : $i = 0 \Rightarrow S_E(t) = 0$



$T_e = \frac{1}{10} = 0{,}1\ ms$

Démonstration de la règle :

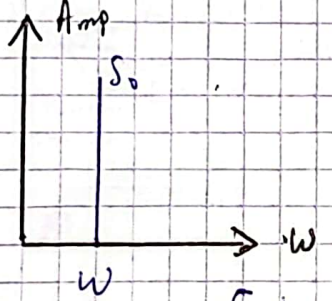
pour un signal sinusoïdal : $S_a(t) = S_0 \cos(\omega t)$

$$p(t) = p_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} p_n \cos(n\omega_e t + \varphi_n)$$

↑ décomposition de Fourrier du peigne de dirac

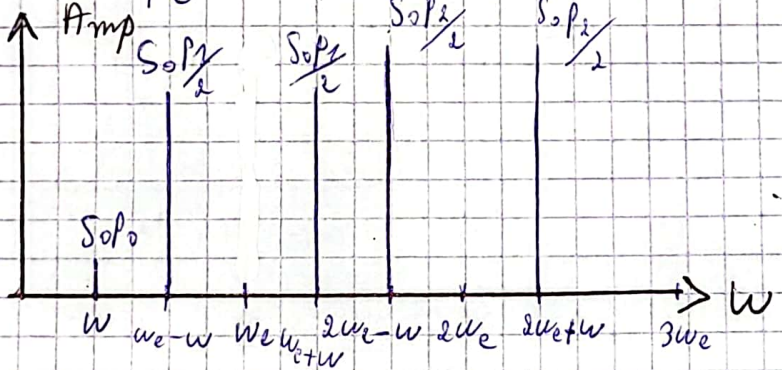
$$S_E(t) = S_a(t) \times p(t) = S_0 \cos(\omega t) \times \left[p_0 + \sum_n p_n \cos(n\omega_e t + \varphi_n) \right]$$

$$= S_0 p_0 \cos(\omega t) + \sum \frac{p_n S_0}{2} \left[\cos((n\omega_e + \omega)t + \varphi_n) + \cos((n\omega_e - \omega)t - \varphi_n) \right]$$



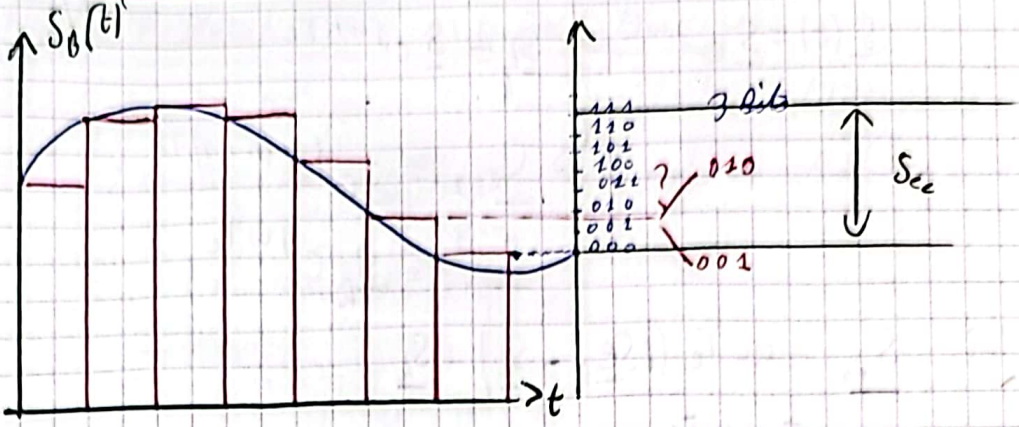
Spectre de $S_a(t)$

$$p_0 = \langle p(t) \rangle = \frac{1}{T_e} \left(\int_0^{t_0} 1\, dt + \int_{t_0}^{T_e} 0\, dt \right) = \frac{t_0}{T_e} \ll 1.$$



Scanné avec CamScanner

V) Quantification (centrale 2025):



$$\Delta = \frac{S_{cc}}{2^n - 1} \simeq \frac{S_{cc}}{2^n} \qquad n \nearrow \Rightarrow \Delta \searrow.$$

Filtrage numérique:

Exp Filtre passe bas: (valable pour tous les signaux analogiques et tous les filtres)

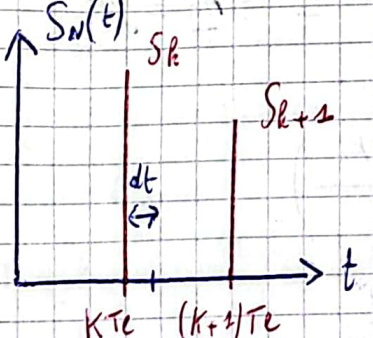
$$\underline{H} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

Etape ①: Equation différentielle:

$$\frac{\underline{S}}{\underline{e}} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} \rightarrow \underline{S}\left[1 + j\frac{\omega}{\omega_0}\right] = \underline{e}$$

donc $$s(t) + \frac{1}{\omega_0}\frac{ds(t)}{dt} = e(t) \quad (*)$$

Etape ②: Discrétisation



$\left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=KTe}$ diverge

$$\left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=KTe} = \frac{s(KTe + dt) - s(KTe)}{KTe + dt - KTe}$$

$$= \frac{0 - s(KTe)}{dt} \rightarrow \infty \quad (dt \rightarrow 0)$$

Soit $dt \rightarrow Te$:

$$\left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=KTe} \simeq \frac{s(KTe + Te) - s(KTe)}{Te} = \frac{S_{k+1} - S_k}{Te}$$

d'où (*) s'écrit : $$S_k + \frac{S_{k+1} - S_k}{\omega_0 \cdot Te} = e_k$$

$$\Rightarrow S_{k+1} = \omega_0 Te(e_k - S_k) + S_k$$ Relation de récurrence.

Scanné avec CamScanner

Etape ③ : $\underline{e}(t) = Ee^{j\omega t} \rightarrow \underline{e}_k = Ee^{j\omega kTe}$ $(t = kTe)$

$\underline{s}(t) = \underline{S}e^{j\omega t} \rightarrow \underline{S}_k = \underline{S}e^{j\omega kTe}$

$\hookrightarrow \underline{S}_{k+1} = \underline{S}e^{j\omega(k+1)Te}$

$\underline{S}_{k+1} = \underline{S}_k e^{j\omega Te}$

d'où $\underline{S}_{k+1} = \omega_0 Te(\underline{e}_k - \underline{S}_k) + \underline{S}_k$

s'écrit $\underline{S}_k[e^{j\omega Te} - 1 + \omega_0 Te] = \omega_0 Te\, \underline{e}_k$

$$\underline{H}_N = \frac{\underline{S}_k}{\underline{e}_k} = \frac{\omega_0 Te}{\omega_0 Te + e^{j\omega Te} - 1} = \frac{1}{1 + \frac{e^{j\omega Te} - 1}{\omega_0 Te}}$$

$\hookrightarrow$ $\underline{H}_a = \dfrac{1}{1 + \frac{1 + j\omega Te - 1}{\omega_0 Te}} = \dfrac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$

- $Te \simeq 0$
- $Te \ll T$ ($\downarrow 2\pi$)

$\Rightarrow \omega Te \ll 1$

$\Rightarrow fe \gg f$

$\Rightarrow fe > 2f$

donc Théorème de Nyquist-Shannon vérifié.

$H_a \leftarrow (\omega Te \simeq 0) \leftarrow H_N$

$H_N \uparrow$ Notation complexe

$H_a \downarrow$ Eq diff $\rightarrow$ Relation de récurrence

---

Dérivateur numérique : $y = \dfrac{dx}{dt} \rightarrow \underline{y} = j\omega \underline{x} \rightarrow \underline{H}_a = j\omega$

$$y_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{Te} \qquad \left(y_n = \frac{x_{n+1} - x_n}{Te}\right)$$

$$\underline{H}_N = \frac{1 - e^{-j\omega Te}}{Te} = \frac{(1 - \cos(\omega Te)) + j\sin(\omega Te)}{Te}$$

$\downarrow \omega Te \simeq 0$

$\underline{H}_a = j\omega$

$$G = \frac{2}{Te}\left|\sin\left(\frac{\omega Te}{2}\right)\right|$$

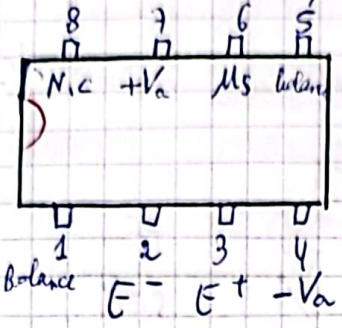
Scanné avec CamScanner

Titre: Amplificateur opérationnel:

I) Présentation et Description:

1) présentation:

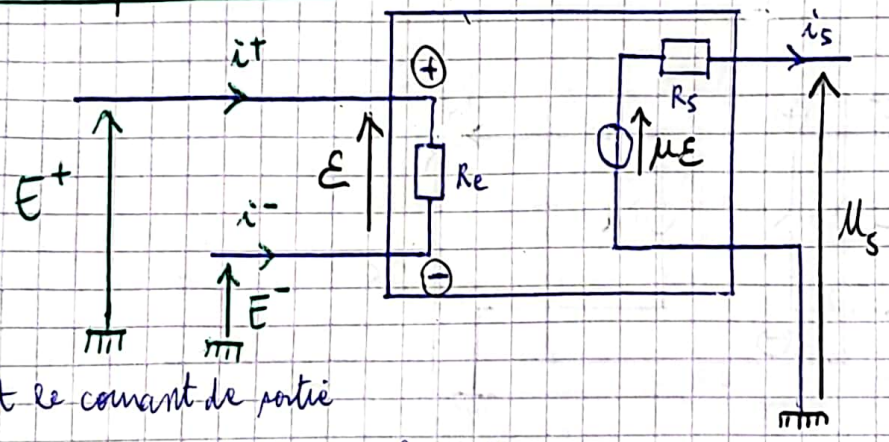
l'amplificateur opérationnel est présenté dans une boite constituée de 8 broches, C'est un circuit intégré constitué de résistors, de condensateurs et des transistors.



E^- est l'entrée inverseuse; E^+ est l'entrée non inverseuse.

U_s est la tension de sortie; $-V_a$ et $+V_a$ sont 2 bornes d'une alimentation symetrique de ± 15 V. 8 est une borne non connectée. 1 et 5 sont deux bornes balance qui permettent de régler certains défaut de l'amplificateur opérationnel (tension de décalage).

2) Schéma équivalent:



i_s est le courant de sortie

i^+ et i^- sont les courant de polarisation

$\mu = 10^5$ est le gain

$10^5\,\Omega < R_e < 10^{12}\,\Omega$ est la résistance d'entrée.

$10\,\Omega < R_s < 500\,\Omega$ est la résistance de sortie.

(en réalité ce sont des impédance d'entrée/sortie donc changent avec la pulsation ω).

3) Relation entre U_s et ε:

$$\tau \frac{dU_s}{dt} + U_s = \mu\varepsilon$$

avec $\tau = 10$ ms est une constante de temps.

Scanné avec CamScanner

En régime stationnaire: $\frac{d}{dt} = 0$

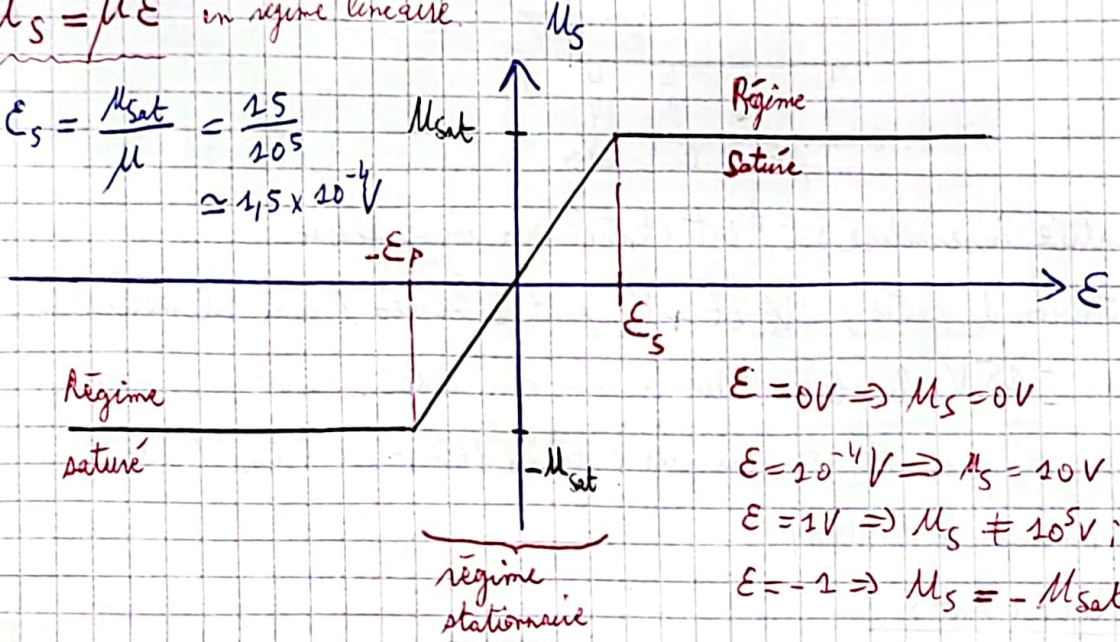
$$U_S = \mu \varepsilon = \mu(E^+ - E^-)$$

Si la borne (+) est liée à la masse: $U_S = \ominus \mu E^-$ → la borne 2 est l'entrée inverseuse.

Si la borne (−) est liée à la masse: $U_S = \oplus \mu E^+$ → la borne 3 est l'entrée inverseuse.

4) Caractéristique de transfert statique:

$U_S = \mu \varepsilon$ en régime linéaire



$\varepsilon_s = \frac{U_{sat}}{\mu} = \frac{15}{10^5} \simeq 1{,}5 \times 10^{-4} V$

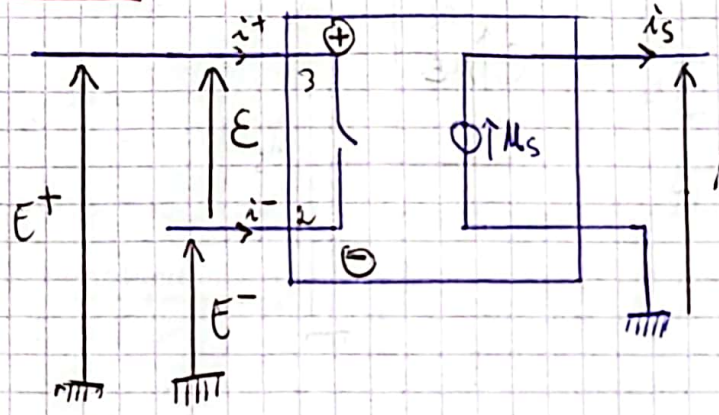
$\varepsilon = 0V \Rightarrow U_S = 0V$

$\varepsilon = 10^{-4} V \Rightarrow U_S = 10V$

$\varepsilon = 1V \Rightarrow U_S \neq 10^5 V$; $U_S = U_{sat}$

$\varepsilon = -1 \Rightarrow U_S = -U_{sat}$

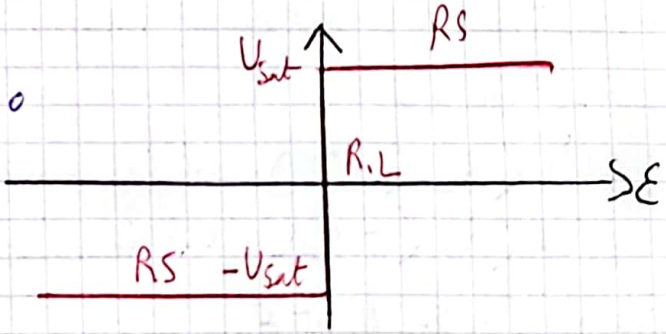
5) A.O Idéal:



* $R_e \nearrow \infty$ ⟹ $i^+ = i^- = 0$

* $R_S \simeq 0$

* $\mu \to \infty \Rightarrow \varepsilon_s = 0$



Si $E^+ > E^- \Rightarrow \varepsilon > 0 \Rightarrow U_S = +U_{sat}$

Si $E^+ < E^- \Rightarrow \varepsilon < 0 \Rightarrow U_S = -U_{sat}$

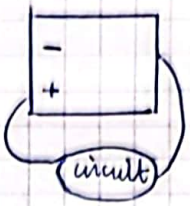
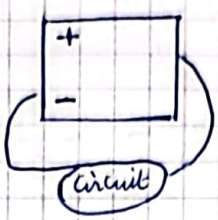
} régime saturé

Si $E^+ = E^- \Rightarrow \varepsilon = 0 \Rightarrow -U_{sat} < U_S < U_{sat}$ ⟹ Régime linéaire.

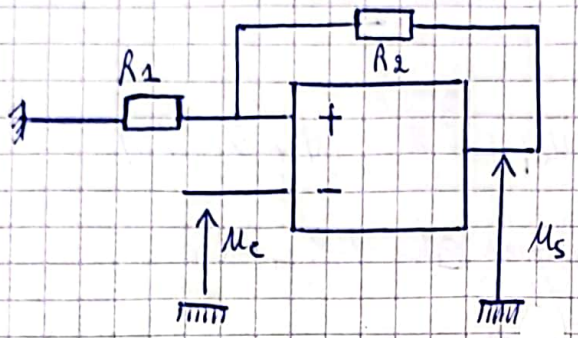
A.O en régime linéaire: $E^+ = E^-$

Scanné avec CamScanner

II) Stabilité du régime linéaire :

Montages à A.O
- à rétroaction positive →  ⇒ L'A.O fonctionne en R.S
- à rétroaction négative →  ⇒ L'A.O peut fonctionner en R.L

1) Montage à rétroaction positive :



$$\tau \frac{du_s}{dt} + u_s = \mu\varepsilon \quad \text{avec} \quad \varepsilon = E^+ - E^-$$

tq $E^+ = \dfrac{\frac{0}{R_1} + \frac{u_s}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \dfrac{R_1}{R_1+R_2} u_s = \alpha u_s$ tq $\alpha = \dfrac{R_1}{R_1+R_2}$

et $E^- = u_e$.

$$\Rightarrow \tau \frac{du_s}{dt} + u_s = \mu(\alpha u_s - u_e)$$

On pose $\tau' = \dfrac{\tau}{\mu\alpha - 1} > 0$

$$\Rightarrow \frac{du_s}{dt} + \left(\frac{1-\mu\alpha}{\tau}\right) u_s = \frac{-\mu}{\tau} u_e$$

ordre de grandeur : $\tau' = \dfrac{10\ ms}{10^5 \alpha - 1} \simeq \dfrac{10^{-2}}{10^5} = 10^{-7}\ s$ $\left(\alpha \simeq \frac{0,1}{0,3}\right)$

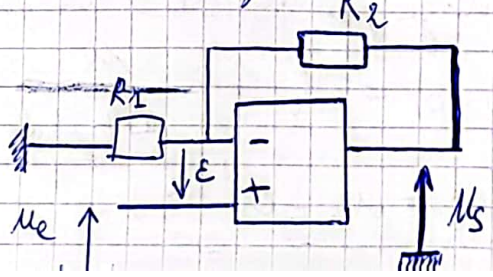
$$\frac{du_s}{dt} - \frac{u_s}{\tau'} = \frac{\mu}{\tau} u_e \Rightarrow u_s(t) = u_{s,h}(t) + u_{s,p}(t)$$

tq $u_{s,h}(t) = A e^{t/\tau'}$ ⇒ Après quelques τ $u_{s,h}(t)$ diverge

$$u_s(t) = \pm U_{sat}$$

Donc le montage à rétroaction positive fonctionne en régime saturé.

2) Montage à rétroaction négative :



Scanné avec CamScanner

$\tau \frac{dU_s}{dt} + U_s = \mu\varepsilon$ avec $\varepsilon = E^+ - E^-$

tq $E^- = \alpha U_s$ et $E^+ = U_e$:

$\Rightarrow \tau \frac{dU_s}{dt} + U_s = \mu(-\alpha U_s + U_e)$

$\Rightarrow \frac{dU_s}{dt} + \left(\frac{1+\mu\alpha}{\tau}\right) U_s = \frac{\mu}{\tau} U_e$

on pose $\tau' = \frac{\tau}{\mu\alpha+1} > 0$

$\Rightarrow \frac{dU_s}{dt} + \frac{U_s}{\tau'} = \frac{\mu}{\tau} U_e \Rightarrow U_s(t) = U_{s,h}(t) + U_{s,p}(t)$

tq $U_{s,h}(t) = A e^{-t/\tau'} \Rightarrow$ Après quelques τ' $U_{s,h}(t) \simeq 0$

$\Rightarrow U_{s,h}(t)$ s'annule instantanément $\Rightarrow U_s(t) = U_{s,p}(t) = ?$

En régime sinusoïdal : donc ce montage peut fonctionner en régime linéaire

$\frac{d\underline{U_s}}{dt} + \frac{\underline{U_s}}{\tau'} = \frac{\mu}{\tau}\underline{U_e}$ avec $\underline{U_s} = \underline{U_{s,p}}$

$\rightarrow j\omega \underline{U_s} + \frac{1}{\tau'}\underline{U_s} = \frac{\mu}{\tau}\underline{U_e}$

$\rightarrow \underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U_s}}{\underline{U_e}} = \frac{\frac{\mu}{\tau}}{j\omega + \frac{1}{\tau'}} = \frac{\mu\frac{\tau'}{\tau}}{1 + j\tau'\omega}$

or $\tau' = \frac{\tau}{1+\mu\alpha} \Rightarrow \underline{H}(j\omega) = \frac{\frac{\mu}{1+\mu\alpha}}{1 + j\omega\tau'} = \frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}$

tq $\begin{cases} H_0 = \frac{\mu}{1+\mu\alpha} \\ \omega_c = \frac{1}{\tau'} \end{cases}$

Ce montage joue le rôle d'un filtre passe-bas de gain statique $\underline{H}(j\omega = 0) = H_0 = \frac{\mu}{1+\mu\alpha}$ et de bande passante $(0 ; \omega_c = \omega_0)$

$\Rightarrow \Delta\omega = \omega_c - 0 = \omega_c$

Scanné avec CamScanner

On remarque que :

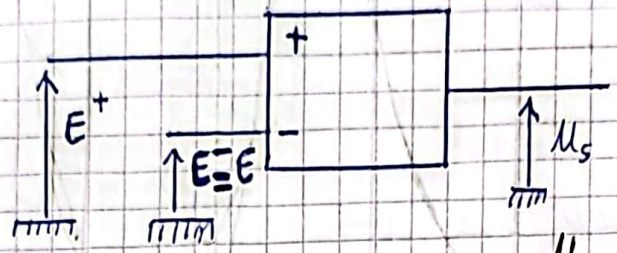
$$\text{Gain} \times BP = \frac{\mu}{1+\mu\alpha} \times \frac{1+\mu\alpha}{\alpha} = \frac{\mu}{\alpha}$$

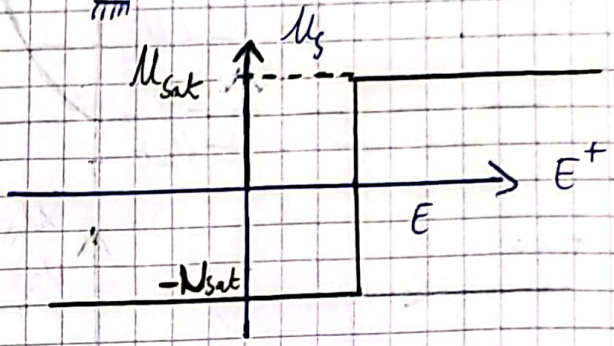
donc $\boxed{\text{Gain} \times BF = \text{cte}}$

C'est l'un des 5 défauts de l'AO pour les hautes fréquences il faut augmenter le BP (car passe bas) $\Rightarrow$ Gain $\downarrow\downarrow$ donc le signal sera fortement atténué.

III) Montage à AO en régime saturé :

1) Comparateur simple :

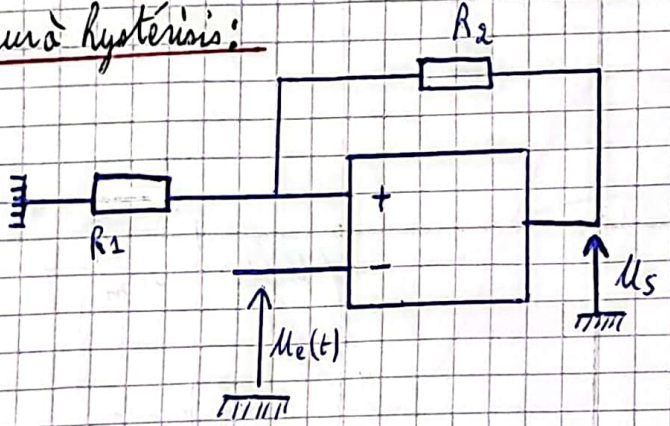




Si $E^+ > E^- \Rightarrow u_s = +u_{sat}$

Si $E^+ < E^- \Rightarrow u_s = -u_{sat}$

2) Comparateur à hystérésis :



$$\alpha = \frac{R_1}{R_1+R_2}$$

$u_e(t) = -u_{e,m} \cos(\omega t)$

Tracez $u_s = f(u_e)$ et $u_s = f(t)$ dans les 2 cas suivants :

1) $u_{e,m} > \alpha u_{sat}$ 2) $u_{e,m} < \alpha u_{sat}$.

1er cas : $u_{em} > \alpha u_{sat}$:

À $t = 0 \Rightarrow u_e = -u_{e,m} \Rightarrow \varepsilon = \alpha u_s + u_{em}$

- Si $\varepsilon < 0 \Rightarrow u_s = -u_{sat} \Rightarrow \varepsilon = -\alpha u_{sat} + u_{e,m} \overset{ABS}{>} 0$ car $u_{em} > \alpha u_{sat}$
- Si $\varepsilon > 0 \Rightarrow u_s = +u_{sat} \Rightarrow \varepsilon = \alpha u_{sat} + u_{e,m} > 0$ OK

Au cours du temps $u_e \uparrow \Rightarrow \varepsilon \downarrow$ à $t = t_1 \Rightarrow \varepsilon = 0 \Rightarrow \alpha u_{sat} - u_e(t_1) = 0$

Scanné avec CamScanner

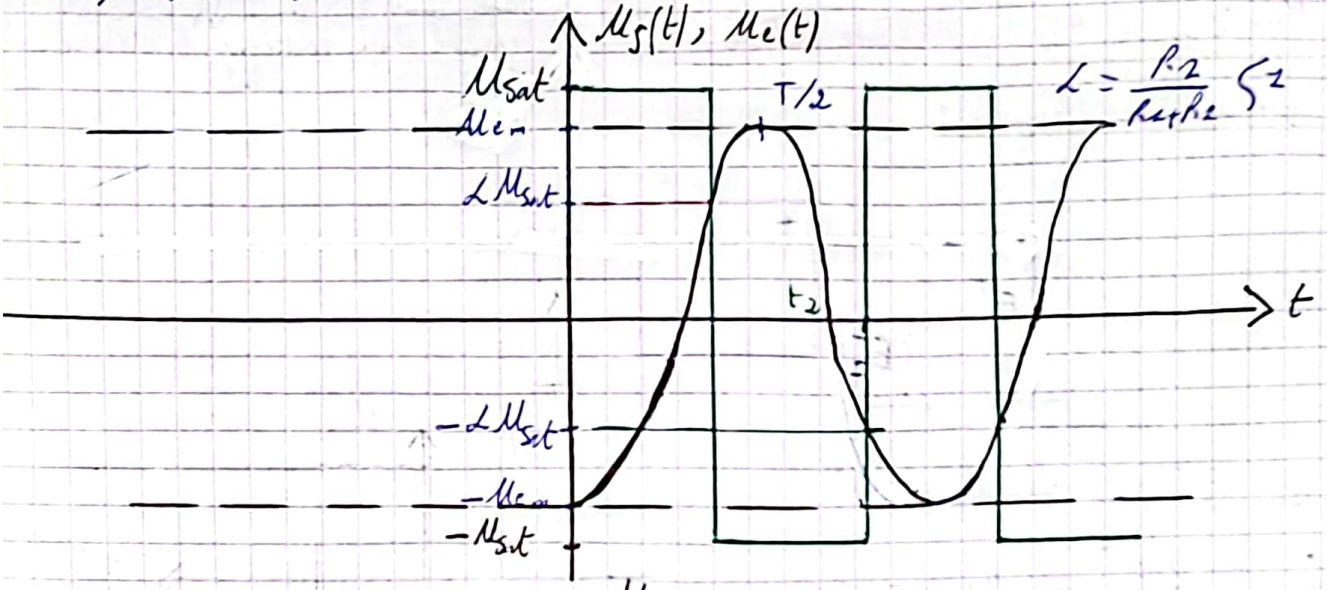
$\Rightarrow v_e(t_2) = \alpha V_{sat}$

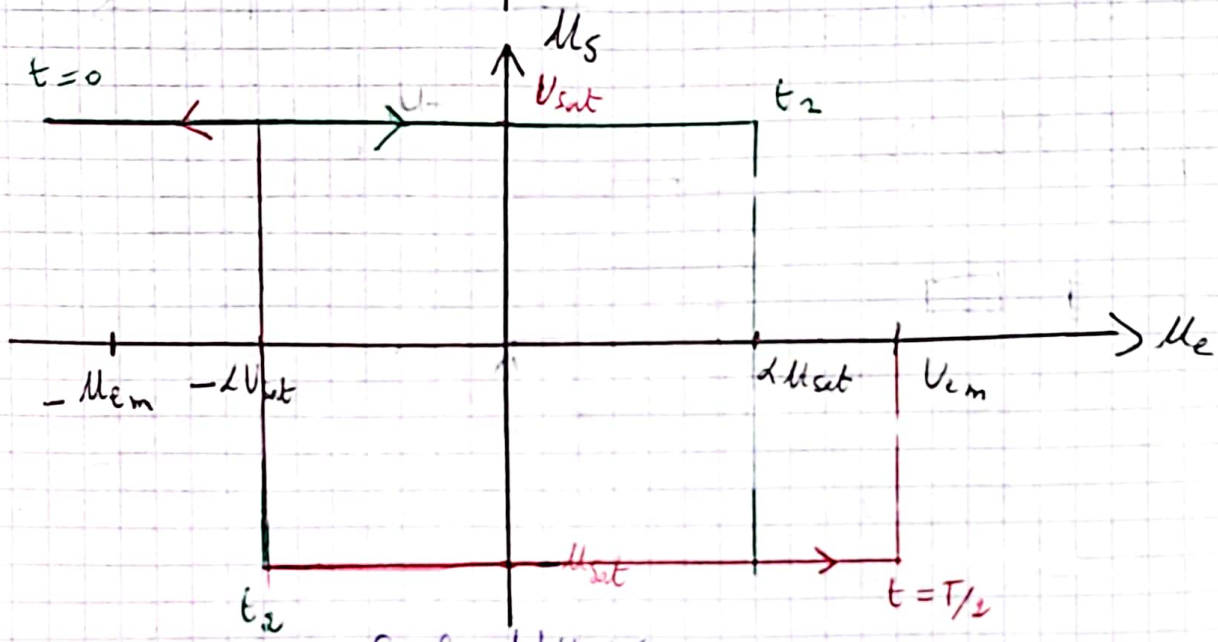
Si $t > t_2$: $\varepsilon < 0 \Rightarrow v_s = -V_{sat}$ et $\varepsilon = -\alpha V_{sat} - v_e$

Si $t > T/2 \Rightarrow v_e \downarrow \Rightarrow \varepsilon \nearrow$ avec $\varepsilon < 0$

à $t = t_2$; $\varepsilon = 0 \Rightarrow -\alpha V_{sat} - v_e(t_2) = 0 \Rightarrow v_e(t_2) = -\alpha V_{sat}$

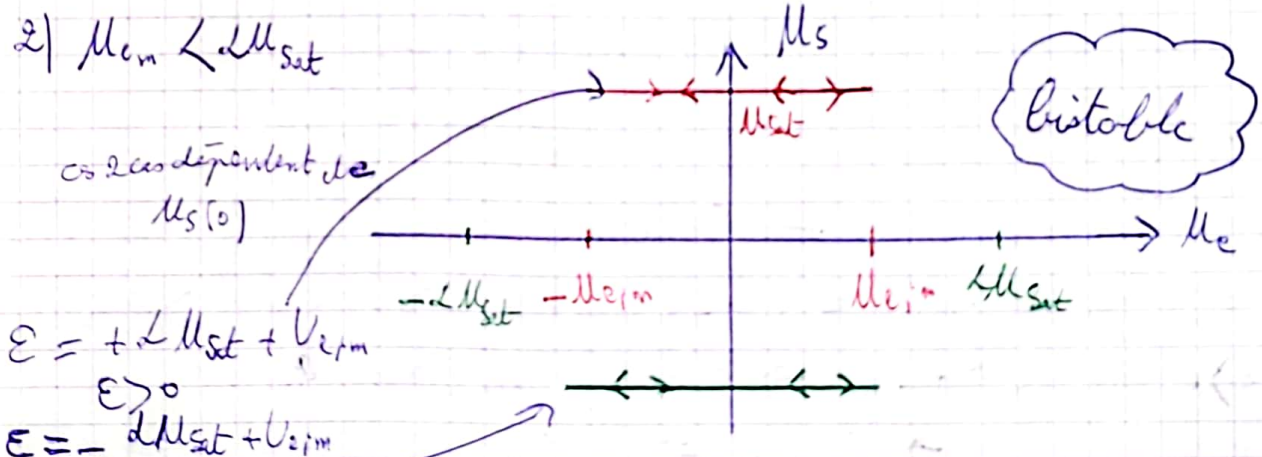
à $t > t_2$; $\varepsilon > 0 \Rightarrow v_s = +V_{sat}$ et $\varepsilon = +\alpha V_{sat} - v_e$





Cycle d'Hystérisis

2) $V_{em} < \alpha V_{sat}$



ces 2 cas dépendent de $v_s(0)$

$\varepsilon = +\alpha V_{sat} + V_{em}$

$\varepsilon > 0$

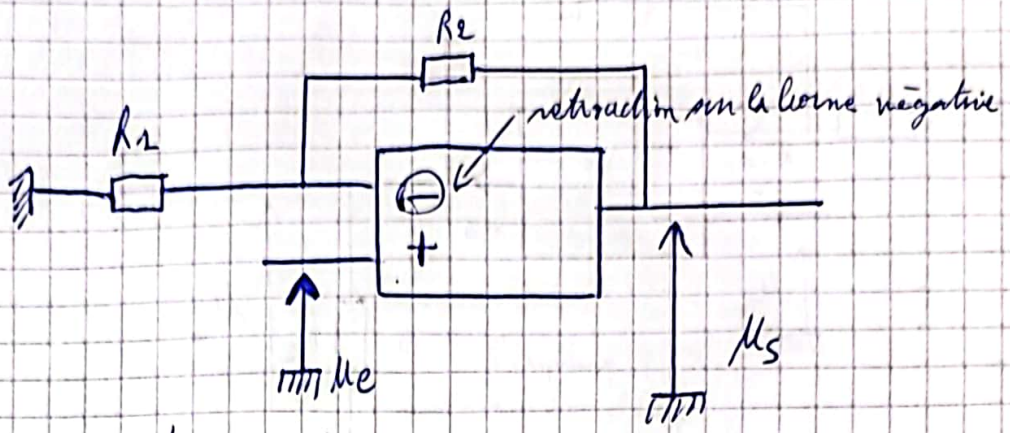
$\varepsilon = -\alpha V_{sat} + V_{em}$

$\varepsilon < 0$

Scanné avec CamScanner

IV) Phénomène de saturation :

1) Saturation en tension :



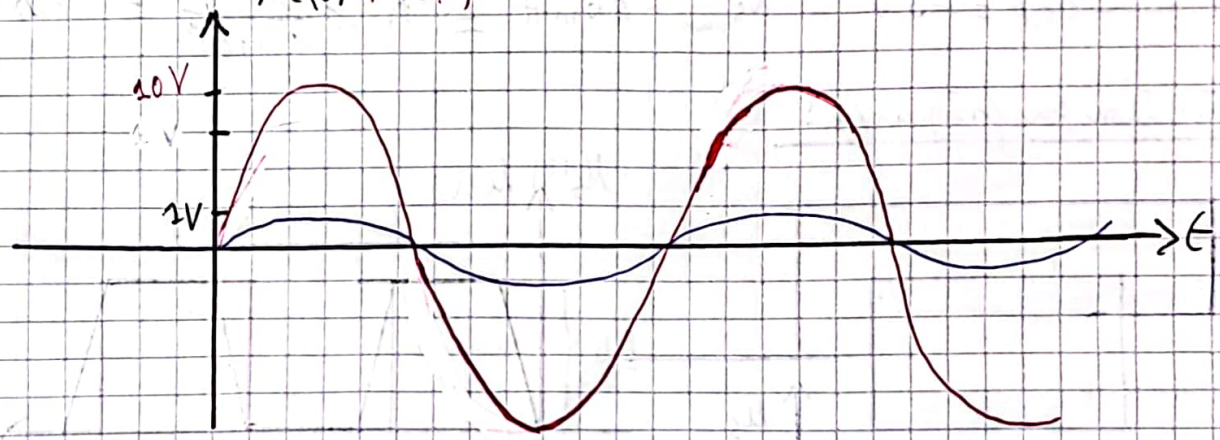
$$E^- = E^+ \text{ avec } \begin{cases} E^- = \dfrac{R_1}{R_1+R_2} U_s \\ E^+ = U_e \end{cases} \Rightarrow \frac{R_1}{R_1+R_2} U_s = U_e$$

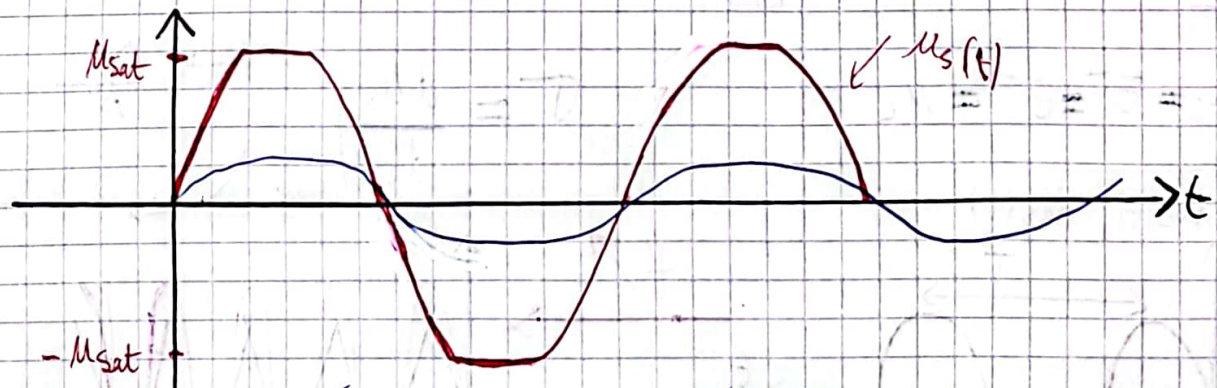
$$\Rightarrow U_s = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) U_e$$

Si $R_2 = 9 R_1 \Rightarrow U_s = 10\, U_e$; Soit $U_e(t) = U_{em} \sin(\omega t)$

Tracez $U_s(t)$ dans le cas où $U_{em} = 1V$; $U_{em} = 2V$.

$U_e(t)$; $U_s(t)$

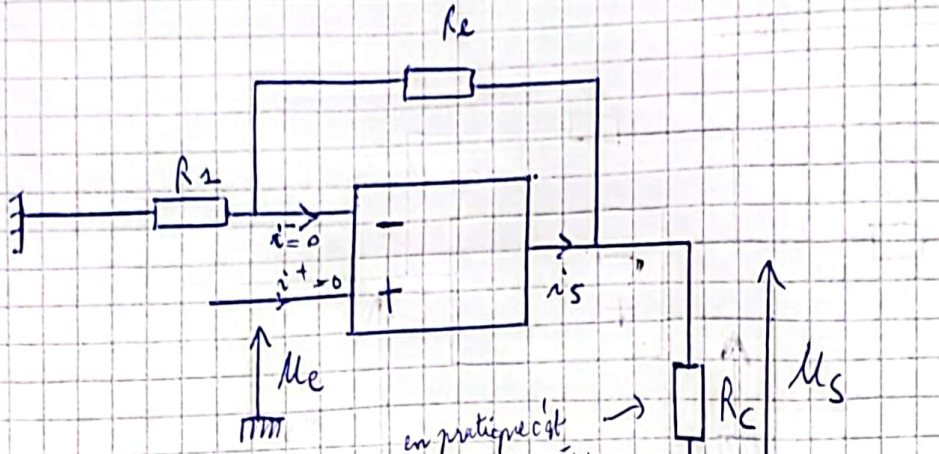




On remarque expérimentalement l'écrêtage de la tension $U_s(t)$ c'est le phénomène de la saturation en tension.

Scanné avec CamScanner

2) Saturation en tension :



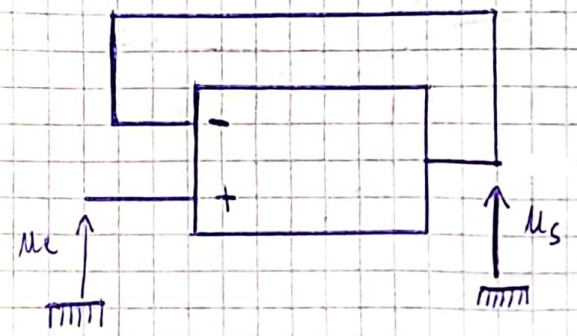
Expérimentalement : $i_s \leqslant i_{s\,max}$ (O. Grandeur 25mA ~ 200mA).

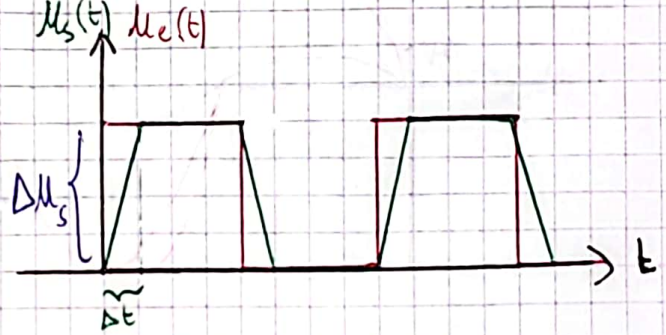
$$\frac{u_s}{R_c} \leqslant i_{s\,max}$$

Si $u_s = u_{sat} \Rightarrow R_c \geqslant \frac{u_{sat}}{i_{s\,max}}$

O.D.G. ordre de grandeur $u_{sat} = 15V$; $i_{s\,max} = 20mA \Rightarrow R_c \geqslant \frac{15}{20 \times 10^{-3}} = 750\Omega$

3) Saturation en fréquence :

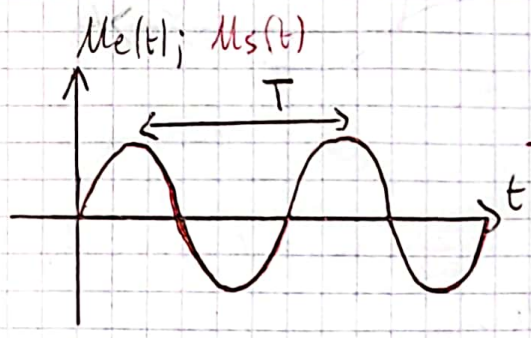




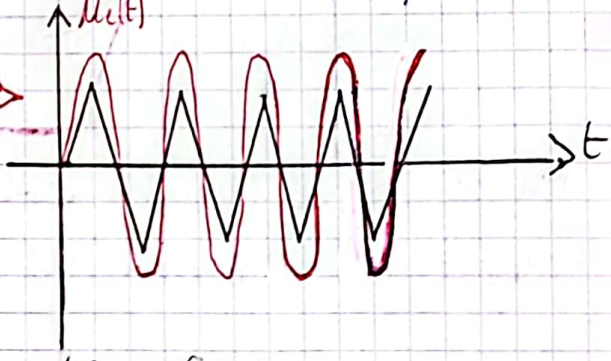
$u_s = E^- = E^+ = u_e$

$$\sigma = \left(\frac{du_s}{dt}\right)_{max} \rightarrow \frac{\Delta u_s}{\Delta t}$$ 1ère méthode

→ ? 2ème méthode



f ↗



$u_s(t)$ se triangularise

Scanné avec CamScanner

$u_s = u_{s_{max}} \cos(\omega t + \varphi)$

$\sigma = \left.\frac{du_s}{dt}\right|_{max} = \omega \cdot u_{s_{max}}$

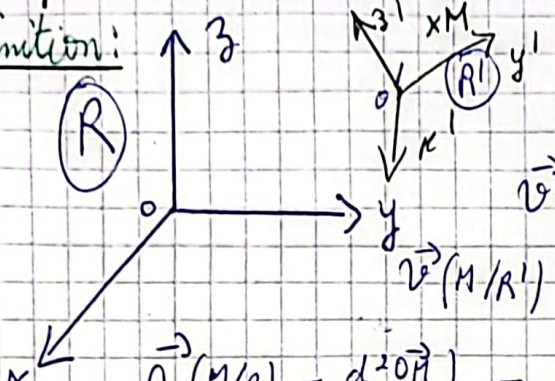
↑ pulsation du début transconductance.

Scanné avec CamScanner

Dynamique dans un référentiel non galiléen

I) Composition du mouvement :

1) Définition :



R est le référentiel absolu

R' est le référentiel relatif

$\vec{v}(M/R) = \left.\frac{d\vec{OM}}{dt}\right|_R = \vec{v_a}$ est la vitesse absolue

$\vec{v}(M/R') = \left.\frac{d\vec{O'M}}{dt}\right|_{R'} = \vec{v_r}$ est la vitesse relative

$\vec{a}(M/R) = \left.\frac{d^2\vec{OM}}{dt^2}\right|_R = \left.\frac{d\vec{v_a}}{dt}\right|_R = \vec{a_a}$ est l'accélération absolue

$\vec{a}(M/R') = \left.\frac{d^2\vec{O'M}}{dt^2}\right|_{R'} = \left.\frac{d\vec{v_r}}{dt}\right|_{R'} = \vec{a_r}$ est l'accélération relative

2) Composition de la vitesse :

Objectif : Relation entre $\vec{v_a}$ et $\vec{v_r}$.

$$\vec{v_a} = \left.\frac{d\vec{OM}}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\vec{OO'}}{dt}\right|_R + \left.\frac{d\vec{O'M}}{dt}\right|_R$$

or d'après la loi de dérivation d'un vecteur :

$$\left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_{R'} + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{A}$$

$$\left.\frac{d\vec{O'M}}{dt}\right|_R = \underbrace{\left.\frac{d\vec{O'M}}{dt}\right|_{R'}}_{\vec{v}(M/R') = \vec{v_r}} + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{O'M}$$

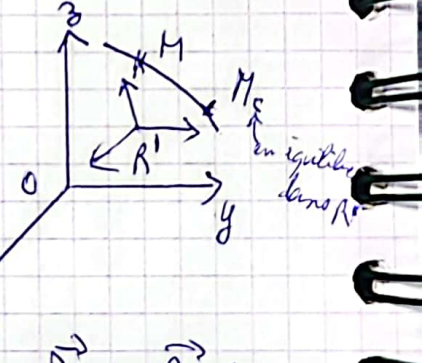
d'où $\vec{v_a} = \vec{v}(O'/R) + \vec{v_r} + \vec{\Omega}(R'/R) \wedge \vec{O'M}$

3D.L de rotation

$$\boxed{\vec{v_a} = \vec{v_r} + \vec{v_e}} \quad \text{avec } \vec{v_e} = \underbrace{\vec{v}(O'/R)}_{\text{3 D.L de translation}} + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{O'M}$$ est la vitesse d'entraînement.

c'est la vitesse du point coincident.

Rq : $\vec{v_e} = \vec{v_a}$ si $\vec{v_r} = 0$ M fixe dans R'



3) Composition des accélérations :

Objectif : relation entre $\vec{a_a}$ et $\vec{a_r}$.

$$\vec{a_a} = \left.\frac{d\vec{v_a}}{dt}\right|_R = \frac{d}{dt}\left[\vec{v_r} + \vec{v}(O'/R) + \vec{\Omega} \wedge \vec{O'M}\right]_R$$

Rq $\vec{\Omega} = \vec{\Omega}_{R'/R}$

Scanné avec CamScanner

$$a_a = \left.\frac{d\vec{v}_a}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\vec{v}_r}{dt}\right|_R + \underbrace{\left.\frac{d\vec{v}(O'/R)}{dt}\right|_R}_{\vec{a}(O'/R)} + \left.\frac{d\vec{\Omega}}{dt}\right|_R \wedge \vec{O'M} + \vec{\Omega} \wedge \left.\frac{d\vec{O'M}}{dt}\right|_R$$

or $\begin{cases} \left.\frac{d\vec{v}_r}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\vec{v}_r}{dt}\right|_{R'} + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{v}_r = \vec{a}_r + \vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r \\ \left.\frac{d\vec{O'M}}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\vec{OM}}{dt}\right|_{R'} + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{O'M} = \vec{v}_r + \vec{\Omega} \wedge \vec{O'M} \end{cases}$

d'où : $\vec{a}_a = \left[\vec{a}_r + \vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r\right] + \vec{a}(O'/R) + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{O'M} + \vec{\Omega} \wedge \left[\vec{v}_r + \vec{\Omega} \wedge \vec{O'M}\right]$

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}(O'/R) + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{O'M} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{O'M}) + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r$$

or $\vec{a}_e = \vec{a}_a$ d'un point fixe dans R' càd $\vec{v}_r = 0$ et $\vec{a}_r = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{a}_a = \vec{a}(O'/R) + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{O'M} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{O'M}) = \vec{a}_e}$$ accélération d'entraînement

On pose $\vec{a}_c = 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r$ c'est l'accélération de Coriolis.

CCL : $\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c$.

Rq $\vec{a}_e \neq \frac{d\vec{v}_e}{dt}$

4) Cas particuliers:

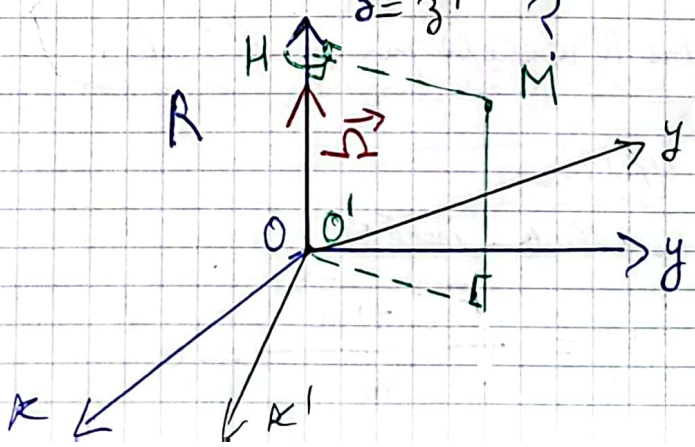
a) R' en translation /R : $\vec{\Omega}_{R'/R} = \vec{0}$:

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}(O'/R) \\ \vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}(O'/R) \end{cases}$$

b) R' est en rotation uniforme /R : $\vec{\Omega} = \vec{cte}$:

$$\Rightarrow \vec{a}_e = \vec{a}(O'/R) + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{O'H})$$

$z \equiv z'$?



H est la projection de M sur l'axe de rotation

$\vec{\Omega} = \Omega \cdot \vec{u}_z$.

Scanné avec CamScanner

$\vec{\Omega} \wedge \vec{O'H} = \vec{\Omega}\left(\vec{O'H} + \vec{HM}\right) = \vec{\Omega} \wedge \vec{O'H} + \vec{\Omega} \wedge \vec{HM}$

d'où $\vec{\Omega} \wedge \left(\vec{\Omega} \wedge \vec{O'H}\right) = \vec{\Omega} \wedge \left(\vec{\Omega} \wedge \vec{HM}\right)$.

$\vec{a} \wedge \left(\vec{b} \wedge \vec{c}\right) = \vec{b}.\left(\vec{a}.\vec{c}\right) - \vec{c}.\left(\vec{a}.\vec{b}\right)$

$= \vec{\Omega}.\left(\vec{\Omega}.\vec{HM}\right) - \vec{HM}.\left(\vec{\Omega}.\vec{\Omega}\right)$ ($\vec{\Omega}.\vec{\Omega} = \Omega^2$)

d'où $\boxed{\vec{a_e} = \vec{a}\left(O'/R\right) - \Omega^2 \vec{HM}}$.

II) Dynamique dans un référentiel non galiléen.

1) P.F.D dans R' :

Soient R un réf galiléen et R' un référentiel quelconque, le PFD dans R s'écrit :

$$\sum \vec{F_i} = m\,\vec{a}\left(M/R\right)$$

(m : masse inerte)

$$\sum \vec{F_i} = m\left[\vec{a}\left(M/R'\right) + \vec{a_e} + \vec{a_c}\right] \Rightarrow \sum_i \vec{F_i} + \left(-m\vec{a_e}\right) + \left(-m\vec{a_c}\right) = m\vec{a}\left(M/R'\right)$$

on pose $\begin{cases} \vec{F_e} = -m\vec{a_e} & \text{Force d'inertie d'entraînement} \\ \vec{F_c} = -m\vec{a_c} & \text{Force d'inertie de coriolis.} \end{cases}$

$$\Rightarrow \boxed{\sum \vec{F_i} + \vec{F_{ie}} + \vec{F_{ic}} = m\,\vec{a}\left(M/R'\right)}$$ Le PFD dans R'.

2) Commentaires :

↳ R est un référentiel galiléen en effet :

si le point matériel M est isolé ou pseudo-isolé :

$$\sum \vec{F_i} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a}\left(M/R\right) = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}\left(M/R\right) = \vec{cte}$$

Mouvement rectiligne + uniforme donc R vérifie le principe d'inertie.

↳ R' est un réf non galiléen en effet :

Si le pt matériel M est isolé ou pseudo-isolé :

$$\sum \vec{F_i} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a}\left(M/R'\right) = \frac{\vec{F_{ie}} + \vec{F_{ic}}}{m} \neq \vec{0}$$

Scanné avec CamScanner

$\Rightarrow \vec{v}(M/R') = \vec{cte}$ donc mouvement non "Rect+ uniforme $\Leftrightarrow$ R' ne vérifie pas le principe d'inertie.

↳ pour que R' soit galiléen ; il faut que :

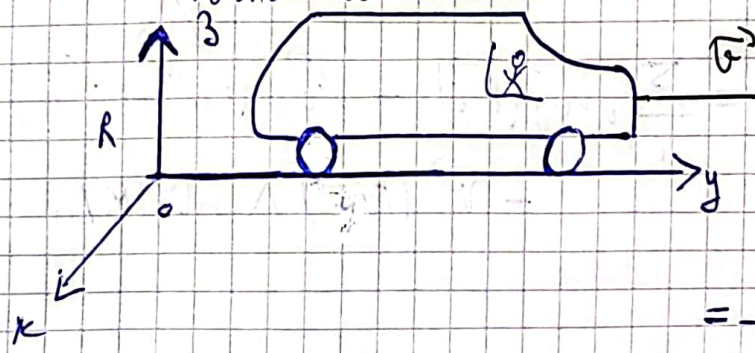
$$\begin{cases} \vec{F_{ic}} = \vec{0} \\ \text{et} \\ \vec{F_{ie}} = \vec{0} \end{cases} \forall M \Rightarrow \begin{cases} \vec{a_c} = \vec{0} \\ \vec{a_e} = \vec{0} \end{cases} \forall M$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\vec{\Omega} \wedge \vec{V_r} = \vec{0} \\ \text{et} \\ \vec{a_e} = 0 \end{cases} \forall M (\text{càd } \forall \vec{V_r}) \Rightarrow \begin{cases} \vec{\Omega} = \vec{0} \\ a(O'/R) = \vec{0} \Rightarrow \\ \vec{v}(O'/R) = \vec{cte} \Rightarrow R' \text{ est en mouvement rectiligne uniforme /R.} \end{cases} \quad R' \text{ est en translation /R}$$

Cl: Si R' est en translation rectiligne uniforme$/_{R \text{ galiléen}}$ alors R' est galiléen.

↳ $\vec{F_{ie}}$ et $\vec{F_{ic}}$ sont des pseudo-forces (Forces non réelles) car elles sont liées au caractère non galiléen de réf

Exp : Véhicule en mouvement de translation rectiligne non uniforme/R.



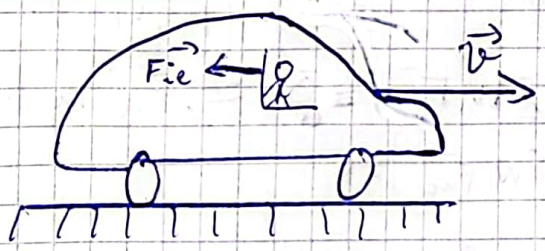
$\vec{v} = \vec{v}(R'/R) = v\vec{\mu_y}$

$\vec{\Omega} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \vec{F_{ic}} = \vec{0} \\ \vec{F_{ie}} = -m\vec{a_e} \end{cases}$

$= -m\left[\vec{a}(O'/R) + \vec{0} + \vec{0}\right]$.

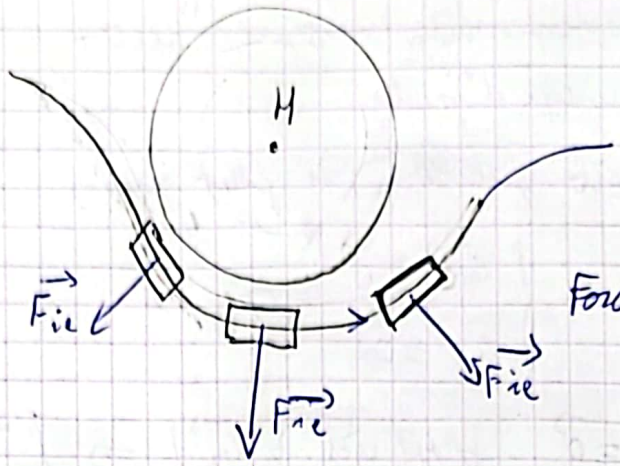
$$\vec{F_{ie}} = -m \left.\frac{d\vec{v}(O'/R)}{dt}\right|_R = -m\frac{dv}{dt}\vec{\mu_y}$$

⊕ en phase d'accélération : $v \nearrow \Rightarrow \frac{dv}{dt} > 0$



⊕ en phase de freinage : $v \downarrow \Rightarrow \frac{dv}{dt} < 0$

Scanné avec CamScanner



$$\vec{F_{ie}} = -m\left[\vec{0} + \vec{0} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{O'M})\right] = -m(-\Omega^2 \vec{HM})$$

$$\vec{F_{ie}} = m\Omega^2 \vec{HM}.$$

$\vec{F_{ic}} = \vec{0}$ car M fixée dans R' $\left(\vec{v}(M/R') = \vec{0}\right)$

3) TMC dans R' :

TMC dans R : $\left.\frac{d\vec{L_A}}{dt}\right|_R = \sum_i \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F_i}) - \vec{v}(A/R) \wedge m\vec{v}(M/R)$

TMC dans R' : $\left.\frac{d\vec{L_A}}{dt}\right|_{R'} = \sum_i \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F_i}) + \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F_{ie}}) + \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F_{ic}}) - \vec{v}(A/R') \wedge m\vec{v}(M/R')$

4) Energie potentielle :

a) Travail de $\vec{F_{ic}}$:

$$\delta W(\vec{F_{ic}}) = \vec{F_{ic}} \cdot d\vec{O'M} = -m\vec{a_c} \cdot \left.\frac{d\vec{O'M}}{dt}\right|_{R'} dt$$

$$\delta W(\vec{F_{ic}}) = -m\left[2\vec{\Omega} \wedge \vec{V_r}\right] \cdot \vec{V_r}\, dt = -2m\left(\vec{V_r} \wedge \vec{V_r}\right) \cdot \vec{\Omega}\, dt$$

donc $\delta W(\vec{F_{ic}}) = 0 \Rightarrow \vec{F_{ic}}$ ne travaille pas

$$\Rightarrow dE_{P\,ic} = -\delta W(\vec{F_{ic}}) = 0$$

$$\Rightarrow E_{P\,ic} = de = 0$$

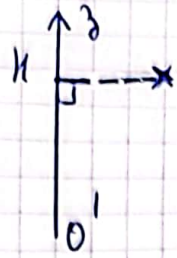
b) Travail de $\vec{F_{ie}}$:

Cas ① : Si R' est en rotation uniforme / R : $\vec{F_{ie}} = -m\vec{a_e}$

$$\vec{F_{ie}} = -m\left(-\Omega^2 \vec{HM}\right) = m\Omega^2 \vec{HM}$$

Scanné avec CamScanner

$\delta W(F_{ie}) = \vec{F_{ie}} \cdot d\vec{OM} = m\Omega^2 \vec{HM}\,(d\vec{O'H} + d\vec{HM})$



$\Rightarrow \vec{HM} \cdot d\vec{O'H} = \vec{0}$

$\delta W(\vec{F_{ie}}) = m\Omega^2 \vec{HM} \cdot d\vec{HM} = d\left(\frac{1}{2} m\Omega^2 \vec{HM}\right)$

$\Rightarrow dE_{pie} = -d\left(\frac{1}{2} m\Omega^2 \vec{HM}\right) = \Rightarrow E_{pie} = \frac{-1}{2} m\Omega^2 \vec{HM}^2 + cte$

Cas (1) : Si R' en translation d'accélération constante /R :

$\vec{F_{ie}} = -m\vec{a_e} = -m\left[\vec{a}(O'/R) + \vec{0} + \vec{0}\right]$

$\vec{F_{ie}} = -m\vec{a_0}$ avec $\vec{a}(O'/R) = \vec{a_0} = cte$

$dE_{pie} = -\delta W(\vec{F_{ie}}) = -m\vec{a_0}\, d\vec{O'H}$

$dE_{pie} = -d\left(m\vec{a_0} \cdot \vec{O'M}\right) \mid d'où \quad E_{pie} = -m\vec{a_0}\,\vec{O'M} + cte$

4) TEC dans R' : $dE_c = \delta W_T + \delta W_{ie}$

5) TEM dans R' : $dE_m = \delta W_{nic}$ avec $E_m = E_c + E_p + E_{pie}$

EXERCICES d'application : (voir série rév Sup dynamique du pt matériel en référentiel non galiléen).

EXERCICE 1 :

1) R' est non galiléen car R' est en rotation /R.

2) $\vec{F_{ie}} = -m\vec{a_e} = m\omega^2 \vec{HM} = m\omega^2 \vec{OM} = m\omega^2 r\vec{e_r}$ (force centrifuge)

$\vec{F_{ic}} = -m\vec{a_c} = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{V_r}$ tq $\vec{V_r} = \vec{v}(M/R') = \left.\frac{d\vec{O'M}}{dt}\right|_{R'}$

$= \left.\frac{d(r\vec{e_r})}{dt}\right|_{R'}$ (base dans R' O)

donc $\vec{F_{ic}} = -2m(\omega\vec{e_z} \wedge \dot{r}\vec{u_r}) = -2m\omega\dot{r}\vec{e_\theta}$ $\Big| \vec{V_r} = \dot{r}\vec{e_r} + \left.\frac{d\vec{e_r}}{dt}\right|_{R'}$

3) $\sum_k \vec{F_k} + \vec{F_{ie}} + \vec{F_{ic}} = m\vec{a}(M/R')$ tq

$\sum_k \vec{F_k} = \vec{P} + \vec{RN} = -mg\vec{u_z} + R_z\vec{u_z} + R_\theta\vec{u_\theta}$

$\vec{a}(M/R') = \left.\frac{d\vec{v}(M/R')}{dt}\right|_{R'} = \ddot{r}\vec{u_r}$

Scanné avec CamScanner

donc $-mg\vec{u_z} + R_z\vec{u_z} + R_\theta\vec{u_\theta} + m\omega^2 r\vec{u_r} - 2m\omega\dot{r}\vec{u_\theta} = m\ddot{r}\vec{u_r}$.

proj/$\vec{u_r}$: $\ddot{r} - \omega^2 r = 0 \Rightarrow r(t) = Ae^{+\omega t} + Be^{-\omega t}$

CI $\begin{cases} r(0) = b \\ \dot{r}(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow A = B = \frac{b}{2}$

$\Rightarrow r(t) = b\,ch(t)$

5| proj $\vec{u_z}$: $-mg + R_z = 0 \Rightarrow R_z = mg$

proj $\vec{u_\theta}$: $R_\theta - 2m\omega\dot{r} = 0 \Rightarrow R_\theta = 2m\omega(b\omega\,sh(\omega t))$

$= 2mb\omega^2 sh(\omega t)$

6| $\sum \vec{F_R} = m\vec{a}_{(M/R)}$ avec

$\vec{OM} = r\vec{u_r} \Rightarrow \vec{v}(M/R) = \dot{r}\vec{u_r} + r\dot{\theta}\vec{u_\theta}$

$\vec{v}(M/R) = \dot{r}\vec{u_r} + r\omega\vec{u_\theta} \rightarrow \vec{a}(M/R) = (\ddot{r} - r\omega^2)\vec{u_r} + (2\dot{r}\omega - 0)\vec{u_\theta}$

$\sum F_R = \vec{P} + \vec{R_N} = -mg\vec{u_z} + R_z\vec{u_z} + R_\theta\vec{u_\theta}$:

proj/$\vec{u_r}$: $0 = m(\ddot{r} - r\omega^2) \Rightarrow \ddot{r} - \omega^2 r = 0 \Rightarrow r(t) = b\,ch(\omega t)$

proj/$\vec{u_\theta}$: $R_\theta = m(2\dot{r}\omega) \Rightarrow R_\theta = 2m\omega\dot{r} = 2mb\omega^2 sh(\omega t)$

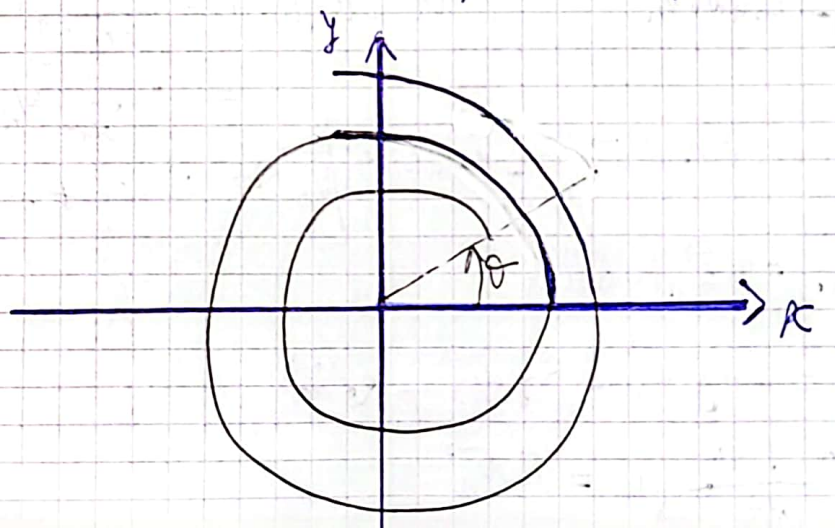
proj/$\vec{u_z}$: $R_z = mg$

Ccl : les forces sont invariantes par changement de référentiel.

7| $\begin{cases} r(t) = b\,ch(\omega t) \\ \omega = \dot{\theta} \Rightarrow \theta = \omega t + \theta_0 \end{cases} \rightarrow r(\theta) = b\,ch(\theta - \theta_0)$

Si $\theta = \theta_0$ et $r = r_0$

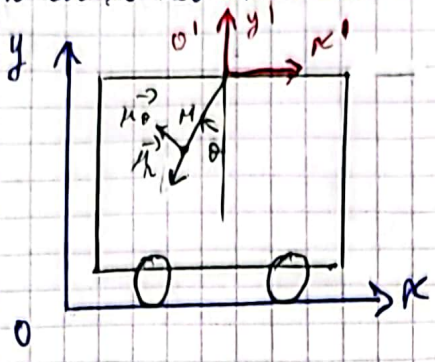
Si $\theta \nearrow \Rightarrow r \nearrow$



Scanné avec CamScanner

EXERCICE 3 :

1) R' est non galiléen car il est en mouvement accéléré par rapport à R.



2) $\vec{\Omega}_{R'/R} = \vec{0}$ car R' en translation / R

$$\begin{cases} \vec{F}_{ic} = \vec{0} \\ \vec{F}_{ie} = -m\left[\vec{a}(O'/R) + \vec{0} + \vec{0}\right] = -m a_0 \vec{u}_x \end{cases}$$

3) M est en équilibre dans R' $\Rightarrow \vec{v}(M/R') = \vec{0}$

$\Rightarrow \vec{a}(M/R') = \vec{0} \Rightarrow \sum_k \vec{F}_k + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic}^{\,\vec{0}} = \vec{0}$

$\Rightarrow -mg\vec{u}_z - T\vec{u}_r - m a_0 \vec{u}_x = \vec{0}$

4) proj / $\vec{u}_\theta$ (pour éliminer $\vec{T}$)

$-mg\vec{u}_z \cdot \vec{u}_\theta - 0 - m a_0 \vec{u}_x \cdot \vec{u}_\theta = \vec{0} \Rightarrow g\vec{u}_z \cdot \vec{u}_\theta + g\vec{u}_x \cdot \vec{u}_\theta = \vec{0}$

$\Rightarrow \sin(\theta_{eq}) - \cos(\theta_{eq}) = 0 \Rightarrow \sin(\theta_{eq}) = \cos(\theta_{eq}) \Rightarrow \theta_{eq} = \frac{\pi}{4}$

Rq : Si R est galiléen : $\vec{F}_{ie} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a}_0 = \vec{0} \Rightarrow \sin\theta_{eq} = 0$

$\Rightarrow \theta_{eq} = 0.$

5) RFD dans R' : $\sum \vec{F}_k + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic}^{\,\vec{0}} = m\vec{a}(M/R')$

or $\vec{O'M} = l\vec{u}_r \rightarrow \vec{v}(M/R') = l\dot{\theta}\vec{u}_\theta \rightarrow \vec{a}(M/R') = l\left[\ddot{\theta}\vec{u}_\theta - \dot{\theta}^2\vec{u}_r\right]$

d'où $-\left[mg\vec{u}_z + T\vec{u}_r + m a_0 \vec{u}_x\right] = ml\left(\ddot{\theta}\vec{u}_\theta - \dot{\theta}^2\vec{u}_r\right)$

proj / $\vec{u}_\theta$: $-mg\vec{u}_z \cdot \vec{u}_\theta - mg\vec{u}_x \cdot \vec{u}_\theta = ml\ddot{\theta}$

$g\left(\vec{u}_z \cdot \vec{u}_\theta + \vec{u}_x \cdot \vec{u}_\theta\right) = -l\ddot{\theta}$

Scanné avec CamScanner

$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\left[\sin(\theta) - \cos(\theta)\right] = 0$

on pose $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$ d'où $\ddot{\theta} + \omega_0^2\left(\sin(\theta) - \cos(\theta)\right) = 0$

on pose $\theta = \theta_e + \varepsilon$

DL à l'ordre 1 de $V(\theta_e)$

$\sin(\theta) = \sin(\theta_e) + (\theta - \theta_e)\cos(\theta_e)$

$\cos(\theta) = \cos(\theta_e) - (\theta - \theta_e)\sin(\theta_e)$

$\ddot{\theta} + \omega_0^2\left[\sin\theta_e + \varepsilon\cos(\theta_e) - \left(\cos(\theta_e) - \varepsilon\sin(\theta_e)\right)\right] = 0$

$\Rightarrow \ddot{\varepsilon} + \omega_0^2\left(\cos(\theta_e) + \sin(\theta_e)\right)\varepsilon = 0$

$\Rightarrow \ddot{\varepsilon} + \omega_0^2\sqrt{2}\,\varepsilon = 0$

$\Rightarrow \ddot{\varepsilon} + \omega^2\varepsilon = 0$ avec $\omega = \sqrt[4]{2}\,\omega_0$

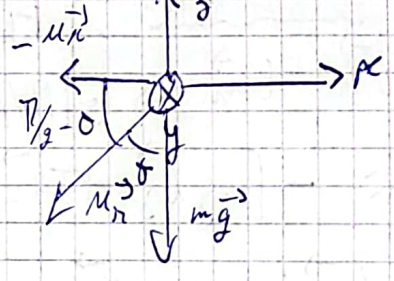
$\Rightarrow \varepsilon(t) = \varepsilon_m\cos(\omega t + \varphi)$

$\Rightarrow \theta_{eq} - \varepsilon_m \leqslant \theta \leqslant \theta_{eq} + \varepsilon_m$

donc θ_{eq} est une position d'équilibre stable.

7) T.M.C au point O' dans R' :

$$\left.\frac{d\vec{L}_{O'}}{dt}\right|_{R'} = \sum_k \vec{\mathcal{M}}_{O'}(\vec{F}_k) + \vec{\mathcal{M}}_{O'}(\vec{F}_{ie}) + \vec{\mathcal{M}}_{O'}(\vec{F}_{ic}) - \vec{v}(O'/R)\wedge m\vec{V}(m/R')$$



(+) $\vec{L}_{O'}(M/R') = \underbrace{\vec{O'M}}_{\text{moment}} \wedge \underbrace{m\vec{V}(M/R')}_{\text{cinétique}}$

$\left(\underbrace{\vec{V}(M/R')}_{\text{cinématique}}\right)$

Scanné avec CamScanner

$\vec{L_{O'}}(M/R') = l\vec{u_r} \wedge ml\dot{\theta}\vec{u_\theta} = ml^2\dot{\theta}\vec{u_y}$

$\Rightarrow \left.\frac{d\vec{L_{O'}}}{dt}\right)_{R'} = ml^2\ddot{\theta}\vec{u_y}$

① $\sum_k \vec{M}_{O'}(F_k) = \vec{O'M} \wedge \vec{P} + \underbrace{\vec{O'M} \wedge \vec{T}}_{\vec{0}}$

$= l\vec{u_r} \wedge m\vec{g}$

$= -mgl\sin(\theta)\vec{u_y}$

② $\vec{M}_{O'}(\vec{F_{ie}}) = \vec{O'M} \wedge \vec{F_{ie}} = l\vec{u_r} \wedge (-ma_0\vec{u_x})$

$= mgl\,\vec{u_r} \wedge (-\vec{u_z})$

$= mgl\cos(\theta)\vec{u_y}$

Ccl: $ml^2\ddot{\theta}\vec{u_y} = -mgl\sin(\theta)\vec{u_y} + mgl\cos(\theta)\vec{u_y}$

$l\ddot{\theta} = -g\sin(\theta) + g\cos(\theta)$

$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}(\sin\theta + \cos(\theta)) = 0$

Scanné avec CamScanner

Dynamique terrestre :

I) Référentiels d'étude :

1) Référentiel de Copernic R_c : C'est un référentiel dont l'origine est le barycentre du système solaire et ses axes sont dirigées vers 3 étoiles très éloignées. R_c est le meilleur référentiel galiléen.

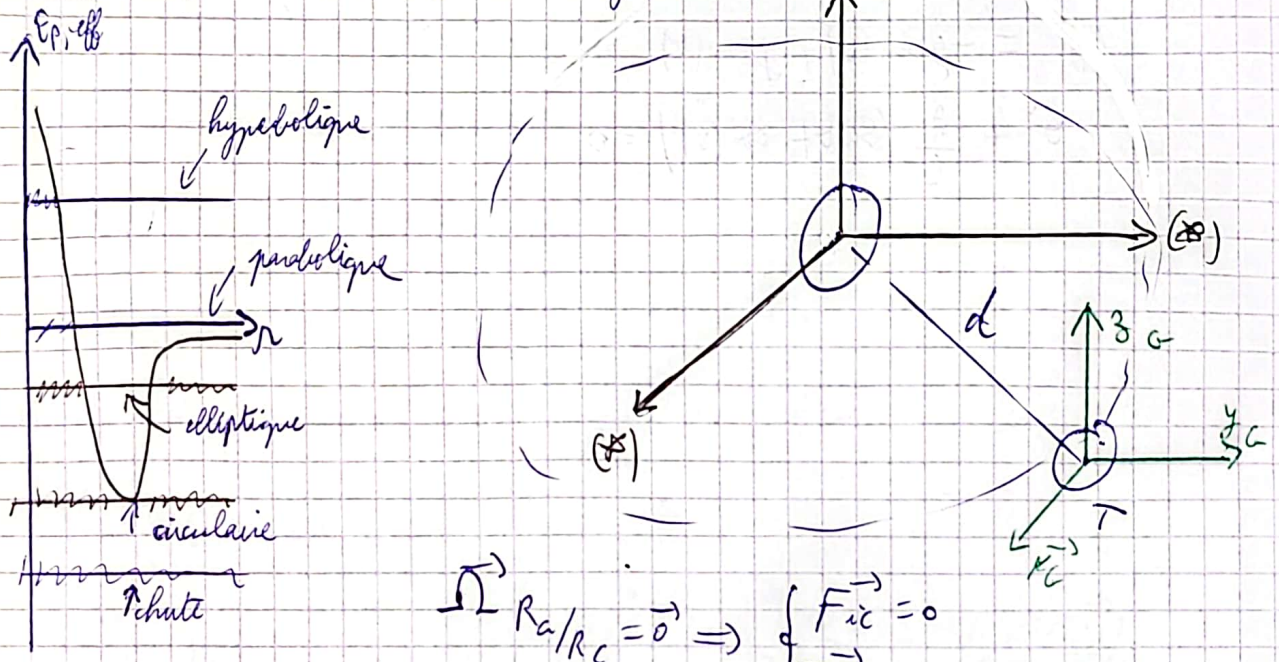
2) Référentiel héliocentrique ou de Képler R_k : C'est un référentiel dont l'origine est le barycentre du soleil et ses axes sont dirigés vers 3 étoiles très éloignés.

$S \equiv C \Rightarrow R_k \cong R_c$ donc R_k est galiléen

(le barycentre du soleil $\cong$ barycentre du système solaire).

3) Référentiel géocentrique R_G : C'est un référentiel dont l'origine est le barycentre de la terre et ses axes sont dirigés vers 3 étoiles très éloignés.

Le mouvement de R_G / à R_c est un mouvement de translation quasi circulaire uniforme. donc R_G est non galiléen.



$\Sigma \vec{F}_{R_a/R_c} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \vec{F_{ic}} = 0 \\ \vec{F_{ie}} = -m\,\vec{a}(O'/R) \end{cases}$

$O' \equiv T \Leftarrow R' = R_G \longrightarrow = -m\,\vec{a}(T/R_c)$

$R = R_c$

$d_{T/S} = 1{,}5 \times 10^{11}\ m$

$T = 365{,}25\ J$

Calculer $\vec{a}(T/R_c) = ?$

Scanné avec CamScanner

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{u_t} + \frac{v^2}{R_c}\vec{u_N}$$

or $v = cte \Longrightarrow \vec{a}(T/R_c) = \frac{v^2}{R_c}\vec{u_N}$

$a(T/R_c) = \frac{v^2}{d}$ ($R_c = d$; Trajectoire circulaire).

or $v = d\omega$ $\left(\vec{v} = \cancel{\dot{r}}^{0}\vec{u_r} + r\dot{\theta}\vec{u_\theta} = d\omega\vec{u_\theta}\right)$

$$a(T/R_c) = d.\omega^2 = d\,\frac{4\pi^2}{T^2} = 6.10^{-3}\,m/s^2$$

4) Référentiel terrestre : R_T.

C'est un référentiel lié à la terre, il est en mouvement de rotation uniforme autour de l'axe des pôles géographique (S–N) (sud–Nord). R_T est un référentiel non galiléen.

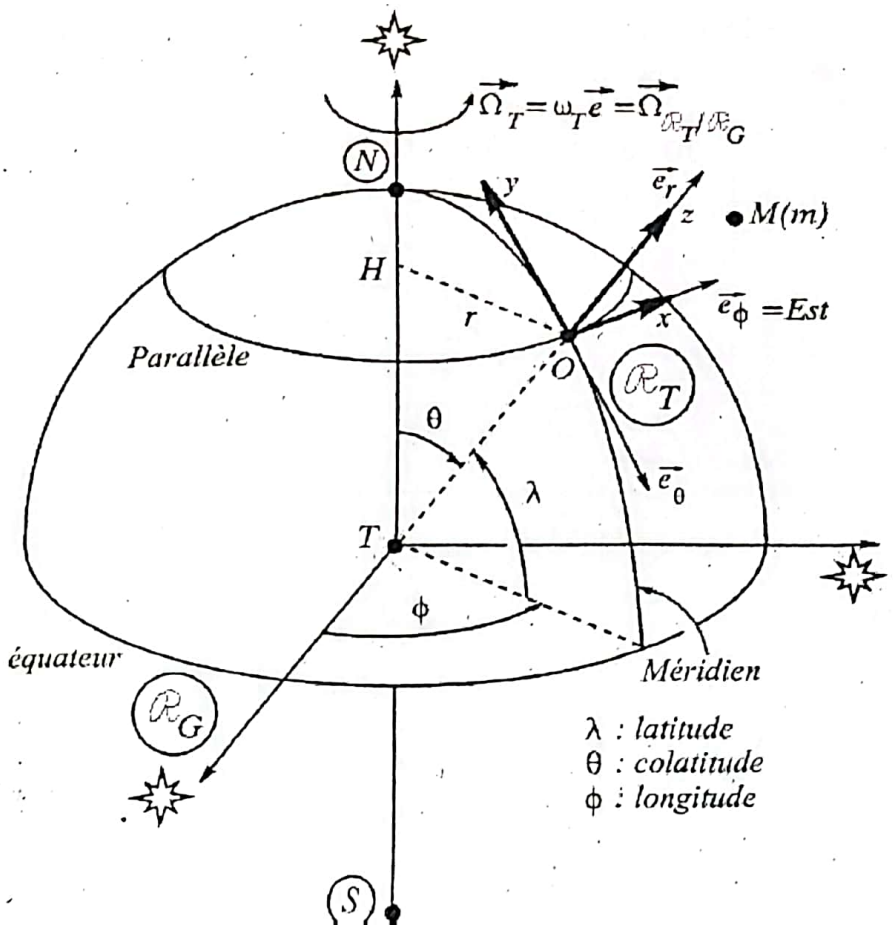
⚠ Rq : $\Omega(R_T/R_G) = \frac{2\pi}{T}$ avec $T = 24h$

$\Omega(R_T/R_C) = \frac{2\pi}{T'}$ avec $\cancel{T' = 365{,}25\,J}$; $T' = 24h$

En effet ; $\vec{\Omega}(R_T/R_C) = \vec{\Omega}(R_T/R_G) + \vec{\Omega}(\cancel{R_G/R_C})^{\vec{0}}$

donc $\Omega(R_T/R_C) = \Omega(R_T/R_G)$

REFERENTIEL TERRESTRE



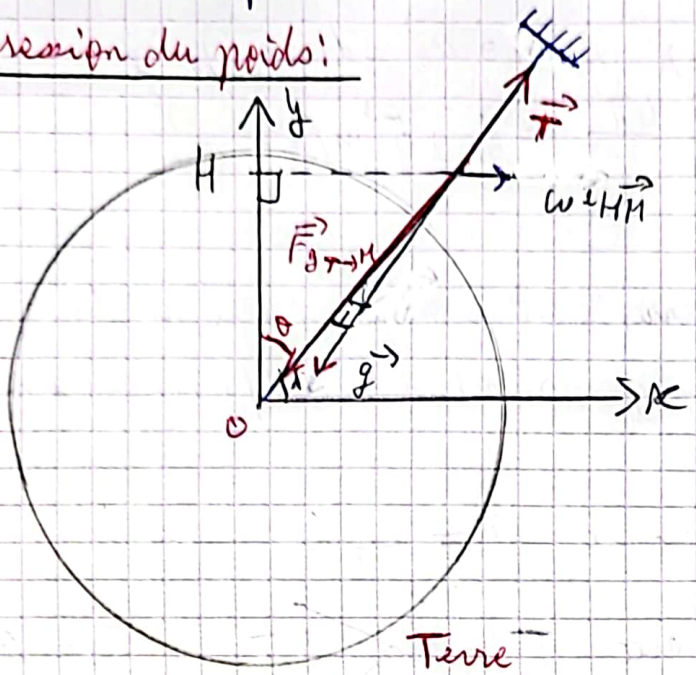
Scanné avec CamScanner

II) poids d'un corps :

1) définition : le poids d'un corps est la force opposée à la tension $\vec{T}$ d'un fil qui permet de maintenir le corps en équilibre dans R_T.

$$\vec{P} = -\vec{T}.$$

2) Expression du poids :



Le PFD appliqué sur le point M dans R_T s'écrit

$$\sum_i \vec{F}_i + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic} = m\vec{a}(M/R_T)$$

Si le point M est en équilibre dans R_T alors $\vec{v}(M/R_T) = \vec{0}$

donc $\vec{a}(M/R_T) = \vec{0}$ et $\vec{F}_{ic} = -2m\vec{\Omega}_{R_T/R_G} \wedge \vec{v}(M/R_T) = \vec{0}$.

$R \to R_G$, $R' \to R_T$ avec $O' \equiv O$

d'où $\sum_k \vec{F}_k + \vec{F}_{ie} = \vec{0}$.

tq $\sum_k \vec{F}_k = \vec{F}_{g_{T\to M}} + \vec{T}$

d'où $\vec{F}_{g\,T\to M} + \vec{T} + \vec{F}_{ie} = \vec{0}$

or $\vec{P} = -\vec{T}$ donc $\vec{P} = \vec{F}_{g_{T\to M}} + \vec{F}_{ie}$

$$\Rightarrow m\vec{g} = m\vec{G}_T(M) - m\vec{a}_e$$

avec $\vec{a}_e = -\omega^2\vec{HM}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{g} = \vec{G}_T(M) + \omega^2\vec{HM}}$$

$\Rightarrow \vec{g}$ n'est pas centripète

Scanné avec CamScanner

$\tan\alpha = \dfrac{\omega^2 HM}{G_T(M)}$. or $\sin(\theta) = \dfrac{HM}{R_T} \Rightarrow HM = R_T \sin(\pi/2 - \lambda)$

$= R_T \cos(\lambda)$

$\tan\alpha = \dfrac{\frac{4\pi^2}{T^2} \times R_T \times \cos(\lambda)}{G_T(M)}$ / an : $T = 24\,h$; $R_T = 6400\,Km$

$G_T(M) = 9{,}8\ m.s^{-2}$; $\lambda = 34°$

$\Rightarrow \boxed{\alpha = 0{,}16°}$

appliqué au point M sur le référentiel géocentrique s'écrit:

$+ \vec{F}_{g_S \to M} + \vec{F}_{g_L \to M} + \vec{F}_{g_{autres\ astres} \to M} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic} = m\vec{a}(M/R_{géo})$

$R_{géo}/R_c) = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \vec{F}_{ic}^{autres\ astres} = \vec{0} \\ \vec{F}_{ie} = -m\left[\vec{a}(O/R) + \vec{\omega} + \vec{0}\right] = -m\vec{a}(T/R_c) \end{cases}$

$\left[\vec{G_T}(M) + \vec{G_S}(M) + \vec{G_L}(M) + \vec{G}_{autres\ astres \to M}^{\vec{0}}\right] - m\vec{a}(T/R_c) = m\vec{a}(M/géo)$

$+\dfrac{\vec{F_a}}{m}$

$\vec{G_T}(M) + \vec{G_S}(M) + \vec{G_L}(M) - \underbrace{\vec{a}(T/R_c)}_{?} = \vec{a}(M/R_{géo})$ (*)

appliqué sur la terre dans R_c:

$+ \vec{F}_{g_{L \to T}} + \vec{F}_{g_{autres\ astres}}^{\simeq \vec{0}} = M_t \vec{a}(T/R_c)$ "R_c est galiléen"

$\vec{G_S}(T) + \cancel{M_T}\vec{G_L}(T) = \cancel{M_t}\vec{a}(T/R_c)$

$(T/R_c) = \vec{G_S}(T) + \vec{G_L}(T)$ on remplace dans l'équation (*)

$(M) + \left[\vec{G_S}(M) - \vec{G_S}(T)\right] + \left[\vec{G_L}(M) - \vec{G_L}(T)\right] = \vec{a}(M/R_{géo})$

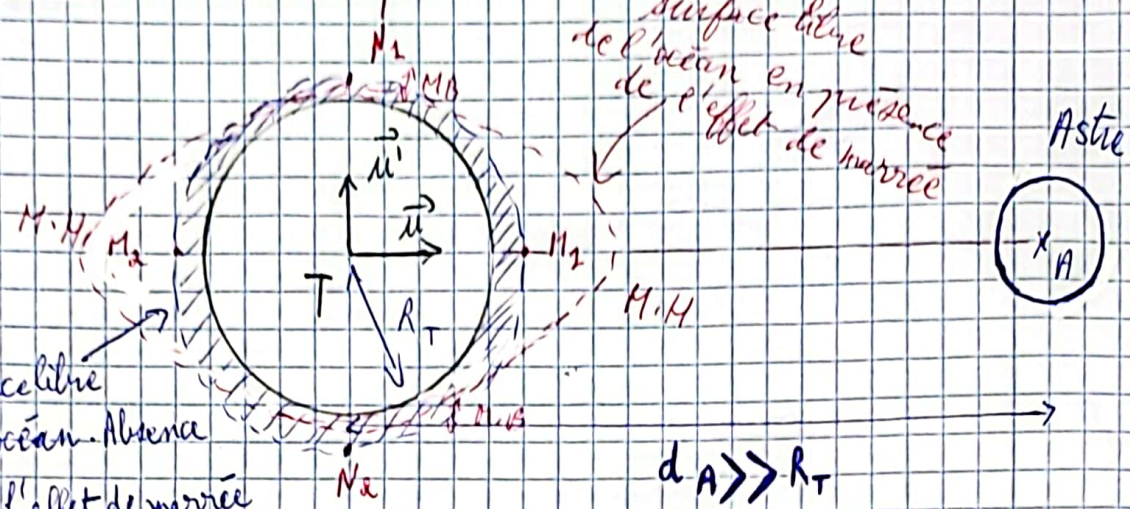
le terme de marrée d'un astre pas:

$\vec{\delta_a}(M) = \vec{G_a}(M) - \vec{G_a}(T)$

$\dfrac{\vec{F_a}}{m} + \vec{G_T}(M) + \vec{\delta_S}(M) + \vec{\delta_L}(M) = \vec{a}(M/R_{géo})$

Scanné avec CamScanner

Application: Marrée océanique



$d_A \gg R_T$

En faisant un développement limité à l'ordre le plus bas non nul déterminer les expressions des termes de marrées au points M_1; M_2; N_1; N_2.

Pq $\quad \vec{\delta_a}(M_{1/2}) = \pm \dfrac{2Gm_A R_T}{d_A^3}\vec{u}$

$$\vec{\delta_a}(N_{1,2}) = \pm \frac{Gm_A R_T}{d_A^3}\vec{u}'$$

Rappel:
$$\begin{cases} \vec{F}_{g\,1\to 2} = m_2 \vec{G_1}(M_2) \\ \vec{F}_{g\,1\to 2} = \dfrac{-Gm_1m_2}{\|M_1\vec{M_2}\|^3}\vec{M_1M_2} \end{cases} \Rightarrow \vec{G_1}(M_2) = \frac{-Gm_1}{\|M_1\vec{M_2}\|^3}\vec{M_1M_2}$$

$$\vec{\delta_a}(M_1) = \vec{G_a}(M_1) - \vec{G_a}(T) = \frac{-Gm_a}{\|A\vec{M_1}\|^3}\vec{AM_1} - \frac{Gm_a}{\|A\vec{T}\|^3}\vec{AT}$$

$$\vec{\delta_a}(M_1) = \frac{-Gm_a}{(d_A - R_T)^2}(-\vec{u}) + \frac{Gm_A}{d_A^2}(-\vec{u})$$

$$\vec{\delta_a}(M_1) = \frac{Gm_a}{d_A^2}\left[\left(1 - \frac{R_T}{d_A}\right)^{-2} - 1\right]\vec{u}$$

dans notre cas: le D.L à l'ordre le plus bas non nul est l'ordre 1

$$\vec{\delta_a}(M_1) = \frac{Gm_a}{d_A^2}\left[1 + \frac{2R_T}{d_A} - 1\right]\vec{u}$$

$$\boxed{\vec{\delta_a}(M_1) = \frac{2Gm_a R_T}{d_A^3}\vec{u}} \quad \text{de même} \quad \boxed{\vec{\delta_a}(M_2) = \frac{-2Gm_a R_T}{d_A^3}\vec{u}}$$

$$\vec{\delta_a}(N_1) = \vec{G_a}(N_1) - \vec{G_a}(T)$$

Scanné avec CamScanner

$$= \frac{-Gm_a}{\|A\vec{N}_1\|^3} A\vec{N}_1 - \frac{-Gm_a}{\|A\vec{T}\|^3} A\vec{T}$$

or $A\vec{N}_1 = A\vec{T} + T\vec{N}_1 = -d_A\,\vec{u} + R_T\,\vec{u}'$

$$\Rightarrow \|A\vec{N}_1\| = \sqrt{d_A^2 + R_T^2} \Rightarrow \frac{1}{\|A\vec{N}_1\|^3} = \frac{1}{(d_A^2 + R_T^2)^{3/2}}$$

$$\vec{S_a}(N_1) = \frac{-Gm_a(-d_A\vec{u} + R_T\vec{u}')}{d_A^3\left(1+\left(\frac{R_T}{d_A}\right)^2\right)^{3/2}} + \frac{Gm_a}{d_A^2}(-\vec{u}')$$

$$\vec{S_a}(N_1) = \frac{Gm_a}{d_A^2}\left(1+\left(\frac{R_T}{d_A}\right)^2\right)^{-3/2}\left(\vec{u} - \frac{R_T}{d_A}\vec{u}'\right) - \frac{Gm_a}{d_A^2}\vec{u}$$

↓ DL à l'ordre 1 en $\frac{R_T}{d_A}$

$$\vec{S_a}(N_1) = \frac{Gm_a}{d_A^2}\left(\vec{u} - \frac{R_T}{d_A}\vec{u}'\right) - \frac{Gm_a}{d_A^2}\vec{u} = \frac{Gm_a R_T}{d_A^3}\vec{u}'$$

CNC 1999

IV) Influence de la force d'inertie de Coriolis:

1) ordre de grandeur:

$\vec{F_{ic}} = -m\vec{a_c} = -m(2\vec{\omega} \wedge \vec{v_r})$ avec $\omega = \vec{\Omega}_{R_T/R_g}$ $(= \vec{\Omega}_{R_T/R_c})$

$\frac{\|\vec{F_{ic}}\|}{\|\vec{p}\|} \leq \frac{2\omega v_r}{g} = \frac{v_r}{(g/2\omega)} = \frac{v_r}{67.10^3}$ pour que les 2 termes soient

$67\,Km/s$

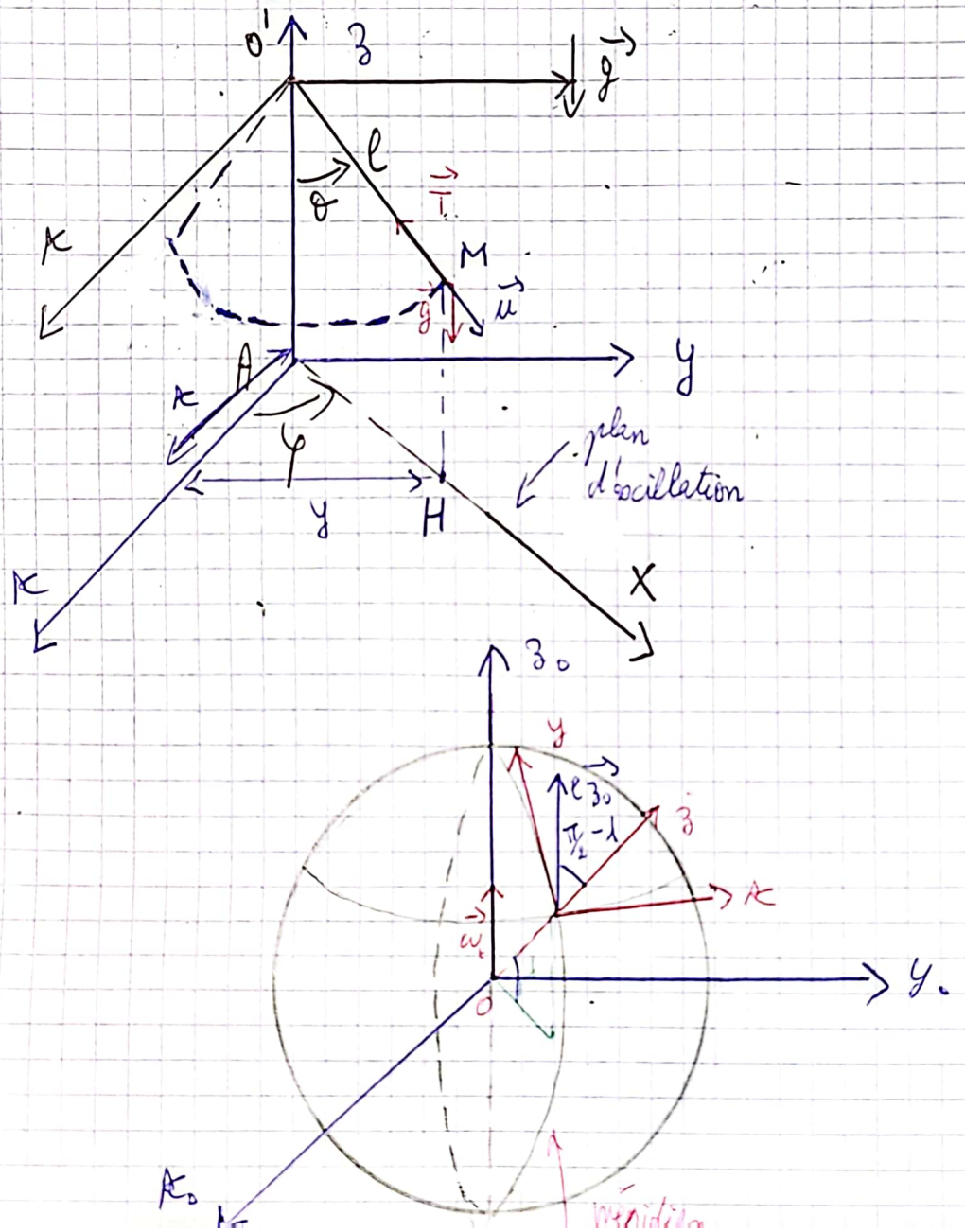
de même ordre de grandeur, il faut atteindre des vitesses élevées.

2) pendule de Foucault (1851):

$v_r = 6{,}7\,Km/s \Rightarrow \frac{\|\vec{F_{ic}}\|}{\|\vec{p}\|} \ll 0{,}1$

projectile de pistolet $v_r \simeq 1\,Km/s \Rightarrow \frac{\|\vec{F_{ic}}\|}{\|\vec{p}\|} \ll 0{,}05$

C'est un pendule simple inextensible de longueur $L = 67\,m$. Le plan d'oscillation de ce pendule effectue une rotation lente autour de la verticale d'où la mise en évidence de la rotation de la terre et le rôle joué par la force d'inertie de Coriolis



Scanné avec CamScanner

$\vec{F}_{ic}$ est constatable lorsque ↦ l'expérience de longue durée ⇒ pendule de Foucault
↳ expérience demandant de la précision ⇒ déviation des projectile d'un canon; déviation vers l'est.

a) En absence de $\vec{F}_{ic}$:

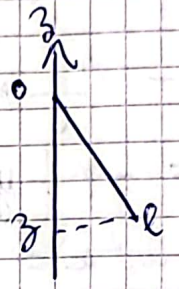
Le PFD appliqué sur le pt M dans R_T s'écrit :

$$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}(M/R_T) \text{ avec } \begin{cases} \vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_z \\ \vec{T} = -T\vec{u} = -T\dfrac{\vec{O'M}}{OM} \end{cases}$$

$$\vec{T} = \frac{-T}{l}(x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z)$$

$$\vec{a}(M/R_t) = \ddot{x}\vec{u}_x + \ddot{y}\vec{u}_y + \ddot{z}\vec{u}_z$$

d'où $\begin{cases} mg/O\vec{x} : -\frac{T}{l}x = m\ddot{x} \quad (1) \\ mg/O\vec{y} : -\frac{T}{l}y = m\ddot{y} \quad (2) \\ mg/O\vec{z} : -mg - \frac{T}{l}z = m\ddot{z} \quad (3) \end{cases}$



or θ faible ⇒ $z \simeq cte = -l$
(rayon du cercle où oscille le pendule ≃ 5m)

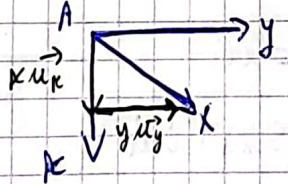
d'après (3) : $-mg - \frac{T}{l}gz = \cancel{m\ddot{z}}^{\,0}$

$\Rightarrow -mg - \frac{T}{l}(-l) = 0 \Rightarrow -mg + T = 0 \Rightarrow T = mg$

on remplace dans (1) et (2) :

$$\begin{cases} -g/l\,x = \ddot{x} \\ -g/l\,y = \ddot{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (a) \\ \ddot{y} + \omega_0^2 y = 0 \quad (b) \end{cases} \text{ tq } \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

or $\vec{X} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y$



$(a)\vec{u}_x + (b)\vec{u}_y \Rightarrow (\ddot{x}\vec{u}_x + \ddot{y}\vec{u}_y) + \omega_0^2(x\vec{u}_x + y\vec{u}_y) = \vec{0}$

$$\ddot{\vec{X}} + \omega_0^2\vec{X} = \vec{0} \Rightarrow \vec{X} = \vec{X_0}\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

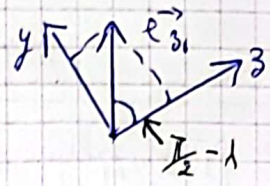
or $\vec{X_0} = \vec{cte}$

donc le plan d'oscillation est fixe en absence de force de Coriolis

Scanné avec CamScanner

Autre méthode : Calcul de γ avec des CI données.

b) En présence de $\vec{F_{ic}}$:



le PFD appliqué sur le point M dans R_T s'écrit :

$\vec{F_{ic}} + \vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}(M/R_T)$ avec

$\vec{F_{ic}} = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{V_R}$ et $\vec{\omega} = \omega \vec{e_{z_0}} = \omega \begin{vmatrix} 0 \\ \sin(\pi/2 - \lambda) \\ \cos(\pi/2 - \lambda) \end{vmatrix}$

$\vec{F_{ic}} = -2m\omega \begin{vmatrix} 0 \\ \cos\lambda \\ \sin\lambda \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{vmatrix} = -2m\omega \begin{vmatrix} \dot{z}\cos\lambda - \dot{y}\sin\lambda \\ \dot{x}\sin\lambda \\ -\dot{x}\cos\lambda \end{vmatrix}$

Proj/$\vec{ox}$: $-2m\omega(\dot{z}\cos\lambda - \dot{y}\sin\lambda) - \frac{T}{\ell}x = m\ddot{x}$ (1)

Proj/$\vec{oy}$: $-2m\omega\dot{x}\sin\lambda - \frac{T}{\ell}y = m\ddot{y}$ (2)

or θ faible $\Rightarrow \dot{z} \simeq 0$ et $T = mg$ ($T = mg + \underbrace{F_{ic}}_{\text{négligeable devant poids}}$)

$(2m\omega\sin\lambda)\dot{y} - \frac{mg}{\ell}x = m\ddot{x}$

$(2m\omega\sin\lambda)\dot{x} = -m\frac{g}{\ell}y = m\ddot{y}$

on pose $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$

$\Rightarrow$ (a) $\ddot{x} + \omega_0^2 x = (2\omega\sin\lambda)\dot{y}$ ← équations différentielles couplées

(b) $\ddot{y} + \omega_0^2 y = -(2\omega\sin\lambda)\dot{x}$ ←

on pose $u = x + iy$

(a) + i(b) $\Rightarrow \underbrace{(\ddot{x} + i\ddot{y})}_{\ddot{u}} + \omega_0^2(x + iy) = (2\omega\sin\lambda)(\dot{y} - i\dot{x})$

$\ddot{u} + \omega_0^2 u = -(2\omega\sin\lambda)i\left(\dot{x} - \frac{\dot{y}}{i}\right)$

or $\dot{x} - \frac{\dot{y}}{i} = \dot{x} + i\dot{y} = \dot{u}$

d'où $\ddot{u} + \omega_0^2 u = (-2\omega\sin\lambda)i\dot{u}$

$\Rightarrow \ddot{u} + (2\omega\sin\lambda)i\dot{u} + \omega_0^2 u = 0$

Rappel :

$\begin{cases} \ddot{x} + \omega_0^2 x = (2\omega\sin\lambda)\dot{y} \\ \ddot{y} + \omega_0^2 y = (2\omega\sin\lambda)\dot{x} \end{cases}$ ($u = x + iy$) $\Longrightarrow \ddot{u} + \omega_0^2 u = 2\omega\sin\lambda\,\dot{u}$??

il faut appliquer une méthode alternative :

$\begin{cases} X = x + y \\ Y = x - y \end{cases} \Longrightarrow$ 2 équa diffo vérifiées par X et Y et qui sont découplées

Scanné avec CamScanner

$\Delta' = (i\omega \sin\lambda)^2 - \omega_0^2 = -\omega^2 \sin^2\lambda - \omega_0^2$

avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} = \frac{2\pi}{T_0}$ et $\omega = \frac{2\pi}{T}$ or

$T = 24\,h \gg T_0$ 99 secondes.

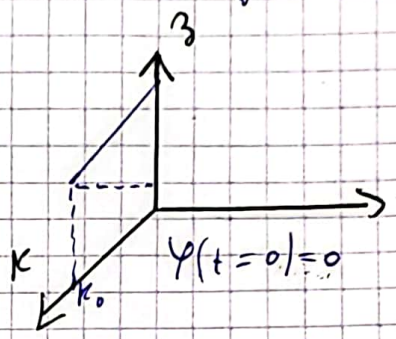
$\Rightarrow \omega \ll \omega_0$ d'où $\Delta' = -\omega_0^2 = (i\omega_0)^2$.

$$r_{1,2} = \frac{-(\omega \sin\lambda) i \pm i\omega_0}{1}$$

$$\Rightarrow u(t) = \underline{A} e^{r_1 t} + \underline{B} e^{r_2 t} = e^{-(i\omega \sin\lambda) t} \left(\underline{A} e^{i\omega_0 t} + \underline{B} e^{-i\omega_0 t}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = Re(\underline{u}) \\ y = Im(\underline{u}) \end{cases}$$

D'après les C.I: $\begin{cases} u(t=0) = x_0 \\ \dot{u}(t=0) = 0 \end{cases}$



Après calcul : $u(t) = x_0 \cos(\omega_0 t)\, e^{-(i\omega \sin\lambda) t}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) \cos(-\omega \sin\lambda\, t) \\ y(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) \sin(-\omega \sin\lambda\, t) \end{cases}$$

$$\tan(\varphi) = \frac{y}{x} = \tan(-\omega \sin\lambda\, t) \Rightarrow \varphi(t) = -\omega \sin\lambda\, t$$

Au cours du temps $\varphi \downarrow$ ($\lambda = 45°$ à paris).

La période de rotation du plan d'oscillation autour de Oz

et $\Delta t = \frac{2\pi}{|\dot{\varphi}|} = \frac{2\pi}{\omega \sin\lambda} = \frac{T}{\sin\lambda}$

avec $T = 24\,h$ $\lambda = 45°$ à paris donc $\Delta t = 31\,h\,47\,min$

Rq Si $\lambda < 0$

Si $\lambda > 0$

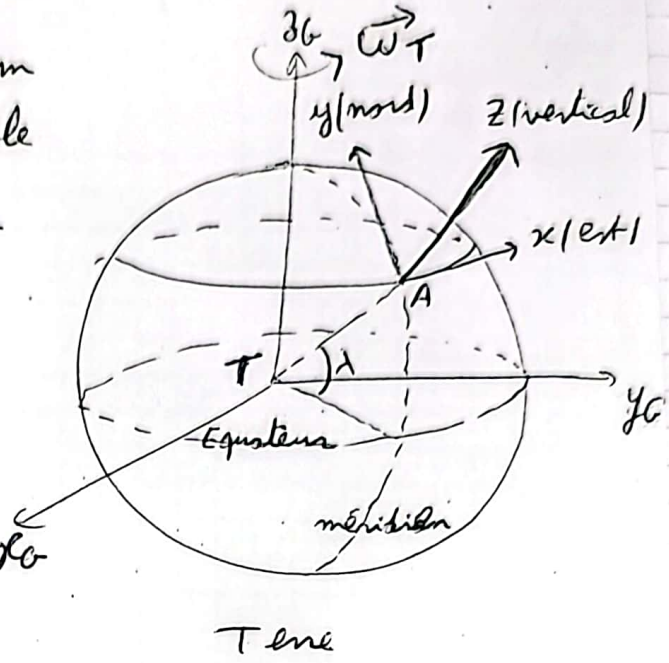
Si $\lambda = 0 \Rightarrow \Delta t \to \infty$ pas de rotation.

Scanné avec CamScanner

a) déviation vers l'est de la chute libre :

3) Déviation vers l'est de la chute libre.

On abandonne sans vitesse initiale un point matériel à l'altitude $h = 150\,m$ dans le référentiel terrestre, à la verticale du point A de latitude $\lambda = 50°$ à la surface de la terre.



En négligeant l'influence de la force de Coriolis sur le mouvement.

2 P.F.D s'écrit :

$$m\vec{a} = m\vec{g} \Rightarrow \vec{a} = -g\vec{e}_3$$

$$\Rightarrow x = 0 \;,\; y = 0 \;,\; \ddot{z} = -g \Rightarrow z = -\frac{1}{2}gt^2 + h$$

le temps de chute est $\Delta t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 5{,}33\,s$ $\quad (g = 9{,}81\,m\,s^{-2})$

la force de Coriolis est un terme correctif en effet $F_{ic} \ll mg$

$$\vec{F}_{ic} = -2m\vec{\omega}_T \wedge \vec{v}_r$$

$$= 2m\omega_T\left[(-\cos\lambda\,\dot{z} + \sin\lambda\,\dot{y})\vec{e}_x + (-\sin\lambda\,\dot{x})\vec{e}_y + (\cos\lambda\,\dot{x})\vec{e}_3\right]$$

terme prépondérant est $\vec{F}_{ic} = -2m\omega_T \cos\lambda\,\dot{z}\,\vec{e}_x$ en effet $|\dot{z}| > |\dot{x}|, |\dot{y}|$

Application de P.F.D donne $\ddot{x} = -2\omega_T \cos\lambda \cdot \dot{z}$

- $\dot{z} \simeq -gt \Rightarrow \ddot{x} = 2\omega_T \cos\lambda \cdot gt \Rightarrow x = \frac{1}{3}g\omega_T \cos\lambda \left(\frac{2h}{g}\right)^{2/3}$

- point de chute. A.N $x = 2{,}6\,cm \ll h$

$x > 0$ ($\vec{F}_{ic}$ est orientée suivant $\vec{e}_x$) $\Rightarrow$ Déviation vers l'est de la chute libre.

Scanné avec CamScanner

Cinématique – cinétique – dynamique d'un système de points matériels

I) Centre de masse :

1) Définition : Le centre de masse G (centre d'inertie ou le barycentre) d'un système de points matériels est définit par la relation barycentrique :

– pour une distribution discrète (discontinue) :

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{OG_i} = M\overrightarrow{OG}$$ avec $M = \sum m_i$ est la masse totale

Mq la relation barycentrique est valable $\forall O$.

Réponse : Soit A un point quelques

$$\sum m_i \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM_i}\right) = M\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AG}\right)$$

$$\sum_i m_i \overrightarrow{OA} + \sum m_i \overrightarrow{AM_i} = M\overrightarrow{OA} + M\overrightarrow{AG}$$

($\sum_i m_i = M$)

donc $$\sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{AM_i} = M\overrightarrow{AG}$$

pour $A \equiv G$: $\sum m_i \overrightarrow{GM_i} = \vec{0}$.

– pour une distribution continue :

$$\int \delta m \, \overrightarrow{OM} = M \cdot \overrightarrow{OG}$$ avec $M = \int \delta m$ (Sommation)

δm est la masse élémentaire.

ou $$\int \delta m \, \overrightarrow{GM} = \vec{0}$$

On distingue 3 types de distributions continues :

⊕ Distribution volumique :

on définit la densité volumique de masse par : $\rho(M) = \frac{\delta m}{\delta \tau} \Rightarrow \delta m = \rho(M) \cdot \delta \tau$

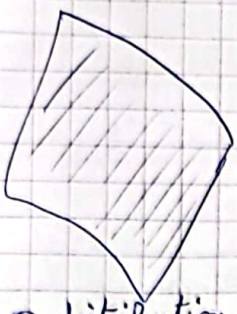
d'où $$\iiint \rho(M) \cdot \delta\tau(M) \cdot \overrightarrow{OM} = M\overrightarrow{OG}$$

OX

Scanné avec CamScanner

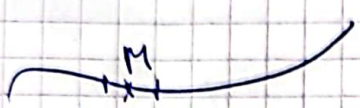
⊕ distribution surfacique : on définit la densité surfacique de masse par :

$$\sigma(M) = \frac{\delta m}{\delta S} \Rightarrow \delta m = \sigma \cdot \delta S.$$



$$\iint \sigma(M) \cdot \delta S \cdot \vec{OM} = M \cdot \vec{OG}$$

⊕ distribution linéique : on définit la densité linéique de masse par :



$$\lambda(M) = \frac{\delta m}{\delta \ell(M)} \Rightarrow \delta m = \lambda(M) \cdot \delta \ell(M)$$

$$\Rightarrow \int \lambda(M) \cdot \delta \ell(M) \cdot \vec{OM} = M \vec{OG}$$

Rq : Si la distribution est homogène alors la densité est uniforme.

II) Théorème du centre de masse : TCM : ou TRC : théorème de résultante cinétique.

↳ Mvmt de G "translation"

1) la résultante cinétique (ou quantité de mouvement) :

↳ pour une distribution discrète :

$$\vec{p}(\Sigma/R) = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}(M_i/R)$$

↳ pour une distribution continue :

$$\vec{p}(\Sigma/R) = \int \delta m \cdot \vec{v}(M/R)$$

Mq : $\vec{p}(\Sigma/R) = M \vec{v}(G/R)$

Réponse : $\vec{p}(\Sigma/R) = \sum m_i \vec{v}(M_i/R)$

$$\vec{p}(\Sigma/R) = \sum_i m_i \frac{d\vec{OM_i}}{dt}\Big/_R = \frac{d}{dt}\Big(\underbrace{\sum m_i \vec{OM_i}}_{= M\vec{OG}}\Big)$$

donc $\boxed{\vec{p}(\Sigma/R) = M \vec{v}(G/R)}$

la quantité de mouvement d'un système est la quantité de mouvement d'un point fictif G où est concentrée toute la masse du système

Rq :

- La relation $\vec{p}(\Sigma/R) = M \vec{v}(G/R)$ reste valable dans le cas d'une distribution continue

Scanné avec CamScanner

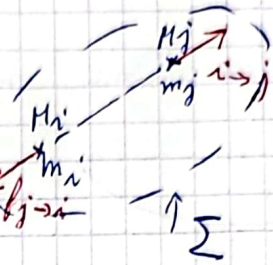
la résultante cinétique ne peut pas mettre en évidence le mouvement de rotation d'un système de points matériels.

2) TRC ou TRC:

Si PFD appliqué sur un point matériel M_i de masse m_i s'écrit

$$m_i \left.\frac{d\vec{v}(M_i/R)}{dt}\right|_R = \vec{f}_{ext\to i} + \vec{f}_{int\to i} \quad \text{avec} \quad \vec{f}_{int\to i} = \sum_{j\neq i} \vec{f}_{j\to i}$$

pour tout le système:

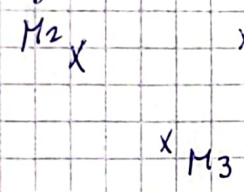


$$\sum_i m_i \frac{d\vec{v}(M_i/R)}{dt} = \underbrace{\sum_i \vec{f}_{ext\to i}}_{\vec{F}_{ext}} + \underbrace{\sum_i \vec{f}_{int\to i}}_{\vec{F}_{int}}$$

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\left(\sum_i m_i \vec{v}(M_i/R)\right)}_{\vec{p}(\Sigma/R)} = \vec{F}_{ext} + \vec{F}_{int}$$

d'où $\left.\frac{d\vec{p}}{dt}\right|_R = \vec{F}_{ext} + \vec{F}_{int}$ Mq $\vec{F}_{int} = \vec{0}$.

Cas d'un système de 3 pts matériels:



$$\vec{F}_{int} = \vec{f}_{int\to 1} + \vec{f}_{int\to 2} + \vec{f}_{int\to 3}$$

$$\vec{F}_{int} = (\vec{f}_{1\to 1} + \vec{f}_{2\to 1}) + (\vec{f}_{1\to 2} + \vec{f}_{3\to 2}) + (\vec{f}_{1\to 3} + \vec{f}_{2\to 3}) = \vec{0}$$

car $\vec{f}_{j\to i} = -\vec{f}_{i\to j}$ "3ème loi de Newton"

CCL: $\left.\frac{d\vec{P}}{dt}\right|_R = \vec{F}_{ext}$

↳ Si le système est isolé ou pseudo-isolé $\vec{F}_{ext} = \vec{0}$.

$\Rightarrow$ $\vec{P} = \vec{cte}$ la quantité de mouvement se conserve.

$\Downarrow$

$\vec{V}(G/R) = \vec{cte}$ Mvmt rectiligne uniforme $\neq$ translation

Scanné avec CamScanner

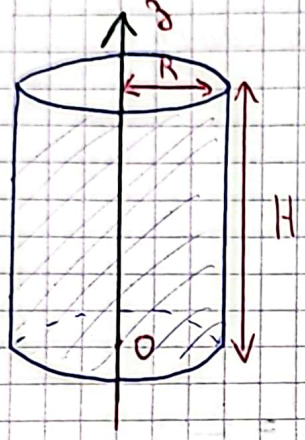
↳ Si R est non galiléen, on tient compte des forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis.

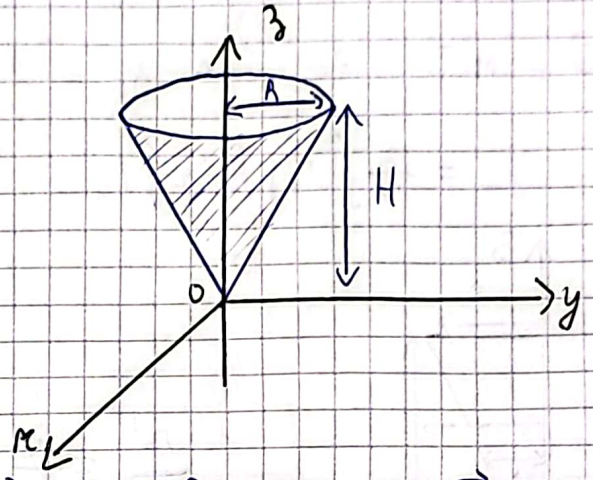
III) Applications :

(1) App 1 : centre de masse !

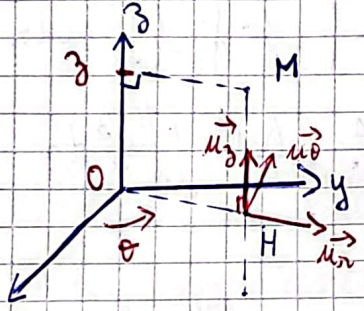
déterminer le barycentre d'un cylindre homogène plein de masse M et de rayon R et de hauteur H.

déterminer le barycentre d'un corps homogène plein de masse M et de hauteur H et de base circulaire de rayon R.





1) $\int \delta m \, \vec{OM} = M \vec{OG} \Rightarrow \vec{OG} = \frac{1}{M} \int \rho(M) . \delta\mathcal{C}(M) . \vec{OM}$



$\vec{OM} = \vec{OH} + \vec{HM} = r\vec{u_r} + z\vec{u_z}$

$d\vec{OM} = \begin{vmatrix} dr \\ r\,d\theta \\ dz \end{vmatrix} \Rightarrow d\mathcal{C} = r\,dr\,d\theta\,dz$

$\vec{OG} = \frac{1}{M} \iiint \rho(M) \cdot dr \cdot r\,d\theta\,dz \left(r\vec{u_r} + z\vec{u_z}\right)$

or la distribution est homogène

$\Rightarrow \vec{OG} = \frac{\rho}{M} \cdot \iiint \left(r\vec{u_r} + z\vec{u_z}\right) . dr\,r\,d\theta\,dz$

or (Oz) est un axe de symétrie de la distribution de masse

$\Rightarrow G \in Oz$ d'où $\vec{OG} = z_G \cdot \vec{u_z}$

$z_G . \vec{u_z} = \frac{1}{V} \iiint \left(r\vec{u_r} + z\vec{u_z}\right) r\,dr\,d\theta\,dz$

$\left(\vec{u_z}\right.$

$z_G = \frac{1}{V} \iiint z\,dr\,r\,d\theta\,dz$

Scanné avec CamScanner

donc $z_G = \frac{1}{V}\int_0^R r\,dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^H z\,dz$

$z_G = \frac{1}{\pi R^2 H} \cdot \frac{R^2}{2} \cdot 2\pi \cdot \frac{H^2}{2} = \frac{H}{2}$

Rq: $\int d\theta\,\vec{u_r} \neq \left(\int d\theta\right)\vec{u_r}$ $\qquad d\vec{u_r} = d\theta\,\vec{u_\theta}$

$d\vec{u_\theta} = -d\theta\,\vec{u_r}$

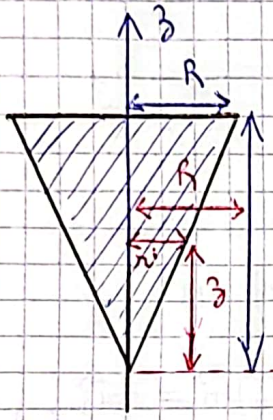
donc $\int d\theta\,\vec{u_r} = -\int d\vec{u_\theta}$

$= -\left[\vec{u_\theta}\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi}$

$= -\left[\vec{u}_{\theta=2\pi} - \vec{u}_{\theta=0}\right] = \vec{0}$.

2) $\int \delta m\,\overrightarrow{OM} = M\overrightarrow{OG}$ de même $z_G = \frac{1}{V}\iiint z\,dr\,r\,d\theta\,dz$.

⚠ $z_G \neq \frac{1}{V}\int d\theta \int r\,dr \int z\,dz$.



$\frac{r'}{z} = \frac{R}{H} \Rightarrow r' = \frac{R}{H} z$

$z_G = \frac{1}{V}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^H \left(\int_0^{r'} r\,dr\right) z\,dz$

$z_G = \frac{2\pi}{V}\int_0^H \frac{r'^2}{2} z\,dz = \frac{2\pi}{V}\frac{1}{2}\left(\frac{R}{H}\right)^2 \int_0^H z^3\,dz$

$z_G = \frac{\pi R^2 H^2}{4V}$

de même $V = \iiint \delta\mathcal{V} = \iiint r\,dr\,d\theta\,dz = \int_0^{2\pi} d\theta \left(\int \left(\int_0^{r'} r\,dr\right) dz\right)$

$= \frac{\pi R^2 H}{3}$

⚠ $V_{cône} = \frac{1}{3} V_{cylindre}$

d'où $z_G = \frac{3}{4}H \Rightarrow z_G = \frac{H}{2}$

En effet la majorité de la masse est située à côté de la base.

(2) App 2 : Mvt d'oscillation d'une plaque

On considère une plaque carrée homogène de masse M de côté a suspendue par 2 fils inextensibles de longueur l.

Scanné avec CamScanner

1) En Appliquant le TRC établir l'équa. diff du mvmt vérifié par θ.

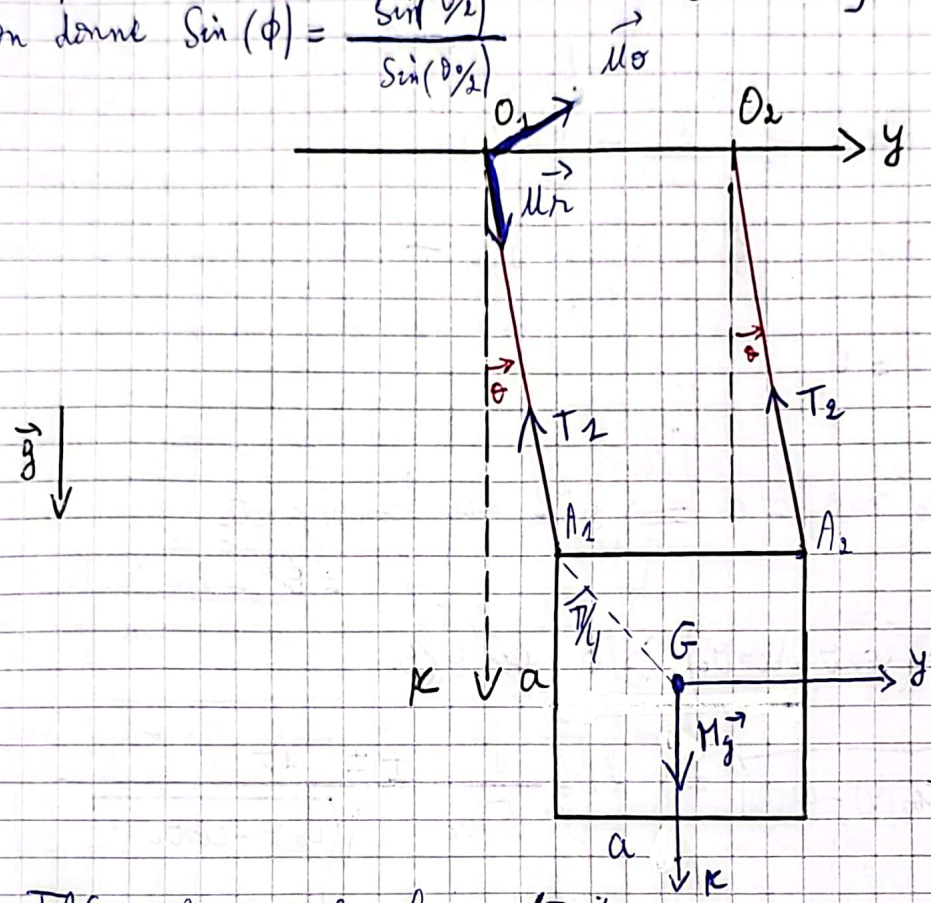
2) déterminer la période du mouvement dans le cas de θ faible.

3) sachant que $\theta(t=0)=0$ et $\dot{\theta}(t=0)=0$ écrire la période du MVmt sous forme d'une intégrale dans le cas général (θ non faible)

$$T = \frac{\sqrt{2}\,T_0}{\pi} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}$$

4) Mq dans le cas θ faible : $T = T_0\left[1 + \frac{\theta_0^2}{16}\right]$ Formule de Borda

on donne $\sin(\phi) = \frac{\sin(\theta/2)}{\sin(\theta_0/2)}$



Le TRC appliqué à la plaque s'écrit :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_k \vec{F}_{ext,k} \quad \text{avec} \quad \sum_k \vec{F}_{ext,k} = \vec{P} + \vec{T_1} + \vec{T_2}$$

$$= Mg\vec{u_x} - T_1\vec{u_r} - T_2\vec{u_r}$$

$$\vec{p}(\Sigma/R) = M.\vec{v}(G/R) = M\left.\frac{d\vec{OG}}{dt}\right|_R \quad \text{avec} \quad \vec{OG} = \vec{OA_1} + \vec{A_1G} \text{ tq } \vec{A_1G} = \frac{a}{2}\vec{u_x} + \frac{a}{2}\vec{u}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{d\vec{OG}}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\vec{OA_2}}{dt}\right|_R + \cancel{\left.\frac{d\vec{A_2G}}{dt}\right|_R}^{\vec{0}} \Rightarrow \vec{v}(G/R) = \vec{v}(A_2/R) = \text{cte}$$

"la plaque est en translation"

or $\vec{OA_2} = l\vec{u_r} \Rightarrow \vec{v}(G/R) = l\dot{\theta}\vec{u_\theta}$

$$\Rightarrow \left.\frac{d\vec{p}}{dt}\right|_R = Ml\left(\ddot{\theta}\vec{u_\theta} + \dot{\theta}\left(-\dot{\theta}\vec{u_r}\right)\right)$$

d'où $Mg\vec{u_x} - T_1\vec{u_r} - T_2\vec{u_r} = Ml\left[\ddot{\theta}\vec{u_\theta} - \dot{\theta}^2\vec{u_r}\right]$

Scanné avec CamScanner

proj / $\vec{u_\theta}$: $Mg\,\vec{u_x}\cdot\vec{u_\theta} = Ml\ddot{\theta}$

or $\vec{u_\theta} = \cos\theta\,\vec{u_y} - \sin\theta\,\vec{u_x} \Rightarrow \vec{u_x}\cdot\vec{u_\theta} = -\sin(\theta)$

d'où $g(-\sin\theta) = l\ddot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin(\theta) = 0$

Mvmt de translation périodique ne sinusoïdale

$\Rightarrow$ oscillateur non harmonique

$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$

2) Si θ est faible $\sin\theta \simeq \theta \Rightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$

$\Rightarrow \theta(t) = \theta_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi)$

Mvmt sinusoïdal de période $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

3) $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0$ avec $\ddot{\theta} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \xrightarrow{\int\int} T = ?$

période ici

$\dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{dt} + \omega_0^2\frac{d\theta}{dt}\sin\theta = 0$

$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{\theta}^2}{2} - \omega_0^2\cos\theta\right) = 0 \xrightarrow{\int dt} \dot{\theta}^2 - 2\omega_0^2\cos(\theta) = cte$

$= \cancel{\dot{\theta}_0^2}^{\,0} - 2\omega_0^2\cos(\theta_0)$

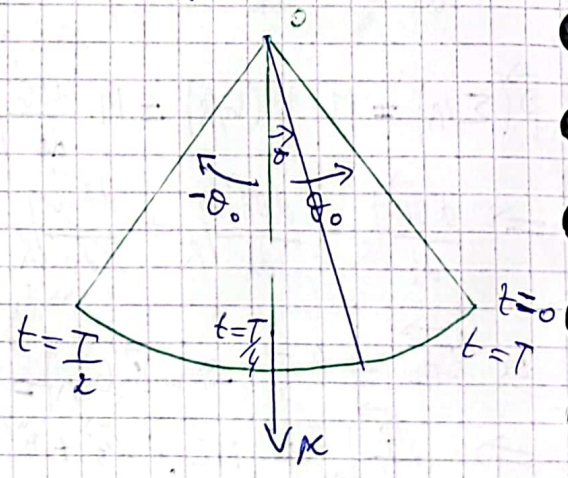
donc $\dot{\theta}^2 = 2\omega_0^2(\cos\theta - \cos\theta_0) \geq 0$ car $\theta \leq \theta_0$

$\frac{d\theta}{dt} = \pm\sqrt{2}\,\omega_0\sqrt{\cos(\theta) - \cos(\theta_0)} \Rightarrow dt = \frac{1}{\sqrt{2}\,\omega_0}\frac{\pm\, d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}$

$\int$

$\int_0^T dt = \frac{1}{\sqrt{2}\,\omega_0}\int_{\theta_0}^{\theta_0} \pm\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}} \neq 0$

ou $\int_0^{T/2} dt = \frac{1}{\sqrt{2}\,\omega_0}\int_{\theta_0}^{-\theta_0} \frac{-\,d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}$



$0 < t < T/2$

$\rightarrow \theta \searrow$

$dt > 0$ $\quad d\theta < 0$

Signes opposés entre $t=0$ et $t=T/2$

$$\int_0^{T/4} dt = \frac{1}{\sqrt{2}\,\omega_0} \int_{\theta_0}^{0} \frac{-d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}$$

$$\frac{T}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}\,\frac{2\pi}{T_0}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}$$

$$T = \frac{\sqrt{2}\,T_0}{\pi} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}$$

Rq : T_0 ne dépend pas des CI

T dépend des CI.

4) Démonstration de la formule de Borda :

$$\cos(\theta) - \cos(\theta_0) = \left(1 - 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) - \left(1 - 2\sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\right)$$

$$= 2\left[\sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]$$

$$= 2\sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\left[1 - \left(\frac{\sin(\theta/2)}{\sin(\theta_0/2)}\right)^2\right]$$

$$= 2\sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\left[1 - \sin(\phi)^2\right] \qquad (\theta_0 \in [0;\pi])$$

donc $\sqrt{\cos(\theta) - \cos(\theta_0)} = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\sqrt{1 - \sin(\phi)^2} = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\sqrt{\cos^2(\phi)}$

donc $\sqrt{\cos(\theta) - \cos(\theta_0)} = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)|\cos\phi|$

$d\theta = ?$ $\quad \sin\phi = \frac{\sin(\theta/2)}{\sin(\theta_0/2)} \rightarrow d\sin(\theta/2) = \sin(\theta_0/2)\, d\sin\phi$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\cos(\theta/2)\, d\theta = \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right) d\phi \cos\phi.$$

$$d\theta = \frac{2\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\cos(\phi)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} d\psi = \frac{2\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\cos\phi}{\sqrt{1 - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}} d\phi$$

$$d\theta = 2\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \frac{\cos(\varphi)}{\sqrt{1 - \sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\sin^2\phi}} d\phi$$

$$\int_0^{\theta_0} d\theta \rightarrow \int_0^{\pi/2} d\phi$$

Si $\theta = \theta_0 \Rightarrow \sin\phi = \frac{\sin(\theta_0/2)}{\sin(\theta_0/2)} = 1 \Rightarrow \phi = \pi/2$

Si $\theta = 0 \Rightarrow \sin\phi = 0 \begin{cases} \rightarrow \phi = 0 \\ \rightarrow \phi = \pi \end{cases}$

Scanné avec CamScanner

Si on choisit $\phi = 0$ alors $\cos\phi > 0 \Rightarrow |\cos\phi| = \cos\phi$.

Si on choisit $\phi = \pi$ alors $\cos\phi < 0 \Rightarrow |\cos\phi| = -\cos\phi$.

Soit $\phi = 0$ ou π alors $\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0} = \sqrt{2}\,\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)|\cos\phi|$

D'où $$\int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}} = \int_0^{\pi/2} 2\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \times \frac{\cos\phi}{\sqrt{1 - \sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\sin^2\phi}}\, d\phi \cdot \frac{1}{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\cos\phi}$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - \sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\sin^2\phi}} = \sqrt{2}\int_0^{\pi/2} \left(1 - k^2\sin^2\phi\right)^{-1/2} d\phi$$

avec $k = \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)$

or $k\sin\phi = \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\sin\phi = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ et θ est faible donc $k\sin\phi$ est faible.

$$T = \frac{\sqrt{2}T_0}{\pi}\int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}} = \frac{\sqrt{2}T_0}{\pi} \cdot \sqrt{2}\int_0^{\pi/2}\left(1 + \frac{k^2}{2}\sin^2\phi\right)$$

$$= \frac{2T_0}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2} d\phi + \frac{k^2}{2}\int_0^{\pi/2}\sin^2\phi\, d\phi\right]$$

$$T = \frac{2T_0}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} + \frac{k^2}{2}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1 - \cos(2\phi)}{2}\right)d\phi\right] = T_0\left[1 + \frac{k^2}{2\pi}\left(\phi - \sin(2\phi)\right)_0^{\pi/2}\right]$$

$$T = T_0\left[1 + \frac{k^2}{2\pi}\cdot\frac{\pi}{2}\right] = T_0\left[1 + \frac{1}{4}\sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\right]$$

θ_0 faible donc $T = T_0\left[1 + \frac{1}{4}\left(\frac{\theta_0}{2}\right)^2\right] \Rightarrow T = T_0\left(1 + \frac{\theta_0^2}{16}\right)$.

La formule de Borda est plus précise que $T \simeq T_0$ car elle comporte un développement limité poussé à l'ordre 2.

TMC

IV) Théorème du moment cinétique :

a) Définition :

1) Moment cinétique d'un système :

Le moment cinétique d'un système en un point A dans un référentiel R est défini par :

Cas d'une distribution discrète :

$$\vec{L}_A(\Sigma/R) \text{ ou } \vec{\sigma}_A(\Sigma/R) = \sum_{i=1}^{N} \underbrace{\vec{AM_i}}_{\text{moment} \equiv \text{distance}} \wedge \underbrace{m_i \vec{v}(M_i/R)}_{\text{cinétique}}$$

Cas d'une distribution continue :

$$\vec{L}_A(\Sigma/R) \text{ ou } \vec{\sigma}_A(\Sigma/R) = \int \vec{AM} \wedge \delta m\, \vec{v}(M/R)$$

Scanné avec CamScanner

b) Formule du changement de point:

Obj: Relation entre $\vec{\sigma}_{B/R}$ et $\vec{\sigma}_{A/R}$

$$\vec{\sigma}_{B/R} = \sum_i \vec{BM_i} \wedge m_i \vec{v}(m_i/R)$$

$$= \sum_i (\vec{BA} + \vec{AM_i}) \wedge m_i \vec{v}(M_i/R)$$

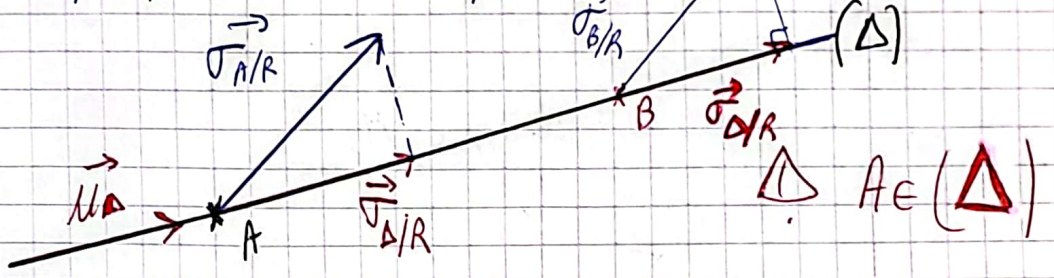
$$\vec{\sigma}_{B/R} = \vec{BA} \wedge \underbrace{\sum_i m_i \vec{v}(M_i/R)}_{\vec{P}_{/R}} + \underbrace{\sum_i \vec{AM_i} \wedge m_i \vec{v}(m_i/R)}_{\vec{\sigma}_{A/R}}$$

$$\Rightarrow \vec{\sigma}_{B/R} = \vec{\sigma}_{A/R} + \vec{BA} \wedge \vec{P}_{/R}$$

$\Rightarrow$ Le couple $\left\{ \begin{matrix} \vec{P} \\ \vec{\sigma}_{A/R} \end{matrix} \right\}$ Forme un torseur cinétique de résultante $\vec{P}_R$ et de champ de moment $\vec{\sigma}_{A/R}$

c) moment cinétique/Δ:

Soit (Δ) un axe passant par A et orienté par $\vec{u}_\Delta$; on définit le moment cinétique par rapport à Δ par la relation:



$$\sigma_{\Delta/R} = \vec{\sigma}_{A/R} \cdot \vec{u}_\Delta$$

Propriété: Soit $B \in (\Delta)$

$$\vec{\sigma}_{B/R} = \vec{\sigma}_{A/R} + \vec{BA} \wedge \vec{p}$$

$$\hookrightarrow \vec{\sigma}_{B/R} \cdot \vec{u}_\Delta = \vec{\sigma}_{A/R} \cdot \vec{u}_\Delta + (\vec{BA} \wedge \vec{p}) \cdot \vec{u}_\Delta$$

$$= \vec{\sigma}_{A/R} \cdot \vec{u}_\Delta + (\vec{u}_\Delta \wedge \vec{BA}) \cdot \vec{p}$$

$$\Rightarrow \vec{\sigma}_{B/R} \cdot \vec{u}_\Delta = \vec{\sigma}_{A/R} \cdot \vec{u}_\Delta = \sigma_{\Delta/R}$$

2) Théorème du moment cinétique:

Rappel: $\left. \frac{d\vec{L}_A}{dt} \right|_R = \sum_k \vec{M}_A(\vec{F}_k) - \vec{v}(A/R) \wedge m \vec{v}(M/R)$

Scanné avec CamScanner

Si A fixe dans R : $\left.\frac{d\vec{L}_A}{dt}\right|_R = \sum_k \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F}_k)$

Cas d'un système de points matériels :

$$\left.\frac{d\vec{\sigma}_A}{dt}\right|_R = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} \vec{AM_i} \wedge m_i \vec{v}(M_i/R)\right) = \sum_i \left.\frac{d\vec{AM_i}}{dt}\right|_R \wedge m_i \vec{v}(M_i/R)$$

$$+ \sum \vec{AM_i} \wedge \left.\frac{d\, m_i \vec{v}(M_i/R)}{dt}\right|_R$$

PFD appliqué pour M_i

$$= \sum_i \left(\left.\frac{d\vec{AO}}{dt}\right|_R + \left.\frac{d\vec{OM_i}}{dt}\right|_R\right) \wedge m_i \vec{v}(M_i/R) + \sum_i \vec{AM_i} \wedge \left(\vec{f}_{ext\to i} + \vec{f}_{int\to i}\right)$$

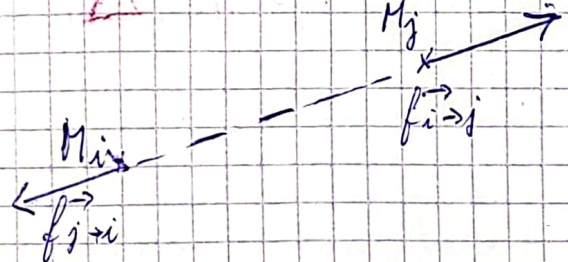
$$= -\left.\frac{d\vec{OA}}{dt}\right|_R \wedge \sum_i m_i \vec{v}(M_i/R) + \sum_{i=2}^{n} \underbrace{\vec{v}(M_i/R) \wedge m_i \vec{v}(M_i/R)}_{\vec{0}} + \underbrace{\sum_i \vec{AM_i} \wedge \vec{f}_{ext\to i}}_{\vec{\mathcal{M}}_{A/ext}}$$

$$+ \underbrace{\sum_i \vec{AM_i} \wedge \vec{f}_{int\to i}}_{\vec{\mathcal{M}}_{A\,int}}$$

$$\left.\frac{d\vec{\sigma}_A}{dt}\right|_R = \vec{\mathcal{M}}_{A;ext} + \vec{\mathcal{M}}_{A;int} - \vec{v}(A/R) \wedge \vec{p}(S/R)$$

Mq $\vec{\mathcal{M}}_{A;int} = \vec{0}$

Soit un système de deux points matériels M_i et M_j :



$$\vec{\mathcal{M}}_{A;int} = \vec{\mathcal{M}}_{A;i\to j} = \underbrace{\vec{AM_i}}_{\text{moment}} \wedge \underbrace{\vec{f}_{j\to i}}_{\text{force}} + \vec{AM_j} + \vec{f}_{i\to j}$$

or $\vec{f}_{j\to i} = -\vec{f}_{i\to j}$ d'où

$$\vec{\mathcal{M}}_{A;int} = \vec{AM_i} \wedge \left(-\vec{f}_{i\to j}\right) + \vec{AM_j} \wedge \vec{f}_{i\to j}$$

$$= \left(\vec{AM_j} - \vec{AM_i}\right) \wedge \vec{f}_{i\to j}$$

$$= \left(\vec{M_iA} + \vec{AM_j}\right) \wedge \vec{f}_{i\to j}$$

$$\vec{\mathcal{M}}_{A;int} = \vec{M_iM_j} \wedge \vec{f}_{i\to j} = \vec{0}$$

Scanné avec CamScanner

ccl $\left.\frac{d\vec{\sigma}_A}{dt}\right|_R = \vec{\mathcal{M}}_{A;ext} - \vec{v}(A/R) \wedge M\vec{v}(G/R)$

Rqs: ↳ Si A ou G est fixe dans R : $\left.\frac{d\vec{\sigma}_A}{dt}\right|_R = \vec{\mathcal{M}}_{A;ext}$

↳ Si A = G ; $\left.\frac{d\vec{\sigma}_G}{dt}\right|_R = \vec{\mathcal{M}}_{G;ext}$

Si R est non galiléen on doit tenir en compte des moments des forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis

↳ $\vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F}) = \vec{AM} \wedge \vec{F} - \int_{M\in(\Sigma)} \underbrace{\vec{AM} \wedge \delta\vec{F}}_{\delta\vec{\mathcal{M}}_A}$

pt d'app de $\delta\vec{F}$

pt d'app de F

3) Moment cinétique barycentrique :

a) définition : Le référentiel barycentrique R^* est un référentiel dont l'origine est le barycentre du système est en translation / R galiléen.

Rq : Si le système est isolé alors R^* est galiléen. (démo voir sup).

b) propriété :

$$\begin{cases} \vec{\Omega}(R^*/R_g) = \vec{0} \\ \vec{P}(\Sigma/R^*) = M\vec{v}(G/R^*) = \vec{0}. \end{cases}$$

c) formule de changement de point :

$$\vec{\sigma}_{B/R} = \vec{\sigma}_{A/R} + \vec{BA} \wedge \vec{P}(\Sigma/R)$$

(en particulier pour R^*

$$\vec{\sigma}_{B/R^*} = \vec{\sigma}_{A/R^*} + \vec{BA} \wedge \cancelto{\vec{0}}{\vec{P}(\Sigma/R^*)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\sigma}_{B/R^*} = \vec{\sigma}_{A/R^*} = \vec{\sigma}^*}$$

Moment cinétique barycentrique ne dépend pas du pt

4) Théorème de Koenig pour le moment cinétique :

⚠ n'est valable que pour R^* et R_g galiléen

obj : Relation entre $\vec{\sigma}_{A/R_g}$ et $\vec{\sigma}^*$

$\vec{\sigma}_{A/R_g} = \sum_i \vec{AM_i} \wedge m_i \vec{v}(M_i/R_g)$ or $\vec{v_a} = \vec{v_r} + \vec{v_e}$

$\Rightarrow \vec{v}(M/R) = \vec{v}(M/R') + \vec{v}(O'/R) + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{O'M}$

$R \to R_g$

$R' \to R^*$ et $O' \equiv G$.

Scanné avec CamScanner

donc $\vec{v}(M_i/R_g) = \vec{v}(M_i/R^*) + \vec{v}(G/R) + \cancel{\vec{\Omega}_{R^*/R_g} \wedge \vec{GM_i}}^{0}$

$\vec{\sigma}_{A/R_g} = \sum_i \vec{AM_i} \wedge m_i \left(\vec{v}(M_i/R^*) + \vec{v}(G/R)\right)$

$\vec{\sigma}_{A/R_g} = \underbrace{\sum_i \vec{AM_i} \wedge m_i \vec{v}(M_i/R^*)}_{\vec{\sigma}^*} + \underbrace{\sum_i m_i \vec{AM_i}}_{M\vec{AG}} \wedge \vec{v}(G/R)$

d'où $\boxed{\vec{\sigma}_{A/R_g} = \vec{\sigma}^* + \vec{AG} \wedge M\vec{v}(G/R_g)}$

Rq Si $A = G$ alors $\boxed{\vec{\sigma}_{G/R_g} = \vec{\sigma}^*}$

5) Application 3 : oscillation forcée d'une tige :

Une tige homogène $\vec{O'A}$ de masse m et de longueur L est suspendue au point O' animé par rapport au référentiel galiléen $R(Oxyz)$ d'un mouvement oscillatoire horizontal $\vec{OO'} = a\cos(\omega t)\vec{u_y}$.

1) $M_{O'}$ le moment cinétique au point O' de la tige dans le référentiel R' et $\vec{\sigma}_{O'}(T/R') = \frac{ML^2}{3}\dot{\theta}\vec{u_z}$

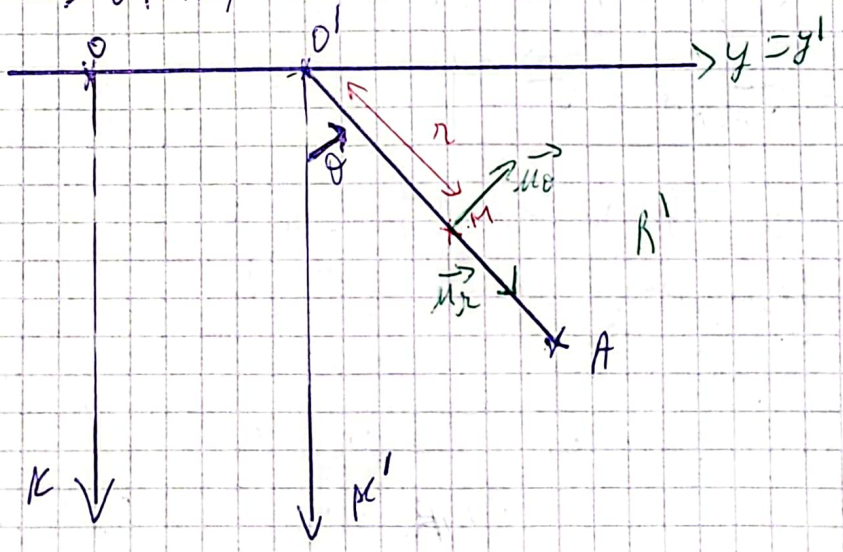
2) En appliquant le TMC au point O' dans R' déterminer l'équation différentielle vérifiée par θ.

Réponse :

1) $\vec{\sigma}_{O'}(T/R') = \int \vec{O'M} \wedge \delta m \vec{V}(M/R')$

$\delta m = \lambda dl =$

$\vec{O'M} = r'\vec{u_r} \longrightarrow \vec{v}(M/R')$



Scanné avec CamScanner

1) $\vec{\sigma_{O'}}(T/R') = \int \vec{O'M} \wedge \delta m \, \vec{V}(M/R')$

point dans le temps mais varie dans l'espace.

$\vec{V}(M/R') = \left.\frac{d\vec{O'M}}{dt}\right|_{R'} = r\dot{\theta}\vec{u_\theta}$ ($\dot{r}\vec{u_r}^{\,0}$)

$\vec{\sigma_{O'}}(T/R') = \int \vec{O'M} \wedge \lambda r\dot{\theta}\, dr\, \vec{u_\theta}$

$= \int_0^L \lambda r^2 \dot{\theta}\, dr\, \vec{u_z} = \frac{M}{L}\dot{\theta}\left[\frac{1}{3}L^3\right]$

O ne dépend pas de r

$\vec{\sigma_{O'}}(T/R') = \frac{ML^2}{3}\dot{\theta}\vec{u_z}$

2) TMC à O' dans R'

$\left.\frac{d\vec{\sigma_{O'}}}{dt}\right|_{R'} = \sum_k \vec{\mathcal{M}_{O'}}(\vec{F_{ext,k}}) + \vec{\mathcal{M}_{O'}}(\vec{F_{ie}}) - \vec{v}(O'/R') \wedge m\vec{v}(G/R')$ ($\vec{v}(O'/R')^{\,0}$)

$\oplus \left.\frac{d\vec{\sigma_{O'}}}{dt}\right|_{R'} = \frac{ML^2}{3}\ddot{\theta}\vec{u_z}$

$\oplus \sum_k \vec{\mathcal{M}_{O'}}(\vec{F_{ext,k}}) = \vec{\mathcal{M}_{O'}}(\vec{P}) + \vec{\mathcal{M}_{O'}}(\text{liaison}) = \vec{O'G} \wedge \vec{P} = \frac{L}{2}\vec{u_r} \wedge Mg\vec{u_r}$

($\vec{OO'} \wedge \vec{R_{liaison}} = \vec{0}$)

$= \frac{-mgl}{2}\sin(\theta)\vec{u_z}$

$\oplus$ R' en translation $/R' \Rightarrow \vec{\Omega}_{R'/R} = \vec{0} \Rightarrow$

$\begin{cases} \vec{F_{ic}} = -M\vec{a_c} = -M(\vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{v_r}) = \vec{0} \\ \vec{F_{ie}} = -M\vec{a_e} = -M\left(\vec{a}(O'/R) + \frac{d\vec{\Omega}}{dt}\wedge\vec{O'H} + \vec{\Omega}\wedge(\vec{\Omega}\wedge\vec{O'M})\right) \end{cases}$

($\vec{\Omega}$ constant $= \vec{0}$)

donc $\begin{cases} \vec{\mathcal{M}_{O'}}(\vec{F_{ic}}) = \vec{0} \\ \vec{\mathcal{M}_{O'}}(\vec{F_{ie}}) \neq \vec{0} \end{cases}$ tq $\vec{\mathcal{M}_{O'}}(\vec{F_{ie}}) = \vec{O'M_a} \wedge \delta\vec{F_{ie}}$

↑ pt d'application de $\vec{F_{ie}}$ ici c'est G mais il y'a des cas où pt $\vec{F_{ie}}$ n'est pas G

avec $\delta\vec{F_{ie}} = -\delta m \cdot \vec{a}(O'/R)$

Une force est appliquée au barycentre du système si elle est uniforme càd qu'elle est appliquée de la même manière de tous les points.

$\vec{\mathcal{M}_{O'}}(\vec{F_{ie}}) = \int \vec{O'M} \wedge (-\delta m\vec{a}(O'/R))$

or $\vec{a}(O'/R) = \left.\frac{d^2\vec{OO'}}{dt^2}\right|_R = -a\omega^2\cos(\omega t)\vec{u_y}$ ne dépend pas du pt M d'où :

$\vec{\mathcal{M}_{O'}}(\vec{F_{ie}}) = \int \vec{O'M} \wedge (-\delta m\vec{a}(O'/R))$ or

$\vec{a}(O'/R) = \left.\frac{d^2\vec{OO'}}{dt^2}\right|_R = -a\omega^2\cos(\omega t)\vec{u_y}$ ne dépend pas du point M

Scanné avec CamScanner

d'où $\mathcal{M}_{O'}(F_{ie}) = -\left(\int \delta m \overrightarrow{O'M}\right) \wedge \vec{a}(O'/R)$

Relation barycentrique

$= M\overrightarrow{O'G} \wedge \vec{a}(O'/R) = \overrightarrow{O'G} \wedge \left(\underbrace{-M\vec{a}(O'/R)}_{\vec{F}_{ie}}\right) = \overrightarrow{O'G} \wedge \vec{F}_{ie}$

$\vec{F}_{ie} = \int \delta \vec{F}_{ie} = \int -\delta m \vec{a}(O'/R)$

$= -\left(\int \delta m\right) \vec{a}(O'/R)$

$= -M\vec{a}(O'/R)$

d'où $\vec{\mathcal{M}}_{O'}(\vec{F}_{ie}) = \overrightarrow{O'G} \wedge \vec{F}_{ie}$ donc le pt d'app de $\vec{F}_{ie}$ est le barycentre.

$\vec{\delta P} = \delta m \vec{g}$: $\delta \vec{F}_{ie} = \underbrace{-\delta m}_{\text{champ de la force d'inertie d'entraînement}} \underbrace{\vec{a}(O'/R)}_{\text{champ de pesanteur}} = \delta m\, a\, \omega^2 \cos(\omega t) \vec{u_y}$

Si le champ de la force est uniforme alors on peut le sortir de l'intégrale dans la démonstration qui donne $\mathcal{M}_{O'}(\vec{F}_{ie}) = \overrightarrow{O'G} \wedge F_{ie}$

$\vec{\mathcal{M}_O}(\vec{F}) = \int \delta m \overrightarrow{OM} \wedge \left(\frac{\delta \vec{F}}{\delta m}\right) = -\left(\frac{\delta \vec{F}}{\delta m}\right) \wedge \int \delta m \overrightarrow{OM} = M\overrightarrow{OG} \wedge \frac{\delta \vec{F}}{\delta m} = \overrightarrow{OG} \wedge \vec{F}$ dans G

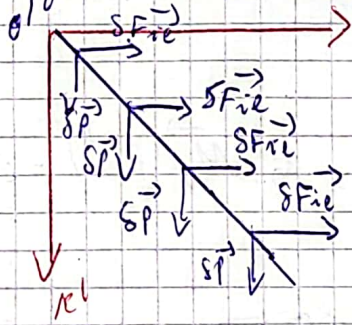
$\overrightarrow{MOG}$; relation barycentrique valable même si la distribution de masse n'est pas uniforme

champ de force uniforme ne dépend pas du point M

$M \to \vec{F}$

$\delta m \to \delta \vec{F} \Rightarrow \frac{\delta \vec{F}}{\delta m} \cdot M = \vec{F}$

Rq : le point d'application d'une force est le barycentre du système si la force est uniforme.



$\vec{\mathcal{M}_{O'}}(\vec{F_{ie}}) = \frac{L}{2} \vec{u_r} \wedge M a \omega^2 \cos(\omega t) \vec{u_y} = \frac{MaL\omega^2}{2} \cos(\omega t) \cos\theta \vec{u_z}$

d'où $\frac{ML^2}{3} \ddot{\theta} \vec{u_z} = -\frac{MgL}{2} \sin\theta \vec{u_z} + \frac{MaL\omega^2}{2} \cos(\omega t) \cos\theta \vec{u_z}$

$\ddot{\theta} + \frac{3g}{2L} \sin\theta = \frac{3a\omega^2}{2L} \cos(\omega t) \cos(\theta)$

IV) Théorème de l'énergie cinétique : TEC.

1) Energie cinétique d'un système :

→ cas d'une distribution discrète :

Scanné avec CamScanner

$E_c(\Sigma/R) = \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}^2(M_i/R)$

↳ Cas d'une distribution continue :

$E_c(\Sigma/R) = \int \frac{1}{2} \delta m \vec{v}^2(M/R)$

2) Théorème de Koenig pour l'énergie cinétique : R_g est galiléen

objectif : Relation entre $E_c(\Sigma/R_g)$ et $E_c(\Sigma/R^*)$

$E_c(\Sigma/R_g) = \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}^2(M_i/R_g)$

or $\vec{v}(M_i/R_g) = \vec{v}(M_i/R^*) + \vec{v}(G/R_g) + \vec{0}$ (pas de terme de rotation (R_g galiléen).

$E_c(\Sigma/R_g) = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left[\vec{v}(M_i/R^*) + \vec{v}(G/R_g)\right]^2$

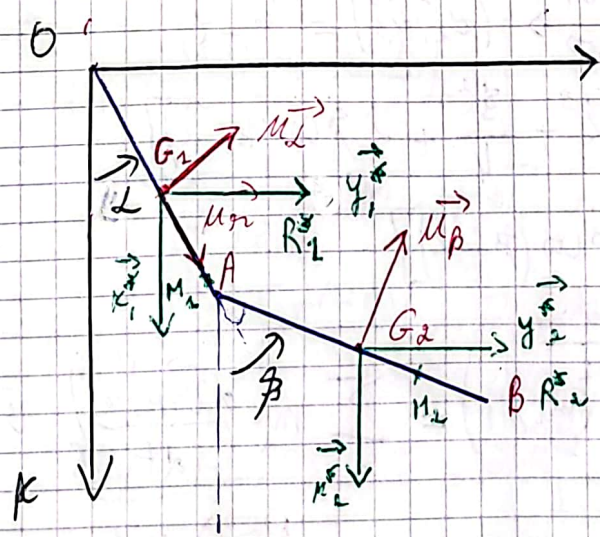
$= \sum_i \frac{1}{2} m_i \left[\vec{v}^2(M_i/R^*) + \vec{v}^2(G/R_g) + 2\vec{v}(M_i/R^*) \cdot \vec{v}(G/R_g)\right]$

$\rho(\Sigma/R^*) = \vec{0}$

$E_c(\Sigma/R_g) = \underbrace{\sum \frac{1}{2} m_i \vec{v}^2(M_i)}_{E_c^*} + \frac{1}{2}\underbrace{\left(\sum_i m_i\right)}_{M} \vec{v}^2(G/R_g) + \left[\sum_i m_i \vec{v}(M_i/R^*)\right] \vec{v}(G/R_g)$

$$E_c(\Sigma/R_g) = E_c^* + \frac{1}{2} M v^2(G/R_g)$$

3) App 4 : deux barres identiques $\overline{OA}$ et $\overline{OB}$ homogènes de masses identiques forment un système articulé en A.



$\alpha = (\vec{0x}, \vec{OA})$

$\beta = (\vec{0x}, \vec{AB})$

1) $E_{c_1}^*$ déduire E_{c_1} de la barre OA

2) $E_{c_2}^*$ déduire E_{c_2} de la barre AB

1) $E_{c_1}^* = \int \frac{1}{2} \delta m \vec{v}^2(M_1/R_1^*)$ avec $\delta m = \lambda dl = \lambda dr = \frac{M}{L} dr$

et $\vec{v}(M_1/R_1^*) = \left.\frac{d\vec{G_1M_1}}{dt}\right|_{R_1^*}$ tq $\vec{G_1M_1} = r\vec{u_r}$

Scanné avec CamScanner

$\vec{v}(M_2/R_1^*) = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\alpha}\vec{u}_\alpha$

$E_{c_1}^* = \int \frac{1}{2}\frac{M}{L} dr\, (r\dot{\alpha}\vec{u}_\alpha)^2 = \frac{M}{2L}\left(\int_{-L/2}^{L/2} r^2 dr\right)\dot{\alpha}^2$

$= \frac{M}{2L}\left[\frac{r^3}{3}\right]_{-L/2}^{L/2}\dot{\alpha}^2 = \frac{ML^2}{24}\dot{\alpha}^2$

↳ $E_{c_2} = E_{c_1}^* + \frac{1}{2}M\vec{v}^2(G_1/R)$. or $\vec{v}(G_2/R) = \left.\frac{d\vec{OG_2}}{dt}\right|_R$

$= \left.\frac{d(\frac{L}{2}\vec{u_r})}{dt}\right|_R$

$= \frac{L}{2}\dot{\alpha}\vec{u_\alpha}$

donc $E_{c_1} = E_{c_2}^* + \frac{1}{2}M\left(\frac{L}{2}\dot{\alpha}\right)^2 = \frac{ML^2}{24}\dot{\alpha}^2 + \frac{ML^2}{8}\dot{\alpha}^2 = \frac{ML^2}{6}\dot{\alpha}^2$

2) de même $E_{c_2}^* = \frac{ML^2}{24}\dot{\beta}^2$

↳ $E_{c_2} = E_{c_2}^* + \frac{1}{2}M\vec{v}^2(G_2/R)$

$\vec{v}(G_2/R) = \left.\frac{d\vec{OG_2}}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\vec{OA}}{dt}\right|_R + \left.\frac{d\vec{AG_2}}{dt}\right|_R = L\dot{\alpha}\vec{u_\alpha} + \frac{L}{2}\dot{\beta}\vec{u_\beta}$

$\vec{v}(G_2/R) = L^2\left[\dot{\alpha}^2 + \frac{\dot{\beta}^2}{4} + \dot{\alpha}\dot{\beta}\,\vec{u_\alpha}\cdot\vec{u_\beta}\right]$

or $(\widehat{\vec{OA}, \vec{AB}}) = (\beta - \alpha)$ $\xrightarrow[\vec{u_\beta}\perp\vec{AB}]{\vec{u_\alpha}\perp\vec{OA}}$ $(\vec{u_\alpha}, \vec{u_\beta}) = (\beta - \alpha)$

$E_{c_2} = \frac{mL^2}{24}\dot{\beta}^2 + \frac{1}{2}ML^2\left[\dot{\alpha}^2 + \frac{\dot{\beta}^2}{4} + \dot{\alpha}\dot{\beta}\cos(\beta - \alpha)\right]$

$= \frac{ML^2}{2}\left[\dot{\alpha}^2 + \frac{\dot{\beta}^2}{3} + \dot{\alpha}\dot{\beta}\cos(\beta - \alpha)\right]$.

4) Théorème de l'énergie cinétique :

$\left.\frac{dE_c}{dt}\right|_R = \frac{d}{dt}\left(\sum_i \frac{1}{2}m_i\vec{v}^2(m_i/R)\right) = \sum_i \underbrace{m_i \left.\frac{d\vec{v}(M_i/R)}{dt}\right|_R}_{\text{PFD appliqué sur } m_i} \cdot \vec{v}(M_i/R)$

$= \sum_i \left(\vec{f}_{ext\to i} + \vec{f}_{int\to i}\right)\cdot\vec{v}(M_i/R)$ Σ

Scanné avec CamScanner

$$\left.\frac{dE_c}{dt}\right|_R = \underbrace{\sum_i \vec{f}_{ext\to i}\,\vec{v}(M_i/R)}_{P_{ext}} + \underbrace{\sum_i \vec{f}_{int\to i}\,\vec{v}(M_i/R)}_{P_{int}}$$

d'où $\boxed{\left.\frac{dE_c}{dt}\right|_R = P_{ext} + P_{int}}$ Théorème de la puissance cinétique

$\times dt$: $dE_c = P_{ext}\cdot dt + P_{int}\cdot dt$

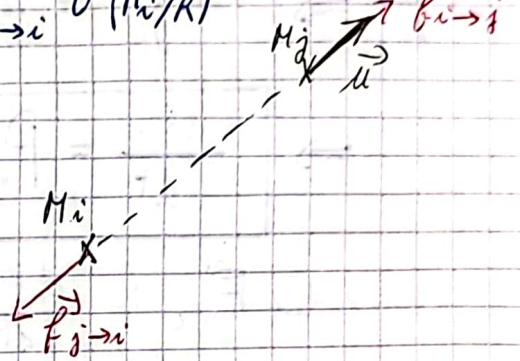
or $\delta W = P\cdot dt$ d'où $\boxed{dE_c = \delta W_{ext} + \delta W_{int}}$

ou $\boxed{\Delta E_c = W_{ext} + W_{int}}$ Théorème de l'énergie cinétique

$\vec{F}_{int} = \vec{0}$; $\vec{\mathcal{M}}_{int} = \vec{0}$; $P_{int} = ?$ → donc le th de l'énergie cinétique nous donne une idée sur les forces intérieures.

Cas d'un système de deux pts M_i et M_j :

$$P_{int} = P_{i\leftrightarrow j} = \vec{f}_{i\to j}\cdot\vec{v}(M_j/R) + \vec{f}_{j\to i}\,\vec{v}(M_i/R)$$



or $\vec{f}_{j\to i} = -\vec{f}_{i\to j}$ d'où

$$P_{int} = \vec{f}_{i\to j}\left[\vec{v}(M_j/R) - \vec{v}(M_i/R)\right]$$

$$P_{int} = \vec{f}_{i\to j}\cdot\left[\left.\frac{d\overrightarrow{OM_j}}{dt}\right|_R - \left.\frac{d\overrightarrow{OM_i}}{dt}\right|_R\right]$$

$$= \vec{f}_{i\to j}\left[\left.\frac{d\overrightarrow{M_iO}}{dt}\right|_R + \left.\frac{d\overrightarrow{OM_j}}{dt}\right|_R\right]$$

$$P_{int} = \vec{f}_{i\to j}\left.\frac{d\overrightarrow{M_iM_j}}{dt}\right|_R \quad \text{or} \quad \overrightarrow{M_iM_j} = M_iM_j\,\vec{u} \text{ d'où :}$$

$$P_{int} = f_{i\to j}\cdot\vec{u}\left[\frac{dM_iM_j}{dt}\cdot\vec{u} + M_iM_j\left.\frac{d\vec{u}}{dt}\right|_R\right]$$

~~$\frac{dM_iM_j}{dt}$~~ la dérivée d'une distance ne dépend pas du référentiel

or $\vec{u}\cdot\vec{u} = 1$ et $\vec{u}\cdot d\vec{u} = d\left(\frac{\vec{u}^2}{2}\right) = d\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

$$\boxed{P_{int} = f_{i\to j}\frac{dM_iM_j}{dt}}$$

↳ P_{int} ne dépend pas de R

↳ $P_{int} = 0$ si $M_iM_j = cte$ Système indéformable

Scanné avec CamScanner

VI | Théorème de l'énergie mécanique :

$dE_c = \delta W_{ext} + \delta W_{int}$ or $\delta W = \delta W_c + \delta W_{n.c}$ $\begin{cases} c : \text{conservative} \\ n.c : \text{non conservative} \end{cases}$

d'où $dE_c = (\delta W_{ext,c} + W_{ext,nc}) + (\delta W_{int,c} + \delta W_{int,nc})$

$= (\delta W_{ext,c} + \delta W_{int,c}) + (\delta W_{ext,nc} + \delta W_{int,nc})$

or $\delta W_c = -dE_p$ d'où $dE_c = -dE_p + \delta W_{ext,nc} + \delta W_{int,n.c}$

$\Rightarrow d(\underbrace{E_c + E_p}_{E_m}) = \delta W_{ext,nc} + \delta W_{int,nc}$

$$\boxed{dE_m = \delta W_{ext,nc} + \delta W_{int,nc}} \quad (*)$$

ou

$$\Rightarrow \boxed{\Delta E_m = W_{ext,nc} + W_{int,nc}}$$ Théorème de l'énergie mécanique.

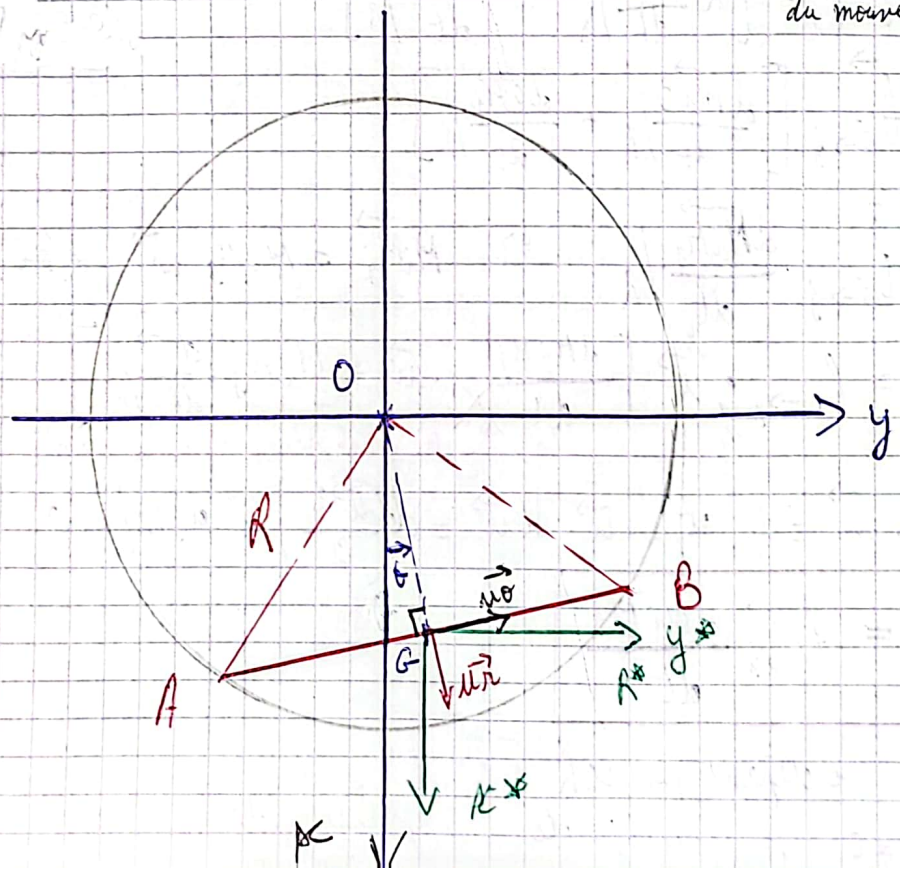
$(*) \times \frac{1}{dt} \Rightarrow \frac{dE_m}{dt} = \frac{\delta W_{ext,nc}}{dt} + \frac{\delta W_{int,nc}}{dt}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dE_m}{dt} = P_{ext,nc} + P_{int,nc}}$$ Th. de la puissance mécanique.

En absence des $\vec{F}_{n.c}$: $\frac{dE_m}{dt} = 0 \Rightarrow \boxed{E_m = cte}$ E_m se conserve c'est l'intégrale 1ère du mouvement.

VII | App :

AIIS :



Scanné avec CamScanner

* on considère une tige de masse M de longueur $L < 2R$ en mouvement d'oscillation sans frottements à l'intérieur d'un cylindre de rayon R.

1) En appliquant le théorème de l'énergie mécanique déterminer la période des petites oscillations

$$E_m = E_c + E_p$$

$$\hookrightarrow E_c = E_c^* + \frac{1}{2} M \vec{v}^2(G/R)$$

(*) $E_c^* = \frac{ML^2}{24}\dot{\theta}^2$ (voir App (4))

(*) $\vec{v}(G/R) = \frac{d\vec{OG}}{dt}\Big|_R$ et $\vec{OG} = OG\,\vec{u_r}$

ou $OA^2 = OG^2 + GA^2 \Rightarrow OG^2 = OA^2 - GA^2$

$OG^2 = R^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2 \Rightarrow OG = \sqrt{R^2 - \frac{L^2}{4}} = cte$

$$\vec{v}(G/R) = OG\,\frac{d\vec{u_r}}{dt}\Big|_R = OG\cdot\dot{\theta}\,\vec{u_\theta}$$

$$E_c = \frac{ML^2}{24}\dot{\theta}^2 + \frac{M}{2}\left(R^2 - \frac{L^2}{4}\right)\dot{\theta}^2$$

$$E_c = \frac{M}{2}\left(R^2 - \frac{L^2}{4} + \frac{L^2}{12}\right)\dot{\theta}^2$$

$$E_c = \frac{M}{2}\left(R^2 - \frac{L^2}{6}\right)\dot{\theta}^2$$

$\hookrightarrow E_p = ?$

$\vec{R} = \vec{R_N} + \vec{R_T}^{\,\vec{0}} = \vec{R_N}$ qui ne travaille pas.

$E_p = E_{pp} = -M\vec{g}\cdot\vec{OG} + cte = -Mg\cdot OG\cos(\theta) + \cancel{cte}$ (0 (choix))

$$E_p = -Mg\sqrt{R^2 - \frac{L^2}{4}}\cos\theta$$

$$\hookrightarrow E_m = \frac{M}{2}\left(R^2 - \frac{L^2}{6}\right)\dot{\theta}^2 - Mg\sqrt{R^2 - \frac{L^2}{4}}\cos(\theta)$$

ou $\frac{dE_m}{dt} = \cancel{P_{ext,nc}} + \cancel{P_{int,nc}}^{\,0}$ (la tige est un système indéformable)

0 pas de frottement externe

Scanné avec CamScanner

$\Rightarrow \frac{dE_m}{dt} = 0$ d'où $M(R^2 - \frac{L^2}{6})\dot{\theta}\ddot{\theta} + Mg\sqrt{R^2 - \frac{L^2}{4}}\,\dot{\theta}\sin\theta = 0$

$\ddot{\theta} + g\sqrt{R^2 - \frac{L^2}{4}} \times \frac{1}{R^2 - \frac{L^2}{6}} \sin\theta = 0$

Oscillateur non harmonique

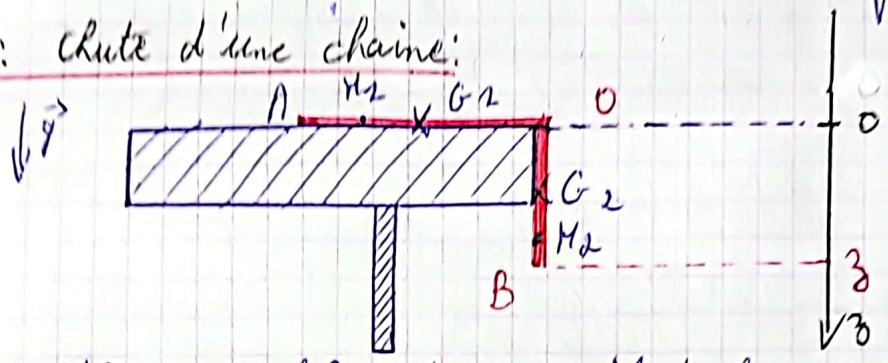
$\Rightarrow \ddot{\theta} + \omega^2 \sin\theta = 0 \Rightarrow$ avec $\omega = \sqrt{\frac{g\sqrt{R^2 - \frac{L^2}{4}}}{R^2 - \frac{L^2}{6}}}$

Si θ est faible; $\sin\theta \simeq \theta$ d'où $\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0$

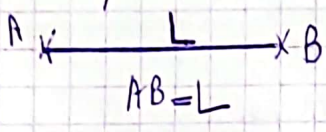
$\Rightarrow$ MVmt sinusoïdal de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$

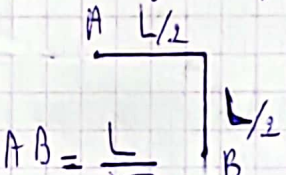
$T = 2\pi\sqrt{\frac{R^2 - \frac{L^2}{6}}{g\sqrt{R^2 - \frac{L^2}{4}}}}$

App 6: Chute d'une chaine:



On considère une chaîne de masse M de longueur L qui glisse sur une table parfaitement lisse. On suppose qu'il n'y a pas de dissipation d'énergie entre les brins de la chaîne. déterminer l'équation différentielle vérifiée par z. ($\ddot{z} - \frac{z}{\tau^2} = 0$ divergente)





$\Rightarrow AB \neq$ cte

Système indéformable

$\frac{dE_m}{dt} = P_{ext/nc} + P_{int/nc} = 0$ avec $E_m = E_c + E_p$

0 (Contact lisse) 0 (dissipation d'énergie entre les brins de la chaîne)

$E_c = \underbrace{E_{c1}}_{OA} + \underbrace{E_{c2}}_{OB} = \int \frac{1}{2}\delta m_1 \vec{v}^2(M_1/R) + \int \frac{1}{2}\delta m_2 \vec{v}^2(M_2/R)$

$\begin{cases} V(M_1/R) = V(A/R) \\ V(M_2/R) = V(B/R) \end{cases}$ avec $V(A/R) = V(B/R) = \dot{z}$

Scanné avec CamScanner

d'où $E_c = \int \frac{1}{2} \delta m_1 \dot{z}^2 + \int \frac{1}{2} \delta m_2 \dot{z}^2 = \frac{1}{2} \left[\int \delta m_1 + \int \delta m_2 \right] \dot{z}^2$

$E_c = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{z}^2 = \frac{1}{2} m \dot{z}^2$

⚠ $\delta m_2 > 0$ $\delta m_2 > 0$ $\rightarrow \delta m_1 + \delta m_2 \neq 0$

$\delta m_2 < 0$ $dm_2 < 0$ $\rightarrow dm_2 + dm_2 = 0$

↳ $E_p = E_{p1} + E_{p2} = -m_1 \vec{g} \cdot \underbrace{O\vec{G}_1}_{\vec{0}} - m_2 \vec{g} \cdot \vec{OG} + cte$

$E_p = -m_2 g \vec{u_z} \times \frac{z}{2} \vec{u_z} = -m_2 g \frac{z}{2}$

$+cte = 0$

$m \longleftrightarrow L$

$m_2 \longleftrightarrow z$ $\Rightarrow m_2 = m \times \frac{z}{L}$

$E_p = \frac{-mgz^2}{2L}$

↳ $E_m = \frac{1}{2} m \dot{z}^2 - \frac{mgz^2}{2L}$ or $\frac{dE_m}{dt} = 0$

donc $m \dot{z} \ddot{z} - \frac{mgz}{L} \dot{z} = 0 \Rightarrow \ddot{z} - \frac{z}{\ell^2} = 0$

avec $\ell = \sqrt{\frac{L}{g}}$

Scanné avec CamScanner

Cinématique, Cinétique et Dynamique d'un solide

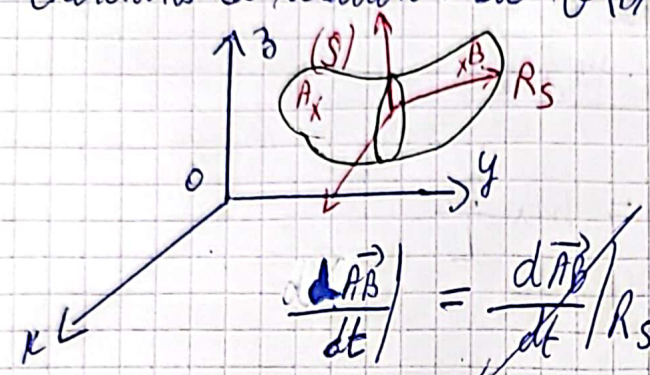
I) Cinématique d'un solide:

1) Champs de vitesse d'un solide:

Soit R un référentiel quelconque et R_S lié au solide.

on considère 2 points A et B liés au solide

Obj: Chercher la relation entre $\vec{v}(B/R)$ et $\vec{v}(A/R)$



$$\left.\frac{d\vec{AB}}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\vec{AB}}{dt}\right|_{R_S} + \vec{\Omega}(R_S/R) \wedge \vec{AB}$$

$\vec{0}$ car A et B liés à (S)

$$\left.\frac{d\vec{AO}}{dt}\right|_R + \left.\frac{d\vec{OB}}{dt}\right|_R = \vec{\Omega}(R_S/R) \wedge \vec{AB}$$

$$\underbrace{\left.\frac{d\vec{OB}}{dt}\right|_R}_{\vec{V}(B/R)} - \underbrace{\left.\frac{d\vec{OA}}{dt}\right|_R}_{\vec{V}(A/R)} = -\vec{AB} \wedge \vec{\Omega}(R_S/R)$$

Formule de Varignon:

$$\text{donc } \vec{v}_B(B/R) = \vec{v}_A(A/R) + \vec{BA} \wedge \vec{\Omega}_{S/R}$$

3 DL de Translation — 3 DL de Rotation

Le couple $\left\{\begin{matrix}\vec{\Omega}(S/R) \\ \vec{v}(A/R)\end{matrix}\right\}$ Forme un torseur cinématique de résultante $\vec{\Omega}(S/A)$ et champ du moment $\vec{v}(A/R)$

2) Mouvement de translation et de rotation d'un solide:

Un solide est en mvmt de translation si $\vec{V}(B/R) = \vec{V}(A/R)$ $\forall A, B$ liés à S

$\Rightarrow \vec{\Omega}(S/R) = \vec{0}$.

Un solide est en rotation autour d'un axe fixe par rapport à (R) s'il existe un axe Δ tel que $\forall A \in (\Delta)$, $\vec{v}(A/R) = \vec{0}$

$\Rightarrow \vec{v}(B/R) = \vec{BA} \wedge \vec{\Omega}$

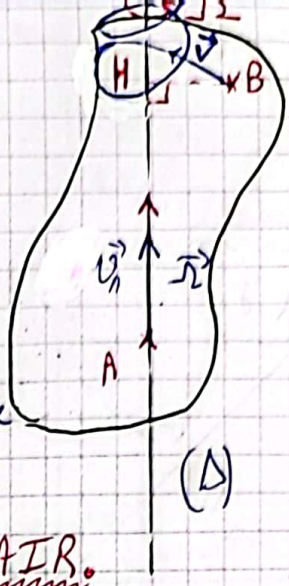
$\vec{v}(B/R) = (\vec{BH} + \vec{HA}) \wedge \vec{\Omega}$

Scanné avec CamScanner

$\vec{v}(B/R) = \vec{BH} \wedge \vec{\Omega} + \underbrace{\vec{HA} \wedge \vec{\Omega}}_{\vec{0}}$

$v(B/R) = \Omega \cdot HB$

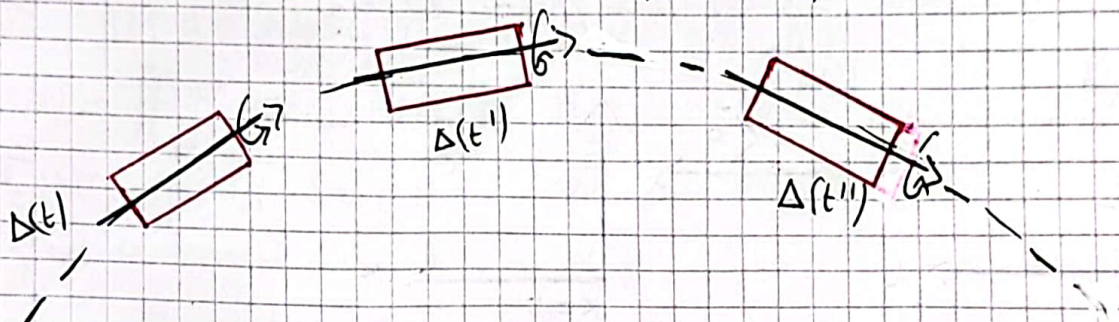
Si $HB \nearrow \Rightarrow v(B/R) \nearrow$



Le mouvement le plus général d'un solide à chaque instant est la composition d'un mouvement de rotation autour de (Δ) et d'un mouvement de translation par rapport à (Δ).

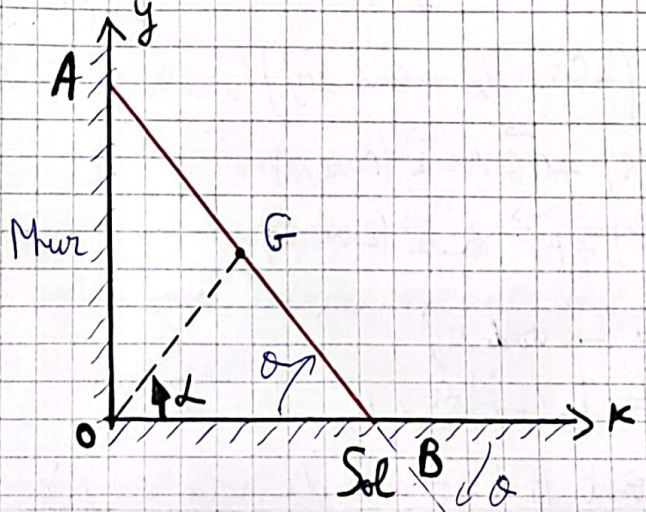
Cet axe (Δ) est appelé **axe instantané de rotation** AIR.

Donc pour tout point $M \in (\Delta)$, il est caractérisé par $v(M) = v_{min}$.



3) Application:

Application 7: Chute d'une barre.



On considère une barre de longueur L qui glisse en restant en contact avec le sol au point B et le mur au point A.

1) Déterminer le vecteur rotation instantané de la barre

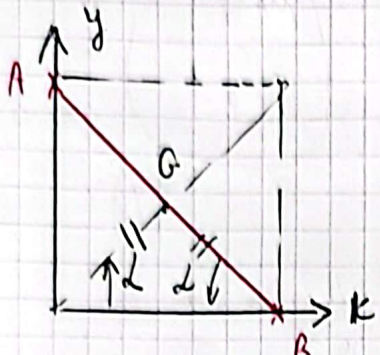
2) Donner l'expression de $\vec{v}(G/R)$ en fonction de L, α, $\dot{\alpha}$ et les vecteurs de base cartésienne. Déduire $\vec{v}(A/R)$ et $\vec{v}(B/R)$

Scanné avec CamScanner

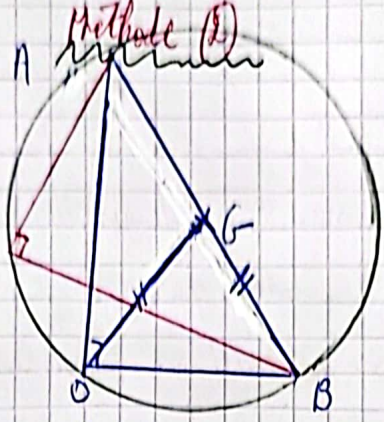
4) $\vec{\Omega}(\text{Barre}/R) = \frac{d\text{angle}}{dt} \times \text{Axe de rotation} = \frac{d\theta}{dt}\vec{u_z}$

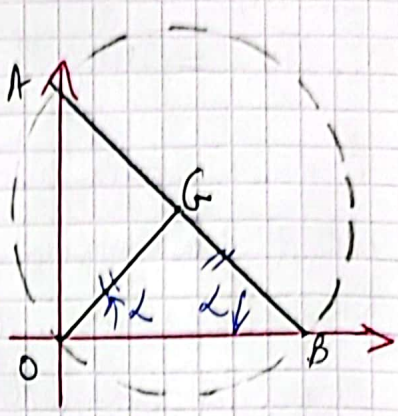
$\theta = (\vec{Ox}, \vec{AB}) = ?$ $\qquad \vec{u_z}$

Méthode (1):

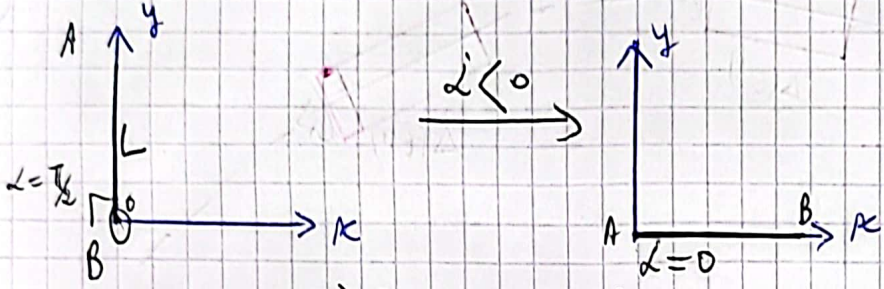


Méthode (2)





donc $\theta = -\alpha \Rightarrow \vec{\Omega}(\text{Barre}/R) = -\dot{\alpha}\vec{u_z}$.



$\vec{\Omega}(AB/R) = -\dot{\alpha}\vec{u_z}$

2) $\vec{v}(G/R) = \left.\frac{d\vec{OG}}{dt}\right|_R$ et $\vec{OG} = \frac{L}{2}(\cos\alpha\,\vec{u_x} + \sin\alpha\,\vec{u_y})$

$\Rightarrow \vec{v}(G/R) = \frac{L}{2}\dot{\alpha}(-\sin\alpha\,\vec{u_x} + \cos\alpha\,\vec{u_y})$

3) $\begin{cases} \vec{v}(A/R) = \vec{v}(G/R) + \vec{AG} \wedge \vec{\Omega}(\text{Barre}/R) \\ \vec{v}(B/R) = \vec{v}(G/R) + \vec{BG} \wedge \vec{\Omega}(\text{Barre}/R) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \vec{v}(A/R) = L\dot{\alpha}\cos\alpha\,\vec{u_y} \\ \vec{v}(B/R) = L(-\dot{\alpha})\sin\alpha\,\vec{u_x} \end{cases}$

II Moment cinétique en un point A d'un axe de rotation fixe :

Rq $\vec{v_B} = \vec{v_A} + \vec{BA} \wedge \vec{\Omega}$ $\quad \forall A, B$ liés à (S)

$\vec{\sigma_B} = \vec{\sigma_A} + \vec{BA} \wedge \vec{p}$ $\quad \forall A, B$.

$\vec{\sigma_A}(S/R) = \int \vec{AM} \wedge Sm\,\vec{v}(M/R)$

Mq $\vec{\sigma_A}(S/R) = J_\Delta \vec{\Omega} - \int (\vec{AH} \cdot \vec{\Omega}) \cdot \vec{HM}\, Sm$

Scanné avec CamScanner

Démo $\vec{v}(M/R) = \vec{v}(A/R) + \vec{HA} \wedge \vec{\Omega}(S/R) = \vec{\Omega}(S/R) \wedge \vec{AM}$ (on pose $\vec{\Omega}(S/R) = \vec{\Omega}$).

$\vec{v}(M/R) = \vec{\Omega} \wedge (\vec{AH} + \vec{HM}) = \underbrace{\vec{\Omega} \wedge \vec{AH}}_{\vec{0}} + \vec{\Omega} \wedge \vec{HM} = \vec{\Omega} \wedge \vec{HM}$.

$\vec{AM} \wedge \vec{v}(M/R) = \vec{AM} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{HM})$

or $\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C} \cdot (\vec{A} \cdot \vec{B})$

donc $\vec{AM} \wedge \vec{v}(M/R) = \vec{\Omega} \cdot (\vec{AM} \cdot \vec{HM}) - \vec{HM} \cdot (\vec{AH} \cdot \vec{\Omega})$

or $\begin{cases} \vec{AM} \cdot \vec{HM} = (\vec{AH} + \vec{HM}) \cdot \vec{HM} = \underbrace{\vec{AH} \cdot \vec{HM}}_{0} + \vec{HM}^2 = HM^2 \\ \vec{AM} \cdot \vec{\Omega} = (\vec{AH} + \vec{HM}) \cdot \vec{\Omega} = \vec{AH} \cdot \vec{\Omega} + \underbrace{\vec{HM} \cdot \vec{\Omega}}_{0} = \vec{AH} \cdot \vec{\Omega} \end{cases}$

d'où $\vec{AM} \wedge \vec{v}(M/R) = \vec{\Omega} \cdot \vec{HM}^2 - \vec{HM} \cdot (\vec{AH} \cdot \vec{\Omega})$

$\vec{\sigma_A}(S/R) = \int \left[\vec{\Omega} \cdot \vec{HM}^2 - \vec{HM} \cdot (\vec{AH} \cdot \vec{\Omega}) \right] \delta m$ or $\vec{\Omega}$ ne dépend pas de M

$\vec{\sigma_A}(S/R) = \left[\int \vec{HM}^2 \cdot \delta m \right] \vec{\Omega} - \int (\vec{AH} \cdot \vec{\Omega}) \cdot \vec{HM} \, \delta m$

on définit le moment d'inertie d'un solide /Δ par :

$J_\Delta = \int \underbrace{\vec{HM}^2}_{\text{moment}} \cdot \underbrace{\delta m}_{\substack{\text{masse} \\ \text{inerte}}}$ d'où $\vec{\sigma_A}(S/R) = J_\Delta \cdot \vec{\Omega} - \int (\vec{AH} \cdot \vec{\Omega}) \vec{HM} \, \delta m$

$\Rightarrow \vec{\sigma_A}(S/R) = \vec{\sigma}_{A//\Delta} + \vec{\sigma}_{A \perp \Delta}$ avec

$\vec{\sigma}_{A//\Delta} = J_\Delta \vec{\Omega} \; // \vec{u_\Delta}$

$\vec{\sigma}_{A \perp \Delta} = -\int (\vec{AH} \cdot \vec{\Omega}) \cdot \vec{HM} \, \delta m \; \perp \vec{u_\Delta}$.

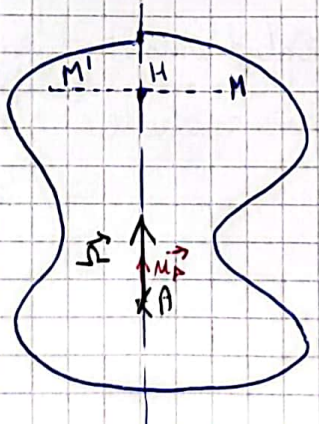
Si Δ est un axe principal d'inertie $\vec{\sigma}_{A \perp \Delta} = \vec{0} \Rightarrow \vec{\sigma_A}(S/R) = J_\Delta \cdot \vec{\Omega}$.

Si un solide est symétrique, les axes suivants sont les axes principaux d'inertie au point A du solide :

* tout axe de symétrie passant par A.
* L'axe perpendiculaire au plan de symétrie contenant A.

Déno :

① Axe de symétrie :



$\forall M \in (S) \; ; \; \exists M' \in (S) \; / \; \vec{HM'} = -\vec{HM}$

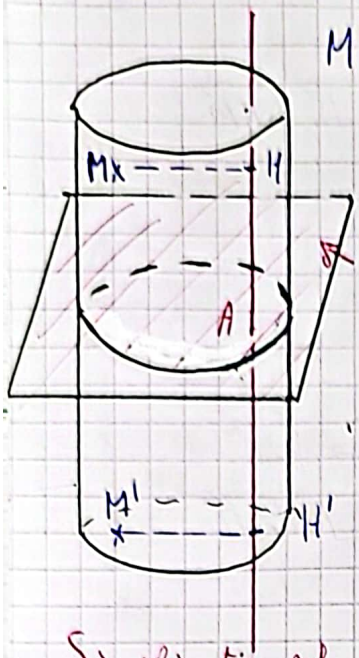
$\Rightarrow (\vec{AH} \cdot \vec{\Omega}) \cdot \vec{HM'} = -(\vec{AH} \cdot \vec{\Omega}) \cdot \vec{HM}$

$\Rightarrow (\vec{AH} \cdot \vec{\Omega}) \vec{HM'} + (\vec{AH} \cdot \vec{\Omega}) \cdot \vec{HM} = \vec{0}$.

$\Rightarrow \vec{\sigma}_{A \perp \Delta} = \vec{0}$

Scanné avec CamScanner

② Axe $\perp \Pi_S$ avec $A \in \Pi_S$:



$$M' = Sym_{\Pi_S} M \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{HM'} = \overrightarrow{HM} \\ \overrightarrow{AH'} = -\overrightarrow{AH} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (\overrightarrow{AH'} \cdot \vec{\Omega}) \cdot \overrightarrow{H'M'} = -(\overrightarrow{AH} \cdot \vec{\Omega}) \cdot \overrightarrow{HM}$$

$$\Rightarrow (\overrightarrow{AH} \cdot \vec{\Omega}) \cdot \overrightarrow{HM'} + (\overrightarrow{AH} \cdot \vec{\Omega}) \cdot \overrightarrow{HM} = \vec{0}$$

$$\text{donc } \vec{\sigma}_{/\Delta \perp D} = \vec{0}$$

Signification physique de la masse inerte :

C'est un scalaire positif qui mesure l'aptitude d'un corps à s'opposer au mouvement.

$$\sum_k \vec{F}_k = m \vec{a}(G/R) \quad (m = m_i)$$

$$\Rightarrow \vec{a}(G/R) = \frac{\sum_k \vec{F}_k}{m}$$

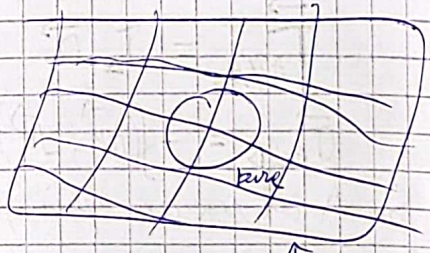
$$m \nearrow +\infty \Rightarrow \vec{a}(G/R) = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}(G/R) = \vec{de}.$$

Rq : $m_i \neq m_g$

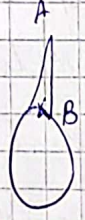
m_g est la masse gravitationnelle :

$$\vec{F}_g = \frac{-G m_1 m_2}{\|\overrightarrow{M_1M_2}\|^3} \overrightarrow{M_1M_2}$$

$$\left|\frac{\Delta m}{m_i}\right| = \left|\frac{m_i - m_g}{m_i}\right| \simeq 10^{-11}$$



↑ lignes d'espace temps déformée



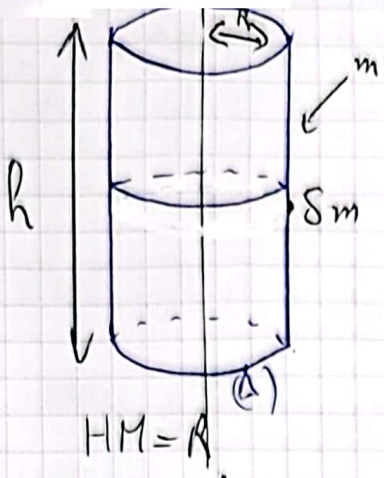
$1_m \rightarrow \Delta t_{AB} = 10^{-6}\,s$

Signification physique du moment d'inertie :

Le moment d'inertie du solide /Δ caractérise la répartition de la masse du solide autour de Δ, il est d'autant plus grand que la masse est plus éloignée de Δ. Le moment d'inertie d'un solide /l'axe Δ est pa caractéristique intrinsèque qui mesure son aptitude à s'opposer aux variations de vitesses de rotation autour de Δ.

$$J_\Delta = \int HM^2 . Sm$$

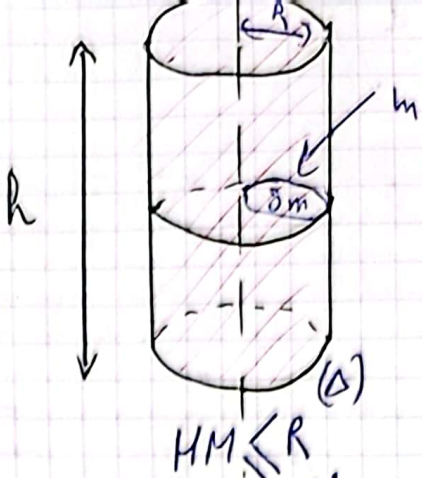
Scanné avec CamScanner



$HM = R$

$J_\Delta = MR^2$

⇓ ne dépend pas de h

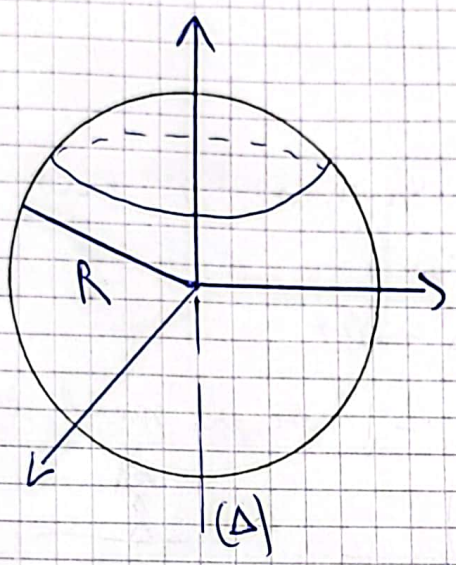


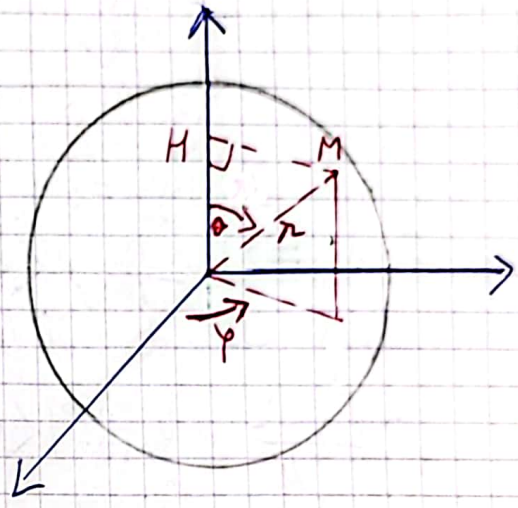
$HM \leqslant R$

$J_\Delta = \frac{MR^2}{2}$

⇓ ne dépend pas de h

$J_\Delta = \frac{2}{3}MR^2 > J_\Delta = \frac{2}{5}MR^2$





$J_\Delta = \int HM^2 \delta m \quad$ or $HM = r\sin\theta$

$= \int r^2 \sin^2\theta \, \delta m$

$J_\Delta = \int r^2 \sin^2(\theta) \rho \, d\tau = \rho \iiint r^2 \sin^2(\theta) \, dr \, r d\theta \, r\sin\theta \, d\varphi$

$J_\Delta = \frac{M}{V} \int_0^R r^4 dr \underbrace{\int_0^\pi \sin^3(\theta) d\theta}_{4/3} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \times \frac{R^5}{5} \times \frac{4}{3} \times 2\pi$

$J_\Delta = \frac{2}{5}MR^2$

Scanné avec CamScanner

On sait que $\left(\frac{d\vec{\sigma}_A}{dt}\right)_R = \sum \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F_k}) - \vec{v}_{(A/R)} \wedge M\vec{v}_{(G/R)}$ (où $\vec{v}_{(A/R)} = \vec{0}$)

$\vec{\mathcal{M}_A}$

$$\frac{d(J_\Delta \Omega)}{dt} = \sum \mathcal{M}_\Delta(\vec{F_k})$$

Si $J_\Delta = cte$: $J_\Delta \frac{d\Omega}{dt} = \sum \mathcal{M}_\Delta(\vec{F_k})$

$$\Rightarrow \frac{d\Omega}{dt} = \frac{\sum \mathcal{M}_\Delta(\vec{F_k})}{J_\Delta}$$

Si $J_\Delta \nearrow^{\infty} \Rightarrow \frac{d\Omega}{dt} = 0 \Rightarrow \Omega = cte$

Si $J_\Delta \neq cte$ $\quad \frac{d(J_\Delta \Omega)}{dt} = \sum \mathcal{M}_\Delta(\vec{F_k})$

$$\Rightarrow \sum \mathcal{M}_\Delta(\vec{F_k}) = \mathcal{M}_\Delta(\vec{R_t})$$

Si $J_\Delta = cte$ $\quad J_\Delta \frac{d\Omega}{dt} = \mathcal{M}_\Delta(\vec{R_t}) < 0$ car on remarque au cours du temps $\Omega \downarrow \Rightarrow \frac{d\Omega}{dt} < 0$

pour garder $\Omega = cte$; il faut $\downarrow J_\Delta$ en effet

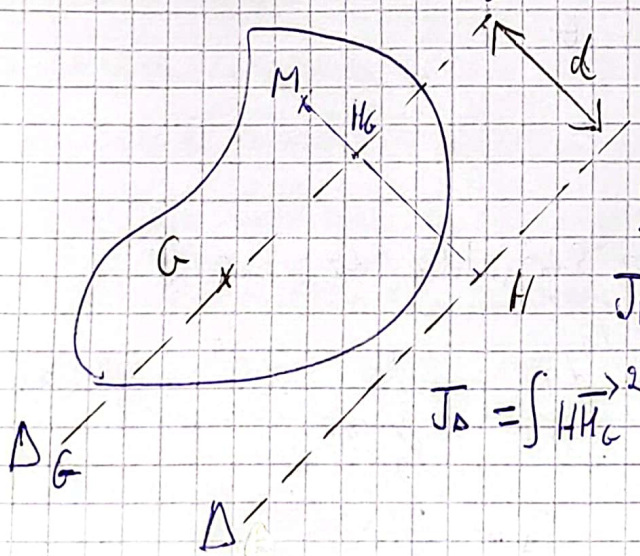
$$\frac{d J_\Delta \Omega}{dt} = \mathcal{M}_\Delta(\vec{R_t}) < 0 \Rightarrow J_\Delta \Omega \downarrow$$ donc pour que Ω reste cte il faut $\downarrow J_\Delta$ (on peut même $\nearrow \Omega$)

III) Théorème de Huygens :

a) Relation entre J_Δ et J_{Δ_G}.

MQ $\quad J_\Delta = J_{\Delta_G} + md^2$

Δ_G $\quad \Delta // \Delta_G$.



Démo :

$$J_\Delta = \int \vec{HM}^2 \delta m = \int (\vec{HH_G} + \vec{H_GM})^2 \delta m$$

$$J_\Delta = \int \vec{HH_G}^2 \delta m + \int \underbrace{2\vec{HH_G} \cdot \vec{H_GM}}_{\neq 0} + \int \underbrace{\vec{H_GM}^2 \delta m}_{J_{\Delta_G}}$$

Scanné avec CamScanner

donc $J_\Delta = d^2 \int dm + J_{\Delta G} + 2 \int \overrightarrow{HH_G} \cdot (\overrightarrow{H_G G} + \overrightarrow{GH'}) dm$

or $\overrightarrow{HH_G} \perp \overrightarrow{H_G G} \Rightarrow \overrightarrow{HH_G} \cdot \overrightarrow{H_G G} = 0$

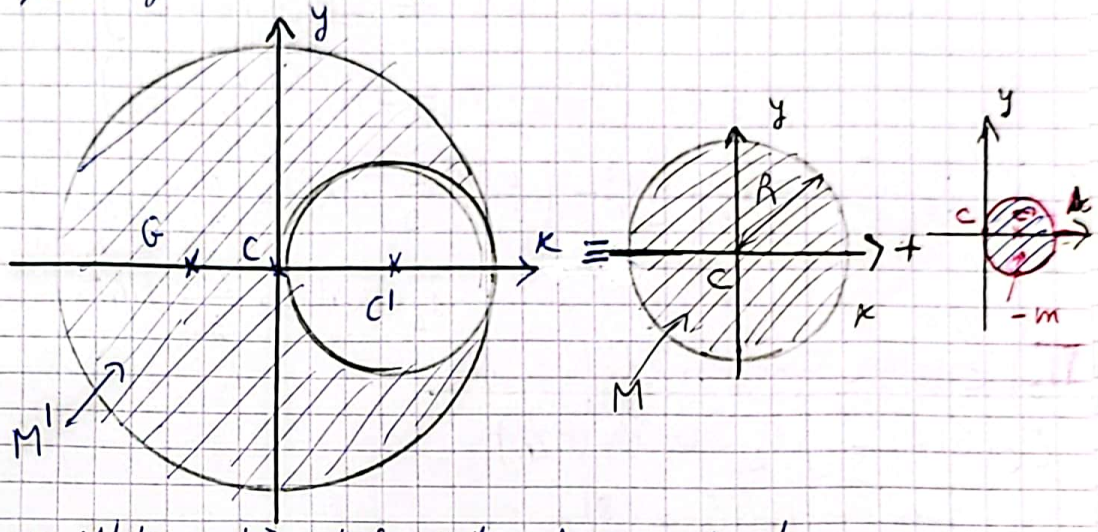
d'où $J_\Delta = d^2 m + J_{\Delta_G} + 2 \overrightarrow{HH_G} \underbrace{\int \overrightarrow{GH} \cdot dm}_{\vec{0} \text{ (relation barycentrique)}}$

d'où $\boxed{J_\Delta = J_{\Delta_G} + m d^2}$

le moment d'inertie pour des axes parallèles est minimal quand l'axe par le barycentre.

Application: disque percé:

on considère un disque homogène de centre C et de rayon R dont on a ôté un disque de rayon $R/2$ tangent au 1er disque.



déterminer la masse M' du système et la position de son centre de masse G.

le moment d'inertie d'un disque homogène de rayon R et de masse M est $J_\Delta = \frac{MR^2}{2}$.

En utilisant le théorème d'Huyghens déterminer le moment d'inertie $J'_{\Delta G}$ du système

Réponse: $M' = M + (-m)$ or $M = \sigma . S = \sigma \pi R^2$

donc $m = \sigma . s = \sigma . \pi . \left(\frac{R}{2}\right)^2 \Rightarrow M' = M - \frac{M}{4} = \frac{3M}{4}$

$M_t \overrightarrow{OG} = M_1 \overrightarrow{OG_1} + M_2 \overrightarrow{OG_2}$

M' M $-m$ $O \equiv C$

donc $M' \overrightarrow{CG} = M \overrightarrow{CC} + \left(\frac{-M}{4}\right) \overrightarrow{CC'} \Rightarrow \overrightarrow{CG} = \frac{-M/4}{3M/4} \overrightarrow{CC'}$ donc $\overrightarrow{CG} = -1/3 \overrightarrow{CC'}$

Scanné avec CamScanner

donc $\overrightarrow{CG} = \frac{-R}{6}\vec{u_x}$.

2) $J_{\Delta_G}(M') = J_{\Delta_G}(M) + J_{\Delta_G}(-m)$

⚠ G n'est pas barycentre de M et $-m$

$$\Rightarrow \begin{cases} J_{\Delta_G}(M) = J_{\Delta_C}(M) + MCG^2 = \frac{MR^2}{2} + M\left(\frac{R}{6}\right)^2 = \frac{MR^2}{2}\left[1+\frac{1}{18}\right] = \frac{19}{36}MR^2 \\ J_{\Delta_G}(-m) = J_{\Delta_{C'}}(-m) + (-m)C'G^2 = \frac{-m\left(\frac{R}{2}\right)^2}{2} + (-m)\left(\frac{R}{2}+\frac{R}{6}\right)^2 \end{cases}$$

$$= -\frac{mR^2}{8} - \frac{mR^2}{4}\left(1+1/3\right)^2$$

$$= -\frac{mR^2}{8}\left[1+2\times(4/3)^2\right]$$

$$= -\frac{MR^2}{32}\left[1+\frac{32}{9}\right]$$

$$= -MR^2\left[\frac{1}{32}+\frac{1}{9}\right]$$

d'où $J_{\Delta_G}(M') = \frac{19}{36}MR^2 - \left(\frac{1}{32}+\frac{1}{9}\right)MR^2 = \frac{1}{36}\left[19 - \frac{9}{8} - 4\right]MR^2$

$$J_{\Delta_G}(M') = \frac{37}{96}MR^2$$

II) Energie cinétique d'un solide:

$E_C(S/R) = \int \frac{1}{2}\,\delta m\,\vec{v}^2(M/R)$

Soit A un point lié à (S)

$\vec{v}(M/R) = \vec{v}(A/R) + \overrightarrow{MA} \wedge \vec{\Omega}(S/R)$

$$\Rightarrow E_C(S/R) = \frac{1}{2}\int \vec{v}(M/R)\left[\vec{v}(A/R) + \overrightarrow{MA}\wedge\vec{\Omega}(S/R)\right]\cdot \delta m$$

$$= \frac{1}{2}\left[\underbrace{\left(\int \delta m\,\vec{v}(M/R)\right)}_{\vec{p}(S/R)}\cdot\vec{v}(A/R) + \int \vec{v}(M/R)\left(\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{AM}\right)\delta m\right]$$

$$E_C(S/R) = \frac{1}{2}\left[\vec{v}(A/R)\cdot\vec{p}(S/R) + \vec{\Omega}\underbrace{\int \overrightarrow{AM}\wedge\delta m\,\vec{v}(M/R)}_{\vec{\sigma}_A(S/R)}\right]$$

$$E_C(S/R) = \frac{1}{2}\left[\vec{\Omega}(S/R)\cdot\vec{\sigma}_A(S/R) + \vec{v}(A/R)\cdot\vec{p}(R)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\begin{matrix}\vec{\Omega} \\ \vec{v}(A/A)\end{matrix}\right\} \otimes \left\{\begin{matrix}\vec{p}/R \\ \vec{\sigma}_A(S/R)\end{matrix}\right\}$$

torseur cinématique — torseur cinétique

comoment

Scanné avec CamScanner

Rq° le comoment est un invariant scalaire ; càd indépendant du choix du pt A lié à solide.

Cas particuliers :

↳ Si (S) est en translation/R : $\vec{\Omega}(S/R) = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}(A/R) = \vec{v}(G/R)$

$\Rightarrow E_c(S/R) = \frac{1}{2} m \vec{v}^2(G/R)$

↳ Si (S) est en rotation autour d'un axe fixe (Δ) et A ∈ Δ :

$\vec{v}(A/R) = \vec{0}$.

$\Rightarrow E_c(S/R) = \frac{1}{2}\left[\vec{\Omega}_{(S/R)} \cdot \vec{\sigma}_A(S/R) + 0\right] = \frac{1}{2}\Omega \vec{\mu}_\Delta \left(\vec{\sigma}_{A//\Delta} + \vec{\sigma}_{A\perp\Delta}\right)$

$\vec{\sigma}_{A//\Delta} = J_\Delta \Omega \vec{\mu}_\Delta$.

$\Rightarrow E_c(S/R) = \frac{1}{2} J_\Delta \Omega^2$

V) Puissance des actions :

$P(\vec{F}) \neq \vec{F} \cdot \vec{v}(M/R)$

$\Rightarrow P(\vec{F}) = \int \delta\vec{F} \cdot \vec{v}(M/R)$

Soit A un pt lié à (S).

$\vec{v}(M/R) = \vec{v}(A/R) + \vec{MA} \cdot \vec{\Omega}(S/R)$

$P(\vec{F}) = \int \delta\vec{F} \left[\vec{v}(A/R) + \vec{MA} \wedge \vec{\Omega}(S/R)\right]$

$= \left(\int \delta\vec{F}\right) \cdot \vec{v}(A/R) + \int \delta\vec{F} \left(\vec{\Omega} \wedge \vec{AM}\right)$

$= \vec{F} \cdot \vec{v}(A/R) + \vec{\Omega} \int \vec{AM} \wedge \delta\vec{F}$

$\vec{M}_A(F)$

donc $P(\vec{F}) = \left[\vec{\Omega}(S/R) \cdot \vec{M}_A(F) + \vec{v}(A/R) \cdot \vec{F}\right] = \left\{\begin{matrix}\vec{\Omega} \\ \vec{v}(A/R)\end{matrix}\right\} \otimes \left\{\begin{matrix}\vec{F} \\ \vec{M}_A(F)\end{matrix}\right.$

torseur cinématique — torseur des actions

comoment.

Cas particuliers :

↳ Si (S) est en translation/R : $\vec{\Omega}(S/R) = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}(A/R) = \vec{v}(G/R)$

$\Rightarrow P(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{v}(G/R)$

↳ Si (S) est en rotation autour d'un axe fixe (Δ) et A ∈ Δ : $\vec{v}(A/R) = \vec{0}$

$\Rightarrow P(\vec{F}) = \vec{\Omega} \cdot \vec{M}_A(\vec{F}) = \Omega \cdot M_\Delta(\vec{F})$

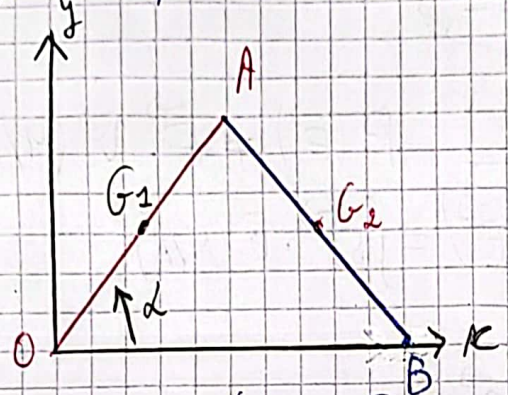
Scanné avec CamScanner

Rq° Si le point d'application de $\vec{F}$ est A : $\vec{M}_A(\vec{F}) = \vec{AA} \wedge \vec{F} = \vec{0}$.

Application 9° Système de 2 barres :

Un système est formé de 2 barres identiques homogènes de masse M et de longueur L chacune on note J_G le moment d'inertie d'une barre par rapport à un axe passant par son centre de masse G. On donne $J_G = \frac{ML^2}{12}$. Les 2 barres sont liées entre elles en A et forment un triangle OAB tel que O est un point fixe et le point B est contraint de se déplacer sur l'axe (Ox). On note $\alpha = (\vec{Ox}; \vec{OA})$.

déterminer l'énergie cinétique du système en fonction de α et $\dot{\alpha}$.



$E_c = E_{c1} + E_{c2}$ avec $\begin{cases} E_{c1} = E_c(OA) \overset{A=O}{=} \\ E_{c2} = E_c(AB) = \end{cases}$

$A = G_2$

$E_{c1} = \frac{1}{2}\left[\vec{\Omega} \cdot \vec{\sigma}_{O/R} + \vec{v}(O/R)^{\cdot} \cdot \vec{P}_{/R}\right] = \frac{1}{2} J_{\Delta O} \Omega^2 = \frac{1}{2}\left(J_{\Delta G_1} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2\right)\dot{\alpha}^2$

$= \frac{ML^2}{6}\dot{\alpha}^2$

$E_{c2} = E_c(AB) = \frac{1}{2}\left[\vec{\Omega}\vec{\sigma}_{G_2/R} + \vec{v}(G_2/R) \cdot \vec{P}_{/R}\right]$

$= \frac{1}{2}\left[J_{\Delta G_2}\dot{\alpha}^2 + M v^2(G_2/R)\right]$

or $\vec{v}(G_2/R) = \frac{d\vec{OG_2}}{dt}\Big|_R$ tq $\vec{OG_2} = \vec{OA} + \vec{AG_2}$

$= L\left(\cos\alpha \vec{u_x} + \sin\alpha \vec{u_y}\right) + \frac{L}{2}\left[\cos\alpha \vec{u_x} - \sin\alpha \vec{u_y}\right]$

$\vec{OG_2} = \frac{L}{2}\left[3\cos\alpha \vec{u_x} + \sin\alpha \vec{u_y}\right]$

$\vec{v}(G_2/R) = \frac{L}{2}\dot{\alpha}\left[-3\sin\alpha \vec{u_x} + \cos\alpha \vec{u_y}\right]$

Scanné avec CamScanner

$$\Rightarrow \vec{v}^2(G_2/R) = \frac{L^2}{4}\dot{\alpha}^2\left[9\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right] = \frac{L^2\dot{\alpha}^2}{4}\left[1+8\sin^2\alpha\right]$$

$$E_{c_2} = \frac{1}{2}\left[\frac{ML^2}{12}\dot{\alpha}^2 + \frac{ML^2}{4}\dot{\alpha}^2\left(1+8\sin^2\alpha\right)\right]$$

$$E_c = \frac{ML^2}{6}\dot{\alpha}^2 + \frac{ML^2}{24}\dot{\alpha}^2 + \frac{ML^2}{8}\dot{\alpha}^2\left(1+8\sin^2\alpha\right)$$

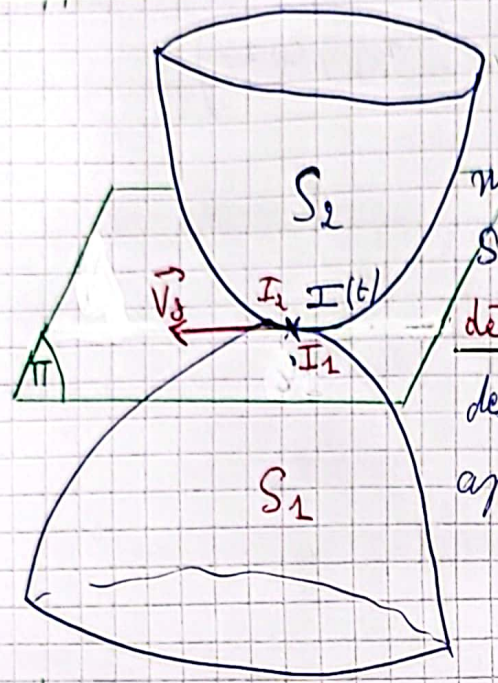
$$= ML^2\dot{\alpha}^2\left[\frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{8} + \sin^2\alpha\right] = ML^2\dot{\alpha}^2\left(\frac{1}{3} + \sin^2\alpha\right).$$

Scanné avec CamScanner

Dynamique des solides en contact :

I) Cinématique des solides en contact :

1) Approximation du contact ponctuel :



le contact entre S_1 et S_2 est supposé ponctuel si la surface de contact est négligeable devant les dimensions de S_1 et S_2. On pose $I(t)$ le point de contact définit à chaque instant. I_1 et I_2 sont des points infiniment voisins de I et appartenant respectivement à S_1 et S_2,

2) Vitesse de glissement de S_2 par rapport à S_1 :

C'est la vitesse relative de S_2/S_1 au point M.

$\vec{v_g}(S_2/S_1) = \vec{v}(I \in S_2/R) - \vec{v}(I \in S_1/R)$

↳ $\vec{v_g}$ ne dépend pas de R car c'est une vitesse relative.

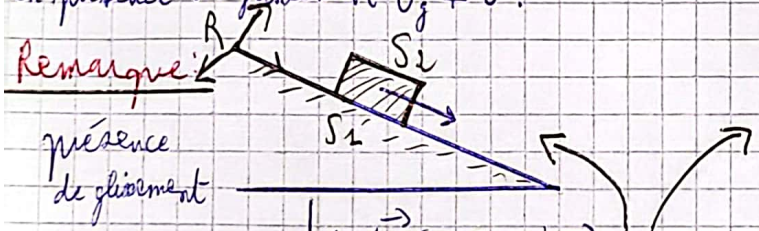
↳ $\vec{v_g} \in \Pi$ avec Π est le plan tangent à S_1 et S_2 au point I

En effet $\vec{v_g} \notin \Pi \Rightarrow$ pas de contact $\Rightarrow$ pas de notion de glissement.

En absence de glissement $\vec{v_g} = \vec{0}$

En présence de glissement $\vec{v_g} \neq \vec{0}$.

Remarque :



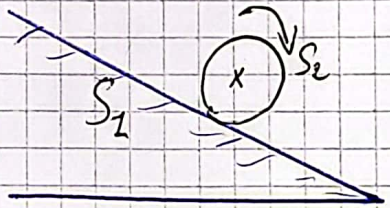
présence de glissement

$\vec{v}(I \in S_1/R) = \vec{0}$ car S_1 est fixe dans R

$\vec{v_g} \neq \vec{0}$

$\vec{v}(I \in S_2/R) \neq \vec{0}$

(car I est définit instantanément)



pas de glissement

$\vec{v_g} = \vec{0}$

$\vec{v}(I \in S_2/R) = \vec{0}$ alors que S_2 est mobile

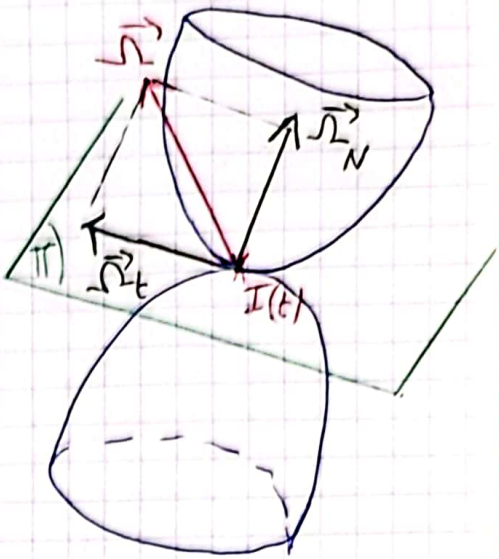
Scanné avec CamScanner

3) Vecteur rotation relative :

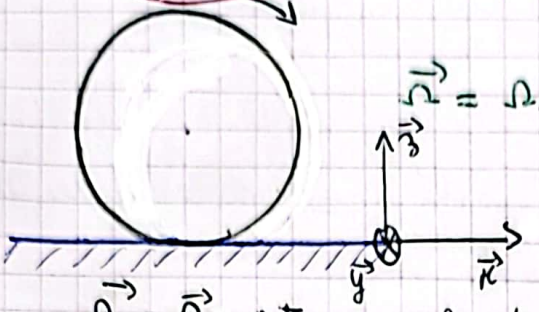
$$\vec{\Omega}(S_2/S_1) = \vec{\Omega}(S_2/R) + \vec{\Omega}(R/S_1)$$

$$\vec{\Omega}(S_2/S_1) = \vec{\Omega}(S_2/R) - \vec{\Omega}(S_1/R)$$

$$\Rightarrow \vec{\Omega} = \vec{\Omega}_T + \vec{\Omega}_N$$



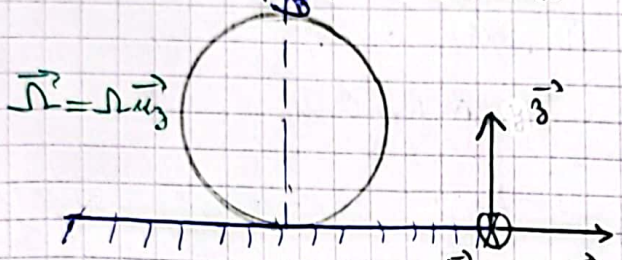
$\begin{cases} \Omega_T \in \Pi & \text{: rotation de roulement} \\ \Omega_N \perp \Pi & \text{: rotation de pivotement} \end{cases}$



Roulement

$\Pi = (O\vec{x}\vec{y})$

$\vec{\Omega} = \vec{\Omega}_T \in \Pi \Rightarrow$ roulement

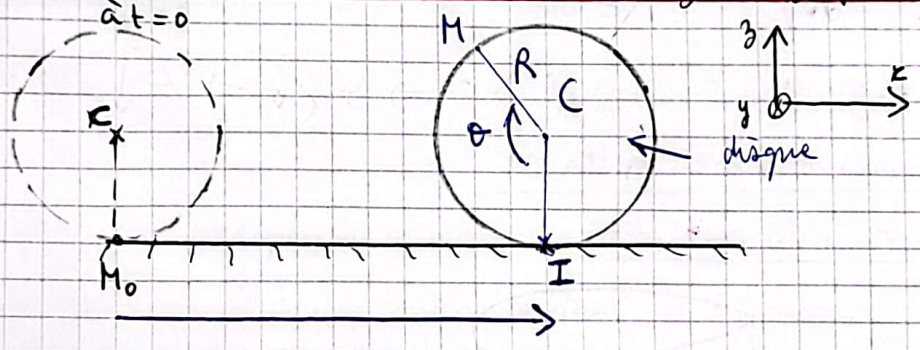


pivotement

$\vec{\Omega} = \vec{\Omega}_N \perp \Pi \Rightarrow$ pivotement

4) Application 10 : Déterminer la condition de non glissement (C.N.G) :

EXP 1 :



$\vec{v}_g = \vec{0} \Rightarrow \dot{x} = f(\dot{\theta})$

$\vec{v}_{/g} = \vec{v}(I \in D/R) - \vec{v}(I \in sol/R)$

$\vec{0}$ C.N.G d'où $\vec{0} = \vec{v}(I \in D/R) - \vec{0}$.

or $\vec{v}(I \in D/R) = \vec{v}(C \in D/R) + \vec{IC} \wedge \vec{\Omega}(D/R)$

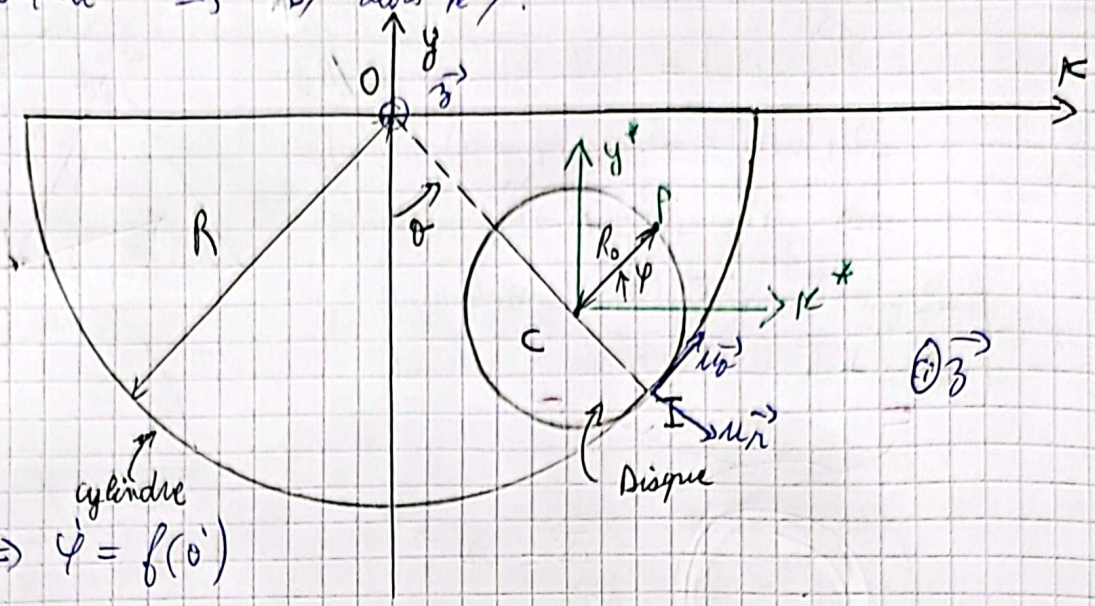
$\Rightarrow \vec{0} = \dot{x}\vec{u}_x + R\vec{u}_z \wedge (\dot{\theta}\vec{u}_y) = \vec{0} = (\dot{x} - R\dot{\theta})\vec{u}_x = \vec{0}$

$\Rightarrow \dot{x} = R\dot{\theta}$

Scanné avec CamScanner

$\Rightarrow x = R\theta + cte \Rightarrow \theta \nearrow$ alors $x \nearrow$.

Exp 2 :



$\vec{v}_g = \vec{0} \Rightarrow \dot{\varphi} = f(\dot{\theta})$

$\vec{v}_{g} = \vec{v}(I \in D/R) - \vec{v}(I \in gel/R)$ or $\vec{v}(I \in gel/R) = \vec{0}$ car le cylindre est fixe dans R.

$\theta \downarrow$

$\vec{v}(I \in D/R) = \vec{v}(C/R) + \vec{IC} \wedge \vec{\Omega}(D/R) = \vec{0}$

$$\begin{cases} \vec{v}(C/R) = \left.\frac{d\vec{OC}}{dt}\right|_R = \frac{d(R-R_0)\vec{u_r}}{dt} = (R-R_0)\dot{\theta}\vec{u_\theta} \\ \vec{IC} = -r_0\vec{u_r} \end{cases} ; \quad \vec{\Omega}(D/R) = \dot{\varphi}\vec{u_z} = \vec{\Omega}(D/R^*) + \vec{\Omega}(R^*/R)^{\nearrow \vec{0}}$$

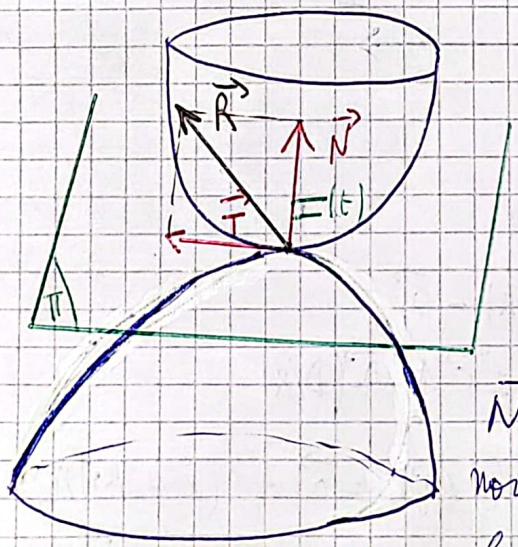
donc $(R-r_0)\dot{\theta}\vec{u_\theta} - r_0\vec{u_r} \wedge \dot{\varphi}\vec{u_z} = \vec{0}$

$\Rightarrow (R-r_0)\dot{\theta} + r_0\dot{\varphi} = 0$

$\Rightarrow$ Si $\varphi \nearrow \Rightarrow \dot{\varphi} > 0 \Rightarrow \dot{\theta} < 0 \Rightarrow \theta \downarrow$ cst V.

II) Dynamique des solides en contact :

1) Résultante des actions de contact :



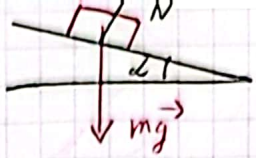
$\vec{R}_{S_1 \to S_2} = \vec{R}$

$\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}$

$\vec{N} \perp \Pi$ est la composante normale qui dépend des autres forces

Scanné avec CamScanner

$T \in \Pi$ est la composante tangentielle elle représente la force de frottement



Rq : $\vec{R}_{S_2 \to S_1} = -\vec{R}_{S_1 \to S_2}$ c'est le principe d'action et de réaction.

2) Moment des actions de contact :

Mines 1984
Mvmt de cloueu

$\vec{\mathcal{M}}_I = \vec{\mathcal{M}}_{I,N} + \vec{\mathcal{M}}_{I,T}$.

$\vec{\mathcal{M}}_{I,N} \perp \Pi$ moment de pivotement.

$\vec{\mathcal{M}}_{I,T} \in \Pi$ moment de roulement.

Rq : Si le contact est ponctuel.

$\vec{\mathcal{M}}_I = \vec{II} \wedge \vec{R} = \vec{0}$.

3) Lois de Coulomb :

(Ce sont des lois expérimentales ; empiriques ; phénoménologiques ; forces de Van Der Waals | de l'ordre du nombre d'Avogadro à calculer — impossible).

↳ En présence de glissement : $\vec{v_g} \neq \vec{0}$.

⊕ $\|\vec{T}\| = f_d \|\vec{N}\|$ avec f_d (ou f_c) est le coefficient de frottement dynamique (ou cinétique).

⊕ $\vec{T} // \vec{v_g}$ et $\vec{T} \cdot \vec{v_g} \leqslant 0$ les frottements s'opposent au glissement. (*)

↳ En absence de glissement : $\vec{v_g} = \vec{0}$:

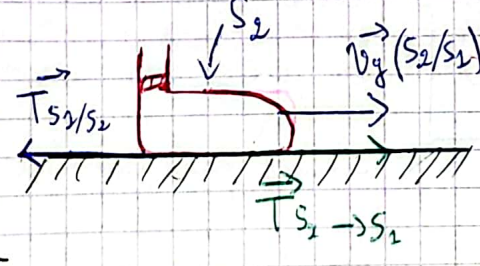
$\|\vec{T}\| \leqslant f_s \cdot \|\vec{N}\|$ avec f_s est le coefficient de frottement statique.

Rq : ① $f_d \simeq f_s \simeq f$ est le coefficient de frottement qui dépend de la nature et de l'état des surfaces en contact ; souvent $0,3 \leqslant f \leqslant 0,7$.

* La relation $f_d < f_s$ se traduit par le fait que pour mettre en mouvement un masse au repos, il faut exercer une force donnée. Mais une fois que le Mvmt est initié, il suffit d'exercer une force moins grande pour maintenir une vitesse constante de la masse.

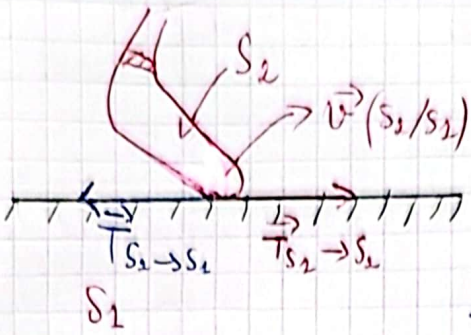
(*) : Si le contact est lisse $f = 0$ (pas de frottement) donc il y a obligatoirement glissement (pas de frottement $\Rightarrow \nexists$ glissement).

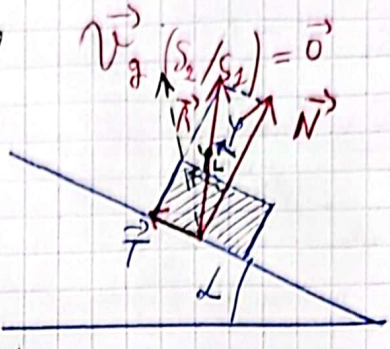
(Ceci à l'exception du repos où il n'y a pas de mouvement).



$\vec{T}_{S_1 \to S_2} \cdot \vec{v_g}(S_2/S_1) \leqslant 0$

Scanné avec CamScanner





4) Cône de frottement:

En absence de glissement:

$\vec{v}_g = \vec{0}$

$\Downarrow$

$\|\vec{T}\| < f\|\vec{N}\|$

$\Rightarrow \tan\varphi = \dfrac{\|\vec{T}\|}{\|\vec{N}\|} < f$

$\Rightarrow \varphi < \arctan f = \varphi_L$

$N = mg\cos(\alpha)$

$\alpha \nearrow \Rightarrow N \searrow$

En présence de glissement:

$\vec{v}_g \neq \vec{0}$

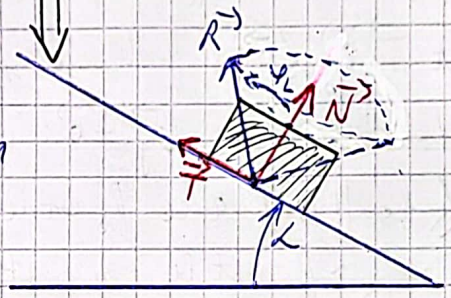
$\Downarrow$

$\|\vec{T}\| = f\|\vec{N}\|$

$\Rightarrow \tan\varphi = \dfrac{\|\vec{T}\|}{\|\vec{N}\|} = f$

$\Rightarrow \varphi = \arctan f = \varphi_L$.

$\varphi \nearrow$



Si $\vec{R}$ est à l'intérieur du cône d'axe $\vec{N}$ et de demi angle au sommet φ_L (cône de frottement) alors il n'y a pas de glissement.

Si $\vec{R}$ est tangent au cône de frottement alors le solide commence à glisser.

III) Puissance totale des actions de contact:

Montrez que dans le cas du contact ponctuel la puissance totale de contact est:

$$P_{t,\text{contact}} = \vec{T} \cdot \vec{v}_g \leqslant 0$$

donc contact sans frottement

ou

contact sans glissement

$\Downarrow$

pas de dissipation d'énergie

Scanné avec CamScanner

on pose $\vec{R}_{S_1 \to S_2} = \vec{R}$ $\xrightarrow[\text{principe d'action et de réaction}]{\text{d'après le}}$ $\begin{cases} \vec{R}_{S_2 \to S_1} = -\vec{R}. \\ \vec{\mathcal{M}}_{I;S_2 \to S_1} = -\vec{\mathcal{M}}_I. \end{cases}$

$\mathcal{M}_{I;S_1 \to S_2} = \vec{\mathcal{M}}_I$

$$P_{T,contact} = P_{S_1 \to S_2} + P_{S_2 \to S_1}$$

or $P = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}(S/R) \\ \vec{v}(A/R) \end{Bmatrix} \otimes \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{\mathcal{M}}_A(R) \end{Bmatrix}$ on a $A \equiv I$

donc $\begin{cases} P_{S_1 \to S_2} = \vec{\Omega}(S_2/R) \cdot \vec{\mathcal{M}}_I(\vec{R}_{S_1 \to S_2}) + \vec{v}(I_2/R) \cdot \vec{R}_{S_1 \to S_2} \\ \quad = \vec{v}(I_2/R) \cdot \vec{R} + \vec{\Omega}(S_2/R) \cdot \vec{\mathcal{M}}_I \\ P_{S_2 \to S_1} = \vec{\Omega}(S_2/R) \cdot \vec{\mathcal{M}}_I(\vec{R}_{S_2 \to S_1}) + \vec{v}(I_1/R) \cdot \vec{R}_{S_2 \to S_1} \\ \quad = \vec{v}(I_1/R) \cdot (-\vec{R}) + \vec{\Omega}(S_1/R) \cdot (-\vec{\mathcal{M}}_I) \end{cases}$

$$P_{T,contact} = \left(\vec{v}(I_2/R) - \vec{v}(I_1/R)\right) \cdot \vec{R} + \left(\vec{\Omega}(S_2/R) - \vec{\Omega}(S_1/R)\right) \cdot \vec{\mathcal{M}}_I$$

$$\boxed{P_{T;contact} = \vec{R} \cdot \vec{v}_g(S_2/S_1) + \vec{\mathcal{M}}_I \cdot \vec{\Omega}(S_2/S_1)}$$

Si le contact est ponctuel : $\vec{\mathcal{M}}_I = \vec{0} \Rightarrow$

$$P_{T;contact} = (\vec{T} + \vec{N})\vec{v}_g = T \cdot \vec{v}_g + \underbrace{\vec{N} \cdot \vec{v}_g}_{0}$$

donc $\boxed{P_{t;contact} = \vec{T}_{S_1 \to S_2} \cdot \vec{v}_g(S_2/S_1) \leqslant 0}$

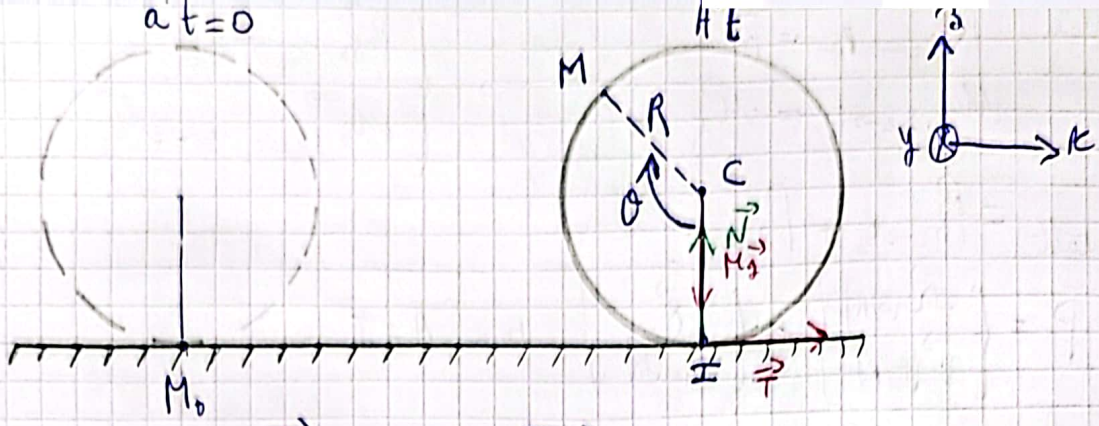
loi de Coulomb.

Si 2 solides sont en contact, on dit qu'ils sont liés. Cette liaison se traduit par des équations entre les paramètres des système. La liaison est dite parfaite si la puissance totale de contact est nulle.

IV) Application :

le coefficient de frottement de la roue sur le sol est f. La roue a une masse m de rayon R et un moment d'inertie J par rapport à son axe. on lui applique un couple moteur $\vec{\Gamma}_m = \Gamma_m \vec{u}_y$. quelle est la condition sur le couple moteur pour qu'il y'ait roulement sans glissement. Mq $\Gamma_m < f M g R \left(1 + \frac{J}{MR^2}\right)$

Scanné avec CamScanner



⚠ 1 $\quad \vec{T} = T\vec{u_x}$ avec $T > 0$.

⊕ En absence de glissement : $\vec{v_g} = \vec{0} \rightarrow \dot{x} = R\dot{\theta}$ (2) $\Rightarrow \ddot{x} = R\ddot{\theta}$

⊕ $\|\vec{T}\| < f\|\vec{N}\|$ (2)

↳ TRC : $M\vec{a}(C/R) = \sum_k \vec{F}_{ext,k} \Rightarrow M\ddot{x}\vec{u_x} = \vec{N} + M\vec{g} + \vec{T}$

$$\begin{cases} \text{proj/ox} & M\ddot{x} = T \quad (3) \\ \text{proj/oz} & 0 = N - Mg \Rightarrow N = Mg \quad (4) \end{cases}$$

↳ TMC : $\left.\frac{d\vec{\sigma_c}}{dt}\right|_R = \vec{\mathcal{M}_c}(\vec{P}) + \vec{\mathcal{M}_c}(\vec{N}) + \vec{\mathcal{M}_c}(\vec{T}) + \vec{\Gamma_m}$

or $\begin{cases} \vec{\mathcal{M}_c}(\vec{P}) = \vec{CC} \wedge M\vec{g} = \vec{0} \\ \vec{\mathcal{M}_c}(\vec{N}) = \vec{CI} \wedge \vec{N} = \vec{0} \end{cases}$

$\Rightarrow \left.\frac{d\vec{\sigma_c}}{dt}\right|_R = \vec{\mathcal{M}_c}(T) + \vec{\Gamma_m}$

or $\vec{\sigma_c} = \mathcal{J}_{\Delta c} \cdot \vec{\Omega} = J\dot{\theta}\vec{u_y} \rightarrow \left.\frac{d\vec{\sigma_c}}{dt}\right|_R = J\ddot{\theta}\vec{u_y}$

$\vec{\mathcal{M}_c}(\vec{T}) = \vec{CI} \wedge \vec{T} = -R\vec{u_z} \wedge T\vec{u_x} = -RT\vec{u_y}$

d'où $J\ddot{\theta}\vec{u_y} = -RT\vec{u_y} + \Gamma_m\vec{u_y}$

$\Rightarrow J\ddot{\theta} = -RT + \Gamma_m$ (5)

On remplace (2) et (3) dans (5) :

$J\frac{\ddot{x}}{R} = -RT + \Gamma_m \Rightarrow J \times \frac{1}{R}\frac{T}{M} = -RT + \Gamma_m$

donc $\Gamma_m = \left(R + \frac{J}{MR}\right)T \Rightarrow \Gamma_m = RT\left(1 + \frac{J}{MR^2}\right)$

$\Rightarrow T = \frac{\Gamma_m/R}{1 + J/MR^2}$

Scanné avec CamScanner

On remplace (*) dans (4) dans (2) :

$$\frac{\Gamma_m/R}{1+\frac{J}{MR^2}} < f M g \Rightarrow \Gamma_m < f M g R \left(1+\frac{J}{R^2 M}\right)$$

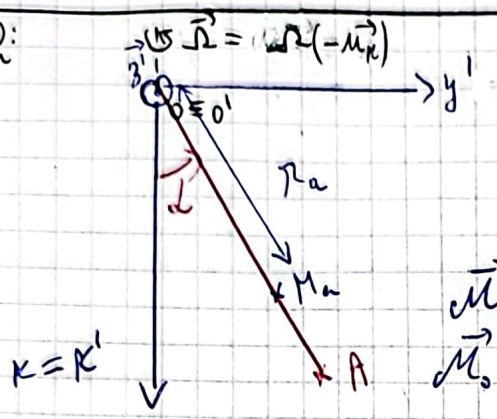
Γ_0

Si la roue est un disque : $J = \frac{MR^2}{2} \Rightarrow \Gamma_m < \frac{3}{2} f M g R$

pas de glissement

donc pour "drifter" ; il faut $f \downarrow$ donc chaussée lisse glissante ; $M \downarrow$ donc conducteur seul ; $\downarrow g$ aller sur la lune....

EXO :



- tige est fixe dans R'
- A' est en rotation / R avec $\vec{\Omega}_{A'/R} = \Omega(-\vec{u}_{x'}) = \vec{cte}$
- point d'application de $\vec{F_{ie}}$ càd $r_a = ?$

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F_{ie}}) = \int \vec{O'M} \wedge dS \vec{F_{ie}}$$

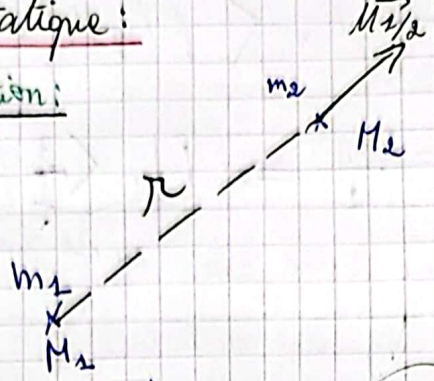
$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F_{ie}}) = \vec{OM_a} \wedge \vec{F_{ie}}$$

Scanné avec CamScanner

Champ et potentiel électrostatique

I) Champ électrostatique :

1) champ de gravitation :



$r = M_1M_2$

$\vec{u}_{1\to 2} = \dfrac{\overrightarrow{M_1M_2}}{M_1M_2}$

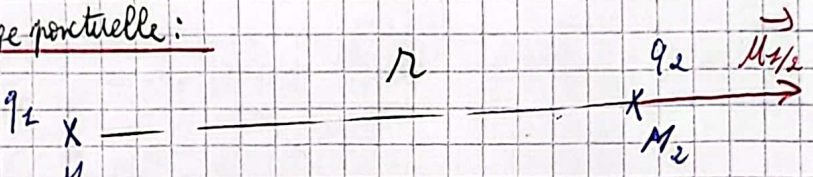
$$\begin{cases} \vec{F}_{g_{1\to 2}} = \dfrac{-Gm_1m_2}{\|\overrightarrow{M_1M_2}\|^3}\overrightarrow{M_1M_2} \\ \vec{F}_{g_{1\to 2}} = m_2\,\vec{G}_1(M_2) \end{cases} \longrightarrow \vec{G}_1(M_2) = \frac{-Gm_2}{\|\overrightarrow{M_1M_2}\|^3}\overrightarrow{M_1M_2}$$

(source du champ : m_2 ; effet : gravité de m_2)

C'est le champ de gravitation au pt M_2 appliqué par la masse ponctuelle M_1 placée au point M_1.

2) champ électrostatique :

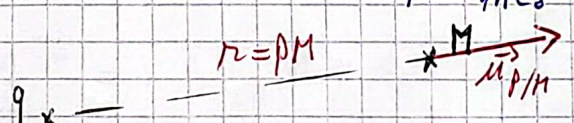
a) cas d'une charge ponctuelle :



$$\begin{cases} \vec{Fe}_{1\to 2} = \dfrac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\overrightarrow{M_1M_2}}{\|\overrightarrow{M_1M_2}\|^3} \Rightarrow \vec{E}_1(M_2) = \dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\overrightarrow{M_1M_2}}{\|\overrightarrow{M_1M_2}\|^3} \\ \vec{Fe}_{1\to 2} = q_2\,\vec{E}_1(M_2) \end{cases}$$

avec ε_0 est la permitivité du vide $(F.m^{-1})$ tq $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9.10^9\ F.m^{-1}$

Généralisation :



effet ↪ $\vec{E}(M) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}$ (source : q)

(électrostatique ⇒ ne dépend pas du temps ⇒ q fixe et q cte)

C'est le champ électrostatique au point M crée par la charge ponctuelle q placée au point P.

Rq : dans un autre milieu.

$\vec{E}(M) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_a}\dfrac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}$ avec $\varepsilon_a = \varepsilon_0\varepsilon_r$

- ε_a : est la permetivité absolue du milieu.
- ε_r : est la permetivité relative

Scanné avec CamScanner

$\varepsilon_r(\text{vide}) = 1$; $\varepsilon_r(\text{eau}) = 80$; $\varepsilon_r(\text{céramique}) = 1700$

b) cas d'une distribution discrète (discontinue) :

$q_1 \times P_1$ $\quad q_2 \times P_2$ $\quad q_i \times P_i$ $\quad P_N \times q_N$ $\quad \times M$

$$\boxed{\vec{E}(M) = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i(M)}$$ Théorème de superposition.

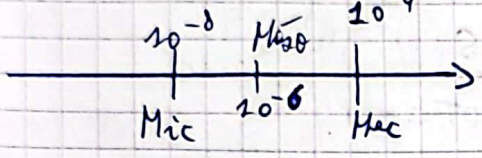
c) cas d'une distribution continue :

⊕ Distribution volumique :

$V \longrightarrow Q \longrightarrow \vec{E}(M)$

$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{PM}}{PM^3}$; P ??!

$\delta\tau \longrightarrow \delta Q \longrightarrow \delta\vec{E}(M) = \frac{\delta Q(P)}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{PM}}{PM^3}$



$\delta\tau = (10^{-6})^3 = 10^{-18}\ m^3$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}(M) = \int \delta\vec{E}(M)}$$ Théorème de superposition

$$\Rightarrow \vec{E}(M) = \int_{P \in D} \frac{\delta Q(P)}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{PM}}{PM^3}$$ dépendance spatiale et de charge.

Solution : on définit la densité volumique de charge par :

$$\rho(P) = \frac{\delta Q(P)}{\delta\tau(P)} \quad (C.m^{-3}) \Rightarrow \vec{E}(M) = \iiint_{P \in (D)} \frac{\rho(P)}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{PM}}{PM^3} \delta\tau(P)$$

⊕ Distribution surfacique :

$\times M$

$S \longrightarrow Q \longrightarrow \vec{E}(M)$

$\delta S \longrightarrow \delta Q \longrightarrow \delta\vec{E}(M)$

on définit la densité surfacique de charge par

$$\sigma(P) = \frac{\delta Q(P)}{\delta S(P)} \quad (C.m^{-2})$$

$$\vec{E}(M) = \iint_{P \in (D)} \frac{\sigma(P)}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{PM}}{PM^3} \delta S(P)$$

⊕ Distribution linéique :

$\times M$

$L \longrightarrow Q \longrightarrow \vec{E}(M)$

$\delta l \longrightarrow \delta Q \longrightarrow \delta\vec{E}(M)$

Scanné avec CamScanner

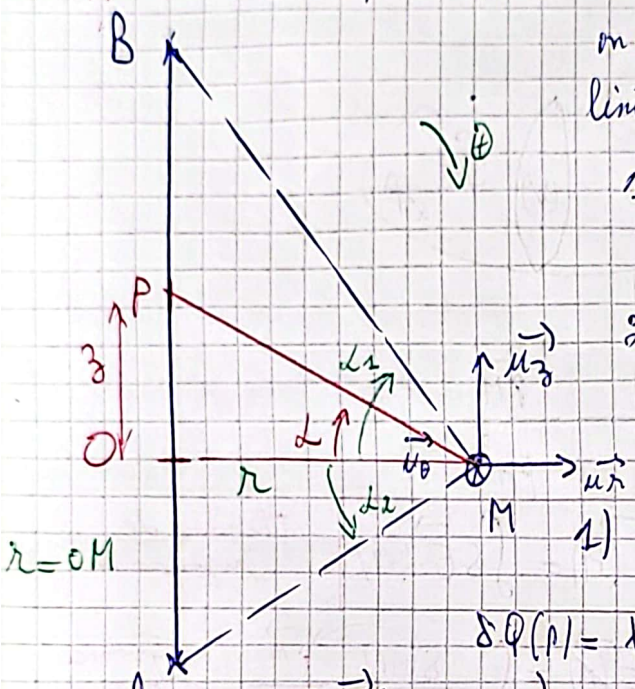
On définit la densité linéique de charge par :

$$\lambda(P) = \frac{\delta Q(P)}{\delta \ell(P)} \quad (C \cdot m^{-1})$$

$$\vec{E}(M) = \int_{P \in D} \frac{\lambda(P)}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{PM}}{PM^3} \delta\ell(P)$$

Rq : Si la distribution est homogène alors la densité est uniforme.

3) Application ① champ créé par un segment.



on considère un segment chargé par une densité linéique uniforme

1) Mq $\vec{E}(M) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r} \begin{cases} (\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1)\vec{e_r} \\ \vec{0} \\ (\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1)\vec{e_z} \end{cases}$

2) déduire le champ créé par un fil infini.

Réponse :

1) $\delta\vec{E}(M) = \frac{\delta Q(P)}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{PM}}{PM^3}$ avec

$$\delta Q(P) = \lambda(P)\, d\ell(P) = \lambda \cdot dz$$

$$\delta\vec{E}(M) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dz}{PM^2} \vec{u} \quad \text{avec} \quad \vec{u} = \frac{\vec{PM}}{PM}$$

d'où $\vec{E}(M) = \int \delta\vec{E}(M) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{dz}{PM^2} \vec{u}$

Le but c'est d'exprimer toutes les variables en fonction d'une seule.

$$\vec{u} = \cos(\alpha)\vec{u_r} - \sin(\alpha)\vec{u_z}$$

$$\begin{cases} \cos(\alpha) = \frac{r}{PM} \\ \sin(\alpha) = \frac{z}{PM} \\ \tan(\alpha) = \frac{z}{r} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{PM^2} = \frac{\cos^2(\alpha)}{r^2} \\ dz = r\frac{d\alpha}{\cos^2(\alpha)} \end{cases}$$

$$\frac{dz}{PM^2} = \cancel{r}\frac{d\alpha}{\cancel{\cos^2\alpha}} \times \frac{\cancel{\cos^2(\alpha)}}{r^{\cancel{2}}} = \frac{d\alpha}{r}$$

$$\vec{E}(M) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{d\alpha}{r} \left[\cos\alpha\, \vec{u_r} - \sin\alpha\, \vec{u_z}\right]$$

$$\vec{E}(M) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \left[\sin\alpha\, \vec{u_r} + \cos\alpha\, \vec{u_z}\right]_{\alpha_1}^{\alpha_2}$$

$$\vec{E}(M) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \begin{cases} (\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1)\vec{u_r} \\ (\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1)\vec{u_z} \end{cases}$$

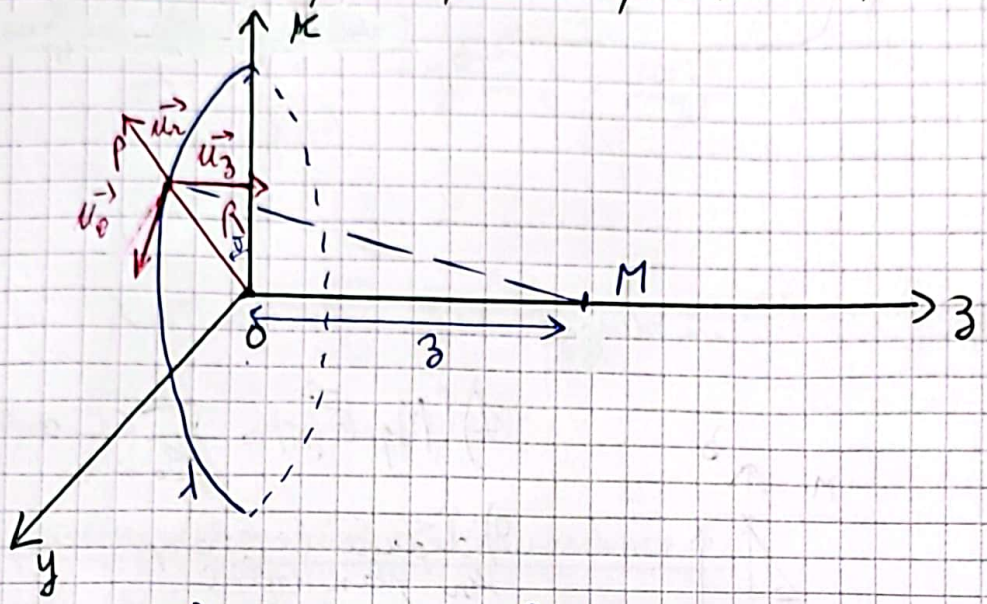
Scanné avec CamScanner

2/ cas d'un fil infini ∞ :

$\alpha_1 \longrightarrow -\pi/2$

$\alpha_2 \longrightarrow +\pi/2$ $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{E}(M) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{u}_r}$

Application (2) : Champ créé par une spire (P.M. 2002) :



1) M_4 $\quad \vec{E}(M) = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0}\frac{z}{(R^2+z^2)^{3/2}}\vec{u}_z$

2) Tracer $E(M)$

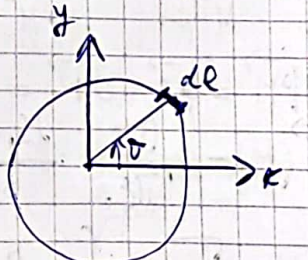
Réponse :

$\vec{E}(M) = \int \frac{\delta Q(P)}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{PM}}{PM^3}$ avec $\vec{PM} = \vec{PO} + \vec{OM} = -R\vec{u}_r + z\vec{u}_z$

$PM = \|\vec{PM}\| = \sqrt{R^2+z^2} = cte$ Δ

$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 PM^3}\int \delta Q(P)\cdot(-R\vec{u}_r + z\vec{u}_z)$ or $\delta Q(P) = \lambda d\ell(P) = \lambda R\, d\theta$

$\vec{E}(M) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 PM^3}\int R\,d\theta\,(-R\vec{u}_r + z\vec{u}_z)$



$= \frac{\lambda R}{4\pi\varepsilon_0(R^2+z^2)^{3/2}}\left[-R\int d\theta\,\vec{u}_r + z\int d\theta\,\vec{u}_z\right]$

or $\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\theta\,\vec{u}_r = -\int d\vec{u}_\theta = -\left[\vec{u}_\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = -\left[\vec{u}_{\theta=2\pi} - \vec{u}_{\theta=0}\right] = \vec{0}$

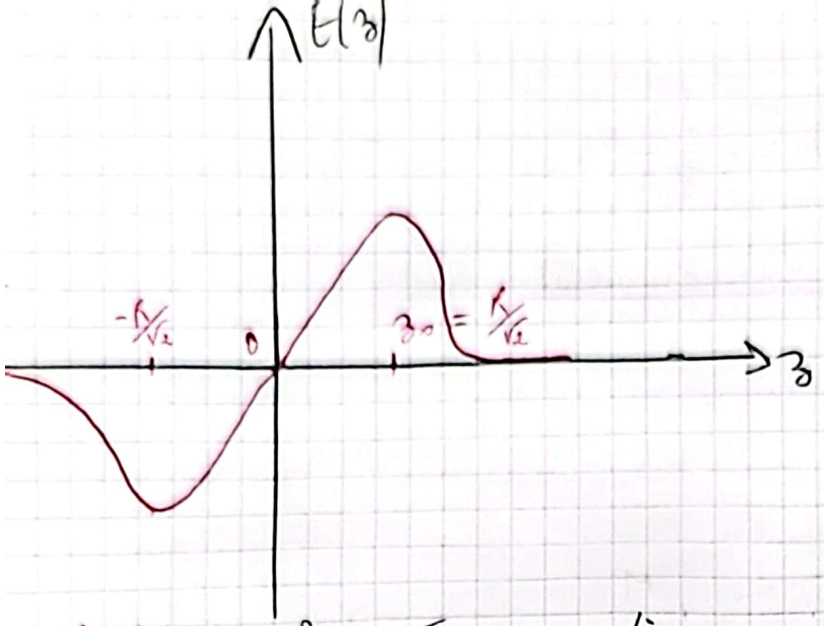
$\vec{E}(M) = \frac{\lambda R}{4\pi\varepsilon_0(R^2+z^2)^{3/2}}\left[0 + z\int d\theta\,\vec{u}_z\right] = \frac{\lambda R z}{4\pi\varepsilon_0}\times\frac{2\pi}{(R^2+z^2)^{3/2}}\vec{u}_z$

$\vec{E}(M) = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0}\frac{z}{(R^2+z^2)^{3/2}}\vec{u}_z$

2/ $z = 0 \Rightarrow E(z) = 0$ $\qquad E(-z) = -E(z)$

$z \to \pm\infty \Rightarrow E(z) = 0$ $\qquad \frac{dE}{\quad} = 0 \Rightarrow z_0 = \frac{R}{\quad}$

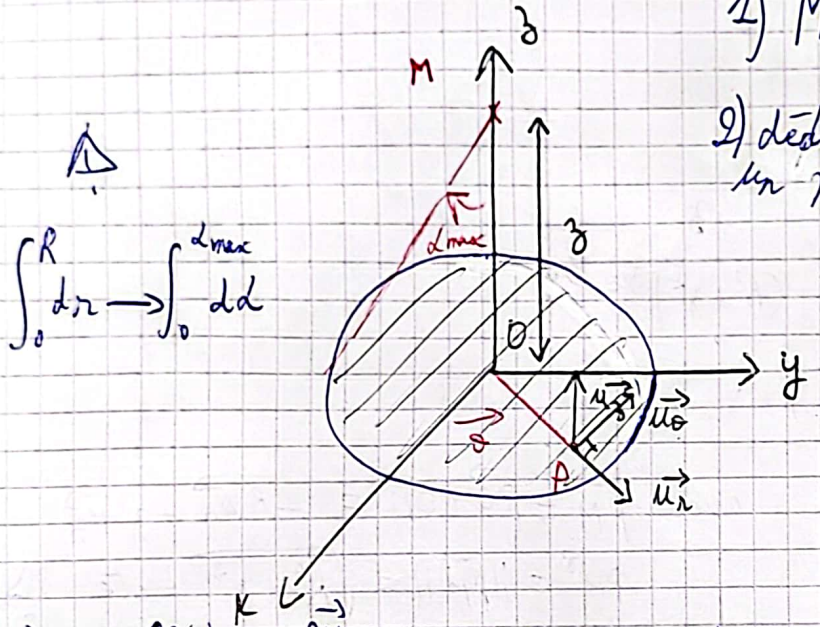
Scanné avec CamScanner



Application 3 : Champ crée par un disque :

1) Montrer que $\vec{E}(M) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(1 - \cos(\alpha_{max}))\vec{u}_z$

2) déduire le champ crée par un plan infini.



$\int_0^R dr \rightarrow \int_0^{\alpha_{max}} d\alpha$

$$\vec{E}(M) = \frac{\delta Q(P)}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{PM}}{PM^3} \quad \text{avec} \quad \delta Q(P) = \sigma\, dS(P) = \sigma\, dr\, r\, d\theta$$

$d\vec{P} = \begin{vmatrix} dr \\ r\,d\theta \\ dz = 0 \end{vmatrix}$ car $z(P) = cte$

$$\vec{PM} = \vec{PO} + \vec{OM} = -r\vec{u}_r + z\vec{u}_z$$

$$\delta\vec{E}(M) = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dS(P)\,\vec{PM}}{PM^3} = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dr\, r\, d\theta\,(-r\vec{u}_r + z\vec{u}_z)}{PM^3}$$

$$\vec{E}(M) = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\iint \frac{r\,dr\,d\theta}{PM^3}(-r\vec{u}_r + z\vec{u}_z)$$

or $\iint \frac{r\,dr\,d\theta}{PM^3}(-r\vec{u}_r) = -\int \frac{r^2 dr}{PM^3}\int d\theta\,\vec{u}_r = \vec{0}$.

car $\int d\theta\,\vec{u}_r = \int -d\vec{u}_\theta = \vec{0}$.

$$\vec{E}(M) = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\iint \frac{r\,dr\,d\theta}{PM^3} z\vec{u}_z = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\left(\int \frac{r\,dr}{PM^3}\right)\left(\int d\theta\right) z\vec{u}_z$$

$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} z \int \frac{r\,dr}{PM^3}\,\vec{u}_z$$

Scanné avec CamScanner

or $\begin{cases} \cos\alpha = z/PM & \checkmark \text{ car } z = cte \\ \sin\alpha = r/PM & \times \text{ car } r \neq cte \\ \tan\alpha = r/z & \checkmark \text{ car } z = cte \end{cases}$

$\Rightarrow \frac{1}{PM^3} = \frac{\cos^3(\alpha)}{z^3}$; $r = z\tan\alpha \Rightarrow dr = z\frac{d\alpha}{\cos^2(\alpha)}$

$\Rightarrow \frac{r\,dr}{PM^3} = z\tan\alpha \times \frac{\cos^3(\alpha)}{z^3} \times z \cdot \frac{d\alpha}{\cos^2(\alpha)} = \frac{\tan(\alpha)\cos\alpha\, d\alpha}{z}$

$= \frac{\sin\alpha}{z} d\alpha$

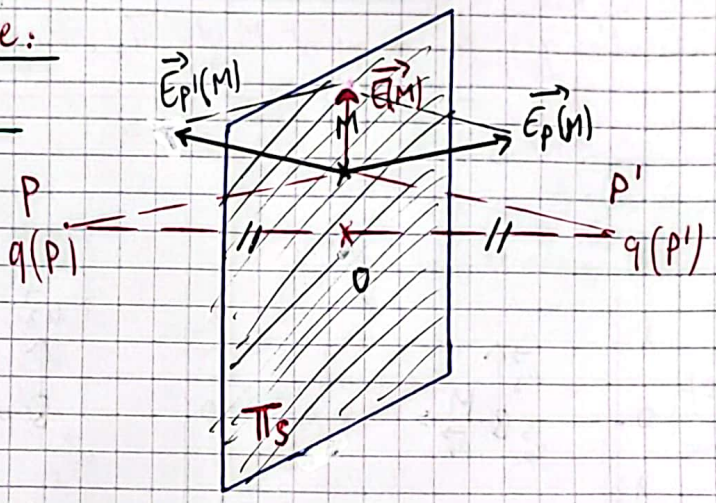
d'où $\vec{E}(M) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} z \int \frac{\sin\alpha}{z} d\alpha\, \vec{u_z} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[-\cos\alpha\right]_0^{\alpha_{max}} \vec{u_z}$

$\vec{E}(M) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \cos(\alpha_{max})\right)\vec{u_z}$.

II) Analyse de symetrie et d'invariance :

1) Analyse de Symetrie :

a) plan de symetrie :



le plan Π est un plan de symetrie de la distribution de charge si

$q(P) = q(P')$ avec $P' = Sym_{\Pi_S} P$

$\vec{E}(M) = \vec{E}_P(M) + \vec{E}_{P'}(M) = \frac{q(P)}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{PM}}{PM^3} + \frac{q(P')}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{P'M}}{P'M^3}$ or $P'M = PM$

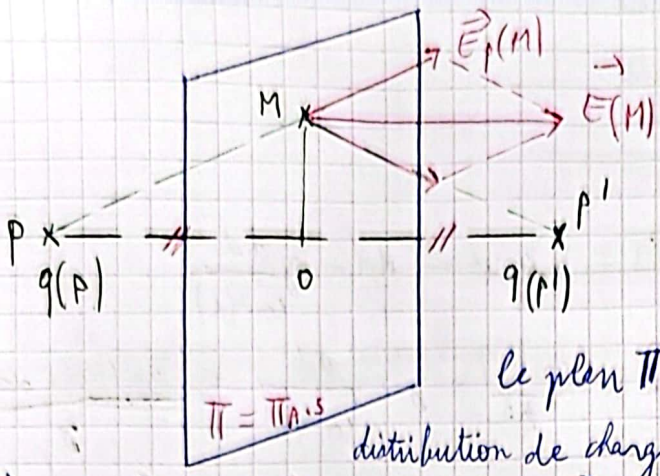
$q(P') = q(P) = q$.

$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 PM^3}\left(\vec{PM} + \vec{P'M}\right)$

$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 PM^3}\left(\vec{PO} + \vec{OM} + \vec{PO} + \vec{OM}\right) \Rightarrow E(\vec{M}) = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 PM^3}\vec{OM} \in \Pi_S$

Donc le champ électrostatique en un point M du Π_S (le plan passe par M) de la distribution de charges $\in$ à ce plan.

b) plan d'antisymetrie :



le plan Π est un plan d'antisymetrie de la distribution de charges si $q(P') = -q(P)$ avec $P' = Sym_{\Pi_{A.S}} P$

$$\vec{E}(M) = \vec{E_1}(M) + \vec{E_{P'}}(M) = \frac{q(P)}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{PM}}{PM^3} + \frac{q(P')}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{P'M}}{PM^3} \quad \text{or } P'M = PM, \; q(P') = -q(P) = -q$$

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 PM^3}\left(\vec{PM} - \vec{PM'}\right)$$

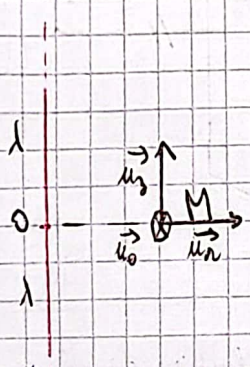
$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 PM^3}\left(\vec{PO} + \vec{OM} - \vec{P'O} - \vec{OM}\right) \quad \text{or } \vec{P'O} = -\vec{PO}$$

$$\vec{E}(M) = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 PM^3}\vec{PO} \perp \Pi_{A.S}$$

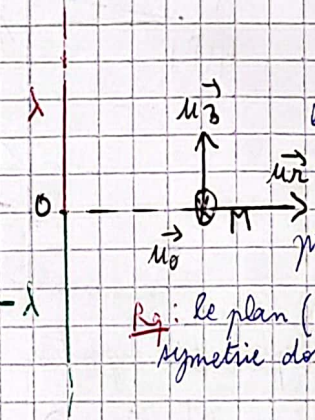
le champ électrostatique en un point M du $\Pi_{A.S}$ de la distribution de charge est $\perp$ à ce plan.

c) Exps :

① fil ∞ :



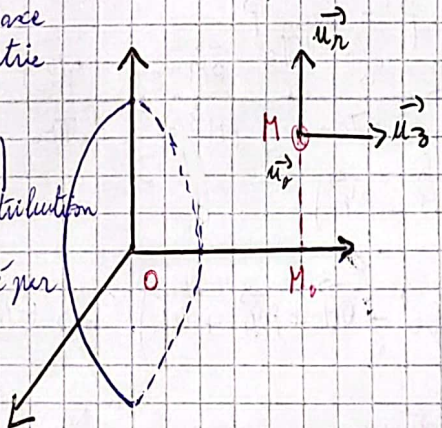
les plans $(M;\vec{u_r};\vec{u_\theta})$ et $(M;\vec{u_r};\vec{u_z})$ sont 2 plans de symetrie donc le champ est porté par $\vec{u_r}$ on dit que l'axe $\vec{u_r}$ est un axe de symetrie



le plan $(M;\vec{u_r};\vec{u_z})$ est un plan d'antisymetrie de la distribution de charges donc le champ est porté par $\vec{u_z}$

Rq : le plan $(M;\vec{u_r};\vec{u_z})$ est un plan de symetrie donc le champ $\perp$ à ce plan

② Spire circulaire :



$\vec{E}(M_0) = ?$
$\vec{E}(M) = ?$
$\vec{E}(O) = ?$

tout plan contenant l'axe $(M_0;\vec{z})$ est un plan de symetrie de la distribution de charges donc le champ est porté par l'axe de symetrie $\vec{u_z}$.

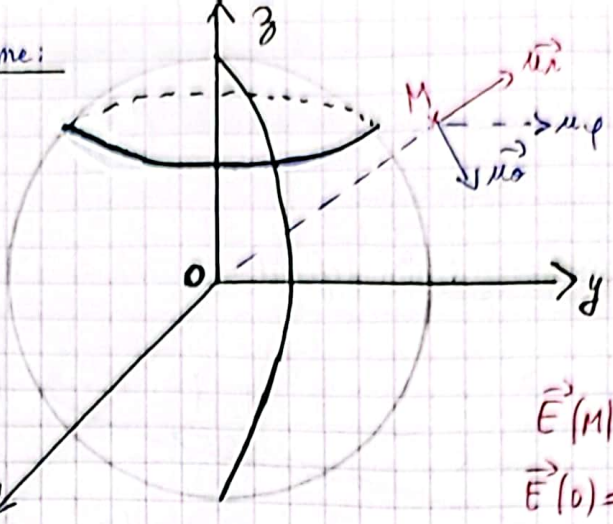
$\vec{E}(M_0) = E(M_0)\vec{u_z}$.

Le plan $(M;\vec{u_r};\vec{u_z})$ est un plan de symetrie de la distribution de charges donc le champ $\in$ à ce plan. $\vec{E}(M) = E_r(M)\vec{u_r} + E_z(M)\vec{u_z}$

le plan $(O;x;y)$ est un plan de symetrie de la distribution de charges alors que l'axe (Oz) axe de symetrie donc $(Oz) \cap Oxy$ est dit un centre de symetrie et le champ y est nul.

Scanné avec CamScanner

③ Boule chargée en volume:



Tout plan contenant l'axe (OM) est un plan de symétrie de charge donc le champ est porté par $\vec{u_r}$.

Le champ en O est nul car O centre de symétrie

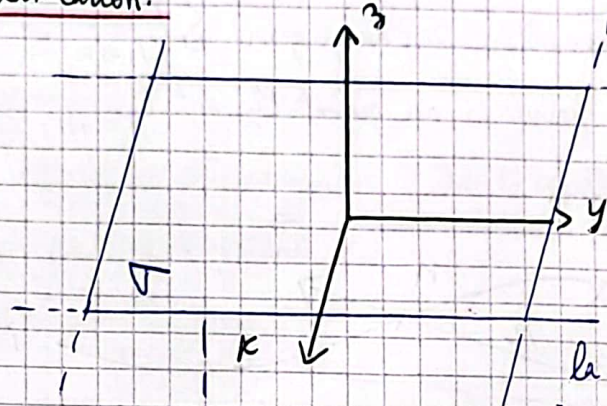
$\vec{E}(M) =$

$\vec{E}(O) =$

2) Analyse d'invariances:

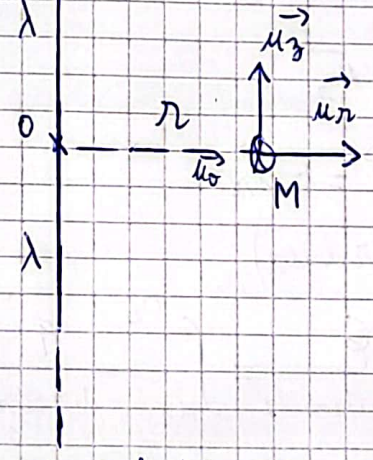
a) Invariance par translation:

plan ∞.



La distribution de charges est invariante par translation suivant $\vec{x}$ et $\vec{y}$ donc le champ ne dépend pas de x et y. il ne dépend que de z

Fil ∞:



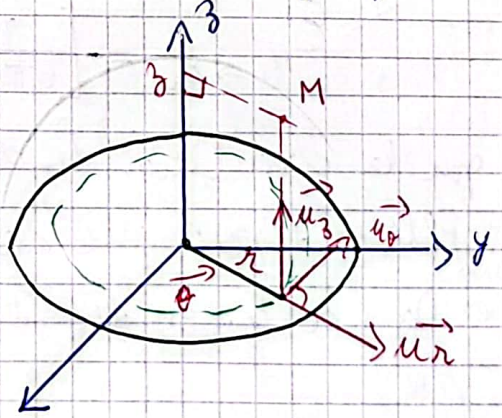
la distribution de charges est invariante par translation suivant z donc le champ ne dépend pas de z.

Principe de Curie: lorsque certaines causes produisent certains effet, les éléments d'invariance des causes doivent se retrouver dans les effets produits.

b) Invariance par rotation:

Disque:

la distribution est invariante par rotation d'angle θ donc $\vec{E}$ ne dépend pas de θ.

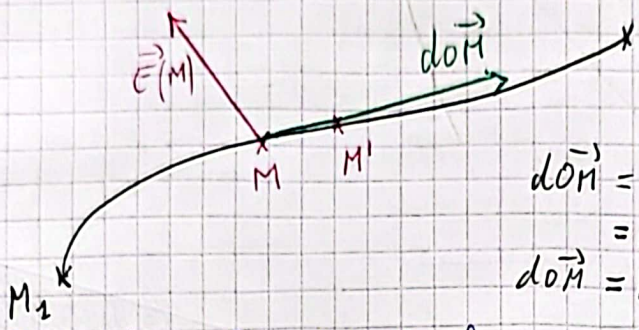


Scanné avec CamScanner

pour la sphère; la distribution de charges est invariante par rotations d'angles θ et φ. Donc le champ ne dépend pas de θ et φ.

III) potentiel électrostatique:

1) Circulation du champ:

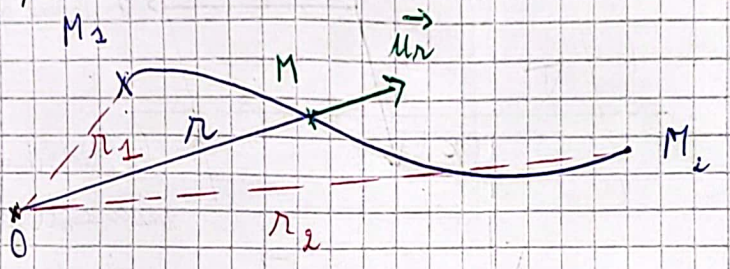


$$d\vec{OM} = \vec{OM'} - \vec{OM}$$
$$= \vec{MO} + \vec{OM'}$$
$$d\vec{OM} = \vec{MM'}$$

on définit la circulation élémentaire du champ par $\delta\mathcal{C}_{M\to M'} = \vec{E}(M).d\vec{OM}$

la circulation du champ du point M_1 au point M_2 est $\mathcal{C}_{M_1\to M_2} = \int_{M_1}^{M_2} \vec{E}(M).d\vec{OM}$

Exp: cas d'une charge ponctuelle.



$$\vec{u_r} = \frac{\vec{OM}}{\vec{OM}} = \frac{\vec{OM}}{r}$$

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{OM}}{OM^3} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u_r}$$

$$\delta\mathcal{C} = \vec{E}(M).d\vec{OM} \quad \text{or } \vec{OM} = r\vec{u_r}$$

$$\delta\mathcal{C} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u_r}.(dr\,\vec{u_r} + r\,d\vec{u_r})$$

$$\delta\mathcal{C} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr \Rightarrow \mathcal{C}_{M_1\to M_2} = \int_{M_1}^{M_2}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr$$

$$= \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r}\right]_{r_1}^{r_2}$$

$$\mathcal{C}_{M_1\to M_2} = -\left[\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_2} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_1}\right]$$

On remarque que la circulation du champ ne dépend pas du chemin suivit. Elle ne dépend que de la position initiale et la position finale. Dans ce cas on définit un scalaire dit potentiel électrostatique $V(M)$

Scanné avec CamScanner

2) Analogie avec la mécanique :

une force est dite conservative si son travail ne dépend pas du chemin suivi

dans ce cas on définit un scalaire dit énergie potentielle telle que

$$\delta W(\vec{F_c}) = -dE_p \Rightarrow \boxed{\vec{F_c}\cdot d\vec{OM} = -dE_p}$$

$$\boxed{\vec{F_c}\cdot d\vec{OM} = -dE_p}$$

$\int$: $E_p(M) = -\int \vec{F_c}\cdot d\vec{OM} + cte$

$\int_{M_1}^{M_2}$: $E_p(M_2) - E_p(M_1) = -\int_{M_1}^{M_2} \vec{F_c}\cdot d\vec{OM}$

$\vec{F_c} = \dfrac{-d\vec{E_p}}{d\vec{OM}}$

$\vec{F_c} = -\vec{grad}\, E_p$

δ : quantité élémentaire

d : variation élémentaire

δX en général dépend du chemin suivi ($\exists$ des exception)

dX ne dépend pas du chemin suivi.

$\delta W(\vec{F})$ dépend du chemin suivi

$\downarrow$ Exception

$\delta W(\vec{F_c})$ ne dépend pas du chemin suivi

$\Downarrow$

$\delta W(\vec{F_c}) = d(-E_p)$

$\delta W(\vec{F_c}) = \cancel{dW(\vec{F_c})}$

or $W(\vec{F_c}) = \int \delta W(\vec{F_c}) = SKJ$

$dW(\vec{F_c}) = 0$.

De même $\boxed{\delta \mathcal{C} = d(-V)}$

$$\int_{M_1}^{M_2} \Rightarrow \mathcal{C}_{M_1\to M_2} = -\underbrace{\left[V(M_2) - V(M_1)\right]}_{d.d.p\ =\ \text{tension}} \quad (1)$$

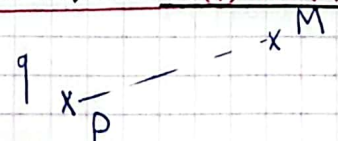
or dans le cas d'une charge ponctuelle :

$$\mathcal{C}_{M_1\to M_2} = -\left[\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_2} + cte\right) - \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_1} + cte\right)\right] \quad (2)$$

par identification : $V(M) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + cte$

C'est le potentiel électrostatique au point M appliqué par la charge ponctuelle q placée au pt P.

Généralisation : (+) cas d'une charge ponctuelle :



$$\boxed{V(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\, PM} + cte}$$

Scanné avec CamScanner

or en absence de charges à l'infini : $\boxed{V(M \to \infty) = 0}$

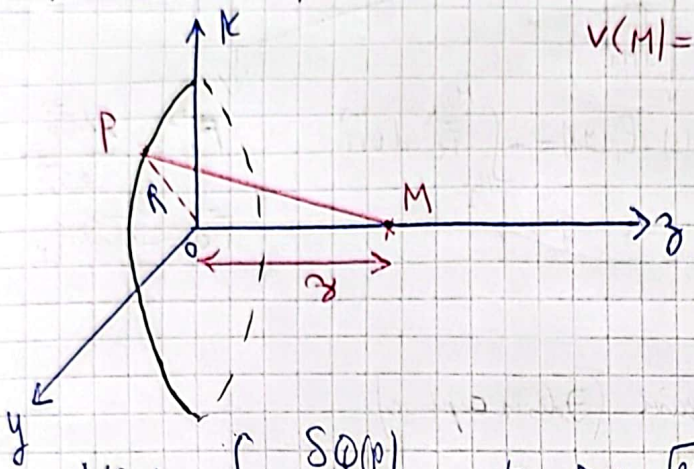
d'où $0 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \times \infty} + cte \Rightarrow cte = 0$

$$\Rightarrow \boxed{V(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 PM}}$$

3) Application :

a) potentiel créé par une spire circulaire :

$V(M) = ?$



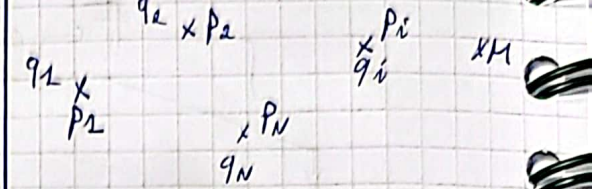
$$V(M) = \int \frac{\delta Q(P)}{4\pi\varepsilon_0 PM} + cte \; ; \; PM = \sqrt{R^2 + z^2} = cte$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 PM} \int \delta Q(P) + cte$$

$$= \frac{Q(P)}{4\pi\varepsilon_0 PM} + cte$$

or $V(M \to +\infty) = 0 \Rightarrow V(M) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{R^2 + z^2}}$

⊕ cas d'une distribution discrète



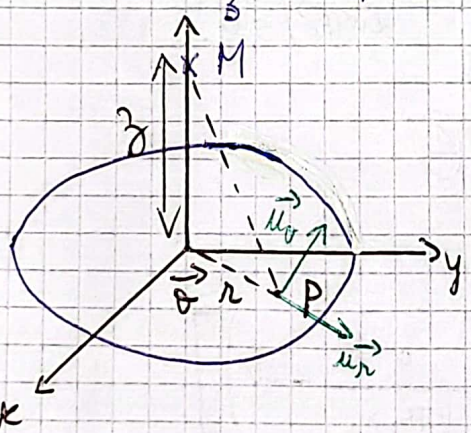
$$V(M) = \sum_{i=1}^{N} V_i(M)$$

$$V(M) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 P_i M} + cte$$

⊕ cas d'une distribution continue :

$$V(M) = \int_{P \in (D)} \frac{\delta Q(P)}{4\pi\varepsilon_0 PM} + cte$$

b) potentiel créé par un disque :



$$V(M) = \int \frac{\delta Q(P)}{4\pi\varepsilon_0 PM} + cte$$

$$= \int \frac{\sigma r \, dr \, d\theta}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{z^2 + r^2}} + cte$$

$$= \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0} \times 2\pi \times \int_0^R \frac{2r \, dr}{2\sqrt{z^2 + r^2}} + cte$$

$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(\sqrt{R^2 + z^2} - |z| \right) + cte$$

pas de charges à l'infini $\Rightarrow V(\infty) = 0 = cte \Rightarrow cte = 0$

donc $V(M) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(\sqrt{R^2 + z^2} - |z| \right)$

4) Relation entre $\vec{E}$ et V :

Scanné avec CamScanner

$$\begin{cases} \delta\mathcal{C} = \vec{E}\cdot d\vec{OM} \\ \delta\mathcal{C} = -dV \end{cases} \Rightarrow \boxed{\vec{E}\cdot d\vec{OM} = -dV} \longrightarrow \boxed{\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V(M)}$$

$$\vec{E} = -\frac{dV}{d\vec{OM}}$$

$$\boxed{V(M) = -\int \vec{E}\cdot d\vec{OM} + cte} \qquad \boxed{V(M_2) - V(M_1) = -\int_{M_1}^{M_2} \vec{E}(M)\cdot d\vec{OM}}$$

Expression de $\overrightarrow{grad}$:

en coordonnées cartésiennes:

$$d\vec{OM} = \begin{vmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{vmatrix} \qquad \overrightarrow{grad}\, V = \frac{\partial V}{\partial x}\vec{u_x} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{u_y} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{u_z}$$

en coordonnées cylindriques:

$$d\vec{OM} = \begin{vmatrix} dr \\ r\,d\theta \\ dz \end{vmatrix} \qquad \overrightarrow{grad}\, V = \frac{\partial V}{\partial r}\vec{u_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{u_\theta} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{u_z}$$

en coordonnées sphériques:

$$d\vec{OM} = \begin{vmatrix} dr \\ r\,d\theta \\ r\sin\theta\, d\varphi \end{vmatrix} \qquad \overrightarrow{grad}\, V = \frac{\partial V}{\partial r}\vec{u_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{u_\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\vec{u_\varphi}$$

Signification physique de $\overrightarrow{grad}$:

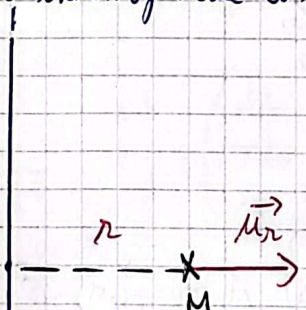
↳ Si f est homogène (uniforme) $\Rightarrow \overrightarrow{grad}\, f = \vec{0}$

↳ Si f est non homogène (non uniforme) $\Rightarrow \overrightarrow{grad}\, f$

$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V$ ($\vec{E}$: champ vectoriel ; V : champ scalaire)

le gradient est un opérateur qui transforme un champ scalaire en un champ vectoriel, il caractérise l'inhomogénéité d'une grandeur.

Appli:



$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{u_r}$$

$$dV = -\vec{E}(M)\cdot d\vec{OM} = \frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{u_r}(dr\,\vec{u_r} + r\,d$$

$$= \frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}dr$$

$$\Rightarrow V(M) = \int \frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}dr \Rightarrow V(M) = \frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln(r) + cte$$

Scanné avec CamScanner

or $V(M \to \infty) = 0 \Rightarrow 0 = \frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln(\infty) + cte \Rightarrow cte \to +\infty$?!?

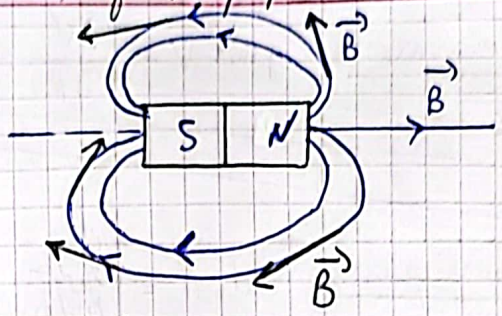
en effet la distribution est infinie.

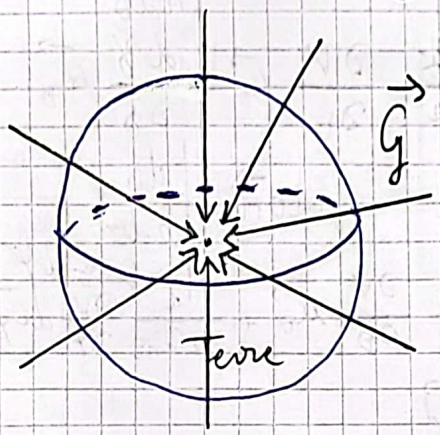
Choix : $V(M_0) = \frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln(r_0) + cte \Rightarrow cte = V_0 + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln(r_0)$

d'où $V(M) = V_0 + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{r_0}{r}\right)$

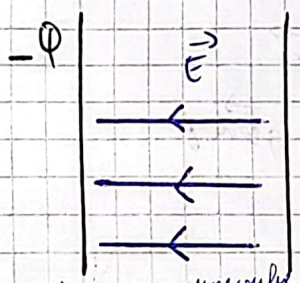
III) Les lignes des champ et les surfaces équipotentielles :

1) les lignes du champ:



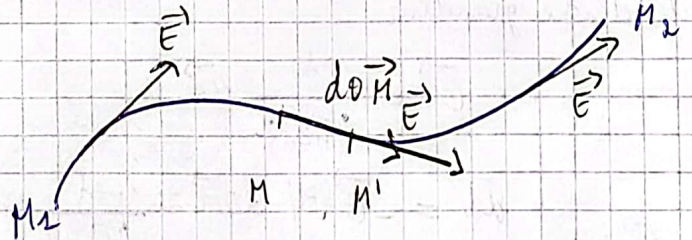


les lignes de champ de gravitation sont des demi-droites qui convergent vers le centre de la terre.



les lignes de champs sont des segment

Une ligne de champ est (une courbe) tangente en chacun de ses points au champ.



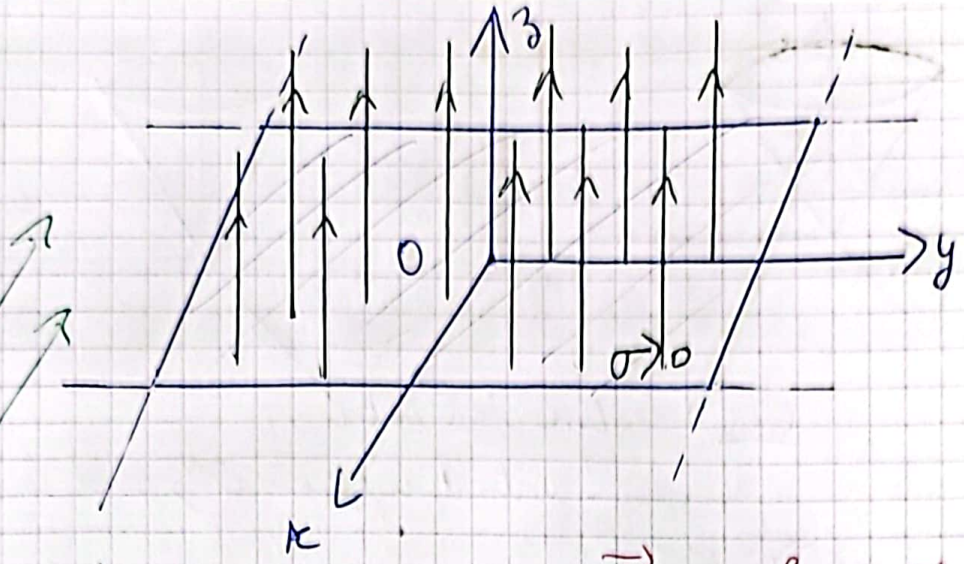
$\vec{E(M)} = K.\vec{dOM}$ ou $\vec{E(M)} \wedge \vec{dOM} = \vec{0}$.

EXPS°

lignes de champs d'un plan ∞.

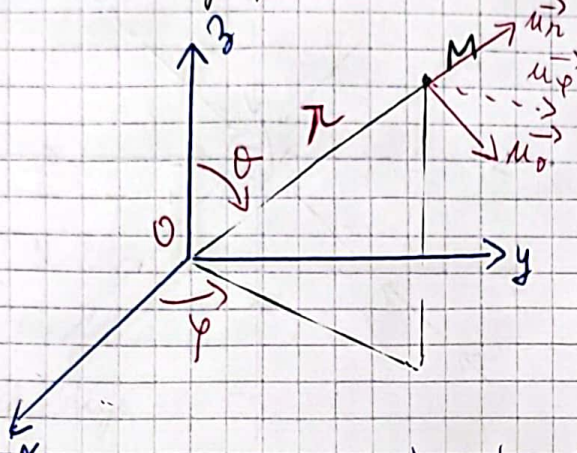
$\vec{E(M)} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{u_3}$ si $z > 0$

Scanné avec CamScanner



L.C d'une charge ponctuelle:

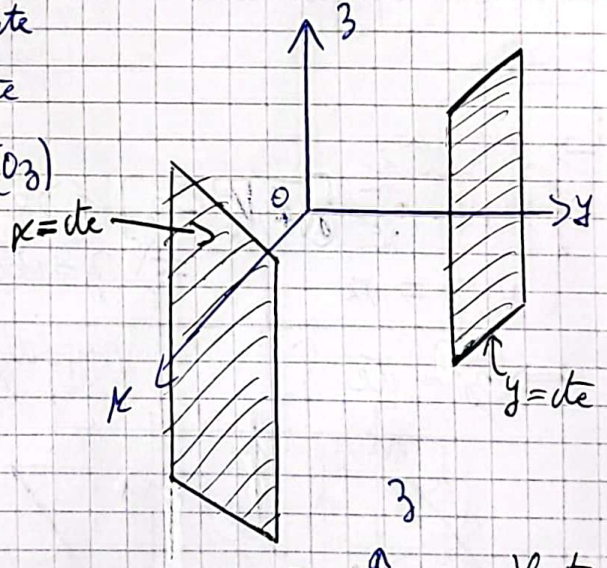
$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$$



$$\vec{E}(M) \wedge d\vec{O}\vec{M} = \vec{0} \Rightarrow \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\begin{vmatrix}0\\0\\1\end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix}dx\\dy\\dz\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0\\0\\0\end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} dy = 0 \\ dx = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = cte \\ et \\ y = cte \end{cases}$$

Les lignes de champs sont des demi droites // à (Oz)



pour la charge ponctuelle:

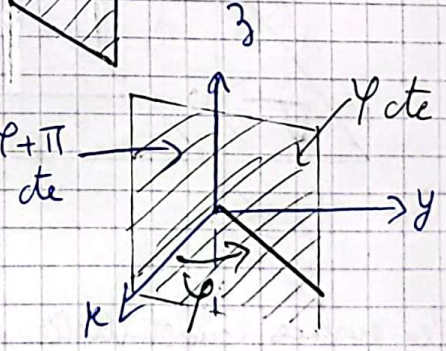
$$\vec{E}(M) \wedge d\vec{O}\vec{M} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}dr\\r\,d\theta\\r\sin\theta\,d\varphi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

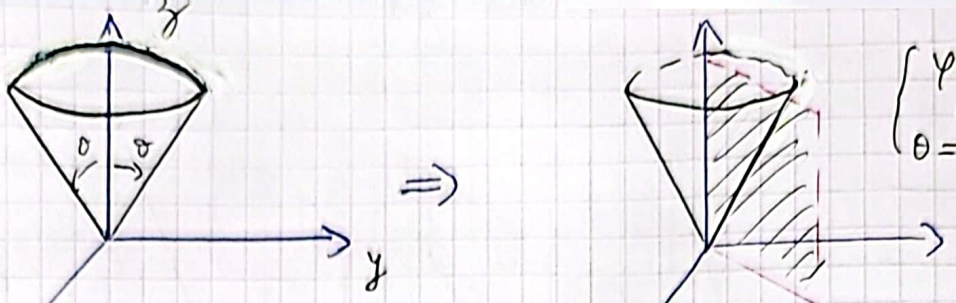
$$\Rightarrow \begin{cases} d\varphi = 0 \\ et \\ d\theta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi = cte \\ et \\ \theta = cte \end{cases}$$

Equation d'un demi plan

Equation d'un cône.

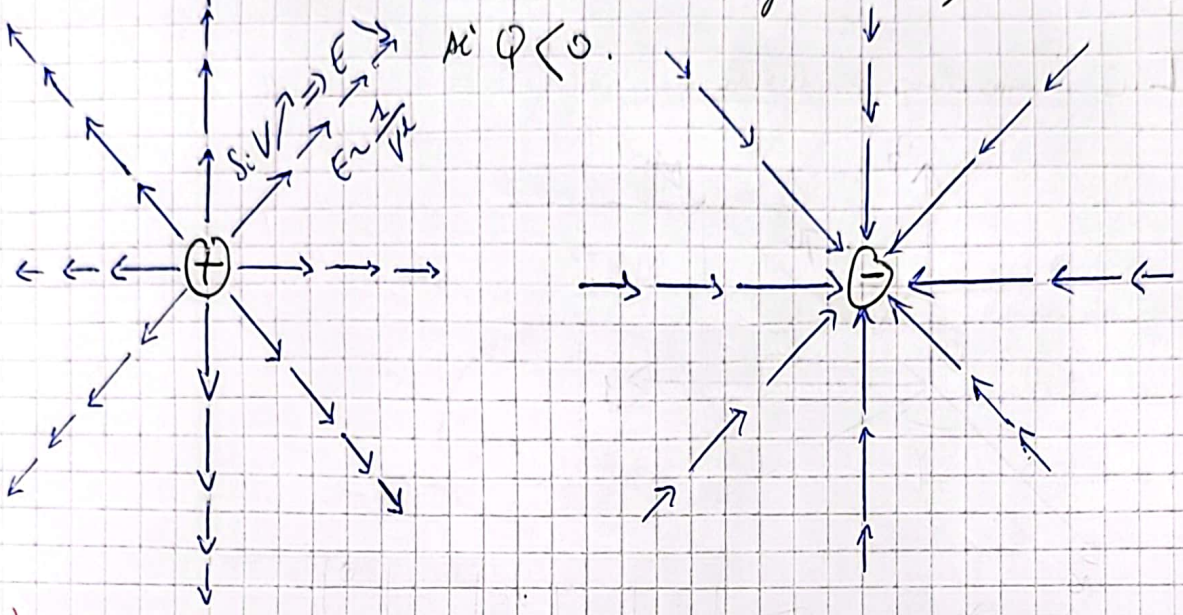


Scanné avec CamScanner



Ccl : les L.C de $\vec{E}$ sont

des demi-droites divergentes si $q > 0$ et convergentes si $q < 0$.



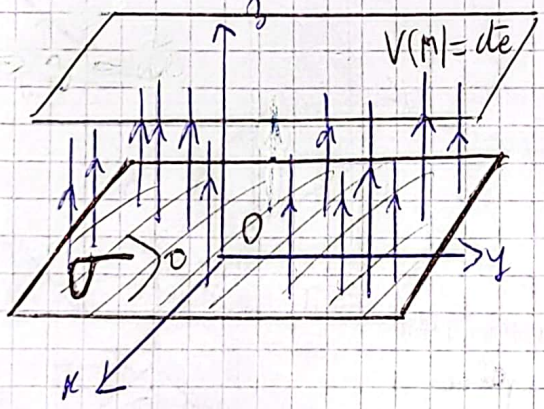
2| Surfaces équipotentielles:

La surface équipotentielle est l'ensemble des points M tq $V(M) = cte$

Exps:

↳ plan ∞:

$$\begin{cases} V(M) = \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0} z + V_0 \\ V(M) = cte \end{cases} \Rightarrow z = cte$$

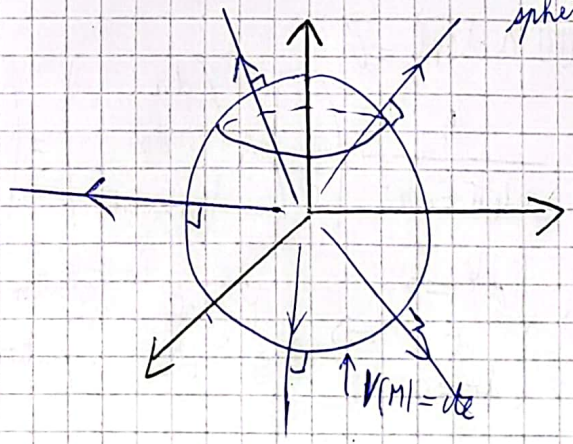


les surfaces équipotentielles sont des plans ⊥ à l'axe (Oz)

↳ charge ponctuelle:

$$\begin{cases} V(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} \\ V(M) = cte \end{cases} \Rightarrow r = cte$$

Equation d'une sphère



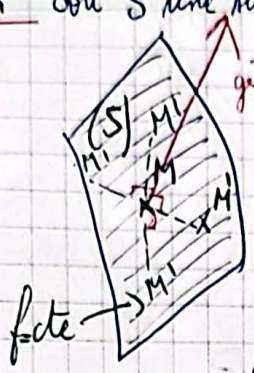
Scanné avec CamScanner

3) Lien géométrique entre les lignes de champ et les surfaces équipotentielles:

(propriété de grad)

propriété 1: les lignes de champs sont perpendiculaires en surfaces équipotentielles, en effet le gradient de f est perpendiculaire à la surface équi-f (ou iso f)

Démonstration: Soit S une surface où f cte et (M;M') deux points très proches appartenant à S



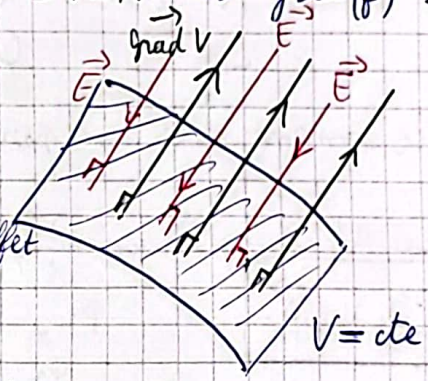
$f(M') = f(M) \Rightarrow df = f(M') - f(M) = 0$

or $\boxed{df = \overrightarrow{grad} f \cdot d\overrightarrow{OM}}$

donc $\overrightarrow{grad}(f) \cdot d\overrightarrow{OM} = 0$

avec $d\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MM'} \Rightarrow \overrightarrow{grad}(f) \perp MM'$

Soit (S) une surface équipotentielle:

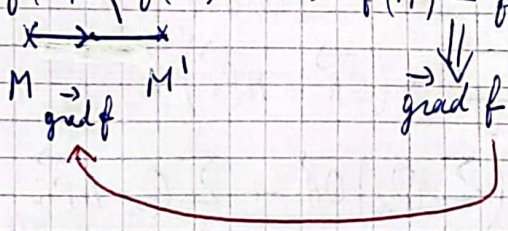


propriété 2: les lignes de champs sont dirigées vers les potentiels décroissants en effet le grad f est dirigé vers les f ↗

Démo:

$\overrightarrow{grad}(f) \cdot d\overrightarrow{OM} = df \Rightarrow \overrightarrow{grad}(f) \cdot \overrightarrow{MM'} = f(M') - f(M)$

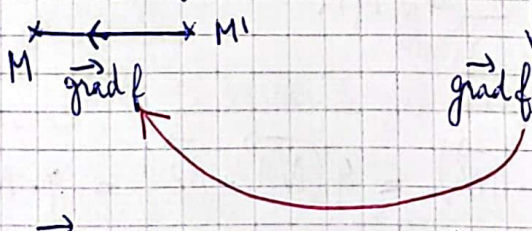
↳ Si $f(M) < f(M') \Rightarrow f(M') - f(M) > 0$



$\Downarrow$

$\overrightarrow{grad} f \cdot \overrightarrow{MM'} > 0$

↳ Si $f(M) > f(M') \Rightarrow f(M') - f(M) < 0$



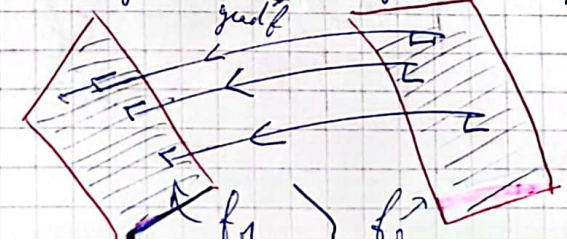
$\Downarrow$

$\overrightarrow{grad} f \cdot \overrightarrow{MM'} < 0$

donc $\overrightarrow{grad}$ V dirigé vers les potentiels ↗.

→ $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}$ V est dirigé vers les potentiels ↘

Ccl:



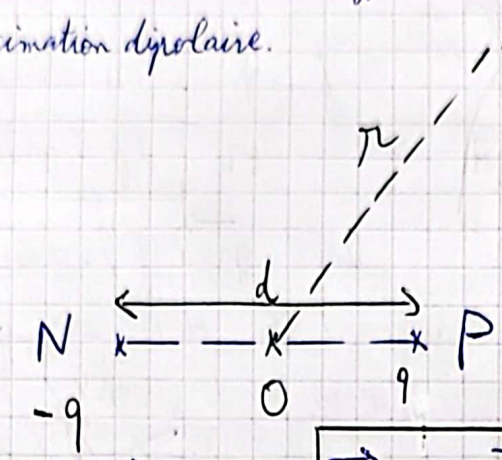
Scanné avec CamScanner

V] Dipôle électrostatique: (CCP 2006 / CNC 2011 (étudiant)).

1) Définition:

Un dipôle électrostatique est un ensemble de 2 charges opposées $-q$ placée au point N et $+q$ placée au point P séparées par une distance $d = NP \ll r = OM$ avec M est le point où l'on calcule les effets du dipôle (champ et potentiel)

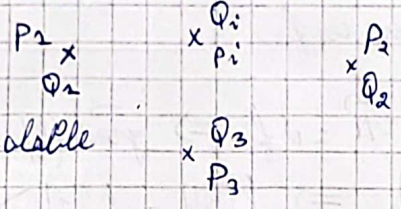
* $d \ll r$ c'est l'approximation dipolaire.



d
q
orientation

= on définit le moment dipolaire par $\boxed{\vec{p} = q.\vec{NP}}$ (C.m)

Dans le cas de N charges avec $\sum_i Q_i = 0$ on définit le moment dipolaire par $\boxed{\vec{p} = \sum_{i=2}^{N} Q_i \times \vec{OP_i}}$



Montrer que cette expression est valable le point O.

Soit A un point quelconque: $\vec{p} = \sum_i Q_i (\vec{OA} + \vec{AP_i})$

$$= \left(\sum_i Q_i\right)\vec{OA} + \sum_i Q_i \vec{AP_i}$$

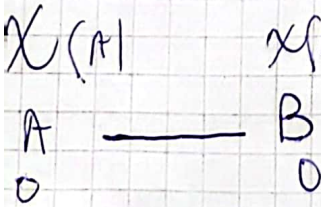
$$\vec{p} = \sum_i Q_i \vec{AP_i}$$

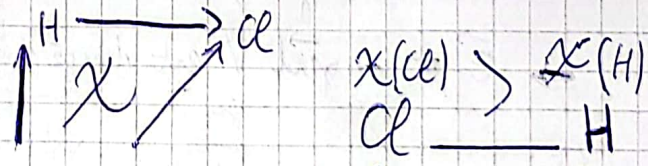
s de 2 charges:

$$\vec{p} = (+q)\vec{AP} + (-q)\vec{AN} = q(\vec{AP} - \vec{AN}) = q(\vec{NA} + \vec{AP}) = q.\vec{NP}$$

Exemples:

Molécule diatomique HCl:





Scanné avec CamScanner

$\chi(A) >> \chi(B)$; $\chi(A) > \chi(A)$

$A \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{—}} B$; $A \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{—}} B$

$-e \quad +e$; $-\delta e \quad +\delta e$

δ est le pourcentage ionique de la liaison.

Calculer p sachant que : $\begin{cases} \delta = 0,18 \\ e = 1,6 \times 10^{-19}\ C \\ d = 0,127\ nm \end{cases}$

$\chi(Cl) \quad \chi(H)$

$Cl — H$

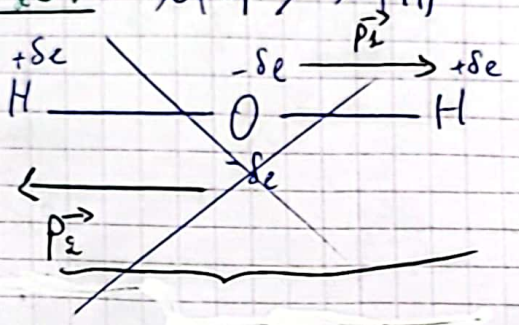
$-\delta e \quad +\delta e$

$p = 0,36 \times 10^{-29}\ C.m$ on pose $1D = \frac{1}{3} \times 10^{-29}\ C.m$ (Debye)

$\Rightarrow p = 1,08\ D \neq 0 \Rightarrow HCl$ est une molécule polaire

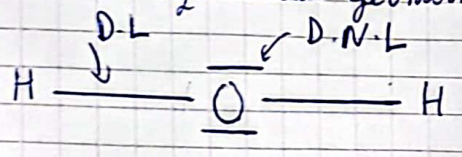
Rq : $\chi_{max} = \chi(F) \simeq 4D$.

b) Cas de H_2O : $\chi(O) > \chi(H)$



$$p = \vec{p_1} + \vec{p_2} = \vec{0}$$

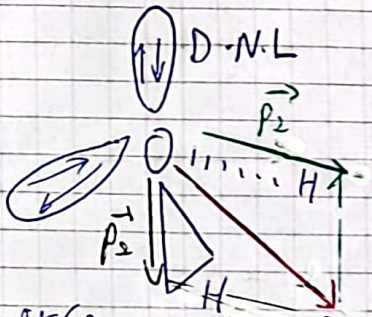
En réalité H_2O a une géométrie globale Tétraédrique



D.N.L : doublet non liant

D.L : doublet liant

AX_2E_2



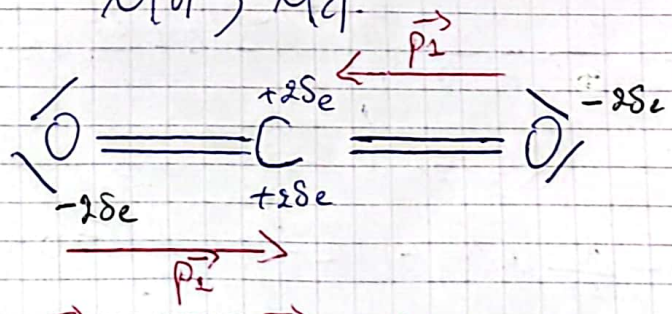
$\vec{p} = \vec{p_1} + \vec{p_2} \neq \vec{0}$.

donc H_2O est une molécule polaire

c) Cas de CO_2 : En réalité la géométrie de la molécule de CO_2 est linéaire.

$\chi(O) > \chi(C)$

AX_2

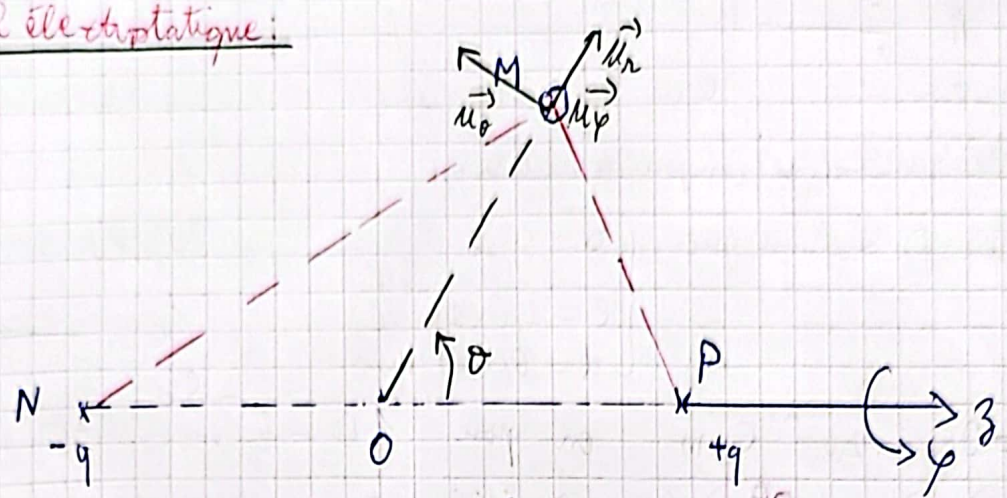


$\vec{p} = \vec{p_1} + \vec{p_2} = \vec{0}$ donc CO_2 est apolaire.

Scanné avec CamScanner

3) potentiel et champ électrostatique créés par le dipôle :

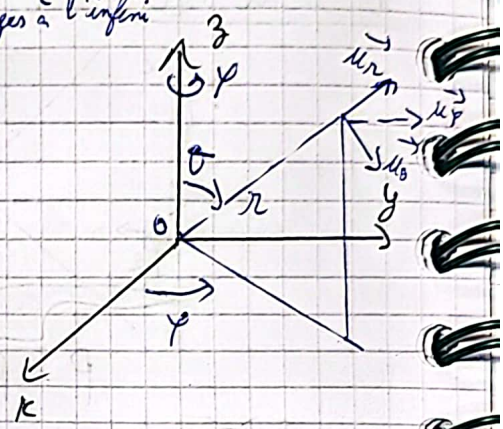
a) potentiel électrostatique :



$$V(M) = V_P(M) + V_N(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 PM} + \frac{(-q)}{4\pi\varepsilon_0 NM} + cte$$

↓ 0 absence de charges à l'infini

$$\Rightarrow V(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{PM} - \frac{1}{NM}\right]$$



Mq dans l'approximation dipolaire :

$$\boxed{V(M) = \frac{P\cos(\theta)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$$

$$PM = \|\vec{PM}\| = \|\vec{PO} + \vec{OM}\|$$
$$= \|\vec{OM} - \vec{OP}\|$$
$$PM = \|r\vec{u_r} - \frac{d}{2}\vec{u_z}\|$$
$$PM = \sqrt{r^2 + \frac{d^2}{4} - rd\vec{u_r}\cdot\vec{u_z}} = \left(r^2 + \frac{d^2}{4} - rd\cos(\theta)\right)^{1/2}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{PM} = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{d^2}{4r^2} - \frac{d}{r}\cos(\theta)\right)^{-1/2}$$

de même $NM = \|\vec{OM} - \vec{ON}\| = \|r\vec{u_r} + d/2\,\vec{u_z}\|$

donc $\frac{1}{NM} = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{d^2}{4r^2} + \frac{d}{r}\cos(\theta)\right)^{-1/2}$

donc $V(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[\left(1 + \frac{d^2}{4r^2} - \frac{d}{r}\cos(\theta)\right)^{-1/2} - \left(1 + \frac{d^2}{4r^2} + \frac{d}{r}\cos(\theta)\right)^{-1/2}\right]$

Dans l'approximation dipolaire $d \ll r \Rightarrow$ D.L à l'ordre le plus bas non nul.

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[1 + \frac{d}{2r}\cos(\theta) - \left(1 - \frac{d}{2r}\cos(\theta)\right)\right]$$

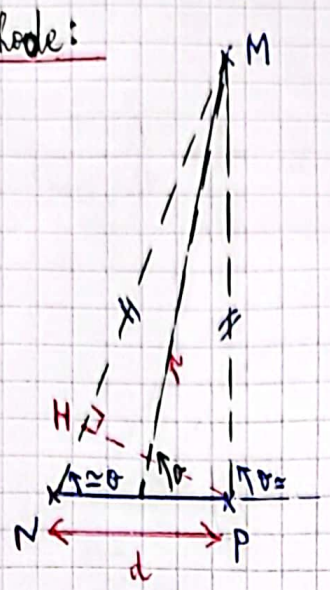
↑ DL_0

donc $V(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\frac{d}{r}\cos(\theta)$

Scanné avec CamScanner

$$= \frac{(qd)\cos(\theta)}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad \text{or} \quad p = q.d \quad \text{d'où} \quad V(M) = \frac{p\cos(\theta)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Autre méthode :



$$V(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{PM} - \frac{1}{NM}\right)$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{NM - PM}{PM.NM}$$

or $PM \simeq NM \simeq r \Rightarrow PM.NM \simeq r^2$

$NM - PM = NH + HM - PM \simeq NH = d\cos\theta$

$$\Rightarrow V(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{d\cos\theta}{r^2} = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$PM = 4$; $NM = 4{,}1$

$PM \simeq NM$

↳ $PM.NM = 4\times 4{,}1 = \underbrace{4\times 4}_{16} + \underbrace{4\times 0{,}1}_{0{,}4} \simeq 16$ car $0{,}4 \ll 16$

↳ $NM - PM = 4{,}1 - 4 \simeq 0$ car $4 + 0{,}1 - 4 = 0{,}1 + 0 \simeq 0$ $\quad 0{,}1 \overset{???}{\ll} 0$

b) Champ électrostatique :

$$\vec{E}(M) = -\vec{\text{grad}}\, V(M)$$

$$= -\frac{\partial V}{\partial r}\vec{u_r} - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{u_\theta} - \cancel{\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}}^{\,0}\vec{u_\varphi}$$

$$= \frac{2p\cos(\theta)}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{u_r} + \frac{p\sin(\theta)}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{u_\theta}$$

$$= \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[2\cos(\theta)\vec{u_r} + \sin(\theta)\vec{u_\theta}\right]$$

c) Commentaires :

↳ cas d'une charge ponctuelle : $\begin{cases} V(M) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} \sim \dfrac{1}{r} \\ E(M) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \sim \dfrac{1}{r^2} \end{cases}$

cas d'un dipôle $\begin{cases} V(M) \sim \dfrac{1}{r^2} \\ E(M) \sim \dfrac{1}{r^3} \end{cases}$ donc si $r \nearrow \Rightarrow$ décroissance rapide du potentiel et du champ créés par le dipôle.

donc dans les solutions aqueuses, les interactions entre dipôles sont négligeables devant celles des charges à grande distance.

$\begin{cases} V(M) = V(r;\theta) \\ E(M) = E(r;\theta) \end{cases}$ ne dépend pas de φ car la distribution de charge est invariante par rotation d'angle φ.

Scanné avec CamScanner

$\vec{E}(M) = E_r \vec{u_r} + E_\theta \vec{u_\theta}$ car $(M; \vec{u_r}; \vec{u_\theta})$ est un plan de symétrie de la distribution de charges.

↳ formule intrinsèque du potentiel:

$$V(M) = \frac{p\cos(\theta)}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{p\vec{u_z}\cdot\vec{u_r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p}\cdot\vec{u_r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \times \frac{r}{r} = \frac{\vec{p}\cdot\vec{OM}}{4\pi\varepsilon_0 OM^3}$$

↳ formule intrinsèque du champ électrostatique:

$$\vec{E}(M) = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(2\cos(\theta)\vec{u_r} + \sin(\theta)\vec{u_\theta}\right)$$

$$= \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[3\cos(\theta)\vec{u_r} + \left(\sin(\theta)\vec{k} - \cos(\theta)\vec{u_r}\right)\right]$$

or $\vec{u_z} = \cos(\theta)\vec{u_r} - \sin\theta\vec{u_\theta}$

$$\vec{E}(M) = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[3(\vec{u_z}\cdot\vec{u_r})\cdot\vec{u_r} - \vec{u_z}\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[3(\vec{p}\cdot\vec{u_r})\cdot\vec{u_r} - \vec{p}\right]$$

$$\boxed{\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{3\cdot(\vec{p}\cdot\vec{OM})\cdot\vec{OM} - \vec{p}\cdot OM^2}{OM^5}\right]}$$

4) Surfaces équipotentielles et lignes de champ:

a) Surfaces équipotentielles:

$$\begin{cases} V(M) = \dfrac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \\ V(M) = cte = V_0 \end{cases} \Longrightarrow \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = V_0$$

↳ valable si $r \gg d$.

$$\Rightarrow r^2 = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 V_0}\cos(\theta)$$

$$\Rightarrow \boxed{r^2(\theta) = K\cdot\cos(\theta)} \quad (K = cte)$$

$\forall \varphi$.

Si $\theta = 0 \Rightarrow r = \sqrt{K} = r_m$

Si $\theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{K}{\sqrt{2}}} = \frac{r_m}{\sqrt{2}} < r_m$

$\Big)$ $V_0 > 0$ $(K > 0)$

* Si $\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow r = 0$.

Si $\theta = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{-K}{\sqrt{2}}} = \frac{r_m}{\sqrt{2}}$

Si $\theta = \pi \Rightarrow r = \sqrt{-K} = r_m$

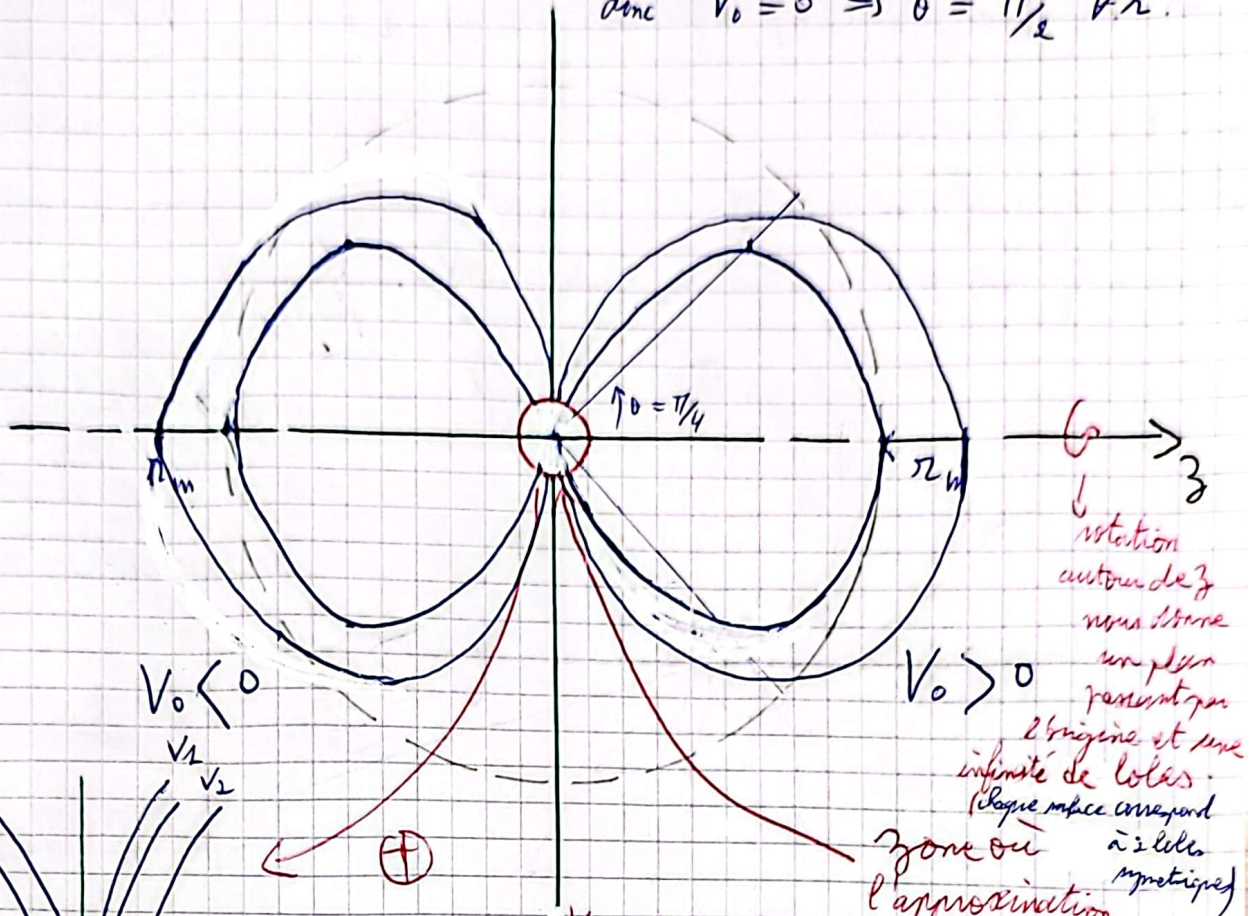
$\Big)$ $V_0 < 0$ $(K < 0)$

Scanné avec CamScanner

Si $V_0 = 0 \Rightarrow \cos(\theta) = 0 \quad \forall r \neq 0 \Rightarrow \theta = \pi/2 \quad \forall r \neq 0$

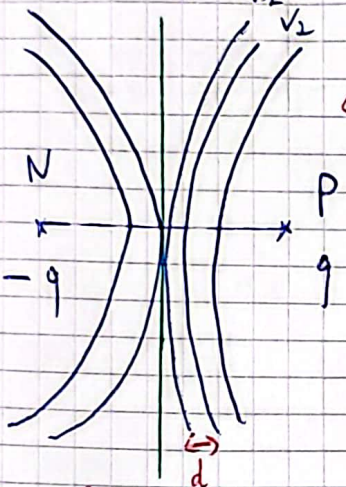
or si $V_0 = 0 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(\frac{1}{PM} - \frac{1}{NM}\right) \Rightarrow PM = NM \Rightarrow \theta = \pi/2$

donc $V_0 = 0 \Rightarrow \theta = \pi/2 \quad \forall r$.



rotation autour de z nous donne un plan passant par l'origine et une infinité de lobes. (Chaque surface correspond à 2 lobes symétriques)

Zone où l'approximation dipolaire n'est plus valable



Lignes équipotentielles

plus la distance entre 2 surfaces équipotentielle est petite plus le champ est intense dans cette région

b/ Lignes de champ :

$$\vec{E}(M) \wedge d\vec{OM} = \vec{0} \Rightarrow \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \begin{vmatrix} 2\cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} dr \\ r d\theta \\ r\sin\theta d\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} r\sin^2(\theta) d\varphi = 0 \\ 2\cos\theta\, r \sin\theta d\varphi = 0 \end{vmatrix} \Rightarrow d\varphi = 0 \rightarrow \varphi = cte.$$

$$|2\cos(\theta)|\, r\, d\theta - \sin\theta\, dr = 0 \Rightarrow 2\cos(\theta)|\, r\, d\theta = \sin\theta\, dr$$

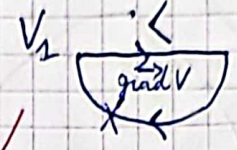
Scanné avec CamScanner

$$\Rightarrow \frac{dr}{r} = 2\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}d\theta \Rightarrow \int\frac{dr}{r} = 2\int\frac{d\sin(\theta)}{\sin(\theta)}$$

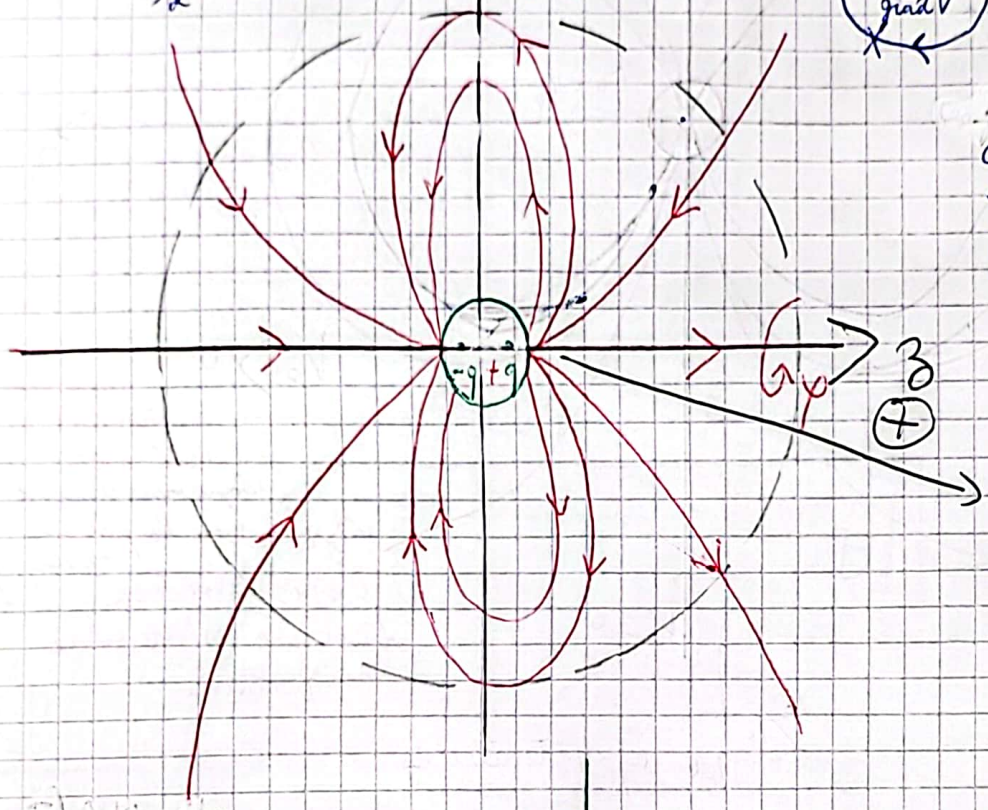
$$\Rightarrow \ln(r) = 2\ln(\sin\theta) + cte \Rightarrow r(\theta) = r_0\sin^2(\theta) \quad \forall\varphi$$

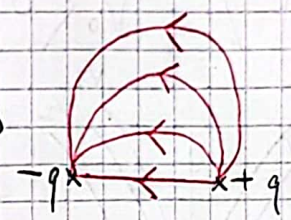
- Si $\theta = 0 ; \pi$; $r = 0$
- Si $\theta = \frac{\pi}{4} ; \frac{3\pi}{4} \Rightarrow r = \frac{r_0}{2}$
- Si $\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow r = r_0$ donc r_0

Les lignes de champ ne se ferment jamais sur elles mêmes car $\vec{E} = -\vec{grad}(V)$

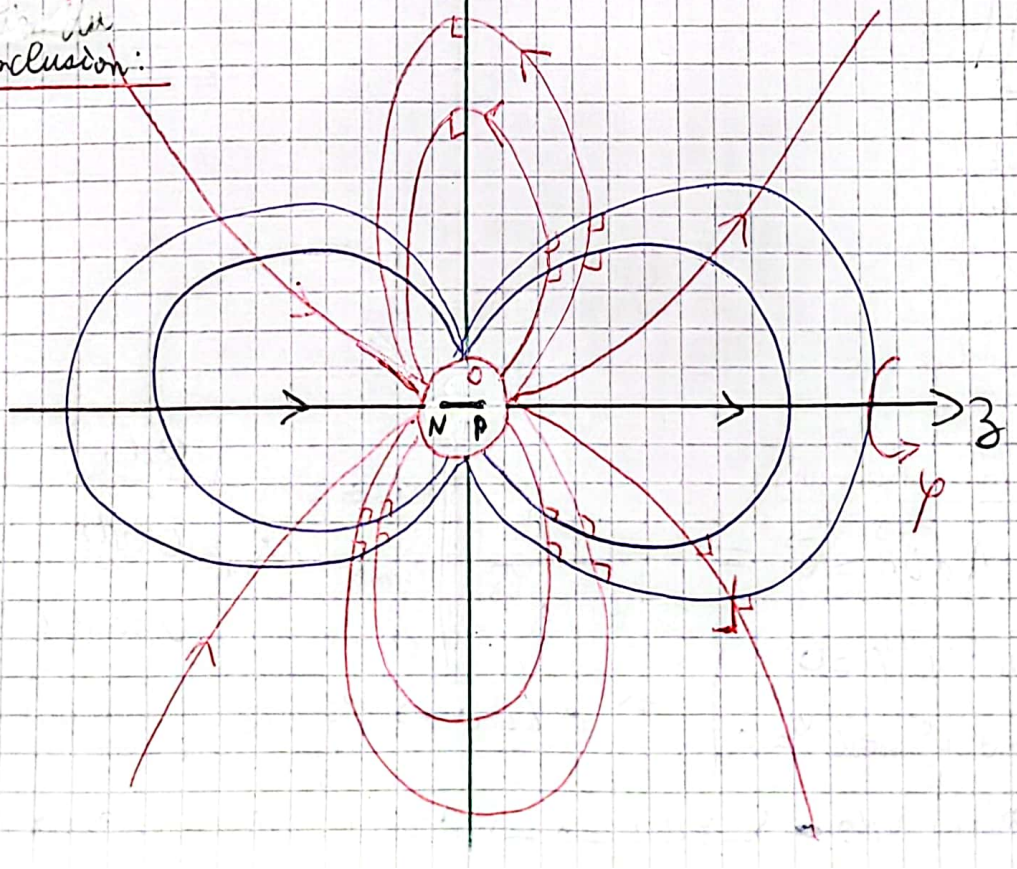


ABSurde si les lignes de champ fermées dirigé vers les potentiels croissants; si elles se ferment il sera alors dirigé vers les potentiels croissants et décroissants ; ABS.





c) conclusion :



Scanné avec CamScanner

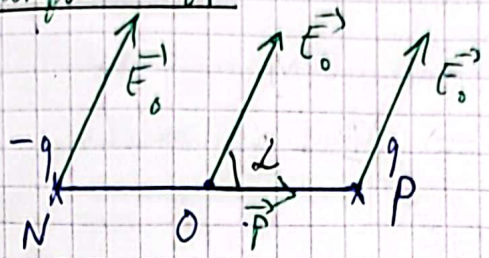
→ Les L.C de $\vec{E}$ sont dirigées vers les potentiels ↓

→ Les L.C sont ⊥ aux surfaces équipotentielles.

5) Action d'un champ extérieur sur un dipôle rigide:

dipôle rigide: $\begin{cases} q = cte \\ NP = cte \end{cases} \Rightarrow P = cte$

1) Action d'un champ uniforme $\vec{E}_0$:



↳ **force appliquée sur le dipôle:**

$$\vec{F} = \vec{F}(P) + \vec{F}(N) = +q\vec{E}_0 + (-q)\vec{E}_0 = \vec{0}.$$

$\Rightarrow \vec{v}(O) = cte$ Si $\vec{v}(O)_{t=0} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}_t(O) = \vec{0}$ pas de translation

↳ **couple appliqué sur le dipôle:**

$$\vec{M}_A(\vec{F}) = \vec{AM} \wedge \vec{F}$$

$$\vec{\Gamma}_A = \vec{AP} \wedge \vec{F}(P) + \vec{AN} \wedge \vec{F}(N)$$

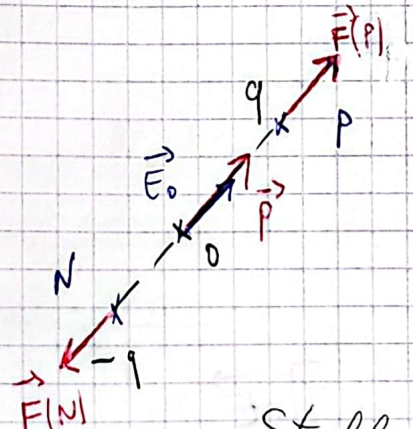
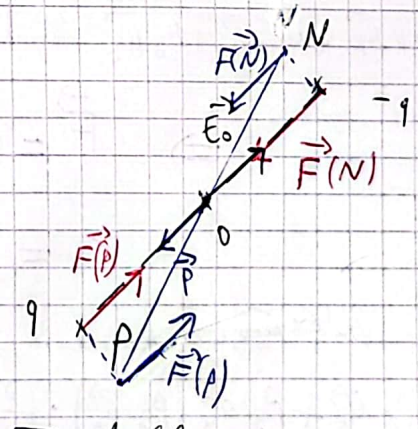
$$= \vec{AP} \wedge q\vec{E}_0 + \vec{AN} \wedge (-q\vec{E}_0)$$

$$\vec{\Gamma}_A = (\vec{AP} - \vec{AN}) \wedge q\vec{E}_0 = (\vec{NA} + \vec{AP}) \wedge q\vec{E}_0 = \vec{NP} \wedge q\vec{E}_0$$

donc $\boxed{\vec{\Gamma} = \vec{p} \wedge \vec{E}_0} \Rightarrow \Gamma = pE_0 \sin\alpha \neq 0$

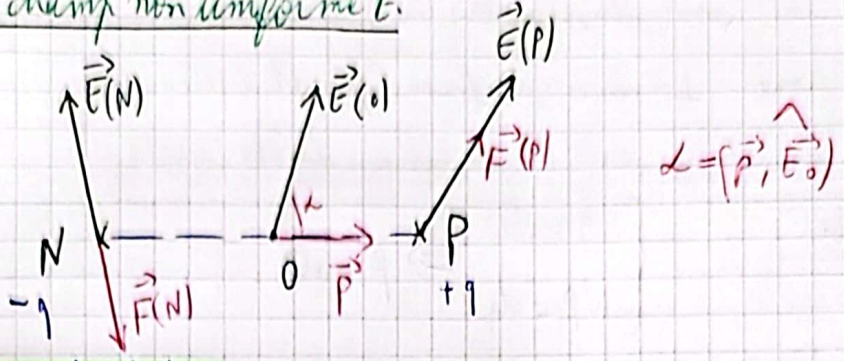
$\Downarrow$ rotation.

les positions d'équilibre sont tq: $\Gamma = 0 \Rightarrow \sin\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0 ; \pi$

$\alpha = 0$	$\alpha = \pi$
	
Stable	Instable

Scanné avec CamScanner

2) Action d'un champ non uniforme $\vec{E}$:



Force appliquée sur le dipôle:

$$\vec{F} = \vec{F}(P) + \vec{F}(N) = +q\vec{E}(P) + (-q)\vec{E}(N)$$

$$\vec{F} = q(\vec{E}(P) - \vec{E}(N)) \neq \vec{0} \Longrightarrow \text{Mvmt de translation.}$$

Mq: $\boxed{\vec{F} = (\vec{p}\cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{E}}$

Démonstration: en coordonnées cartésiennes:

$$\vec{E}(O) = \vec{E}(x;y;z)$$

$$\vec{E}(P) = \vec{E}\left(x+\frac{dx}{2}; y+\frac{dy}{2}; y+\frac{dz}{2}\right)$$

$$\vec{E}(N) = \vec{E}\left(x-\frac{dx}{2}; y-\frac{dy}{2}; z-\frac{dz}{2}\right)$$

$$\left(f(x+dx) - f(x) = \frac{df}{dx}(x+dx-x)\right)$$

$$\vec{F} = q\left(\vec{E}(P) - \vec{E}(N)\right) \qquad f\left(x+\frac{dx}{2}\right) - f\left(x-\frac{dx}{2}\right) = \frac{df}{dx}\cdot dx$$

$$= q\left[\frac{\partial \vec{E}}{\partial x}dx + \frac{\partial \vec{E}}{\partial y}dy + \frac{\partial \vec{E}}{\partial z}dz\right]$$

$$\vec{F} = q\left[dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y} + dz\frac{\partial}{\partial z}\right]\vec{E}$$

$$\vec{F} = q\left[\underbrace{\left(dx\,\vec{u_x} + dy\,\vec{u_y} + dz\,\vec{u_z}\right)}_{\overrightarrow{NP}} \cdot \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{u_x} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{u_y} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{u_z}\right)}_{\overrightarrow{\text{grad}}}\right]\vec{E}$$

$$\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{NO} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{ON} = \begin{vmatrix} x+dx/2 \\ y+dy/2 \\ z+dz/2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x-dx/2 \\ y-dy/2 \\ z-dz/2 \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{NP} = dx\,\vec{u_x} + dy\,\vec{u_y} + dz\,\vec{u_z}$$

$$\Rightarrow \vec{F} = \left(q\overrightarrow{NP}\cdot \overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{E}$$

$$= \left(\vec{p}\cdot \overrightarrow{\text{grad}}\right)\cdot\vec{E}$$

Donc en coordonnées cartésiennes:

$$\vec{F} = \left[\left(p_x\vec{u_x} + p_y\vec{u_y} + p_z\vec{u_z}\right)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{u_x} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{u_y} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{u_z}\right)\right]\cdot\vec{E}$$

Scanné avec CamScanner

$\vec{F} = \left(p_x \frac{\partial}{\partial x} + p_y \frac{\partial}{\partial y} + p_z \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \vec{E}$

$\vec{F} = p_x \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} + p_y \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} + p_z \frac{\partial \vec{E}}{\partial z}$.

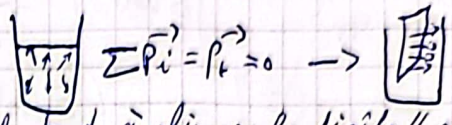
↳ moment appliqué sur le dipôle ; de même :

$\vec{\Gamma} \simeq \vec{p} \wedge \vec{E}(O)$

$\vec{E}$ uniforme : $\vec{E} = \vec{E_0}$; $F = \vec{0}$; $\vec{\Gamma} = \vec{p} \wedge \vec{E}(O)$

$\vec{E}$ quasi-uniforme : $\vec{F} \simeq \vec{0} + (\vec{p} \cdot \vec{grad})\vec{E}$; $\vec{\Gamma} = \vec{p} \wedge \vec{E}(O)$.

c) Conclusion :



* dans le cas d'un champ extérieur uniforme ; le couple tend à aligner le dipôle // et dans le même sens du champ ($\alpha = 0$)
* dans le cas d'un champ extérieur non uniforme ; $\vec{F} = +(\vec{p} \cdot \vec{grad})\vec{E}$

la force tend à déplacer le dipôle vers la zone où le champ est maximal et le moment tend à orienter le dipôle // et dans le même sens du champ. (c'est pour cela que l'eau existe sous forme liquide ; chaque H_2O est un dipôle ; chaque dipôle crée un champ non uniforme sur les autres dipôles qui les entourent et qui sont attirés du que le champ est intense à proximité du dipôle.

$\vec{F}$ dirigée vers les $\vec{E}$ croissants.

VI) Energie électrostatique :

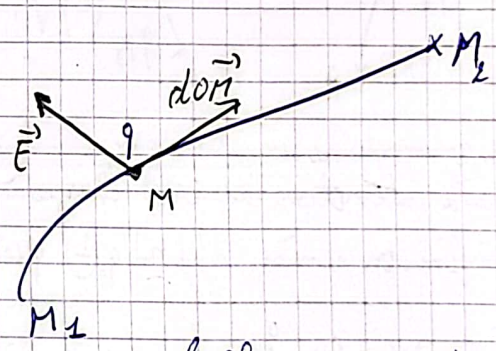
1) Energie potentielle d'une charge :

On considère une charge ponctuelle placée dans un champ extérieur $\vec{E}$. Le travail élémentaire de la force électrostatique appliquée sur la charge q est $\delta W(\vec{F}) = \vec{F} \cdot d\vec{OM}$

or $\vec{F} = q\vec{E}$ donc $\delta W(\vec{F}) = q\vec{E} \cdot d\vec{OM}$

$-\vec{E} \cdot d\vec{OM} = dV \Rightarrow \delta W(\vec{F}) = q(-dV)$

$= -d(qV)$



or $\delta W(\vec{F}) = -dE_p$ où $E_p = qV + \cancel{cte}$ ($\to 0$)

le champ crée par le dipôle est dit champ propre.

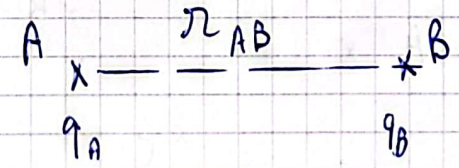
C'est l'energie potentielle d'une charge ponctuelle dans un potentiel extérieur

$$\boxed{E_p(M) = q\,V(M)} \quad (J)$$

2) Energie d'intéraction électrostatique :

a) cas d'une distribution discrète :

↳ cas de 2 charges :



$E_p = ?$

Scanné avec CamScanner

$V_A(B)$ le potentiel au point B créé par q_A.

$V_B(A)$ le potentiel au point A créé par q_B.

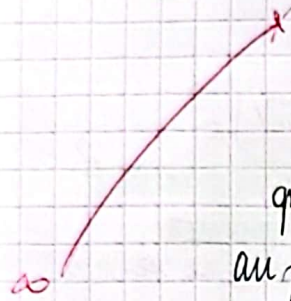
Signification physique de E_p :

$\delta W(\vec{F}) = -dE_p$ avec $E_p = qV$.

$W_{M_1 \to M_2}(\vec{F}) = \int \delta W(\vec{F}) = -\int_{M_1}^{M_2} E_p = -\left(E_p(M_2) - E_p(M_1)\right)$

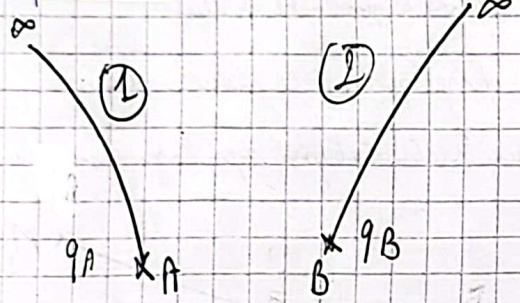
$W_{\infty \to M}(\vec{F}) = -\left(E_p(M) - E_p(\infty)\right) = -E_p(M)$

$E_p(\infty) = 0$ (pas de charges à ∞)



on définit le travail d'un opérateur W_{op} par le travail que doit fournir un opérateur pour amener la charge q de l'∞ au point M. $W_{op} = -W_{\infty \to M}(\vec{F}) = E_p(M) = qV(M)$

Expérience (1)



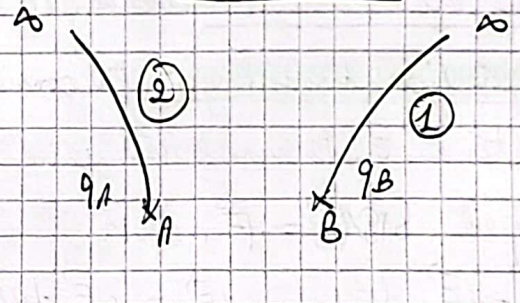
on commence d'un état où il n'y a pas d'interaction càd les 2 charges à l'infini. on ramène d'abord q_A (1) puis q_B.

$E_p = W_{op}(\infty \xrightarrow{q_A} A) + W_{op}(\infty \xrightarrow{q_B} B)$

$E_p = q_A \cdot V_B(A) + q_B V_A(B)$

$V_B(A) = 0$ (car il n'y a pas encore B).

Expérience (2)



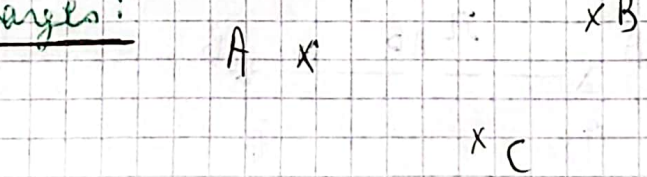
$E_p = W_{op}(\infty \xrightarrow{q_B} B) + W_{op}(\infty \xrightarrow{q_A} A)$

$E_p = q_B \cancel{V(B)}^{0} + q_A V_B(A)$

CCL : $E_p = q_A \cdot V_B(A) = q_B V_A(B) = \dfrac{q_A q_B}{4\pi\varepsilon_0 r_{AB}}$

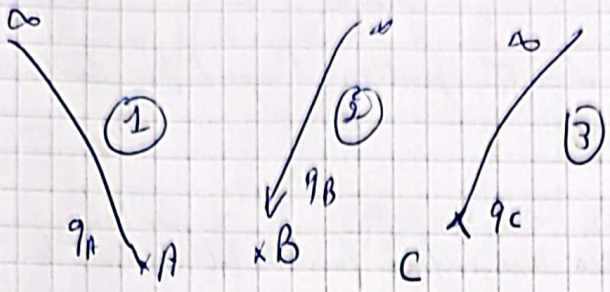
$E_p = \frac{1}{2}\left[q_A V_B(A) + q_B V_A(B)\right]$

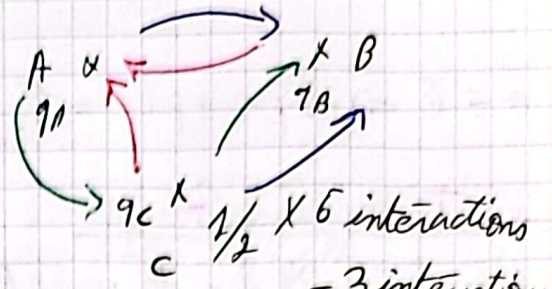
↳ Cas de 3 charges :



Scanné avec CamScanner

$E_p = W_{op}(\infty \xrightarrow{q_A} A) + W_{op}(\infty \xrightarrow{q_B} B) + W_{op}(\infty \xrightarrow{q_C} C)$





$E_p = q_A \cdot \cancel{V(A)}^{\,0} + q_B V_A(B) + q_C (V_A(C) + V_B(C))$

$E_p = \frac{1}{2}\left[q_B V_A(B) + q_A V_B(A) + q_C V_A(C) + q_A V_C(A) + q_C V_B(C) + q_B V_C(B) \right]$

$E_p = \frac{1}{2}\left[q_A \underbrace{(V_B(A) + V_C(A))}_{V(A)} + q_B \underbrace{(V_A(B) + V_C(B))}_{V(B)} + q_C \underbrace{(V_A(C) + V_B(C))}_{V(C)} \right]$

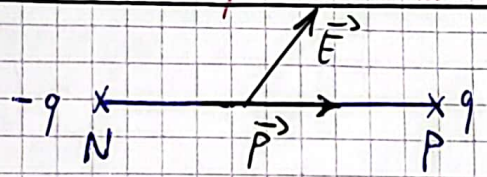
↳ Cas de N charges :

$$E_p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} q_i V(i) \quad \text{avec} \quad V(i) = \sum_{j \neq i} V_j(i)$$

b) cas d'une distribution continue :

$$E_p = \frac{1}{2} \int_{P \in D} \delta Q(P) \cdot V(P)$$

3) Action d'un champ extérieur sur un dipôle rigide :



$E_p = qV(P) + (-q)V(N) = q[V(P) - V(N)]$

or $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{OM} \Rightarrow V(M') - V(M) = -\vec{E} \cdot \vec{MM'}$

$\Rightarrow V(P) - V(N) = -\vec{E} \cdot \vec{NP}$ d'où

$E_p = q(-\vec{E} \cdot \vec{NP}) = -q\vec{NP} \cdot \vec{E}$ or $\vec{p} = q\vec{NP}$

donc $\boxed{E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}} \Rightarrow E_p = -pE\cos(\alpha)$

Scanné avec CamScanner

$\alpha = 0 \Rightarrow E_p = -p \cdot E = E_{p\,min} \Rightarrow \alpha = 0$ position d'équilibre stable.

$\alpha = \pi \Rightarrow E_p = +pE = E_{p\,max} \Rightarrow \alpha = \pi$ position d'équilibre instable.

VII) Théorème de Gauss :

1) Enoncé : Le flux du champ E à travers une surface fermée est égal à la charge intérieure de cette surface divisée par ε_0.

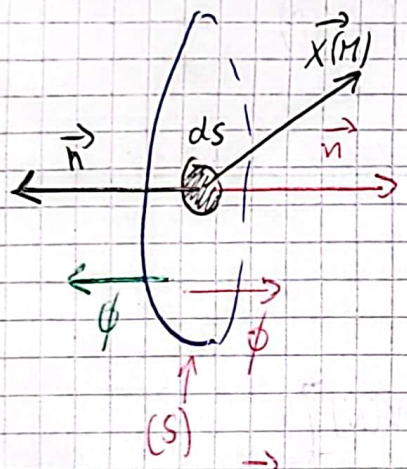
$$\oint\!\!\oint_{M \in (S)} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S}(M) = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

2) commentaires :

↳ Le flux de $\vec{X}$:

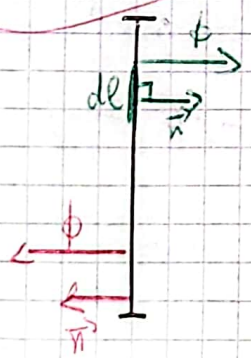
⊕ Le flux surfacique de $\vec{X}$: $\phi_{\vec{X}} = \iint_{M \in (S)} \vec{X}(M) \cdot d\vec{S}(M)$ avec $d\vec{S}(M) = dS(M)\,\vec{n}$

$$\Rightarrow \phi_{\vec{X}} = \iint_{M \in (S)} \vec{X}(M)\, dS(M)\, \vec{n}(M)$$ ← dans le sens du flux.



⊕ Le flux linéique de $\vec{X}$:

$\phi_{\vec{X}} = \int_{M \in (L)} \vec{X}_{(M)} \cdot d\ell_{(M)}\, \vec{n}_{(M)}$ avec $\vec{n} \perp d\ell$



$dl \cdot \vec{t}$

$\int \vec{X} \cdot d\ell \cdot \vec{n} \neq \int \vec{X} \cdot d\vec{\ell}$

Flux de $\vec{X}$; circulation de $\vec{X}$

Scanné avec CamScanner

↳ Le flux de $\vec{x}$ = Le débit de Y.

$$\phi_{\vec{x}} = \iint \vec{x} \cdot dS \cdot \vec{n} = \frac{\delta Y}{dt} = D_Y$$

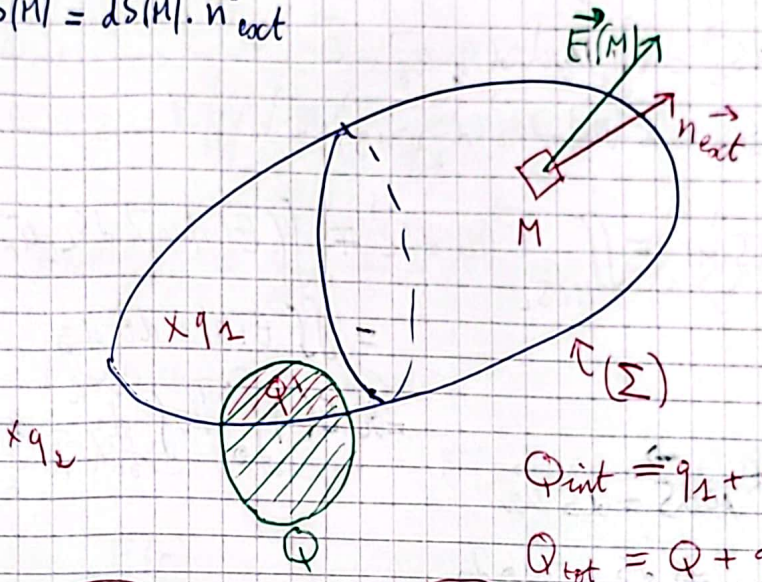
Exp 5°

↳ le flux de $\vec{v}$ = Débit volumique $\phi_{\vec{v}} = \iint \vec{v} \cdot dS \cdot \vec{n} = \frac{\delta V}{dt} = D_V$ (m^3/s)

↳ le flux de $\mu\vec{v}$: (μ la masse volumique) = débit massique : $\phi_{\mu\vec{v}} = \iint \mu\vec{v} \cdot dS \cdot \vec{n} = \frac{\delta m}{dt} = D_m$

↳ Le flux de $\vec{E}$ à travers une surface fermée Σ : $\oiint_{M\in(\Sigma)} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S}(M)$.

avec $d\vec{S}(M) = dS(M) \cdot \vec{n}_{ext}$



$Q_{int} = q_1 + Q'$

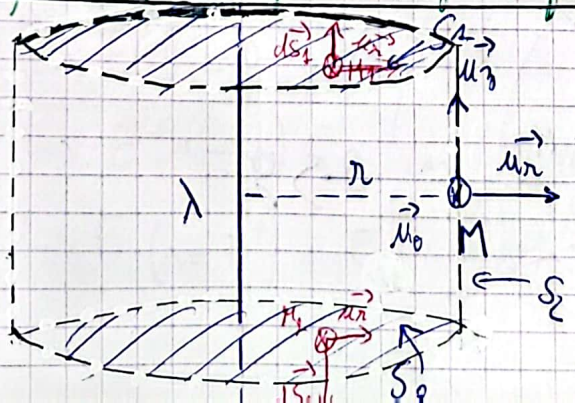
$Q_{tot} = Q + q_1 + q_2$

$$\iint_{M\in(\Sigma)} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S}(M) = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$\vec{E}$ est créé par la charge totale pas que la charge intérieure Q_{int} ($E \leftarrow Q_{tot} = Q + q_1 + q_2$).

3) Exemples:

a) Champ créé par un fil infini:



Etape 1: Analyse de Symétrie et d'invariance

Etape 2: Choix de Σ.

Etape 3: Calcul de Q_{int}.

$$\oiint \vec{E}(M) \cdot d\vec{S}(M) = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

(1) (2) (3)

Scanné avec CamScanner

c) Champ créé par une sphère chargée uniformément en surface :

Même question.

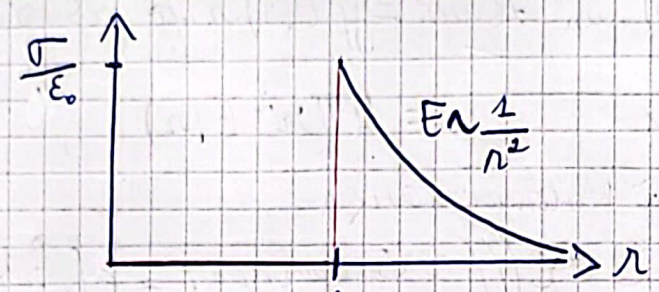
↳ Si M est à l'intérieur : $r = OM < R$

$Q_{int} = 0 \Rightarrow E(r<R) = 0$

↳ Si M est à l'extérieur : $r = OM > R$

$Q_{int} = Q = \sigma \times 4\pi R^2$

d'où $4\pi r^2 E(r>R) = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2}$

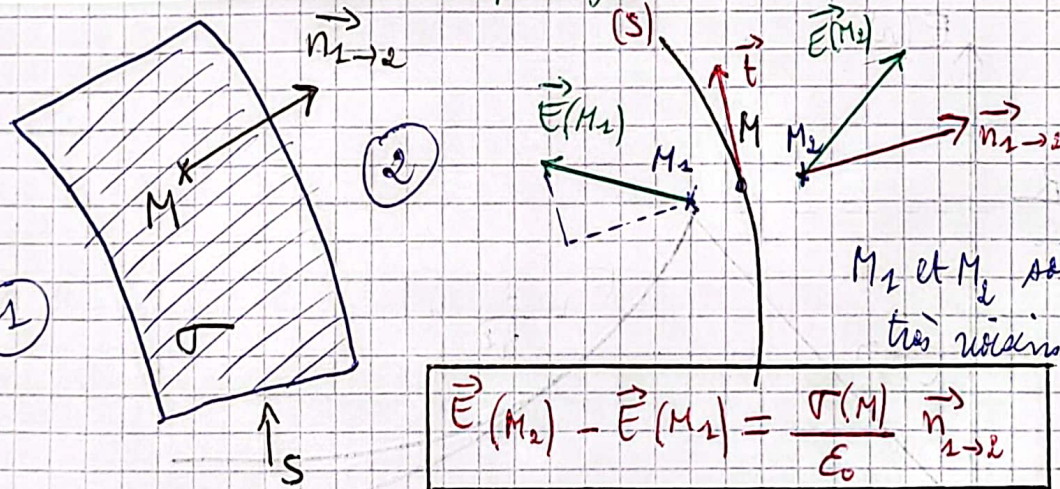


↳ $E(0) = E(r=0) = 0$ car O est un centre de symétrie.

↳ $E(r \to \infty) = 0$ car la distribution est finie.

↳ $E(r=R^+) - E(r=R^-) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ discontinuité du champ dans le cas d'une distribution surfacique.

Généralisation : Relation de passage :



M_1 et M_2 sont des points très voisins de M

$$\vec{E}(M_2) - \vec{E}(M_1) = \frac{\sigma(M)}{\varepsilon_0}\vec{n}_{1\to 2}$$

• $\vec{n}_{1\to 2} \Rightarrow \vec{n}_{1\to 2} \cdot (\vec{E}(M_2) - \vec{E}(M_1)) = \frac{\sigma(M)}{\varepsilon_0}$

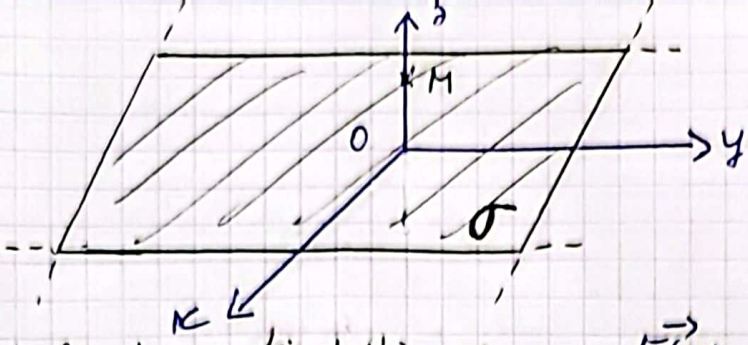
discontinuité de la composante normale du champ $\vec{E}$

$\wedge \vec{n}_{1\to 2} \Rightarrow \vec{n}_{1\to 2} \wedge (\vec{E}(M_2) - \vec{E}(M_1)) = \vec{0} \Rightarrow E_T(M_2) = E_T(M_1)$

continuité de la composante tangentielle.

d) Champ créé par un plan ∞ :

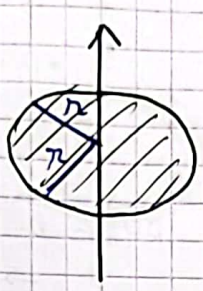
Scanné avec CamScanner

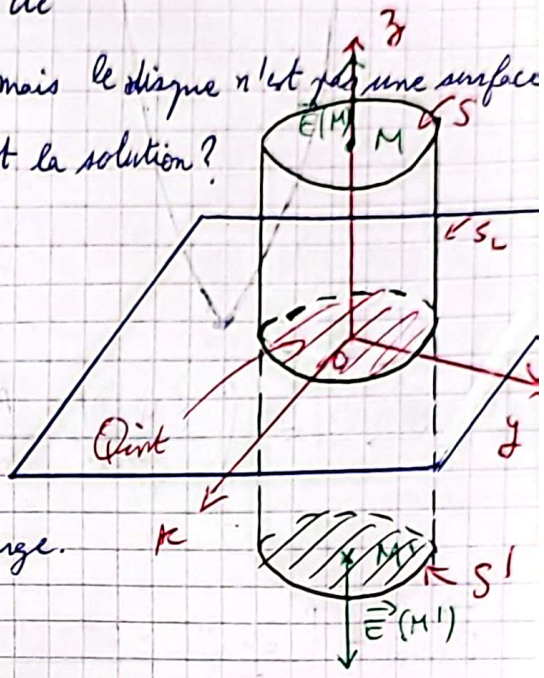


Étape 1 : Analyse de symétrie et d'invariance. $\vec{E}(M) = E(z).\vec{u_z}$

Étape 2 : $E(z) = cte$ sur Σ $\Rightarrow$ Σ est de z cte

$\Rightarrow$ Soit Σ un disque mais le disque n'est pas une surface fermée ; Quelle est la solution ?





$\vec{E}(M') = sym(\vec{E}(M))$ car $(Oxy) = \Pi_S$ de charge.

M' sym M donc $\vec{E}(M') = -\vec{E}(M)$.

Soit $\Sigma = S_L \cup S' \cup S$

$$\oiint_{M\in\Sigma} \vec{E}(M).d\vec{S}(M) = \iint_{M\in(S)} \vec{E}(M).d\vec{S}_{(M)} + \iint_{M\in S_L} \underbrace{\vec{E}(M).d\vec{S_L}}_{\vec{0} \text{ car } d\vec{S_L} = dS_L \vec{u_r} \perp \vec{E}(M) = E(M)\vec{u_r}} + \iint_{M\in S'} \vec{E}(M').dS'$$

$$= \iint \vec{E}(M).dS.\vec{u_z} + \iint \underbrace{E(\vec{M'})}_{-\vec{E}(M)}.dS(-\vec{u_z})$$

$$\oiint \vec{E}(M).d\vec{S}_{(M)} = 2\iint E(M).dS = 2E(M)\iint dS = 2E(M).S$$

Étape 3 : $Q_{int} = \iint \sigma.dS = \sigma.S$

d'où $2E(M).S = \frac{\sigma.S}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E}(M) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u_z}$ si $z > 0$

$\vec{E}(M') = \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u_z}$ si $z < 0$

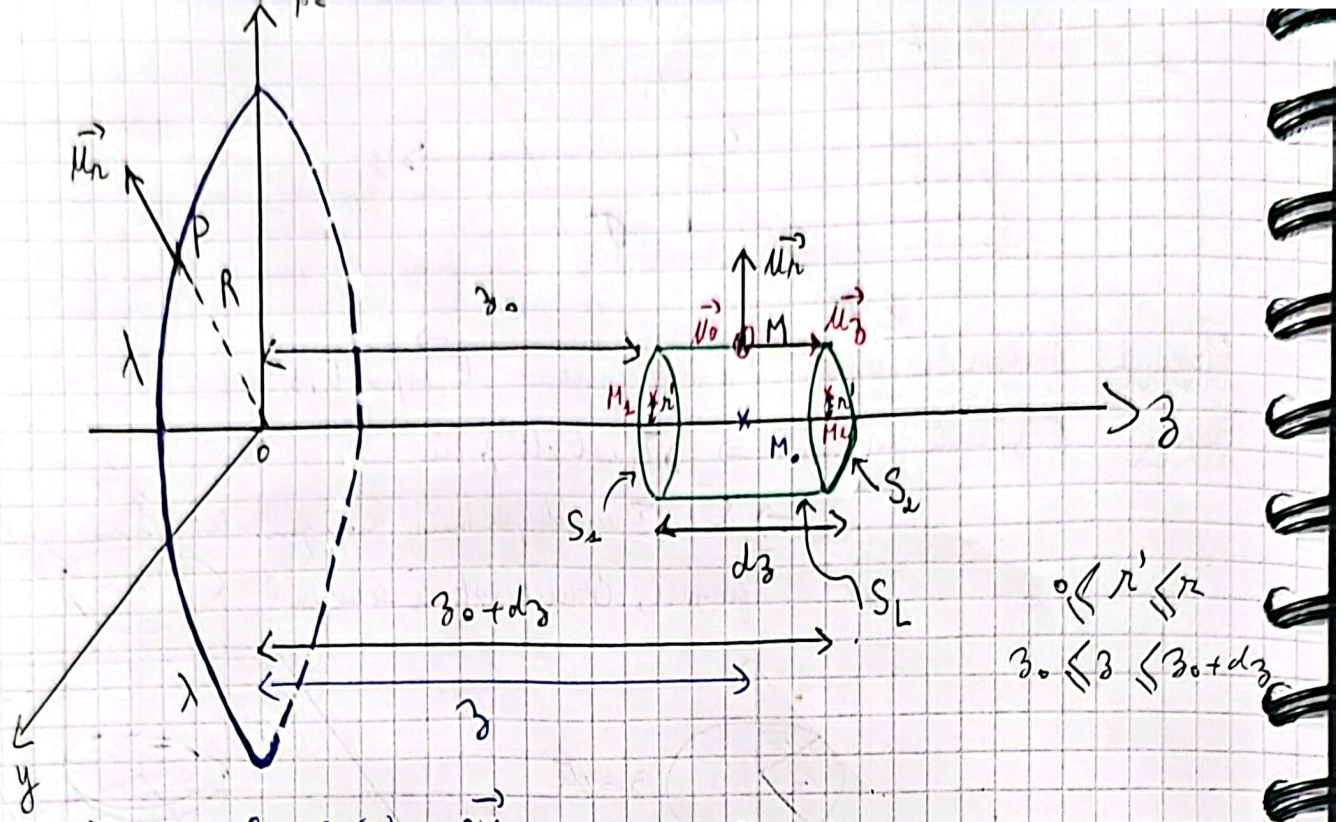
e) Champ créé par une spire :

1) Mq $\vec{E}(M_0) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{(R^2+z^2)^{3/2}}\vec{u_z}$

2) Soit M un point très voisin de M_0. En appliquant le théorème de Gauss Mq :

$$E_r(M) = \frac{-r}{2}\frac{dE_z(M_0)}{dz}$$

Scanné avec CamScanner



1) $\vec{E}(M_0) = \int \frac{\delta Q(P)}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{PM_0}}{PM_0^3}$ avec $\vec{PM_0} = \vec{PO} + \vec{OM_0}$

$= \vec{OM_0} - \vec{OP}$

$\vec{PM_0} = z\vec{u_z} - R\vec{u_r}$

$\vec{E}(M_0) = \int \frac{\delta Q(P)}{4\pi\varepsilon_0} \frac{z\vec{u_z} - R\vec{u_r}}{PM_0^3}$ or (Oz) est un axe de symétrie

d'où $\vec{E}(M_0) = \int \frac{\delta Q(P)}{4\pi\varepsilon_0} \frac{z\vec{u_z}}{PM_0^3} \Rightarrow \vec{E}(M_0) = E(M_0)\vec{u_z}$ or $PM_0 = \sqrt{z^2+R^2} = cte$

donc $\vec{E}(M_0) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \times \frac{z}{(R^2+z^2)^{3/2}} \vec{u_z}$

2) $\iint_\Sigma \vec{E}(M).d\vec{S}(M) = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$ avec $Q_{int} = 0$ d'où :

$$\iint_{M_1 \in S_1} \vec{E}(M_1).d\vec{S_1} + \iint_{M \in S_L} \vec{E}(M).d\vec{S_L} + \iint_{M_2 \in S_2} \vec{E}(M_2).d\vec{S_2} = 0$$

$$\Rightarrow \iint \vec{E}(r', z_0)\,dS_1(-\vec{u_z}) + \iint \vec{E}(r, z)\,dS_L\,\vec{u_r} + \iint \vec{E}(r', z_0+dz)\,dS_2\,\vec{u_z} = 0$$

or $dS_1 = dS_2 = dS$

et $0 \leqslant r' \leqslant r$ tq $r \simeq 0$ (proche de l'axe Oz)

donc $r' \simeq 0$.

donc $\iint \underbrace{[E_z(0; z_0+dz) - E_z(0; z_0)]}_{dE_z(0;z)} \underbrace{dS}_{dr'.r'.d\theta} + \iint E_r(r, z) \underbrace{dS_L}_{r\,d\theta\,dz} = 0$

d'où $dE_z(0;z) \int_0^r r'\,dr' \int d\theta + \int_z^{z+dz} E_r(r, z)\,dz \int d\theta = 0$

Scanné avec CamScanner

or $z_0 \leqslant z \leqslant z_0 + dz$ tq $dz = 0 \Rightarrow z \simeq z_0$

$$dE_z(M_0)\frac{r^2}{2} + r\int_{z_0}^{z_0+dz} E_r(r;z_0)\,dz = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{E_r(r;z_0)}_{M}\,[z]_{z_0}^{z_0+dz} = -\frac{r}{2}\,dE_z(M_0)$$

$$\Rightarrow \left\{ E_r(M) = -\frac{r}{2}\frac{dE_z(M_0)}{dz} \right\}$$

4) Théorème de Gauss en mécanique :

$$\oiint_{M\in\Sigma} \vec{E}(M)\cdot d\vec{S}(M) = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$\begin{cases} \vec{F}_{e_1\to 2} = q_2\vec{E}_1(M_2) = q_2\left(\dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\overrightarrow{M_1M_2}}{\|\overrightarrow{M_1M_2}\|^3}\right) \\ \vec{F}_{g_1\to 2} = m_2\vec{G}_1(M_2) = m_2\left(\dfrac{-Gm_1}{\|\overrightarrow{M_1M_2}\|^3}\overrightarrow{M_1M_2}\right) \end{cases}$$

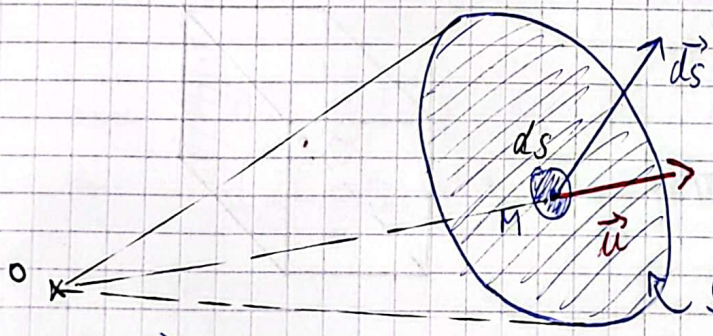
$$\hookrightarrow \begin{cases} \vec{E} \to \vec{G} \\ q \to m \\ -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \to -G \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\oiint_{M\in(\Sigma)} \vec{G}(M)\cdot d\vec{S}(M) = -4\pi G M_{int}}$$

5) Démonstration du théorème de Gauss :

On définit l'angle solide par : $d\Omega = \dfrac{d\vec{S}\cdot\vec{OM}}{OM^3}$ (st) stéradian.

L'angle solide est : $\Omega = \iint d\Omega$

$$= \iint \frac{d\vec{S}\cdot\vec{OM}}{OM^3}$$

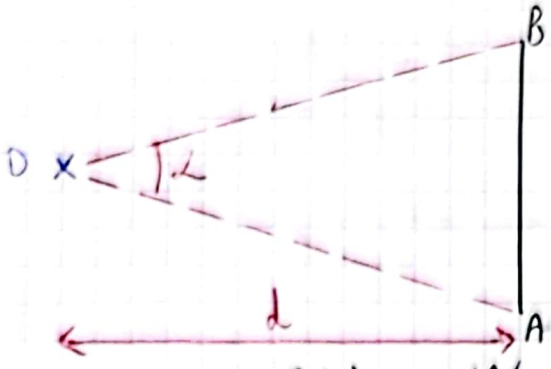


Soit $\vec{OM} = OM\,\vec{u}$.

on a donc $\Omega = \iint \dfrac{d\vec{S}\cdot\vec{u}}{OM^2}$

En optique géométrique, on a définit le diamètre apparent α par :

Scanné avec CamScanner



$\alpha \simeq \frac{AB}{d}$ (rad)

(valable si α faible)

$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{AB/2}{d}$.

Exemple :

↳ la calotte d'une sphère :

Montrer que $\Omega = 2\pi(1-\cos(\alpha))$

$d\vec{\Omega} = \frac{d\vec{S}\cdot\vec{u}}{OM^2} = \frac{(ds\,\vec{u_r})\cdot\vec{u_r}}{r^2}$

$d\Omega = \frac{dS}{dr^2}$ avec $r = R$

$\overrightarrow{dOM} = \begin{vmatrix} dr \\ r\,d\theta \\ r\sin\theta\,d\varphi \end{vmatrix}$

$d\Omega = \frac{dS}{R^2} = \frac{R^2\,d\theta\sin(\theta)\,d\varphi}{R^2}$

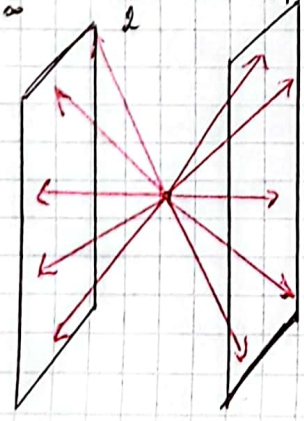
donc $\Omega = \int_0^{\alpha} \sin\theta\,d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \Rightarrow \Omega = 2\pi(1-\cos(\alpha))$

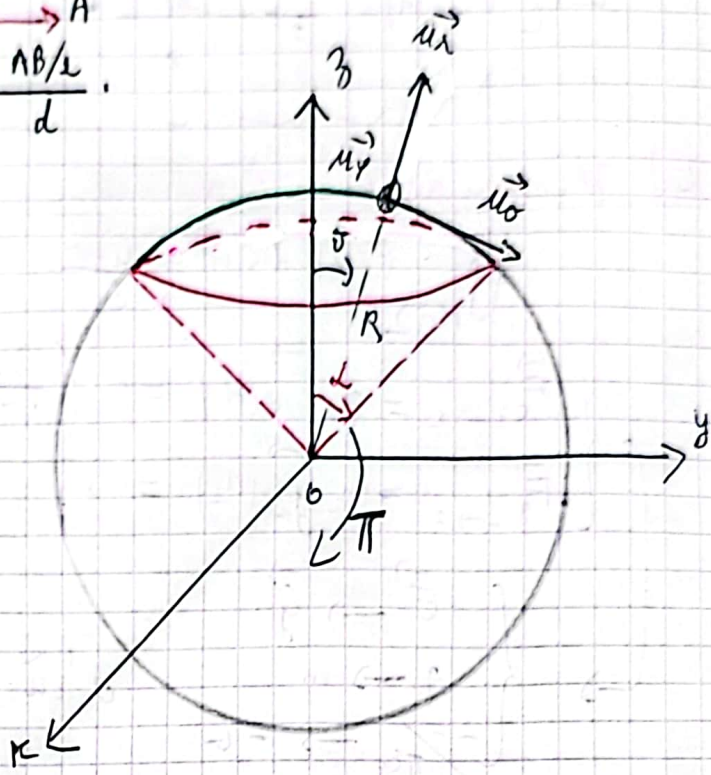
↳ $\Omega_{univers} = \Omega_{sphère} = \underset{\alpha=\pi}{2\pi(1-\cos(\pi))} = 4\pi$

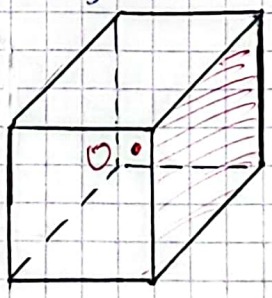
↳ $\Omega_{\text{Face de cube}} = \frac{1}{6}\Omega_{cube} = \frac{1}{6}\Omega_{univers} = \frac{1}{6}\times 4\pi = \frac{2}{3}\pi$

↓ car O est centre du cube

↳ $\Omega_{plan} = \frac{1}{2}\Omega_{univers} = 2\pi$



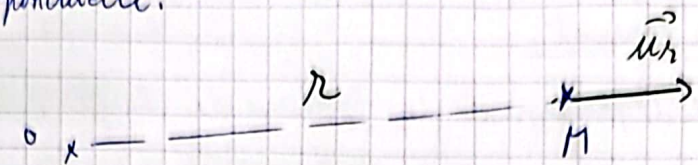




Scanné avec CamScanner

Mq $\iint \vec{E}(M).d\vec{S}(M) = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$

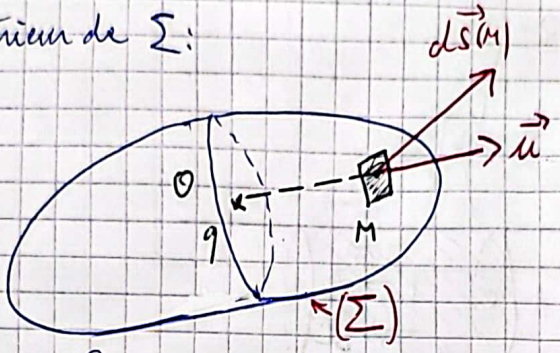
Cas d'une charge ponctuelle :



$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{OM}}{OM^3}$ d'où $\iint_{M\in(\Sigma)} \vec{E}(M).d\vec{S}(M) = \iint \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{OM}}{OM^3} dS$

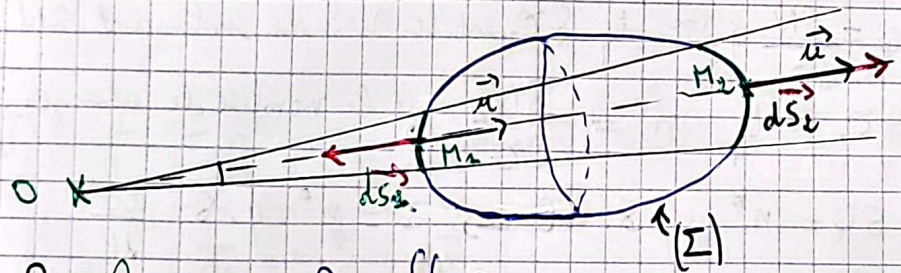
$\iint_{M\in(\Sigma)} \vec{E}(M).d\vec{S}(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \iint_{M\in\Sigma} \frac{d\vec{S}.d\vec{OM}}{OM^3} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\Omega$

↳ Si q à l'intérieur de Σ :



$\Omega = 4\pi$ d'où $\iint \vec{E}(M).d\vec{S}(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \times 4\pi = \frac{q}{\varepsilon_0}$ (1)

↳ Si q à l'extérieur de Σ :



$\Omega = \Omega_1 + \Omega_2$; $\Omega = \iint d\Omega$

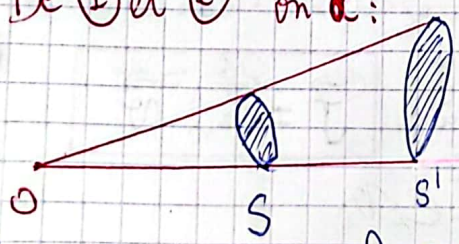
$d\Omega = d\Omega_1 + d\Omega_2$ avec $\begin{cases} d\Omega_1 = \frac{d\vec{S_1}.\vec{OM_1}}{OM_1^3} = \frac{d\vec{S_1}.\vec{u}}{OM_1^2} < 0 \\ d\Omega_2 = \frac{d\vec{S_2}.\vec{OM_2}}{OM_2^3} = \frac{d\vec{S_2}.\vec{u}}{OM_2^2} > 0 \end{cases}$

avec $|d\Omega_1| = |d\Omega_2|$ donc $d\Omega_1 = -d\Omega_2$

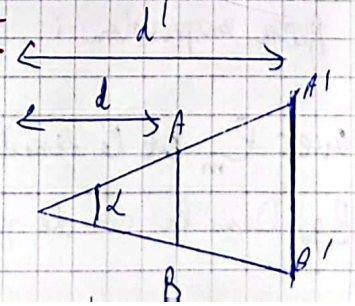
donc $d\Omega = 0$ d'où $\Omega = \iint d\Omega = 0$ d'où $\iint \vec{E}(M).d\vec{S}(M)$

$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \times 0 = 0$ (2)

De (1) et (2) on a : $\iint_{M\in(\Sigma)} \vec{E}(M).d\vec{S}(M) = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$



$\Omega = \Omega'$



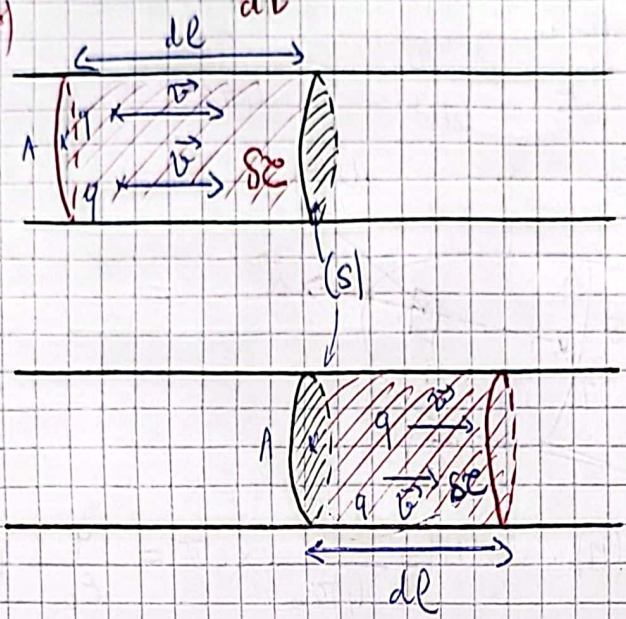
Scanné avec CamScanner

Champ magnétostatique :

I) Distribution du courant :

- le courant est le déplacement des porteurs de charges.
- l'intensité du courant est la quantité des charges qui traverse une section S pendant dt : $I = \frac{\delta Q}{dt}$ [A] c'est le débit de charge

$I = f(S, v, q, n^*)$



$I = \frac{\delta Q}{dt}$ avec $\delta Q = \delta N . q$ tq δN est le nombre de charges traversant S pendant dt $\Rightarrow \delta Q = \frac{\delta N}{\delta \tau} q . \delta \tau$ tq $\delta \tau$ est le volume contenant δN

d'où $\delta Q = n^* . q . \delta \tau$ tq $n^* = \frac{\delta N}{\delta \tau}$ est le nombre de charges par unité de volume. $\delta Q = n^* . q . S . d\ell \Rightarrow I = n^* . q . S . \frac{d\ell}{dt}$

Or $v = \frac{d\ell}{dt}$ est la vitesse des charges

$$\boxed{I = n^* . q . S . v}$$

Vecteur densité volumique de courant :

$$J = \frac{I}{S} = n^* . q . v \quad (A . m^{-2})$$

donc $\vec{J} = n^* . q . \vec{v}$

Autre expression : $n^* . q = \frac{\delta N}{\delta \tau} . q = \frac{\delta Q}{\delta \tau} = \rho_m$

avec ρ_m est la densité volumique des charges mobiles d'où : $\boxed{\vec{J} = \rho_m . \vec{v}}$

Rq : Dans le cas de plusieurs types de charges : $\vec{J} = \sum_i \rho_i v_i$

Scanné avec CamScanner

Exp : cas d'un semi-conducteur : → électrons (-e)
↳ trous (+e)

$$\vec{J}_v = \rho_+ \vec{v}_+ + \rho_- \vec{v}_-$$

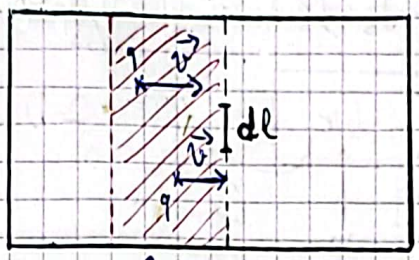
Relation entre I et $\vec{J}$: $\frac{\delta V}{\delta t} = \iint \vec{x} \cdot d\vec{S}$

I est le débit de charge = Flux de $\vec{J}$

$$I = \frac{\delta \varphi}{dt} \Rightarrow I = \iint_{M \in (S)} \vec{J}(M) \cdot d\vec{S}(M)$$

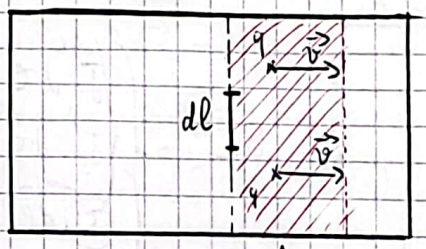
Vecteur densité surfacique de courant :

À t



$\uparrow \delta S$

À t+dt



$\uparrow \delta S$

$$J_S = \frac{I}{L} = n_S^* \cdot q \cdot v \quad (A \cdot m^{-1}) \quad \text{avec} \quad n_S^* = \frac{\delta N}{\delta S}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{J}_S = n_S^* \cdot q \cdot \vec{v}}$$

Autre expression : $n_S^* \cdot q = \frac{\delta N}{\delta S} \cdot q = \frac{\delta \varphi}{\delta S} = \sigma_m$

avec σ_m est la densité surfacique des charges mobiles d'où :

$$\boxed{\vec{J}_S = \sigma_m \cdot \vec{v}}$$

Rq : Dans le cas de plusieurs types de charges : $\vec{J}_S = \sum_i \sigma_i \vec{v}_i$

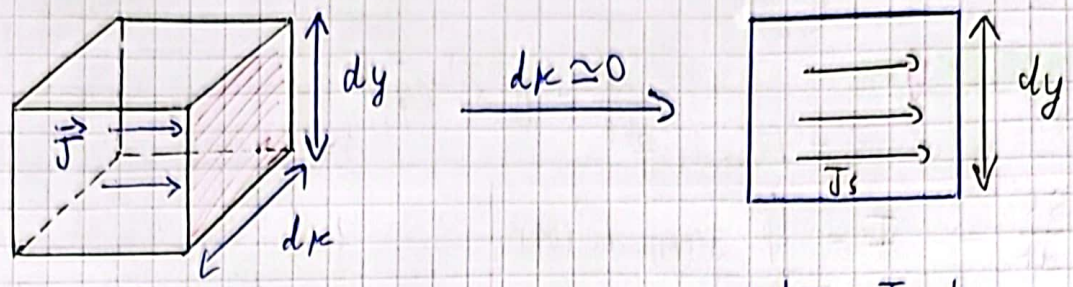
Relation entre $\vec{I}$ et $\vec{J}_S$: $\frac{\delta V}{dt} = \int \vec{x} \cdot dl \cdot \vec{n}$ Flux linéique.

I est le débit de charge = Flux de $\vec{J}_S$

$$I = \frac{\delta \varphi}{dt} \Rightarrow I = \boxed{\int_{M \in L} \vec{J}_S(M) \cdot dl_{(M)} \cdot \vec{n}}$$

Scanné avec CamScanner

Relation entre $\vec{J}$ et $\vec{J}_S$:



$dI = \vec{J} \cdot dx \cdot dy$ ——— $dI = J_S \cdot dy$

$\vec{J}\, dx\, dy = J_S \cdot dy$

$\vec{J}_S = \vec{J} \cdot dx$ ⚠ $dx \simeq 0$

$A.m^{-1}$ $A.m^{-2}$ m on met la distance qui tend vers 0.

Vecteur élément de courant :

$$\delta Q_{(P)} = \begin{cases} \lambda \cdot d\ell \\ \sigma \cdot dS \\ \rho \cdot d\tau \end{cases} \qquad \delta \vec{C}_{(P)} = \begin{cases} \vec{I} \cdot d\vec{\ell} \\ \vec{J}_S \cdot d\vec{S} \\ \vec{J} \cdot d\tau \end{cases}$$

$A.m^{-1}$ $A.m^{-2}$

$I = \vec{J}_\ell \cdot \vec{n}$

Volume : zone de contrôle = surface
Surface : zone de contrôle = ligne
Ligne : zone de contrôle = point

II) Loi de Biot et Savart :

Loi de Coulomb :

$$\vec{E}(M) = \int_{P \in (D)} \frac{\delta Q(P)}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{PM}}{PM^3} \qquad (V.m^{-1})$$

$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9.10^9\ F^{-1}.m$ tq ε_0 est la permittivité du vide

$\varepsilon_a = \varepsilon_0 \times \varepsilon_r$ ↑ dépend des interactions électrostatiques

Loi de Biot et Savart :

(CCP 2005 PC)

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{P \in (D)} \frac{\delta \vec{C}(P) \wedge \vec{PM}}{PM^3} \qquad (T = \text{tesla})$$

$\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7}\ H.m^{-1}$ tq μ_0 est la perméabilité du vide.

$\mu_a = \mu_0 \times \mu_r$ est la perméabilité absolue du milieux.

μ_r est la perméabilité relative du milieu.

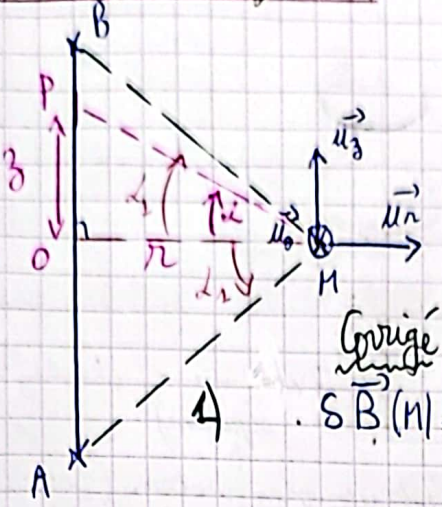
Scanné avec CamScanner

Analogie: $\vec{E} \leftrightarrow \vec{B}$

$\frac{1}{\varepsilon_0} \leftrightarrow \mu_0$

$\delta Q(P) \leftrightarrow \delta \vec{C}(P) \wedge$

App(2): champ créé par un segment:



1) $\vec{B}(M) = ?$

2) déduire le champ créé par un fil ∞

3) Tracez les lignes de champ de $\vec{B}$. Commentez.

Corrigé:

1. $\delta \vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\delta \vec{C}(P) \wedge \vec{PM}}{PM^3}$ tq:

⊕ $\delta \vec{C}(P) = I \cdot d\vec{l}(P) = I \cdot d\vec{OP} = I d(z \vec{u}_z) = I dz \vec{u}_z$

⊕ $\vec{PM} = \vec{PO} + \vec{OM} = \vec{OM} - \vec{OP} = r\vec{u}_r - z\vec{u}_z$

$\delta \vec{C}(P) \wedge \vec{PM} = I dz \vec{u}_z \wedge (r\vec{u}_r - z\vec{u}_z) = I r dz \vec{u}_\theta - \vec{0}$.

$\delta \vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I r dz \vec{u}_\theta}{PM^3} \Rightarrow \vec{B}(M) = \int \delta \vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I r dz}{PM^3} \vec{u}_\theta$

or $r = cte \Rightarrow \vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I r}{4\pi} \int \frac{dz}{PM^3} \vec{u}_\theta$ ($\frac{dz}{PM^3} = f(\alpha)$)

$\begin{cases} \cos(\alpha) = \frac{r}{PM} & ✓ \\ \sin(\alpha) = \frac{z}{PM} & ✗ \\ \tan(\alpha) = \frac{z}{r} & ✓ \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \frac{1}{PM^3} = \frac{\cos^3(\alpha)}{r^3} \\ z = r\tan\alpha \Rightarrow dz = r \frac{d\alpha}{\cos^2(\alpha)} \end{cases}$

$\frac{dz}{PM^3} = r \frac{d\alpha}{\cos^2(\alpha)} \times \frac{\cos^3(\alpha)}{r^3} = \frac{d\alpha}{r^2} \cos\alpha$

$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I r}{4\pi} \int \frac{d\alpha}{r^2} \cos\alpha \vec{u}_\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \int \cos(\alpha) d\alpha \vec{u}_\theta$

$\int_{z_A}^{z_B} dz \longrightarrow \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} d\alpha$ d'où $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} [\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1] \vec{u}_\theta$

2) cas d'un fil infini: $\begin{cases} \alpha_1 \to -\pi/2 \\ \alpha_2 \to \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta$

Scanné avec CamScanner

-) $\vec{B}(M) \wedge d\vec{OM} = \vec{0}$

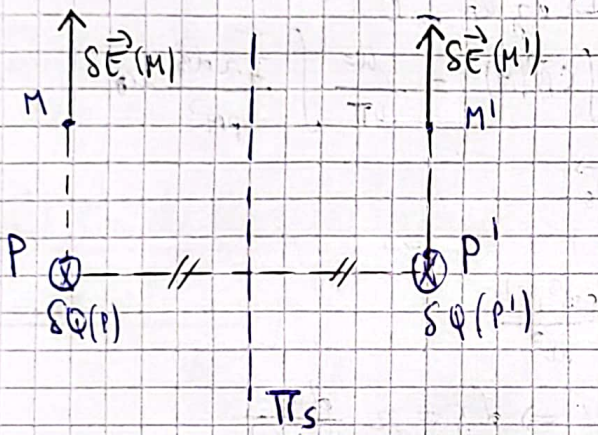
$$\Rightarrow \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} dr \\ r\,d\theta \\ dz \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} dz = 0 \\ 0 = 0 \\ -dr = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = cte \Rightarrow \text{plan} \perp Oz \\ r = cte \Rightarrow \text{cylindre} \end{cases}$$

les lignes de champ sont des cercles d'axe de révolution Oz donc les L.C de $\vec{B}$ sont des courbes fermées.

III) Analyse de symetrie et d'invariance: (il vaut mieux chercher les plans de symetrie)

↳ $\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{P \in (D)} \frac{\delta Q(P)}{PM^3} \vec{PM}$ est un vrai vecteur (vecteur polaire)

donc $\begin{cases} \vec{E}(M) \in \Pi_S \\ \vec{E}(M) \perp \Pi_{A.S} \end{cases}$ de la distribution de charges.



Si $\delta Q(P') = sym\ \delta Q(P)$

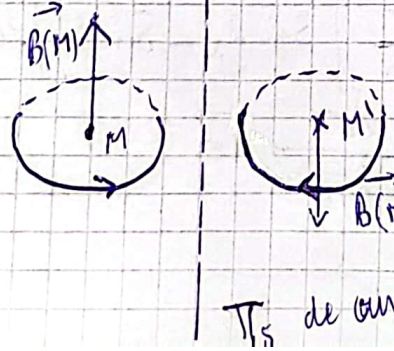
$\Downarrow$

$\delta\vec{E}(M') = Sym_{\Pi_S} \delta\vec{E}(M)$

Si la symetrie des causes $\Rightarrow$ symetrie des effets alors on a un vrai vecteur.

↳ $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\delta\vec{C}(P) \wedge \vec{PM}}{PM^3}$ est un pseudo-vecteur (vecteur axial).

donc $\begin{cases} \vec{B}(M) \in \Pi_{A.S} \\ \vec{B}(M) \perp \Pi_S \end{cases}$ de courant



Si $\vec{I}' = sym\ \vec{I}$

$\Downarrow$

$\vec{B}(M') = antisym\ \vec{B}(M)$

Si la symetrie des causes $\Rightarrow$ antisymetrie des effets on a un pseudo-vecteur

$\vec{V_1V_2} \wedge \vec{V_1V'_2} = \vec{PV}$

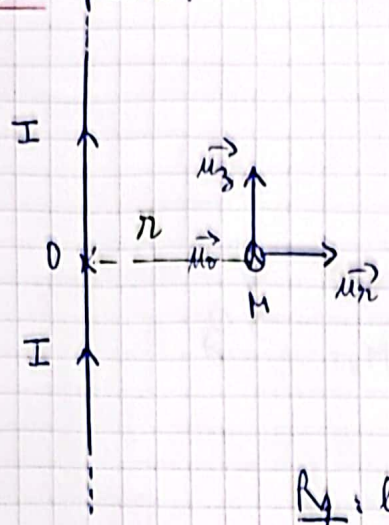
$\vec{V_1V_2} \wedge \vec{PV_2}$; $\vec{PV_1} \wedge \vec{V_1V_2} \rightarrow \vec{PV}$

$\vec{PV_1} \wedge \vec{PV_2} \rightarrow \vec{V_1V_2}$

Scanné avec CamScanner

Analyser les symétries et les invariances

Exp ①: Fil ∞ :

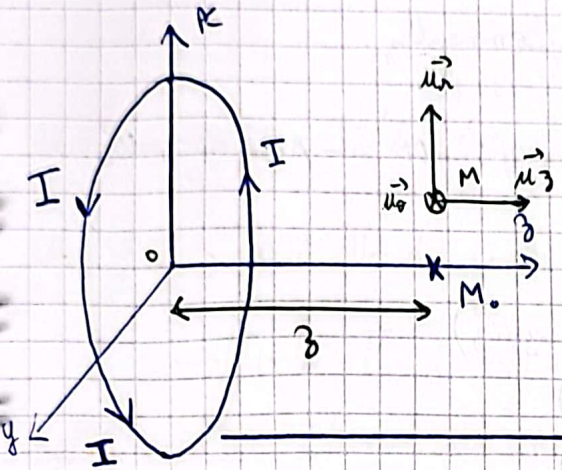


* le plan $(M; \vec{u_r}; \vec{u_z})$ est un plan de symétrie du courant donc $\vec{B}$ est porté par $\vec{u_\theta}$
* la distribution du courant est invariante par rotation d'angle θ et translation suivant $\vec{z}$ donc $\vec{B}$ ne dépend que de r.

CCL $\vec{B}(M) = B(r)\,\vec{u_\theta}$

Rq : le plan $(M; \vec{u_r}; \vec{u_\theta})$ est un plan d'antisymétrie de la distribution du courant donc $\vec{B}$ ∈ à ce plan

Exp ②: Spire circulaire



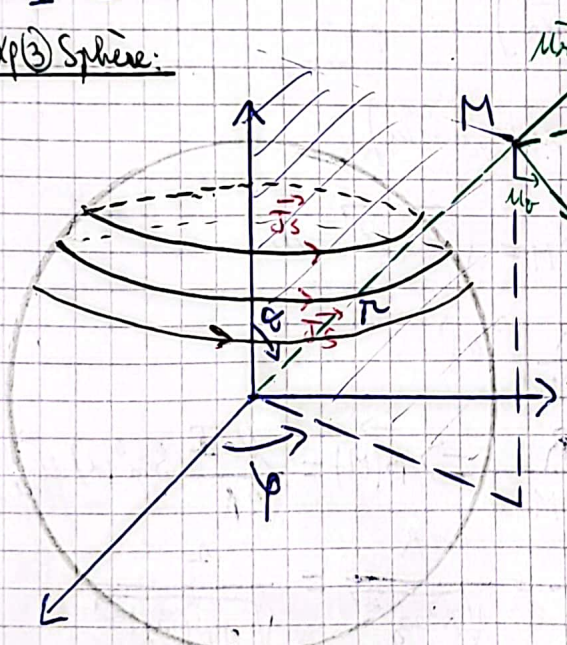
* Tout plan contenant l'axe $(M_0; \vec{z})$ est un P.A donc le champ $\vec{B}(M_0)$ est porté par $\vec{u_z}$
* La distribution du courant est invariante par rotation d'angle θ donc $\vec{B}$ ne dépend pas de θ.

$\vec{B}(M_0) = ?$ CCL $\vec{B}(M_0) = B(r;z)\,\vec{u_z}$

$\vec{B}(M') = ?$ mais $r = 0$ car $M_0 \in (O_z)$

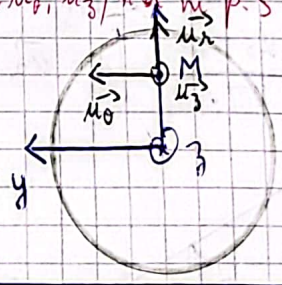
donc $\vec{B}(M_0) = B(z)\,\vec{u_z}$

Exp ③ Sphère:



* le plan $(M; \vec{u_r}; \vec{u_\varphi})$ est un P.A de la distribution du courant donc $\vec{B}$ à ce plan. CCL : $\vec{B}(M) = B_r(r;z)\,\vec{u_r} + B_z(r;z)\,\vec{u_z}$

△ $(M; \vec{u_\theta}; \vec{u_z})$ n'est ni P.S ni P.A



Le plan $(M; \vec{u_r}; \vec{u_\theta})$ est un plan d'antisymétrie de la distribution du courant donc $\vec{B}$ appartient à ce plan.

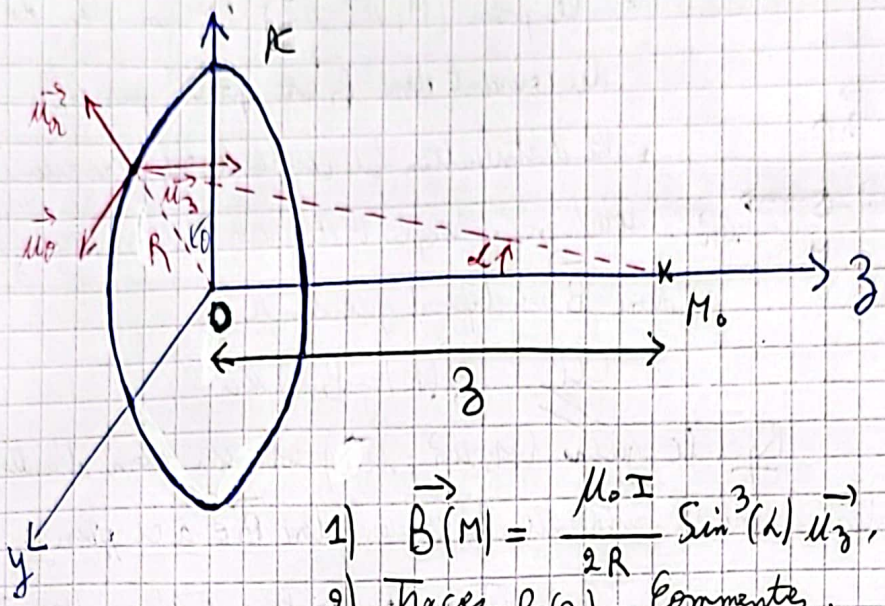
Le plan $(M; \vec{u_r}; \vec{u_\varphi})$ ne présente ni plan de sym ni plan d'antisym du courant.

La distribution du courant est invariante par rotation d'angle φ donc $\vec{B}$ ne dépend pas de

CCL : $\vec{B}(M) = B_r(r;\theta)\,\vec{u_r} + B_\theta(r;\theta)\,\vec{u_\theta}$

Scanné avec CamScanner

Application (2) : Champ créé par une spire :



1) $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3(\alpha)\, \vec{u_z}$.

2) Tracez $B(z)$. Commentez.

1) $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{dC}(P) \wedge \vec{PM}}{PM^3}$ avec $\vec{PM} = \vec{PO} + \vec{OM} = -R\vec{u_r} + z\vec{u_z}$

$\vec{dC}(P) = I\vec{dl}(P) = I\vec{dOP} = IR\,d\theta\,\vec{u_\theta}$

$\Rightarrow \vec{dC}(P) \wedge \vec{PM} = IR\,d\theta\,\vec{u_\theta} \wedge (-R\vec{u_r} + z\vec{u_z})$

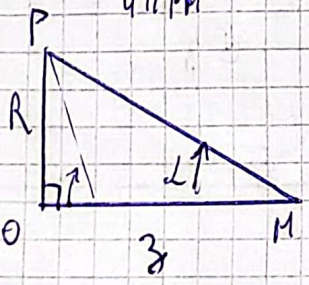
$= IR\,d\theta\,(R\vec{u_z} + z\vec{u_r})$

or $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{P \in (D)} \frac{IR\,d\theta}{PM^3} (R\vec{u_z} + z\vec{u_r})$

or $\vec{B}(M) = B(M)\vec{u_z}$ ((Oz) est axe d'isométrie)

$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 IR}{4\pi} \int \frac{R}{PM^3} d\theta\, \vec{u_z}$ or $PM = \sqrt{R^2 + z^2} = cte$

$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 IR^2}{4\pi PM^3} \int d\theta\, \vec{u_z} = \frac{\mu_0 I}{2R} \left(\frac{R}{PM}\right)^3 \vec{u_z}$



or $\sin\alpha = \frac{R}{PM} \Rightarrow \vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3(\alpha)\, \vec{u_z}$

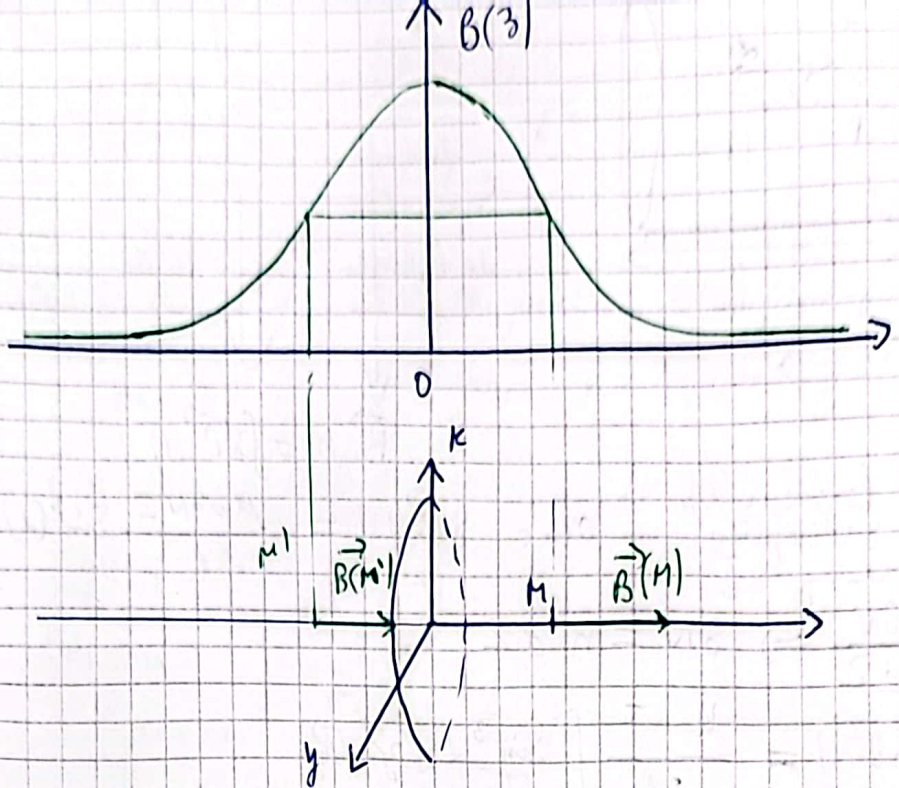
2) $\sin\alpha = \frac{R}{PM} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (z/R)^2}}$

$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2R} \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{z}{R}\right)^2\right)^{1/2}} \vec{u_z}$

$B(0) = B(z=0) = B(\alpha = \pi/2) = \frac{\mu_0}{2R} = B_{max}$ ⊛ Si $z \nearrow \Rightarrow B(z) \searrow$

$B(z \to \infty) = 0$ car la distribution est finie ⊛ $B(-z) = B(z)$

Scanné avec CamScanner

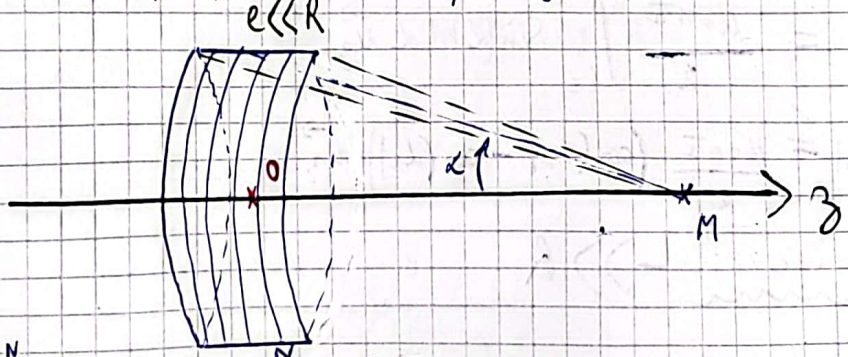


le plan (Oxy) = Π_S du courant $\Rightarrow$ le plan (Oxy) = $\Pi_{A.S}$ du champ magnétique

Ccl : ↳ Tout Π_S du courant est un $\Pi_{A.S}$ du champ $\vec{B}$

↳ Tout Π_S de charge est un Π_S du champ $\vec{E}$

Application 3 : Champ créé par une bobine plate de rayon R, d'épaisseur $e \ll R$ (plate) et de N spires jointives.



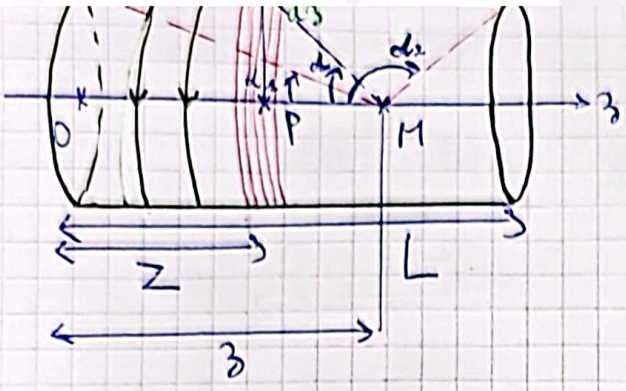
$$\vec{B}(M) = \sum_{i=1}^{N} \vec{B}_{Sp\,i}(M) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3(\alpha)\,\vec{u_z}$$

Or $e \ll R \Rightarrow \alpha \simeq$ cte $\Rightarrow \vec{B}(M) = N \cdot \vec{B}_{Sp}$

donc $$\vec{B}(M) = \frac{N \mu_0 I}{2R} \sin^3(\alpha)\,\vec{u_z}$$

Application 4 : Champ magnétique créé par un solénoïde de rayon R, de longueur l et de N spires jointives. On pose $n = \frac{N}{L}$ le nombre de spires par unité de longueur. Déterminer $\vec{B}(M)$ en tout point M de l'axe (Oz)

Scanné avec CamScanner



Solénoide { longueur L, N spires, champ $\vec{B}$ }

donc Superposition de Bobines plates

th de superposition

$$\vec{B}(M) = \int \delta\vec{B}(M)$$

Bobine plate { longueur dz, δN spires, champ $\delta\vec{B}$ } avec $\delta\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 \delta N I}{2R} \sin^3(\alpha)\,\vec{u}_z$

$$n = \frac{N}{L} = \frac{\delta N}{dZ} \Rightarrow \delta N = n\,dZ$$

$$\vec{B}(M) = \int \delta\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 n I}{2R} \int_P \sin^3\alpha\, dZ\, \vec{u}_z$$

or $\tan\alpha = \frac{R}{PM} = \frac{R}{z-Z} \Rightarrow z - Z = \frac{R}{\tan\alpha}$ avec $z = z(M)$, $Z = Z(P)$

$\xrightarrow{d}$ $d(z-Z) = d\left(\frac{R}{\tan\alpha}\right)$

$$\Rightarrow -dZ = \frac{-R}{\sin^2(\alpha)}\, d\alpha$$

d'où $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 n I}{2R} \int \sin^3(\alpha) \frac{R}{\sin^2(\alpha)} d\alpha\, \vec{u}_z$

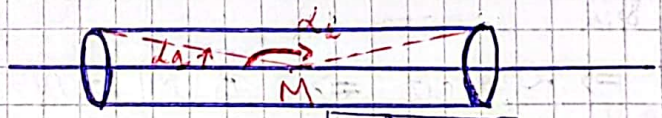
$$= \frac{\mu_0 n I}{2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin(\alpha)\, d\alpha\, \vec{u}_z$$

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 n I}{2} \left(\cos(\alpha_1) - \cos(\alpha_2)\right) \vec{u}_z$$

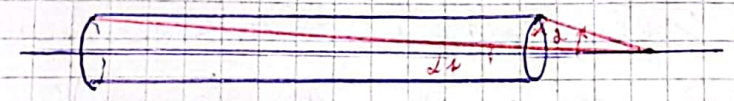
Cas d'un solénoide où : $L \gg R$

↳ Si M est à l'intérieur : $\alpha_1 = 0$; $\alpha_2 = \pi$

$$\vec{B}(M) = \mu_0 n I \vec{e}_z \quad (1)$$



↳ Si M est à l'extérieur : $\alpha_1 \simeq \alpha_2 \longrightarrow \vec{B}(M) = \vec{0}$ (2)



(1) ; (2) valables loin des bords.

Scanné avec CamScanner

Les lois locales de l'électrostatique :

I) Équation de Maxwell – Faraday :

1) Circulation du champ :

La circulation du champ du point M_1 au point M_2 est définie par :

$$\mathcal{C}_{M_1 \to M_2} = \int_{M_1}^{M_2} \vec{E}(M) \cdot d\vec{OM} \quad \text{or} \quad \vec{E}(M) = -\overrightarrow{grad}\, V(M)$$

$$\Rightarrow \vec{E}(M) \cdot d\vec{OM} = -\overrightarrow{grad}\, V(M) \cdot d\vec{OM} = -dV$$

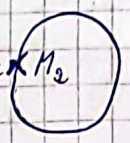
en effet, $\overrightarrow{grad}\, f \cdot d\vec{OM} = df$ d'où

$$\mathcal{C}_{M_1 \to M_2} = -\int_{M_1}^{M_2} dV(M)$$

donc $\mathcal{C}_{M_1 \to M_2} = -[V(M_2) - V(M_1)]$ ne dépend pas du chemin suivi

$V(M_2) - V(M_1)$ = d.d.p = tension

Le long d'un contour fermé : $M_1 \equiv M_2$.



on a : $\boxed{\oint \vec{E}(M) \cdot d\vec{OM} = 0}$ $\vec{E}$ est à circulation conservative

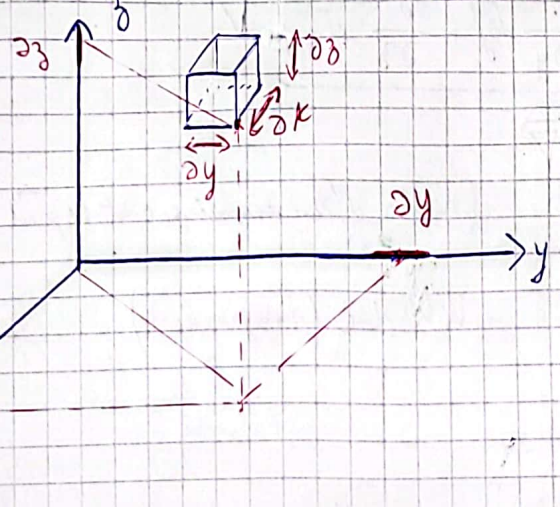
Relation intégrale.

relation intégrale ⇔ extensive

relation locales ⇔ intensives

Rq : $\vec{E}(M) = -\overrightarrow{grad}\, V(M)$ est une relation locale.

En coordonnées cartésiennes : $\overrightarrow{grad}\, V(M) = \frac{\partial V}{\partial x}\vec{u_x} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{u_y} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{u_z}$



2) Opérateur rotationnel d'un champ vecteur :

a) Définition : le rotationnel est un opérateur mathématique qui transforme un champ vecteur en un champ vecteur.

$\overrightarrow{rot}$ (champ vecteur) = champ vecteur.

$\overrightarrow{grad}$ (champ scalaire) = champ vecteur.

Scanné avec CamScanner

b) Expression de rot :

↳ En coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{rot}(\vec{E}) = \begin{vmatrix} \vec{u_x} & \vec{u_y} & \vec{u_z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = +\vec{u_x}\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right) - \vec{u_y}\left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z}\right) + \vec{u_z}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)$$

$$= \underbrace{\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix}}_{\vec{\nabla}} \wedge \underbrace{\begin{vmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{vmatrix}}_{\vec{E}}$$

on définit l'opérateur nabla en coordonnées cartésiennes par :

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{u_x} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{u_y} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{u_z} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix}$$

d'où $\overrightarrow{rot}(\vec{E}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{E}$

de même $\overrightarrow{grad}\, V = \frac{\partial V}{\partial x}\vec{u_x} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{u_y} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{u_z}$

$$\overrightarrow{grad}\, V = \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{u_x} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{u_y} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{u_z}\right)}_{\vec{\nabla}} . V$$

$$\overrightarrow{grad}\, V = \vec{\nabla} . V$$

(nabla d'un scalaire c'est le grad de ce scalaire)

↳ En coordonnées cylindriques. Voir doc (paragraphe 4)

↳ En coordonnées sphériques.

c) EXERCICES :

EX1.

Soit $\vec{v}(M) = r\omega\, \vec{u_\theta}$ un champ de vitesse défini en coordonnées cylindriques

$\omega = cte$

1) Donner l'expression de $\overrightarrow{rot}(\vec{v})$ en utilisant 2 méthodes différentes.

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{V} = \begin{vmatrix} \frac{1}{r}\vec{u_r} & r\vec{u_\theta} & \frac{1}{r}\vec{u_z} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_r & & \end{vmatrix} \quad ; \quad \overrightarrow{rot}\,\vec{v} = \vec{\nabla} \wedge \vec{v}$$

Scanné avec CamScanner

2) Tracez les lignes de champ de $\vec{v}$. commenter.

1)a) or $\vec{v} = r\omega \vec{u_\theta} \Rightarrow \begin{cases} v_r = v_z = 0 \\ v_\theta = r\omega \end{cases}$

$$\vec{rot}\,\vec{v} = \begin{vmatrix} \frac{1}{r}\vec{u_r} & \vec{u_\theta} & \frac{1}{r}\vec{u_z} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & r^2\omega & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{r}\vec{u_r}\left(0 - \frac{\partial r^2\omega}{\partial z}\right) - \vec{u_\theta}(0-0) + \frac{1}{r}\vec{u_z}\left(\frac{\partial r^2\omega}{\partial r} - 0\right)$$

⚠ $(r;\theta;z)$ sont indépendantes $\Rightarrow \frac{\partial r^2\omega}{\partial z} = 0$

$$= \frac{1}{r}\vec{u_z}\frac{\partial r^2}{\partial r}\omega = \frac{1}{r}\vec{u_z}\, 2r\frac{\partial r}{\partial r}\omega = 2\omega\vec{u_z}$$

b) $\vec{rot}\,\vec{v} = \vec{\nabla} \wedge \vec{v}$.

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r}\vec{u_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\vec{u_\theta} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{u_z}$$

$$\vec{rot}\,\vec{v} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & v_r = 0 \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \wedge & v_\theta = r\omega \\ \frac{\partial}{\partial z} & v_z = 0 \end{vmatrix} = \left(0 - \frac{\partial(r\omega)^0}{\partial z}\right)\vec{u_r} - (0-0)\vec{u_\theta} + \left(\frac{\partial(r\omega)}{\partial r} - 0\right)\vec{u_z} = \omega\vec{u_z} \neq 2\omega\vec{u_z}$$

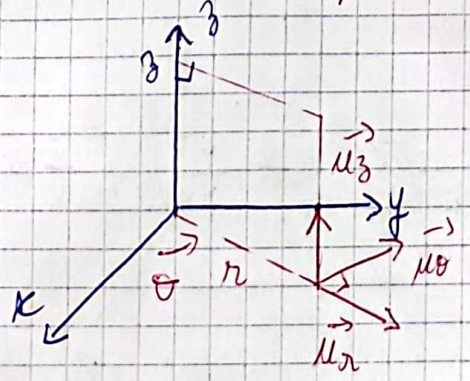
~~$\vec{rot}\,\vec{v} = \vec{\nabla} \wedge \vec{v}$ n'est valable qu'en coordonnées cartésiennes.~~

$$\vec{rot}\,\vec{v} = \vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \left(\frac{\partial}{\partial r}\vec{u_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\vec{u_\theta} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{u_z}\right) \wedge \left(r\omega\vec{u_\theta}\right)$$

$$= \vec{u_r} \wedge \frac{\partial(r\omega\vec{u_\theta})}{\partial r} + \frac{\vec{u_\theta}}{r} \wedge \frac{\partial(r\omega\vec{u_\theta})}{\partial \theta} + \vec{u_z} \wedge \frac{\partial(r\omega\vec{u_\theta})}{\partial z}$$

⚠ $\vec{u_z}$ = cte ; $\vec{u_r}$ et $\vec{u_\theta}$ dépendent de θ et ne dépendent pas de r et z.

en effet



$$d\vec{u_r} = d\theta\,\vec{u_\theta}$$
$$d\vec{u_\theta} = -d\theta\,\vec{u_r}$$
$$\text{donc } \frac{\partial\vec{u_\theta}}{\partial\theta} = -\vec{u_r}$$

or $\vec{v} = r\omega\vec{u_\theta} \Rightarrow \begin{cases} v_r = v_z = 0 \\ v_\theta = r\omega \end{cases}$

Scanné avec CamScanner

donc $\vec{rot}\,\vec{v} = \vec{u_r} \wedge \omega \vec{u_\theta} \frac{\partial r}{\partial r} + \frac{\vec{u_\theta}}{r} \wedge r\omega \frac{\partial \vec{u_\theta}}{\partial \theta} + \vec{0}$

($\vec{u_\theta}$ ne dépend pas de r ; $\vec{u_\theta}$ dépend de θ)

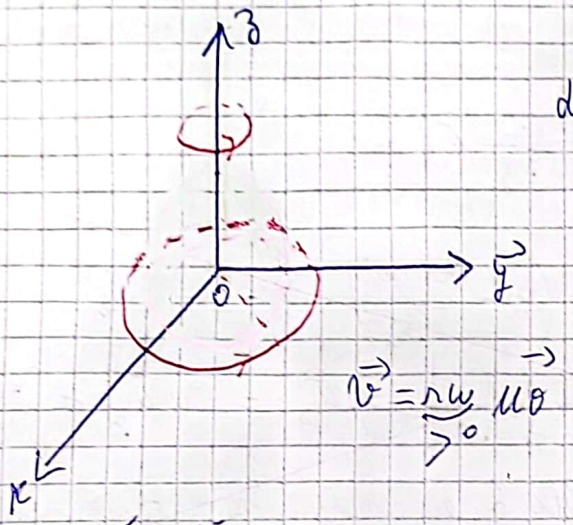
donc $\vec{rot}\,\vec{v} = \omega \vec{u_r} \wedge \vec{u_\theta} + \omega \vec{u_\theta} \wedge (-\vec{u_r}) = 2\omega \vec{u_r} \wedge \vec{u_\theta}$

$$\vec{rot}\,\vec{v} = 2\omega \vec{u_z}$$

2) $\vec{v} \wedge \vec{dOM} = \vec{0} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 \\ r\omega \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} dr \\ r\,d\theta \\ dz \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} r\omega\, dz = 0 \\ 0 = 0 \\ -r\omega\, dr = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = cte \\ \text{et} \\ r = cte \end{cases}$ Equation d'un plan. / équation d'un cylindre.

$\Rightarrow$ c'est l'équation d'un cercle.



Les L.C sont des cercles d'axe de révolution $(Oz) \Rightarrow$ Les lignes de champ sont des courbes fermées $\Rightarrow$ $\vec{v}$ est un champ tourbillonnaire

$\vec{v} = \underbrace{r\omega}_{>0} \vec{u_\theta}$

$\vec{rot}\,\vec{v} = 2\omega \vec{u_z} \neq \vec{0}$

Axe de rotation.

Ex: En coordonnées sphériques.

a) $\vec{rot}\,\vec{u_r} = ?$ b) $\vec{rot}\,\vec{u_\theta} = ?$ c) déduire $\vec{rot}\,\vec{u_\varphi}$ sans calcul.

$$\vec{rot}\,\vec{u_r} = \begin{vmatrix} \frac{1}{r^2 \sin\theta} \vec{u_r} & \frac{1}{r\sin\theta} \vec{u_\theta} & \frac{1}{r} \vec{u_\varphi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{r^2 \sin\theta} \vec{u_r}(0-0) - \frac{1}{r\sin\theta} \vec{u_\theta}\left(0 - \frac{\partial 1}{\partial \varphi}\right) + \frac{1}{r} \vec{u_\varphi}\left(0 - \frac{\partial 1}{\partial \theta}\right)$$

$$= \vec{0}$$

b) $\vec{rot}\,\vec{u_\theta} = \begin{vmatrix} \frac{1}{r^2\sin\theta} \vec{u_r} & \frac{1}{r\sin\theta} \vec{u_\theta} & \frac{1}{r} \vec{u_\varphi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & r\times 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{r^2\sin\theta} \vec{u_r}\left(0 - \frac{\partial r}{\partial \varphi}\right) - \frac{1}{r\sin\theta} \vec{u_\theta}(0-0)$

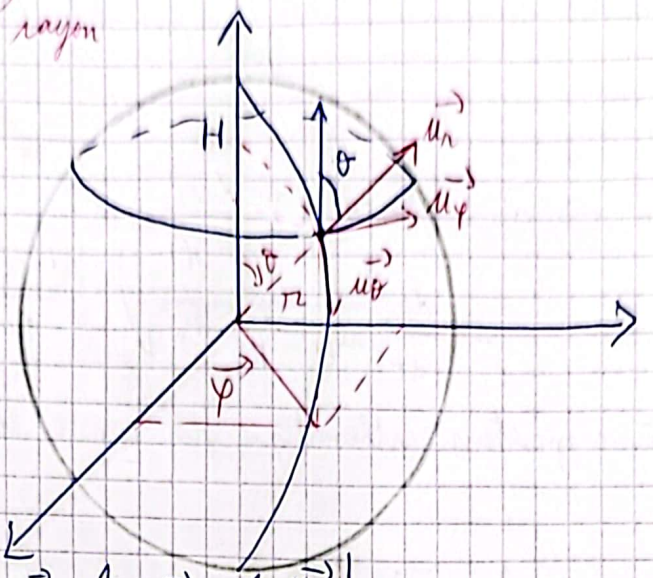
$$+ \frac{1}{r} \vec{u_\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial r} - 0\right)$$

Scanné avec CamScanner

$\vec{rot}\,\vec{u_\theta} = \dfrac{\vec{u_\varphi}}{r}$ Axe de rotation

rayon

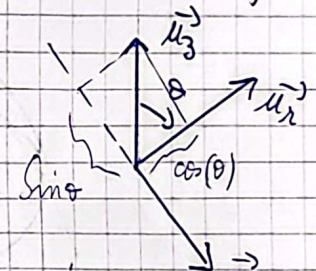
c)



$$\vec{rot}\,\vec{u_\varphi} = \begin{vmatrix} \frac{1}{r^2\sin\theta}\vec{u_r} & \frac{1}{r\sin\theta}\vec{u_\theta} & \frac{1}{r}\vec{u_\varphi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\varphi} \\ 0 & 0 & r\sin\theta \end{vmatrix}$$

$$\vec{rot}\,\vec{u_\varphi} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\vec{u_r}\left(\frac{\partial(r\sin\theta)}{\partial\theta} - 0\right) - \frac{1}{r\sin\theta}\vec{u_\theta}\left(\frac{\partial r\sin\theta}{\partial r} - 0\right)$$

car

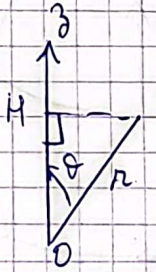


$$= \frac{1}{r\sin\theta}\underbrace{\left(\cos(\theta)\vec{u_r} - \sin(\theta)\vec{u_\theta}\right)}_{\vec{u_z}}$$

$\vec{u_z}$ fixe de rotation

$$\vec{rot}\,\vec{u_\varphi} = \frac{\vec{u_z}}{r\sin\theta} = \frac{HM}{r}$$

rayon

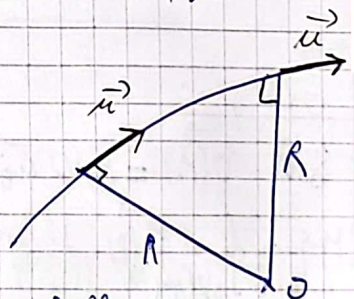


$$\sin(\theta) = \frac{HM}{r}$$

$$\Rightarrow HM = r\sin(\theta)$$

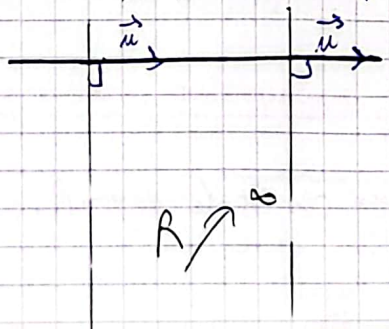
Cl: $\vec{rot}\,\vec{u} = \dfrac{\vec{n}}{R}$ ← axe de rotation

↖ rayon.



⊛ Si $R \nearrow \Rightarrow \|\vec{rot}\,\vec{u}\| \searrow$

⊕ Si $R \nearrow^{\infty} \Rightarrow \vec{rot}\,\vec{u} = \vec{0}$ pas de caractère tourbillonaire.



Scanné avec CamScanner

⊕ Si $R \downarrow \Rightarrow \|\vec{rot}\ \vec{u}\| \nearrow$ $\vec{u}$ (A) $\vec{u}$

⊕ Si $R \simeq 0 \Rightarrow \|\vec{rot}\ \vec{u}\| \nearrow^{\infty}$ $\vec{u}$ ↻ $\vec{u}$ fort caractère tourbillonnaire

Analogie avec FRENET:

$$\vec{v} = v\vec{u_t} \Rightarrow \vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{u_t} + v\frac{d\vec{u_t}}{dt}$$

$$= \frac{dv}{dt}\vec{u_t} + \frac{v^2}{R_c}\vec{u_N}$$

$\vec{rot}$ ↙ $\left(\frac{d\vec{u_t}}{dA}\right) = \frac{\vec{u_N}}{R_c}$.

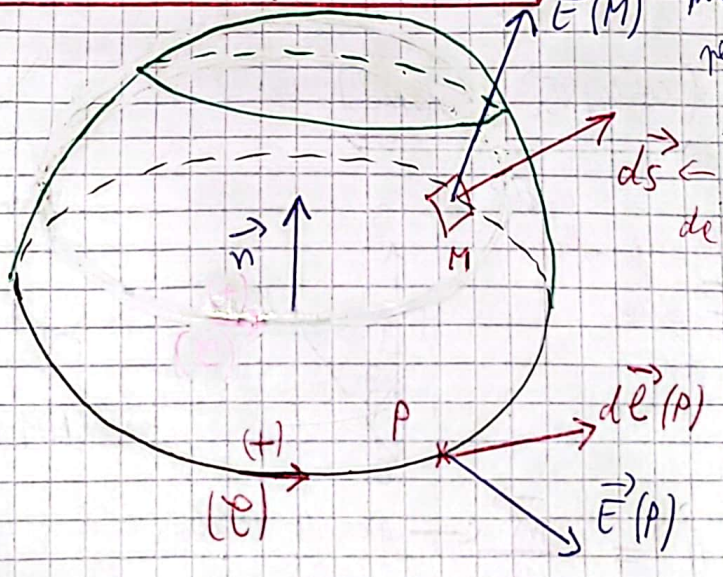
Le rotationnel est un opérateur mathématique qui mesure le caractère tourbillonnaire d'un champ.

3) Théorème de Stokes-Ampère: (voir paragraphe 5).

La circulation du champ $\vec{E}(P)$ le long d'un contour fermé orienté $(\mathcal{C})$ est égale au flux de $\vec{Rot}\,\vec{E}(M)$ à travers une surface s'appuyant sur le contour.

$$\oint_{P\in(\mathcal{C})} \vec{E}(P).d\vec{l}_{(P)} = \iint_{M\in(S)} \vec{rot}\,\vec{E}(M).d\vec{S}(M)$$

Sinon $\vec{rot}(\vec{E}) \neq \vec{0}$ donc la circulation de $\vec{E}$ qui est une tension ne sera plus conservative donc la loi des mailles ne sera plus valable



Exemple:

Soit $\vec{v}(M) = r\omega\vec{u_\theta}$

Mq $\oint_{P\in(\mathcal{C})} \vec{v}(P).d\vec{l}(P) = \iint_{M\in(S)} \vec{rot}\,\vec{v}(M).d\vec{S}(M)$

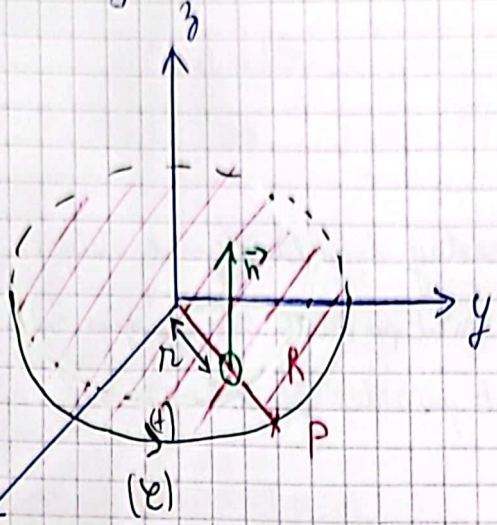
Réponse:

↳ $\int_{(\mathcal{C})} \vec{v}(P).d\vec{l}(P) = ?$

$d\vec{\ell} \,//\, \vec{v} \Rightarrow d\vec{\ell} = dl\,\vec{u_\theta}$ donc $(\mathcal{C})$ est un cercle de rayon R.

Scanné avec CamScanner

$$\oint \vec{V}(P)\cdot d\vec{\ell}(P) = \oint R\omega \vec{u}_\theta \cdot dl\,\vec{u}_\theta = R\omega \oint R\,d\theta = 2\pi R^2\omega.$$



$h = OM$

$R = OP$

↳ $\iint \vec{rot}\,\vec{v}(M)\cdot d\vec{S}(M) = ?$

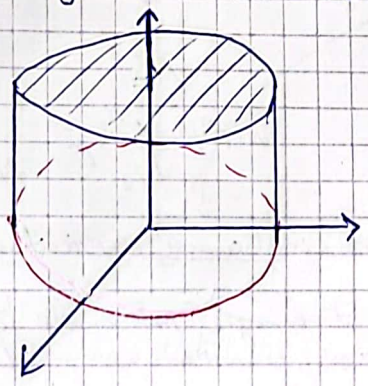
$d\vec{S} \,//\, \vec{rot}\,\vec{v} = 2\omega \vec{u}_z \Rightarrow d\vec{S} = dS\,\vec{n} \,//\, \vec{u}_z$

$\Rightarrow \vec{n} = \vec{u}_z \perp dS$ d'où (S) est un disque de rayon R.

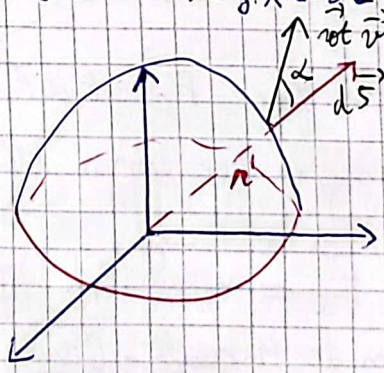
$$\iint \vec{rot}\,\vec{v}(M)\cdot d\vec{S}(M) = \iint 2\omega \vec{u}_z \cdot dS\,\vec{u}_z = 2\omega \iint dS = 2\omega\pi R^2$$

d'où $\oint \vec{v}(P)\cdot d\vec{S}(P) = \iint \vec{rot}\,\vec{V}(M)\cdot d\vec{S}(M)$.

Rq :



$\vec{rot}\,\vec{v}(M)\,dS_\perp = 2\omega \vec{u}_z \times dS_\perp \vec{u}_n = 0$



4) Equation de Maxwell - Faraday :

Théorème de Stokes : $$\oint_{P\in(\ell)} \vec{E}(P)\cdot d\vec{\ell}(P) = \iint_{M\in(S)} \vec{rot}\,\vec{E}(M)\cdot d\vec{S}(M)$$ (1)

↳ $\vec{E}$ est à circulation conservative :

Relation intégrale

$$\oint_{P\in(\ell)} \vec{E}(P)\cdot d\vec{\ell}(P) = 0$$ (2)

Scanné avec CamScanner

D'après ① et ② : $\iint_{M \in (S)} \overrightarrow{rot}\,\vec{E}(M) \cdot d\vec{S}(M) = 0$

$\Rightarrow$ $\boxed{\overrightarrow{rot}\,\vec{E}(M) = \vec{0}}$ ← relation locale

Équation de Maxwell-Faraday dans le régime statique.

(n'est pas valable dans le régime variable)

$\hookrightarrow$ Les L.C de $\vec{E}$ ne sont pas des courbes fermées càd $\vec{E}$ est un champ non tourbillonnaire.

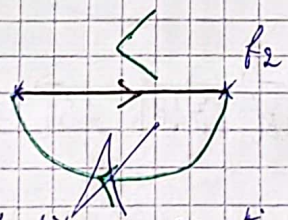
Rq ① :

$$\begin{cases} \vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V \\ \overrightarrow{rot}\,\vec{E} = \vec{0} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{rot}(-\overrightarrow{grad}\,V) = \vec{0}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{grad}\,f) = \vec{0}}$ voir p8-2

$\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} f = \vec{0}$ ↓ en effet ($\vec{\nabla} f = \overrightarrow{grad}\,f$)

Le grad f est dirigé vers les f ↗ donc le grad f ne peut jamais être une courbe fermée.



$$W(\vec{F}) = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F} \cdot d\vec{OM}$$

Rq ② : une force $\vec{F_c}$ est dite conservative, si son travail ne dépend pas du chemin suivi, dans ce cas on définit un scalaire dit énergie potentielle E_p :

$$\vec{F_c} = -\overrightarrow{grad}\,(E_p) \Leftrightarrow \overrightarrow{rot}\,\vec{F_c} = \vec{0}$$

II) Équation de Maxwell-Gauss :

1) Théorème de Gauss :

$$\oiint_{P \in (\Sigma)} \vec{E}(P) \cdot d\vec{S}(P) = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

2) opérateur divergence d'un champ vecteur : (p-3)

a) définition : divergence est un opérateur mathématique qui transforme un champ vecteur en un champ scalaire : div(champ vecteur) = champ scalaire

Scanné avec CamScanner

b) Expression de div :

↳ en coordonnées cartésiennes :

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{u_x} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{u_y} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{u_z}\right)}_{\vec{\nabla}} \cdot \underbrace{\left(E_x\vec{u_x} + E_y\vec{u_y} + E_z\vec{u_z}\right)}_{\vec{E}}$$

donc $\operatorname{div}\vec{E} = \vec{\nabla}\cdot\vec{E}$

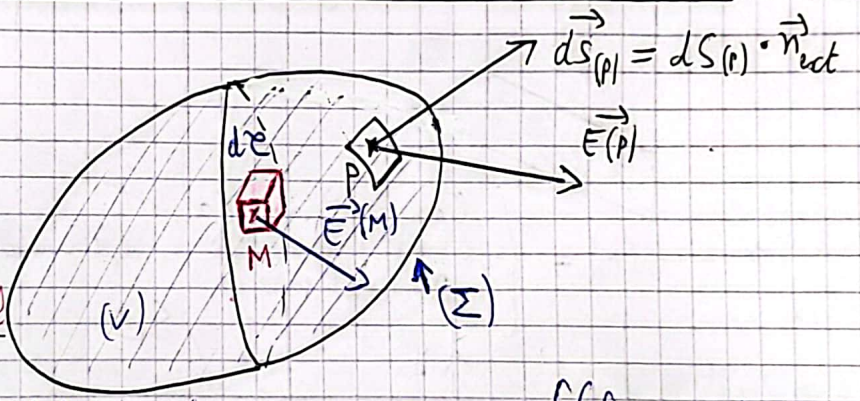
↳ en coordonnées cylindriques : Voir doc

↳ en coordonnées sphériques :

3) Théorème d'Ostrogradski : (p-9).

Le flux du champ $\vec{E}(P)$ à travers une surface fermée (Σ) est égal à l'intégrale de $\operatorname{div}\vec{E}(M)$ sur le volume V délimité par la surface (Σ).

$$\oiint_{P\in(\Sigma)} \vec{E}(P)\cdot d\vec{S}(P) = \iiint_{M\in(V)} \operatorname{div}\vec{E}(M)\cdot d\mathcal{C}(M)$$



4) Equation de Maxwell Gauss :

Dans le cas d'une distribution volumique : $Q_{int} = \iiint_{M\in(V)} \rho(M)\cdot d\mathcal{C}(M)$

puisque th de Gauss $\Rightarrow \oiint_{P\in(\Sigma)} \vec{E}(P)\cdot d\vec{S}(P) = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$

d'où $$\oiint_{P\in(\Sigma)} \vec{E}(P)\,d\vec{S}(P) = \iiint_{M\in(V)} \frac{\rho(M)}{\varepsilon_0} d\mathcal{C}(M) \quad (1)$$

d'après le théorème d'Ostrogradski :

$$\oiint_{P\in(\Sigma)} \vec{E}(P)\cdot d\vec{S}(P) = \iiint_{M\in(V)} \operatorname{div}\vec{E}(M)\cdot d\mathcal{C}(M) \quad (2)$$

d'après (1) et (2)

$$\operatorname{div}\vec{E}(M) = \frac{\rho(M)}{\varepsilon_0}$$

Equation de Maxwell Gauss en régime statique

Scanné avec CamScanner

1) Sachant que le champ créé par une distribution de charges volumique $\rho(M)$ s'écrit :

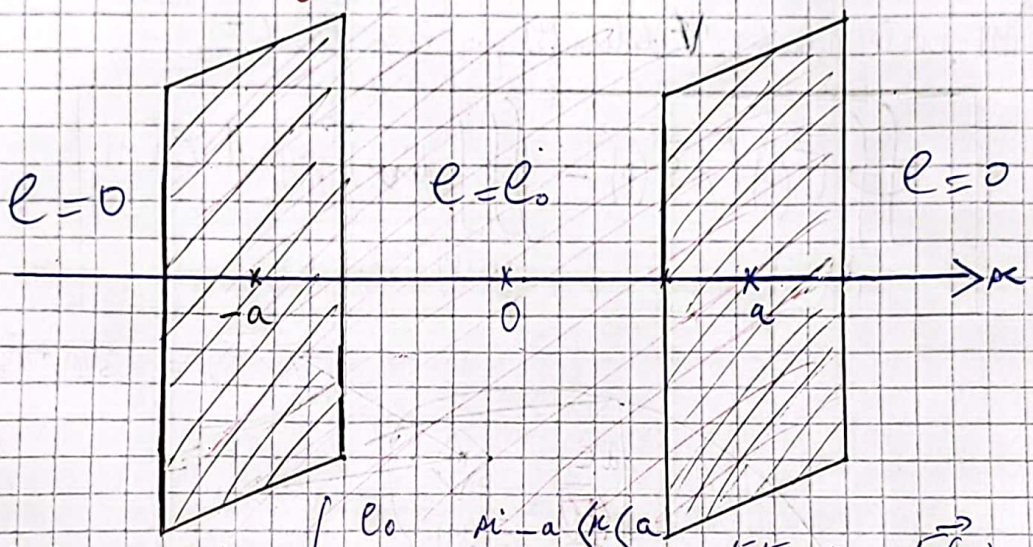
$$\vec{E}(M) = \begin{cases} E_0 \frac{x}{a} \vec{u_x} & -a \leqslant x \leqslant a \\ E_0 \vec{u_x} & \text{si } a < x \\ -E_0 \vec{u_x} & \text{si } x \leqslant -a. \end{cases}$$

Déterminer $\rho(M)$:

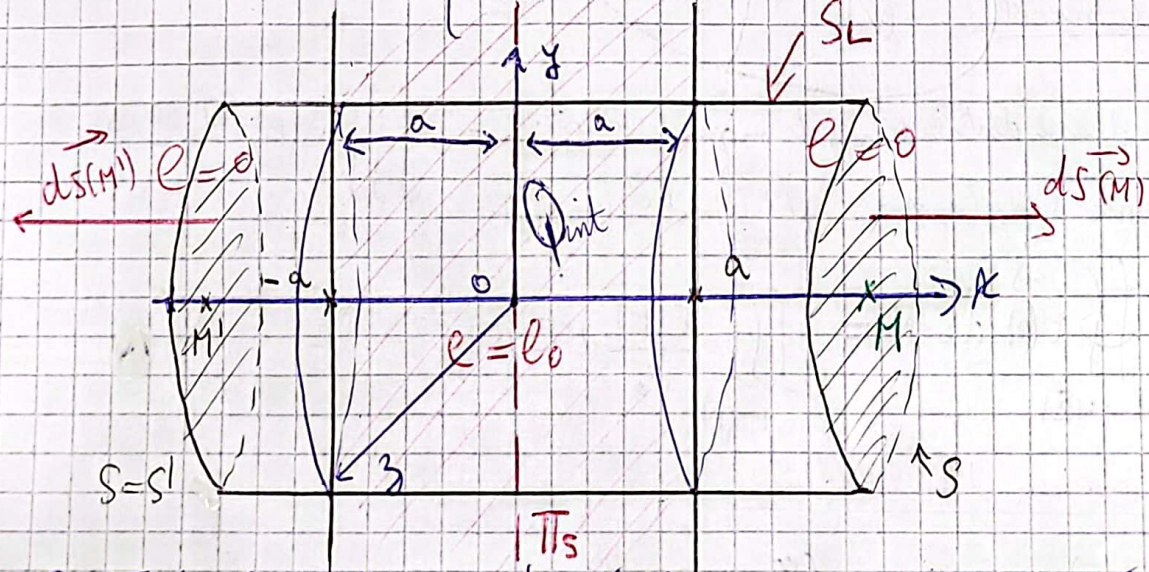
$$\rho(M) = \varepsilon_0 \operatorname{div} \vec{E}(M) = \varepsilon_0 \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + 0 + 0 \right) = \varepsilon_0 \frac{dE}{dx} = \begin{cases} \frac{\varepsilon_0 E_0}{a} = \rho_0 & \text{si } -a < x < a \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Charge $\xrightarrow{\text{Th. de Gauss}}$ Champ

Champ $\xrightarrow{\text{équation de Maxwell Gauss}}$ Charge



2) Sachant que $\rho(M) = \begin{cases} \rho_0 & \text{si } -a < x < a \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$ déterminer $\vec{E}(M)$



Étape (1) : Tout plan contenant l'axe $(M, \vec{x})$ est un plan de symétrie de la distribution de charges. donc le champ est porté par $\vec{Mx}$; la distribution de charges est invariante par translation suivant $\vec{y}$ et $\vec{z}$ donc le champ ne dépend que de x.

Scanné avec CamScanner

CCl : $\vec{E}(M) = E(x)\,\vec{u_x}$

Étape 2 : choix de Σ.

- $M \in \Sigma$
- $E(x) =$ cte sur $\Sigma \Rightarrow \Sigma$ est de $x =$ cte donc Σ un disque $\perp Ox$. Mais le disque n'est pas fermé. Quelle est la solution ? Soit $\Sigma = S \cup S_L$.

$$\oiint_{M\in(\Sigma)} \vec{E}(M)\cdot d\vec{S}(M) = \iint_{M\in(S)} \vec{E}(M)\cdot d\vec{S}(M) + \underbrace{\iint_{M\in S_L} \vec{E}(M)\cdot d\vec{S_L}}_{0 \text{ car } \vec{E}(M)=E(x)\vec{u_x}\perp d\vec{S_L}} + \iint_{M'\in(S')} \vec{E}(M')\cdot dS_{(M')}$$

or $\begin{cases} d\vec{S} = dS\,\vec{u_x} \\ d\vec{S'} = dS'(-\vec{u_x}) \end{cases}$ avec $dS' = dS$

d'où $\oiint_{M\in\Sigma} \vec{E}(M)\cdot d\vec{S}(M) = \iint_{M\in(S)} \vec{E}(M)\,dS\,\vec{u_x} - \iint_{M\in(S')} \vec{E}(M')\,dS\,\vec{u_x}$?

? Tout Π_S de la distribution de charge est un Π_S du champ $\vec{E}(M)$

dans notre cas : $(Oyz) = \Pi_S \Rightarrow \vec{E}(M') = \underset{(Oyz)}{\text{sym}}\,\vec{E}(M)$

$(Oyz) = \Pi_S$ ...

avec $M' = \underset{(Oyz)}{\text{sym}}(M)$

$\Rightarrow \vec{E}(M') = -\vec{E}(M)$

d'où $\oiint \vec{E}(M)\cdot dS(M) = 2\iint \vec{E}(M)\cdot dS\,\vec{u_x} = 2\iint E_x\vec{u_x}\cdot \underbrace{dS}_{dy\,dz}\vec{u_x}$

$= 2E(x)\iint dS = 2E(x)\times S$

Étape 3 : si $x > a$

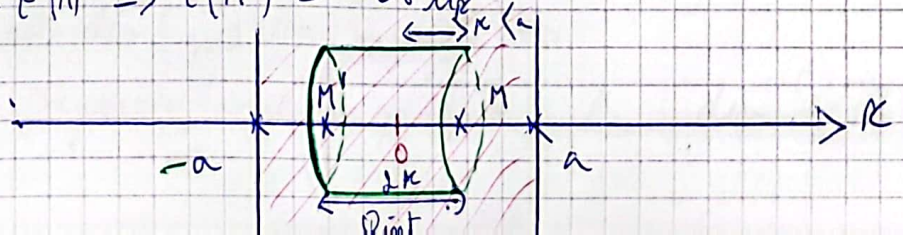
$Q_{int} = \iiint \rho\cdot d\tau(m) = \rho \times S \times 2a$

d'où $2E(x)\times S = \dfrac{\rho_0 \times S \times 2a}{\varepsilon_0}$ donc $E(x) = \dfrac{\rho_0 a}{\varepsilon_0} = E_0$.

Si $x < -a$:

$\vec{E}(M') = -\vec{E}(M) \Rightarrow \vec{E}(M') = -E_0\vec{u_x}$

Si $-a < x < a$:



Scanné avec CamScanner

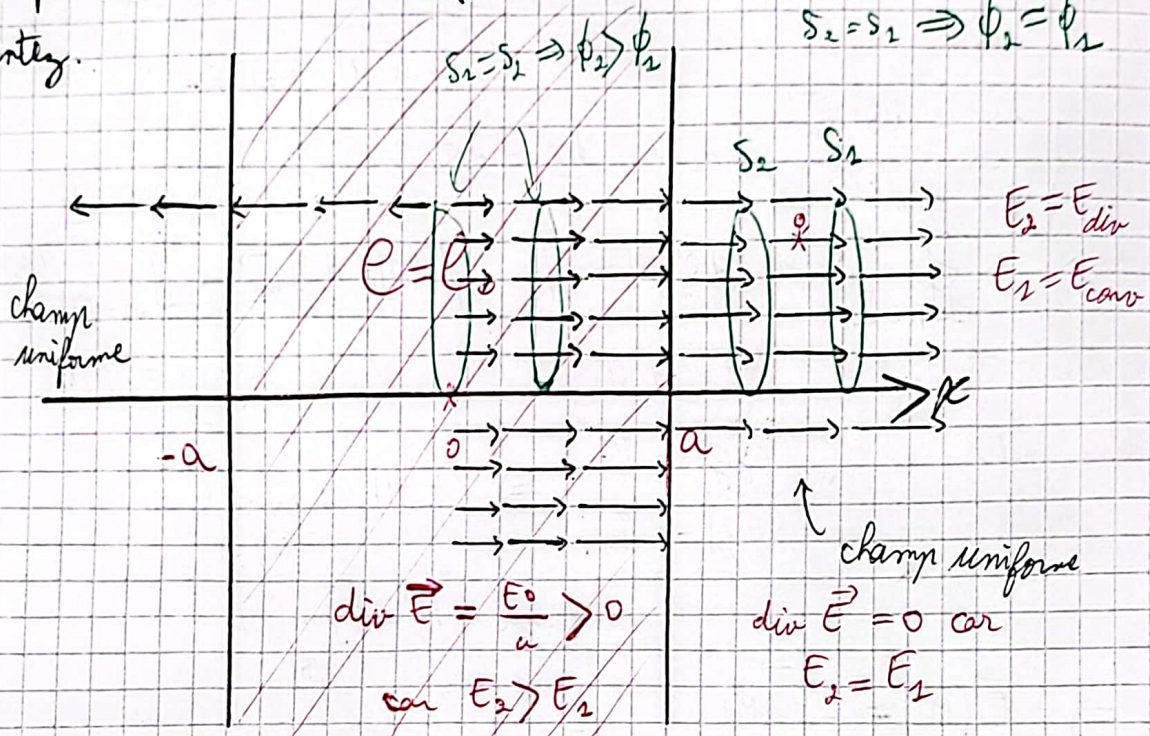
Si $-a < x < a$: $Q_{int} = \rho_0 \times S \times 2x$ d'où $\Phi E(M) \times S = \frac{\rho_0 \times S \times 2x}{\varepsilon_0}$

$$\vec{E}(M) = \frac{\rho_0 x}{\varepsilon_0} \vec{u_x}$$

3) Tracer les lignes de champ suivant :

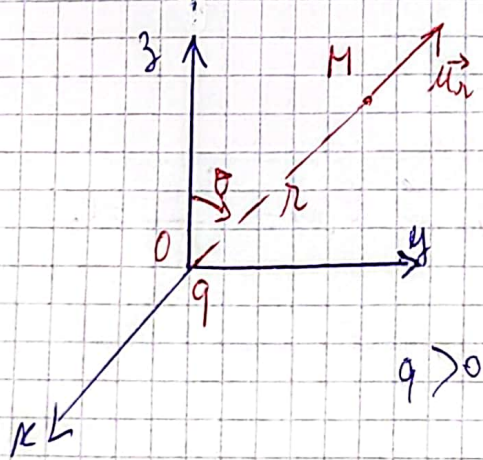
$$\vec{E} = \begin{cases} E_0 \frac{x}{a} \vec{u_x} & \text{si } -a \leq x \leq a \\ E_0 \vec{u_x} & \text{si } a \leq x \\ -E_0 \vec{u_x} & \text{si } x \leq -a \end{cases}$$

Commentez.



4) Cas d'une charge ponctuelle :

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{OM}}{OM^3} \quad \text{or} \quad \vec{OM} = r\vec{u_r}$$

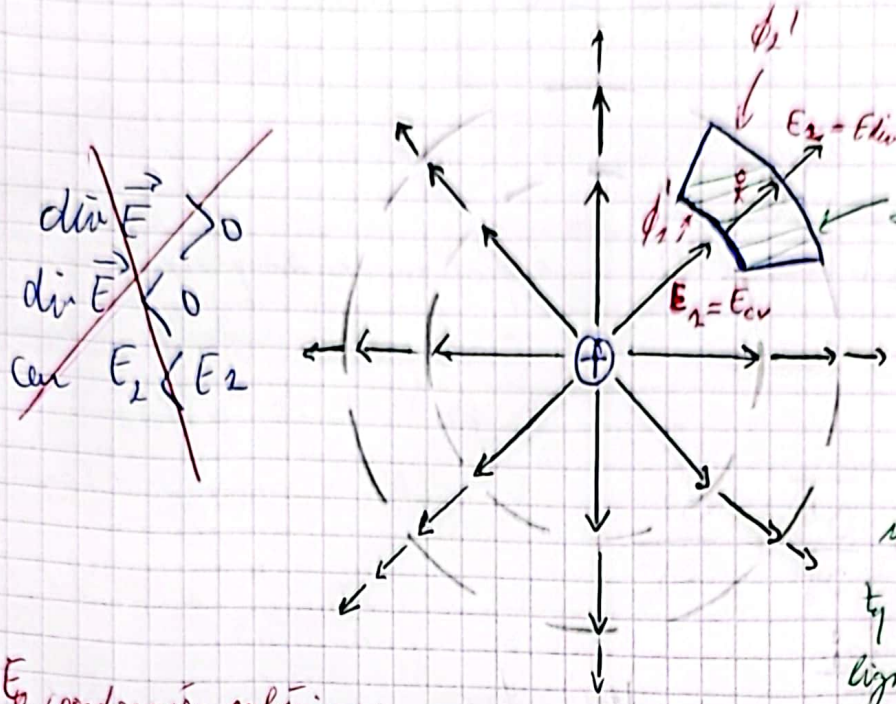


d'où $\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{u_r}$

$= E_r \vec{u_r}$

$q > 0$

Scanné avec CamScanner



$\Rightarrow \iint \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$

ie. $\phi_1' = -\phi_1'$

$(|\phi_2'| = |\phi_1'|)$

$\text{div}\,\vec{E} > 0$

$\text{div}\,\vec{E} < 0$

car $E_2 < E_2$

il faut prendre les surfaces tq le même nombre de lignes de champs entrantes soit celui des lignes de champs sortantes

En coordonnées sphériques:

$$\text{div}\,\vec{E} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 E_r\right) + 0 + 0$$

$$\text{div}\,\vec{E} = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right) \; ; \; \text{div}\,\vec{E} = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\right) = 0$$

En effet; $E_2 = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2} < E_2 = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2}$

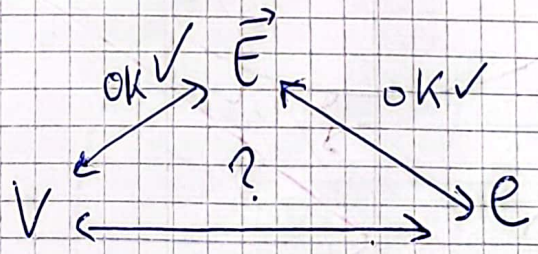
et $S_2 = 4\pi r_2^2 > S_1 = 4\pi r_1^2$

normalement c'est des surfaces fermées c'est juste pour simplifier le calcul

$\Rightarrow E_2 \cdot S_2 = E_1 \cdot S_1 = \dfrac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow \phi_2 = \phi_1 \Rightarrow \phi_{div} = \phi_{conv}$

$\Rightarrow \text{div}\,\vec{E} = 0.$

III) Equation de Poisson:



$$\text{div}\,\vec{E}(M) = \frac{e(M)}{\varepsilon_0} \quad \text{et} \quad \vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V(M)$$

$$\Rightarrow \text{div}\left(-\overrightarrow{\text{grad}}\,V(M)\right) = \frac{e(M)}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \text{div}\left(\overrightarrow{\text{grad}}\,V(M)\right) + \frac{e(M)}{\varepsilon_0} = 0$$

On définit le Laplacien scalaire par: $\Delta = \text{div}\left(\overrightarrow{\text{grad}}\right)$ (PS)

Scanné avec CamScanner

d'où

$$\Delta V(M) + \frac{\rho(M)}{\varepsilon_0} = 0$$

Équation de poisson

en absence de charges $\rho(M) = 0$

$$\Rightarrow \quad \Delta V(M) = 0$$

équation de Laplace.

Expression de Δ :

- En coordonnées cartésiennes :

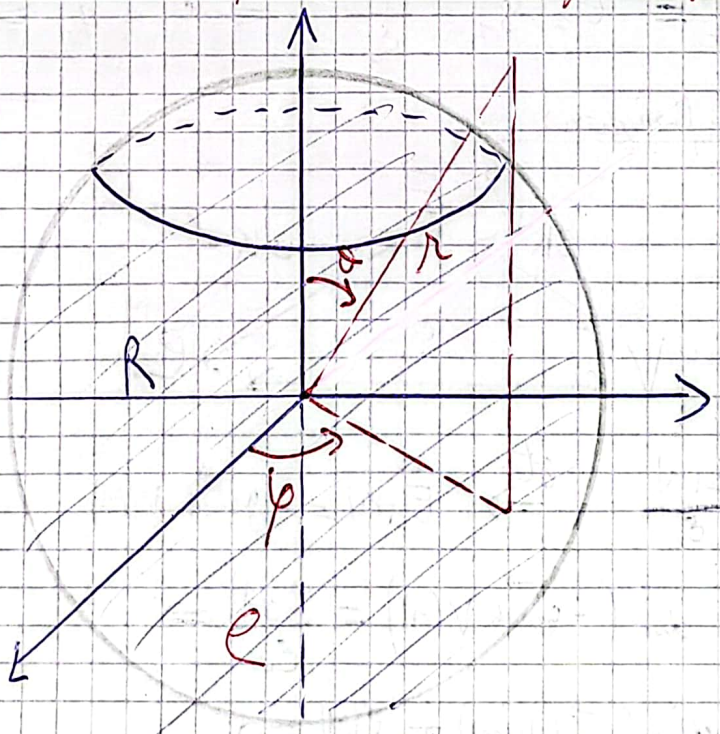
$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

- En coordonnées cylindriques :
- En coordonnées sphériques :

Voir doc

Remarque : La résolution de l'équation de poisson est difficile car il s'agit d'une équation différentielle de second ordre avec 3 dérivées partielles. Mais la résolution est simple dans des cas particuliers tels que la symétrie cylindrique et la symétrie sphérique où le potentiel ne dépend que d'une seule variable r.

Application 1 : potentiel créé par une boule chargée uniformément en volume.



Scanné avec CamScanner

1ère méthode : $V(M) = \int_{P\in(D)} \frac{\delta\, d\tau(P)}{4\pi\varepsilon_0 PM} + cte$

2ème méthode : $V(M) = -\int \vec{E}(M).\, d\vec{o}\vec{n} + cte$ (th. de Gauss)

3ème méthode : Equation de poisson.

Etape 1 : Analyse d'invariances :

$$V(M) = V(r,\theta,\varphi) = V(r)$$

Etape 2 : expression de ΔV :

$$\Delta V(M) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r}\right) + 0 + 0 \quad ☺$$

$$\Delta V(M) = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + 0 + 0 \quad ☹$$

Exp :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} = 0 \quad ☺$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{2}{t}\frac{dx}{dt} = 0 \quad ☹$$

Soit $\Delta V(M) = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dV}{dr}\right)$

Etape 3 : Résolution :

↳ En un point M à l'extérieur : $r = OM > R$: $\rho(M) = 0 \Rightarrow \Delta V(M) = 0$

donc $\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dV}{dr}\right) = 0 \Rightarrow r^2\frac{dV}{dr} = C_1$

$$\Rightarrow \int dV = \int \frac{C_1}{r^2}\, dr$$

$$\Rightarrow \boxed{V(r>R) = \frac{-C_1}{r} + C_2}$$

↳ En un point M à l'intérieur : $OM = r < R$

$\rho(M) = \rho$ d'où $\Delta V(M) + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0 \Rightarrow \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dV}{dr}\right) = \frac{-}{\varepsilon_0}$

$$\Rightarrow d\left(r^2\frac{dV}{dt}\right) = \frac{-\rho r^2}{\varepsilon_0}dr$$

$$\int \downarrow$$

$$r^2\frac{dV}{dt} = \frac{\rho r^3}{3\varepsilon_0} + K_1$$

Scanné avec CamScanner

$$dV = \left(\frac{-\rho r}{3\varepsilon_0} - \frac{K_1}{r^2}\right) dr$$

$\int \downarrow$

$$V(r<R) = \frac{-\rho r^2}{6\varepsilon_0} - \frac{K_1}{r} + K_2$$

Etape 4: Détermination des constantes d'intégration en utilisant les conditions aux limites.

① $V(r \to +\infty) = 0$ car la distribution est finie

② $\vec{E}(0) = \vec{0}$ car 0 est un centre de symétrie

③ $\vec{E}(r = R^+) = \vec{E}(r = R^-)$ car la distribution est volumique

④ $V(r = R^+) = V(r = R^-)$ continuité du potentiel.

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V = \frac{-\partial V}{\partial r}\vec{u_r} + \vec{0} + \vec{0} = \frac{-dV}{dr}\vec{u_r}$$

① $V(r \to \infty) = 0 \Rightarrow \left[-\frac{C_1}{r} + C_2\right]_{r \to +\infty} = 0 \Rightarrow \boxed{C_2 = 0}$

② $\vec{E}(0) = \vec{0} \Rightarrow \left.\frac{dV}{dr}\right)_{r=0} = 0 \Rightarrow \left[\frac{-\rho r}{3\varepsilon_0} + \frac{K_1}{r^2}\right]_{r=0} = 0$

$$\Rightarrow \boxed{K_1 = 0}$$

③ $\left.\frac{dV}{dr}\right|_{r=R^+} = \left.\frac{dV}{dr}\right)_{r=R^-} \Rightarrow \frac{-\rho R}{3\varepsilon_0} = \frac{C_1}{R^2} \Rightarrow \boxed{C_1 = \frac{-\rho R^3}{3\varepsilon_0}}$

④ $\frac{-\rho R^2}{6\varepsilon_0} + K_2 = \frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{K_2 = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}}$

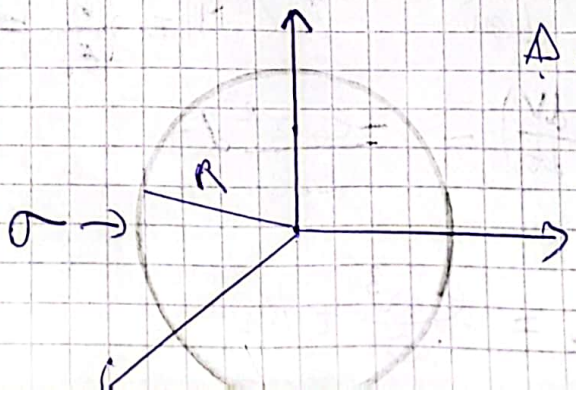
CL:
$$\begin{cases} V(r<R) = \dfrac{-\rho r^2}{6\varepsilon_0} + \dfrac{\rho R^2}{2\varepsilon_0} \\ V(r \geq R) = \dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r} \end{cases}$$

Application 2: potentiel créé par une sphère chargée uniformément en surface:

Δ si $r \neq R$

$$\Delta V + \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = 0$$

$$\text{div}\,\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$



Scanné avec CamScanner

Etape (2): Analyse d'invariance $V(M) = V(r; \theta; \varphi) = V(r)$

Etape (2): Expression de ΔV

$$\Delta V(M) = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dV}{dt}\right)$$

Etape (3): Résolution en un

en un point M à l'extérieur : $r = OM > R$

$$\rho(M) = 0 \Rightarrow \Delta V(M) = 0$$

$$\Rightarrow V(r > R) = \frac{-C_1}{r} + C_2$$

en un point M à l'intérieur: $r = OM < R$

$\rho(M) = 0$ d'où $V(r < R) = -\frac{K_1}{r} + K_2$

Etape (4): Détermination des constantes d'intégration en utilisant les conditions aux limites

⊕ $V(r \to +\infty) = 0$ car la distribution est finie

⊕ $\vec{E}(0) = \vec{0}$ car O est un centre de symétrie

⊕ $\vec{E}(r = R^+) - \vec{E}(r = R^-) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{u}_r$ discontinuité du champ dans le cas d'une distribution surfacique.

⊕ $V(r = R^+) = V(r = R^-)$ continuité du potentiel

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\, V = \frac{-\partial V}{\partial r} \vec{u}_r + \vec{0} + \vec{0} = \frac{-dV}{dr} \vec{u}_r$$

(1) $V(r \to +\infty) = 0 \Rightarrow \left[\frac{-C_1}{r} + C_2\right]_{r \to +\infty} = 0 \Rightarrow \boxed{C_2 = 0}$

(2) $\vec{E}(0) = \vec{0} \Rightarrow \left.\frac{dV}{dr}\right|_{r=0} = 0 \Rightarrow \left[\frac{K_1}{r^2}\right] = 0 \Rightarrow \boxed{K_1 = 0}$

(3) $\left.\frac{dV}{dr}\right|_{r=R^+} + \left.\frac{dV}{dr}\right|_{r=R^-} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \Rightarrow \frac{-C_1}{R^2} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

(4) $\frac{-C_1}{R} = K_2 \Rightarrow \boxed{K_2 = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0}}$ $\Rightarrow \boxed{C_2 = \frac{-\sigma R^2}{\varepsilon_0}}$

Ccl

$$\begin{cases} V(r \leq R) = \dfrac{\sigma R}{\varepsilon_0} \\ V(r > R) = \dfrac{\sigma R^2}{r} \end{cases}$$

Scanné avec CamScanner

III) Théorème d'extremum :

Dans une région vide de charge le potentiel ne peut présenter d'extremum.

Démonstration :

On veut : Dans une région vide de charges $\Rightarrow$ le potentiel ne peut présenter un extremum.

$$A \Rightarrow B \Leftrightarrow \bar{B} \Rightarrow \bar{A}.$$

M_0 Si le potentiel présente un maximum au point M alors il y a présence de charges.

Supposons que le potentiel présente un maximum au point M.

or $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V \Rightarrow$ les L.C de $\vec{E}$ divergent.

(les L.C de $\vec{E}$ sont dirigées vers les potentiels ↓)

$\Rightarrow \oiint \vec{E}.\vec{dS} > 0$

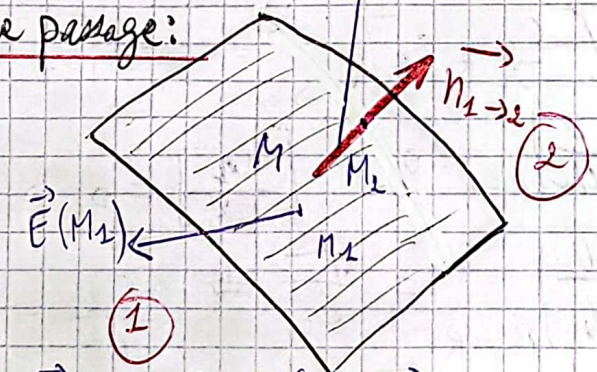
$\Rightarrow$ Th. de Gauss

$\Rightarrow Q_{int} > 0$

de même si le potentiel possède un minimum :

$$\oiint \vec{E}.\vec{dS} < 0 \Rightarrow Q_{int} < 0$$

II) Relation de passage :



$$\vec{E}(M_2) - \vec{E}(M_1) = \frac{\sigma(M)}{\varepsilon_0}\vec{n}_{1\to 2}$$

Cette équation est un complémentaire de Maxwell Gauss

$\vec{E}.$

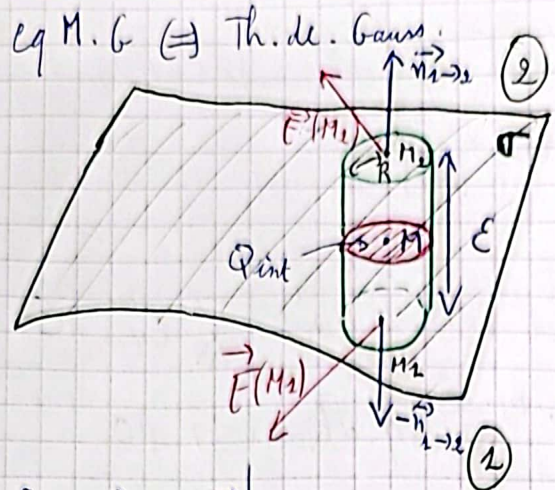
$\vec{n}_{1\to 2}.$

$$\vec{n}_{1\to 2}.\left(\vec{E}(M_2) - \vec{E}(M_1)\right) = \frac{\sigma(M)}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{E}.\left(\vec{E}(M_2) - \vec{E}(M_1)\right) = 0$$

Scanné avec CamScanner

Démo : éq M.G ⇔ Th. de Gauss :



avec $\varepsilon = M_1M_2 \simeq 0$

M_1 et M_2 sont très voisins de M

$$\oiint_{M\in(\Sigma)} \vec{E}(M).d\vec{S}(M) = \iint_{M_2\in S_1} \vec{E}(M_2).d\vec{S}_1 + \iint_{M\in S_L} \vec{E}(M).d\vec{S}_L + \iint_{M_2\in S_2} \vec{E}(M_2).d\vec{S}_2$$

or $\left| \iint_{M\in S_L} \vec{E}(M).d\vec{S}_L \right| \leqslant E_{max} \times 2\pi R.\varepsilon$ ↑ (on majore le p.s par le cas vecteurs colinéaires). or $\varepsilon \simeq 0 \Rightarrow \iint \vec{E}(M).d\vec{S}_L \simeq 0$

$$\Rightarrow \oiint_{M\in(\Sigma)} \vec{E}(M).d\vec{S}(M) = \iint \vec{E}(M_1).dS_1(-\vec{n}_{1\to 2}) + \iint \vec{E}(M_2).dS_2.\vec{n}_{1\to 2}$$

$$\frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \iint \left(\vec{E}(M_2) - \vec{E}(M_1)\right) dS\ \vec{n}_{1\to 2} \quad \text{car } dS_1 = dS_2 = dS$$

Hypothèse importante :

Soit (S) une surface de très faible dimension

(en effet la relation de passage ne sera pas valide si M_1 et M_2 éloignés même si proche de part et d'autre de (S))

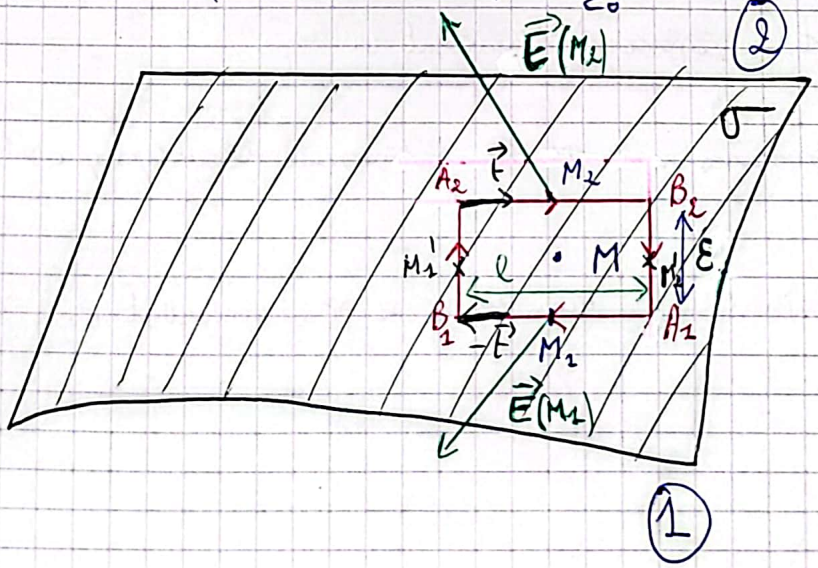
$\Rightarrow \vec{E}(M_2)$ et $\vec{E}(M_1)$ sont quasi uniformes sur (S)

$$\Rightarrow \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \left(\vec{E}(M_2) - \vec{E}(M_1)\right) \iint dS\ \vec{n}_{1\to 2}$$

or $Q_{int} = \iint \sigma.dS = \sigma \iint dS = \sigma.S$

d'où $\frac{\sigma S}{\varepsilon_0} = \left(\vec{E}(M_2) - \vec{E}(M_1)\right).S.\vec{n}_{1\to 2}$

$$\Rightarrow \vec{n}_{1\to 2}.\left(\vec{E}(M_2) - \vec{E}(M_1)\right) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$



Scanné avec CamScanner

$$\oint \vec{E}(M).\vec{dl}(M) = \int_{A_1}^{B_1} \vec{E}(M_1).\vec{dl}(M_1) + \int_{B_1}^{A_2} \vec{E}(M_1').\vec{dl}(M_1')$$
$$+ \int_{A_2}^{B_2} \vec{E}(M_2).\vec{dl}(M_2) + \int_{B_2}^{A_1} \vec{E}(M_2').\vec{dl}(M_2')$$

or $\left| \int_{B_1}^{A_2} \vec{E}(M_1').\vec{dl}(M_1') \right|$ et $\left| \int_{B_2}^{A_1} \vec{E}(M_2').\vec{dl}(M_2') \right| \leqslant E_{max}.\mathcal{E}$

or $\mathcal{E} \simeq 0 \Rightarrow \oint \vec{E}(M).\vec{dl}(M) = \int_{A_1}^{B_1} \vec{E}(M_1).dl_{(M_1)}(-\vec{t}) + 0$
$$+ \int_{A_2}^{B_2} \vec{E}(M_2).dl(M_2).\vec{t} + 0$$

or $\oint \vec{E}(M).\vec{dl}(M) = 0$

$0 = \int [\vec{E}(M_2) - \vec{E}(M_1)].dl.\vec{t}$ car $dl(M_1) = dl_{(M_2)} = dl$

Soit (ℓ) une longueur de très faible dimension :

$\Rightarrow$ $\vec{E}(M_2)$ et $\vec{E}(M_1)$ sont quasi-uniformes sur (ℓ).

$$[\vec{E}(M_2) - \vec{E}(M_1)] \left(\int dl\right) \vec{t} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \vec{t}.[\vec{E}(M_2) - \vec{E}(M_1)] = 0.$$

Remarque : différence entre régime permanent et régime stationnaire :

régime permanent : c'est un régime commandé régulier, on établit et succède à un régime transitoire

régime stationnaire : c'est un régime indépendant du temps.

donc tous les régimes stationnaires sont permanents mais la réciproque est fausse.

Certains énoncés (même de concours comme Mines MP 2022 et PC 2) confondent ces 2 régimes

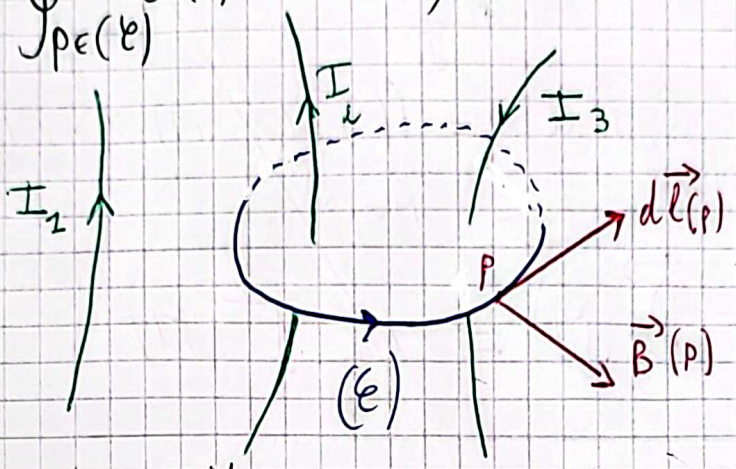
Scanné avec CamScanner

Les lois locales de la magnétostatique :

I) Equation de Maxwell-Ampère :

1) Théorème d'ampère : La circulation du champ magnétique le long d'un contour fermé orienté $(\mathcal{C})$ est égal au courant enlacé par le contour multiplié par μ_0.

$$\oint_{P\in(\mathcal{C})} \vec{B}(P).d\vec{\ell}(P) = \mu_0 . I_e$$ Relation intégralle



$I_e = +I_2 - I_3$

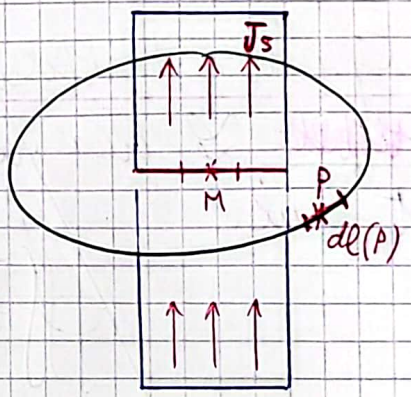
Dans le cas d'une distribution

↳ Surfacique de courant :

$$I_e = \int_{M\in(L)} \vec{J}_{s,en}(M).d\ell(M).\vec{n}$$

$\vec{J}_{s,en}$ ← enlacé ; (L) ← longueur traversée par $\vec{J}_s$

$\triangle$ $d\ell(M) \neq d\ell(P)$



↳ Volumique de courant :

$$I_e = \iint_{M\in(S)} \vec{J}_{v,en}(M).dS(M).\vec{n}$$

$\vec{J}_{v,en}$ ← enlacé ; (S) ← surface traversée par $\vec{J}_v$

2) Théorème de Stokes :

$$\oint_{P\in(\mathcal{C})} \vec{B}(P).d\vec{\ell}(P) = \iint_{M\in(S)} \vec{rot}\,\vec{B}(M).d\vec{S}(M)$$

Scanné avec CamScanner

3) Équation de Maxwell-Ampère :

↳ Théorème d'Ampère :

$$\oint_{P\in(\mathcal{C})} \vec{B}(P)\cdot d\vec{\ell}(P) = \mu_0 I_e$$

Dans le cas d'une distribution volumique.

$$\oint_{P\in(\mathcal{C})} \vec{B}(P)\cdot d\vec{\ell}(P) = \mu_0 \iint_{M\in(S)} \underset{\uparrow \vec{J_v}}{\vec{J}(M)}\cdot d\vec{S}(M) \quad (1)$$

↳ Th de Stokes : $\oint_{P\in(\mathcal{C})} \vec{B}(P)\cdot d\vec{\ell}(P) = \iint_{M\in(S)} \vec{rot}\,\vec{B}(M)\cdot d\vec{S}(M)$ (2)

$$\boxed{\vec{rot}\,\vec{B}(M) = \mu_0 \vec{J}(M)}$$

Équation de Maxwell - Ampère dans le régime statique.

Ccl : Les L.C de $\vec{B}$ sont des courbes fermées ($\vec{B}$ est un champ tourbillonnaire) qui tournent autour de la source (courant).

II) Équation de Maxwell - Flux (ou Maxwell - Thomson) :

1) postulat : Le flux de $\vec{B}$ à travers une surface fermée est nul.

$$\oiint \vec{B}(P)\cdot d\vec{S}(P) = 0 \quad (1)$$

$\vec{B}$ est à Flux conservatif

2) Théorème d'ostrogradski :

(2) $$\oiint_{P\in(\Sigma)} \vec{B}(P)\cdot d\vec{S}(P) = \iiint_{M\in(V)} div\,\vec{B}(M)\cdot d\tau(M)$$

Equation de Maxwell - Flux :

après (1) et (2) : $\iiint_{M\in(V)} div\,\vec{B}(M)\cdot d\tau(M) = 0 \Rightarrow \boxed{div\,\vec{B}(M) = 0}$

Scanné avec CamScanner

Centrale 2016
ENS 2001

$$\operatorname{div} \vec{B}(M) = 0$$

Equation de Maxwell-Flux ou Maxwell Thomson dans le régime statique.

→ $\vec{B}$ est à flux conservatif
→ Les lignes de champ de $\vec{B}$ ne divergent pas.
→ pas de charge magnétique (pas de monopôle magnétique). (*)

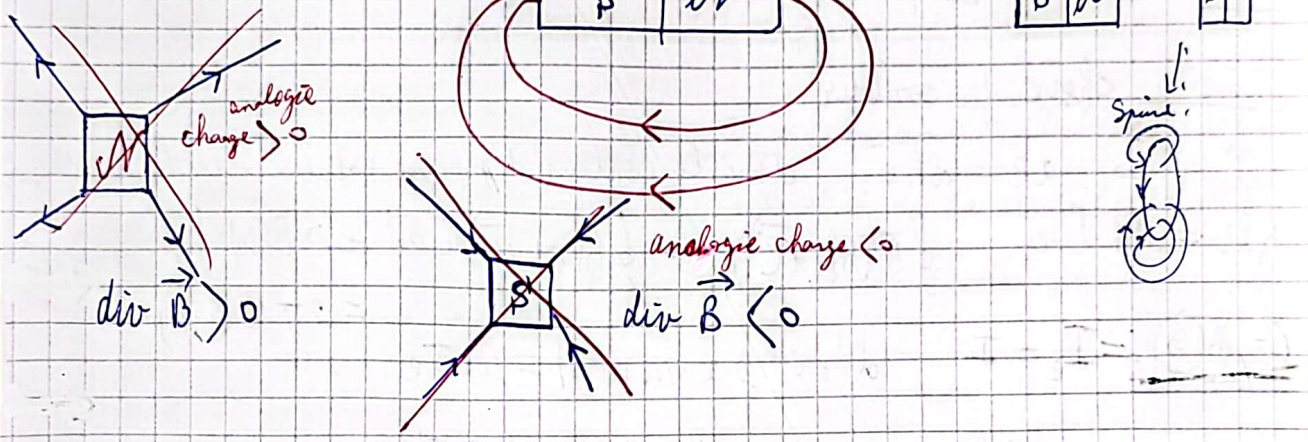
$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ ← charge électrique

$\vec{E} \leftrightarrow \vec{B}$
$\frac{1}{\varepsilon_0} \leftrightarrow \mu_0$
$\rho \leftrightarrow \vec{j}$

$\operatorname{div} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$
$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

$\operatorname{div} \vec{B} = \mu_0 \times 0 = 0$ ← charge magnétique

(*) :



→ Voir plus loin

III) théorème d'Ampère :

1) Enoncé :

$$\oint_{(\mathcal{C})} \vec{B}(M) \cdot d\vec{\ell}(M) = \mu_0 I_e$$

① ② ③

Etapes de calcul de $\vec{B}$:

Etape 1 : Analyse de symétrie et d'invariance

Etape 2 : Choix du contour

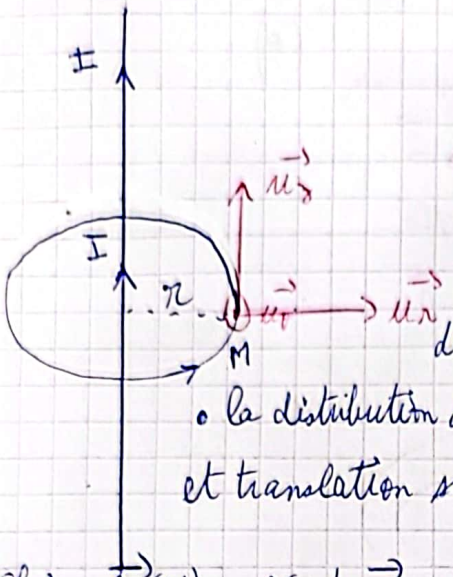
+ $M \in (\mathcal{C})$
} $d\vec{\ell} \parallel \vec{B}$
⊕ $B(M) = cte$ sur $(\mathcal{C})$

Scanné avec CamScanner

Étape 3 : calcul de I_e.

2) Exemples :

1) Champ créé par un fil rectiligne :



Étape 1 : le plan $(M, \vec{u_r}, \vec{u_z})$ est un plan de symétrie de la distribution du courant donc $\vec{B}$ est porté par $\vec{u_\theta}$.

- le plan $(M, \vec{u_r}, \vec{u_\theta})$ est un plan d'antisymétrie de la distribution du courant donc $B \in$ à ce plan.
- la distribution du courant est invariante par rotation d'angle θ et translation suivant $\vec{z}$ donc $\vec{B}$ ne dépend que de R

Ccl : $\vec{B}(M) = B(r)\vec{u_\theta}$

Étape 2 : choix du contour

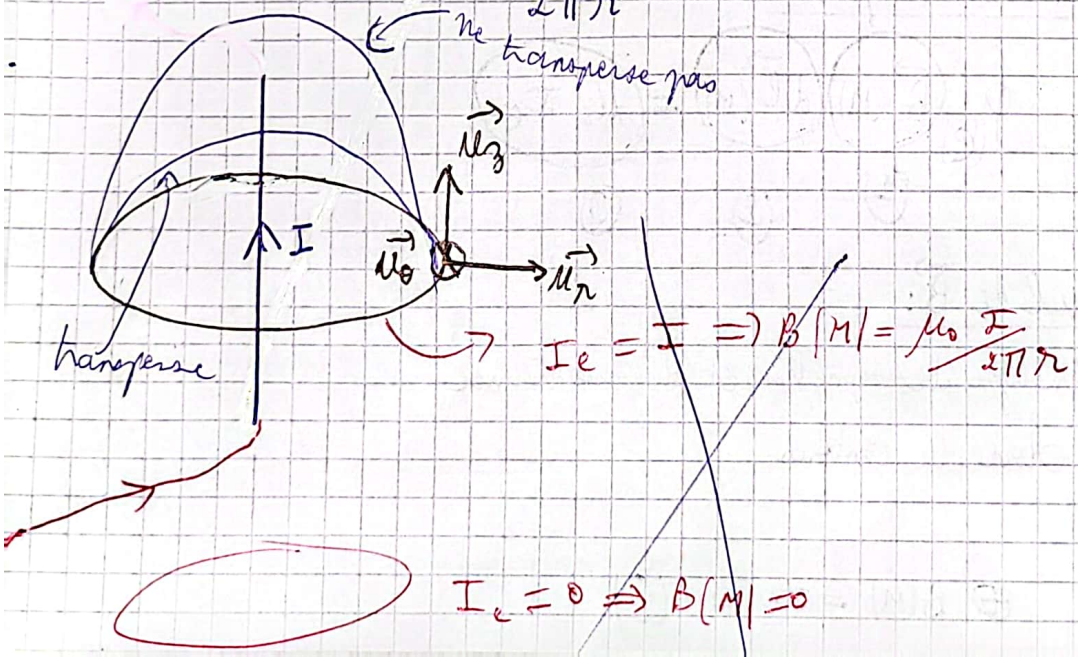
$d\vec{l} // \vec{B} \Rightarrow d\vec{\ell} = dl\,\vec{u_\theta}$ donc le contour d'Ampère est un cercle de rayon $r = OM$ donc $\oint \vec{B}(M) \cdot d\vec{\ell}(M) = \oint B(r)\,\vec{u_\theta} dl\,\vec{u_\theta} = r B(r) \oint d\theta$

$= 2\pi r B(r)$

Étape ③ : $I_e = I$ d'où $2\pi r B(r) = \mu_0 I_e$

donc $B(r) = \dfrac{\mu_0 I_e}{2\pi r}$

d'où $\vec{B}(M) = \dfrac{\mu_0 I_e}{2\pi r}\vec{u_\theta}$.



Scanné avec CamScanner

$\neq B(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1)$ trouvé avec Biot et Savart

??

En effet la notion de I enlacé n'existe pas ici car :

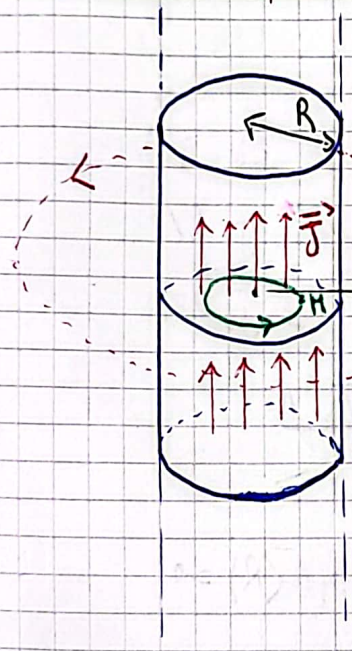
$$\oint_{P\in(\mathcal{C})} \vec{B}(P).d\vec{\ell}(P) = \iint_{M\in(S)} \vec{rot}\,\vec{B}(M).d\vec{S}(M) = \iint_{M\in(S)} \mu_0 \vec{J}(M).d\vec{S}(M)$$

or $\oint_{P\in(\mathcal{C})} \vec{B}(P).d\vec{\ell}(P) = \mu_0 I_e \longleftarrow = \mu_0 \iint_{M\in(S)} \vec{J}(M).d\vec{S}(M)$

dans le théorème c'est dit : "une surface" s'appuyant sur le contour.

$\forall S$ la surface qui s'appui sur le contour

2) Champ magnétique créé par un cylindre plein parcouru par un courant volumique uniforme :



Étape 1 : le plan $(M;\vec{u_r};\vec{u_z})$ est un plan de symétrie de la distribution du courant donc $\vec{B}$ est porté par $\vec{u_\theta}$

la distribution du courant est invariante d'angle θ et translation suivant $\vec{z}$ donc $\vec{B}$ ne dépend que de r donc $\vec{B}(M) = B(r)\vec{u_\theta}$

Étape 2 : $d\vec{\ell} // \vec{B} \Rightarrow d\vec{\ell} = dl\,\vec{u_\theta}$ donc $(\mathcal{C})$ est un cercle de rayon $r = OM$

$$\oint \vec{B}.d\vec{\ell} = \oint B(r)\,\vec{u_\theta}\, r\,d\theta\,\vec{u_\theta} = 2\pi r B(r)$$

Étape ③ :

↳ en un point M à l'ext :

$$I_e = \iint \vec{J}.dS.\vec{n} = \iint J\vec{u_z}.dS.\vec{u_z} = J\iint dS = J\pi R^2$$

d'où $2\pi r B(r) = \mu_0 J\pi R^2$ donc $\vec{B}(r>R) = \frac{\mu_0 J R^2}{2r}\vec{u_\theta}$

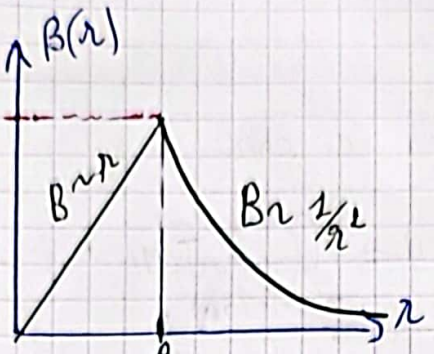
↳ en un point M à l'intérieur :

$I_e = \iint \vec{J}.dS.\vec{n} = J\pi r^2$

Scanné avec CamScanner

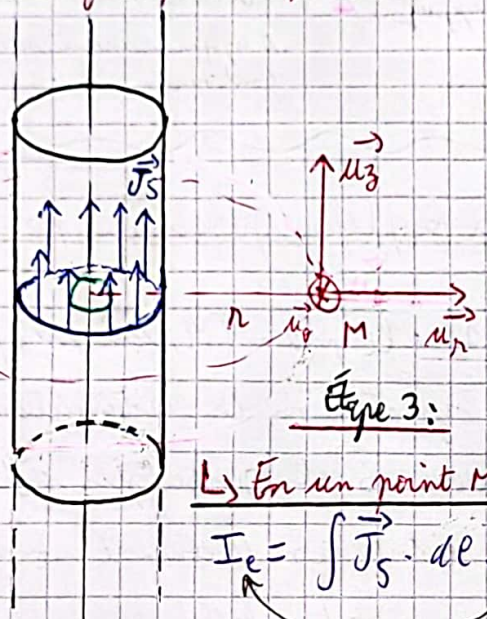
donc $2\pi r B(r) = \mu_0 J \pi r^2 \Rightarrow B(r<R) = \frac{\mu_0 J r}{2}$

Tracez $B(r)$:



$B(r=R^+) = B(r=R^-)$ continuité du champ dans le cas de la distribution volumique.

3) Champ magnétique créé par un cylindre creux parcouru par un courant surfacique uniforme :



Même questions.

Etape ① et Etape ② : même chose

$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 2\pi r B(r)$

Étape 3 :

↳ En un point M à l'extérieur :

$I_e = \int \vec{J_S} \cdot d\ell \cdot \vec{n} = \int J_S \vec{u_z} \cdot d\ell \cdot \vec{u_z} = J_S \int d\ell$

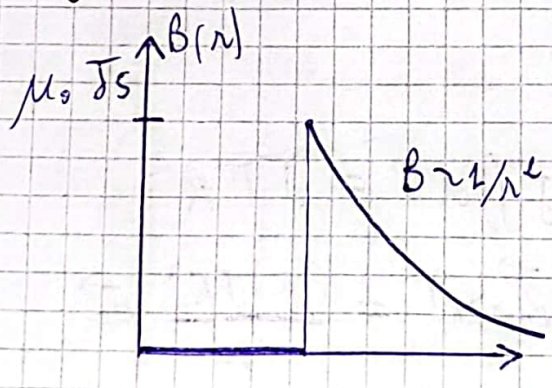
$= J_S 2\pi R$

d'où $2\pi r B(r) = \mu_0 J_S 2\pi R \Rightarrow B(r>R) = \frac{\mu_0 J_S R}{r}$

↳ En un pt M à l'intérieur : $I_e = 0$

$\Rightarrow B(r<R) = 0$ d'où $2\pi r B(r) = 0 \Rightarrow B(r<R) = 0$

Tracez $B(r)$:



$B(r=R^+) - B(r=R^-) = \mu_0 J_S \vec{u_\theta}$

$(\vec{J_S} = J_S \cdot \vec{u_z})$ $= \mu_0 J_S \vec{u_z} \wedge \vec{u_r}$

$B(r=R^+) - B(r=R^-) = \mu_0 \vec{J_S} \wedge \vec{u_r}$

$= \mu_0 \vec{J_S} \wedge \vec{n}_{R^- \to R^+}$

Scanné avec CamScanner

$\vec{B}(M_2) - \vec{B}(M_1) = \mu_0 \vec{j}_S \wedge \vec{n}_{1\to 2}$

Relation de passage :

↳ $\vec{E}(M_2) - \vec{E}(M_1) = \dfrac{\sigma(M)}{\varepsilon_0} \vec{n}_{1\to 2}$

$\vec{n}_{1\to 2}$ · $\vec{n}_{1\to 2} \cdot \left(\vec{E}(M_2) - \vec{E}(M_1)\right) = \dfrac{\sigma(M)}{\varepsilon_0}$

discontinuité de la composante normale du champ $\vec{E}$

Démo : M.G ou Th. de Gauss

$\vec{n}_{1\to 2} \wedge \left(\vec{E}(M_2) - \vec{E}(M_1)\right) = \vec{0}$

$\vec{t}$. ou $\vec{n}_{1\to 2}\wedge$

$\vec{t}$. ou $\vec{n}_{1\to 2}\wedge$ continuité de la composante tangentielle du champ $\vec{E}$.

Démo : Maxwell Faraday ou C.V de la circulation.

↳ $\vec{B}(M_2) - \vec{B}(M_1) = \mu_0 \vec{j}_S(M) \wedge \vec{n}_{1\to 2}$

$\vec{n} \cdot (\vec{j}_S \wedge \vec{n}) = \vec{j}_S (\vec{n} \wedge \vec{n}) = 0$

$\vec{n} \wedge (\vec{j}_S \wedge \vec{n}) = \vec{j}_S (\vec{n}\cdot\vec{n}) - \vec{n}\cdot(\vec{n}\cdot\vec{j}_S)$

$= \vec{j}_S$

$\vec{n}_{1\to 2}$ · $\vec{n}_{1\to 2} \cdot \left(\vec{B}(M_2) - \vec{B}(M_1)\right) = 0$

continuité de la composante normale du champ $\vec{B}$

Démo : M. Flux (M.Th) ou C.V du flux

$\vec{t}$ ou $\vec{n}_{1\to 2}\wedge$ $\vec{n}_{1\to 2} \wedge \left(\vec{B}(M_2) - \vec{B}(M_1)\right) = \mu_0 \vec{j}_S(M)$

discontinuité de la composante tangentielle du champ B

Démo : M.A ou Th. d'Ampère.

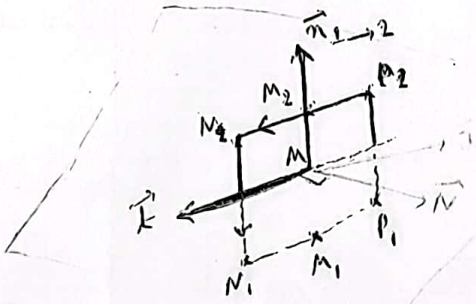
↳ Relation associée à l'éq de M-Flux : de même

$$\oiint \vec{B}\cdot d\vec{S} = \vec{B}(M_2)\,\pi R^2 \vec{n}_{1\to 2} + \iint_{P\in S_L} \vec{B}(P)\cdot d\vec{S}_{(P)} + \vec{B}(M_1)\cdot(-\pi R^2 \vec{n}_{1\to 2})$$

$$0 = \vec{B}(M_2)\,\pi R^2 \vec{n}_{1\to 2} + \vec{B}(M_1)\,(-\pi R^2 \vec{n}_{1\to 2})$$

$$\Rightarrow \left[\vec{B}(M_2) - \vec{B}(M_1)\right]\cdot \vec{n}_{1\to 2} = 0$$

↳ Relation associée à l'éq de M-A :



$\vec{N} = \vec{n}_{1\to 2} \wedge \vec{L}$

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \vec{B}(M_2)\cdot L\,\vec{e} + \int_{N_2}^{N_1} \vec{B}\cdot d\vec{\ell} + \vec{B}(M_1)\,L\,(-\vec{e}) + \int_{P_1}^{P_2} \vec{B}\cdot d\vec{\ell}$$

or $\left|\int_{N_2}^{N_1} \vec{B}\cdot d\vec{\ell}\right| \leq B_{max}\,\varepsilon$ et $\varepsilon \to 0$ d'où

$$\mu_0 I_e = \left[\vec{B}(M_2) - \vec{B}(M_1)\right] L\,\vec{e}$$

Scanné avec CamScanner

avec $I_e = \vec{j_s} \cdot L\vec{N}$ d'où

$$\mu_0 \vec{j_s} L \vec{N} = [\vec{B}(M_2) - \vec{B}(M_1)] L \vec{t} \Rightarrow$$

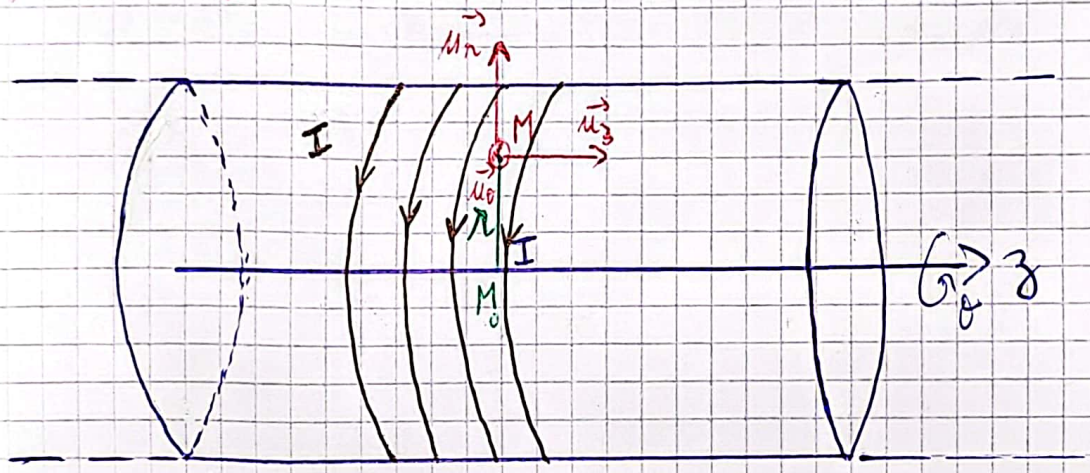
or $\vec{t} = \vec{N} \wedge \vec{u}_{1\to 2}$

$$[\vec{B}(M_2) - \vec{B}(M_1)] \cdot (\vec{N} \wedge \vec{u}_{1\to 2}) = \mu_0 \vec{j_s} \cdot \vec{N}$$

$$\vec{N} \cdot (\vec{u}_{1\to 2} \wedge [\vec{B}(M_2) - \vec{B}(M_1)]) = \mu_0 \vec{j_s} \cdot \vec{N}$$

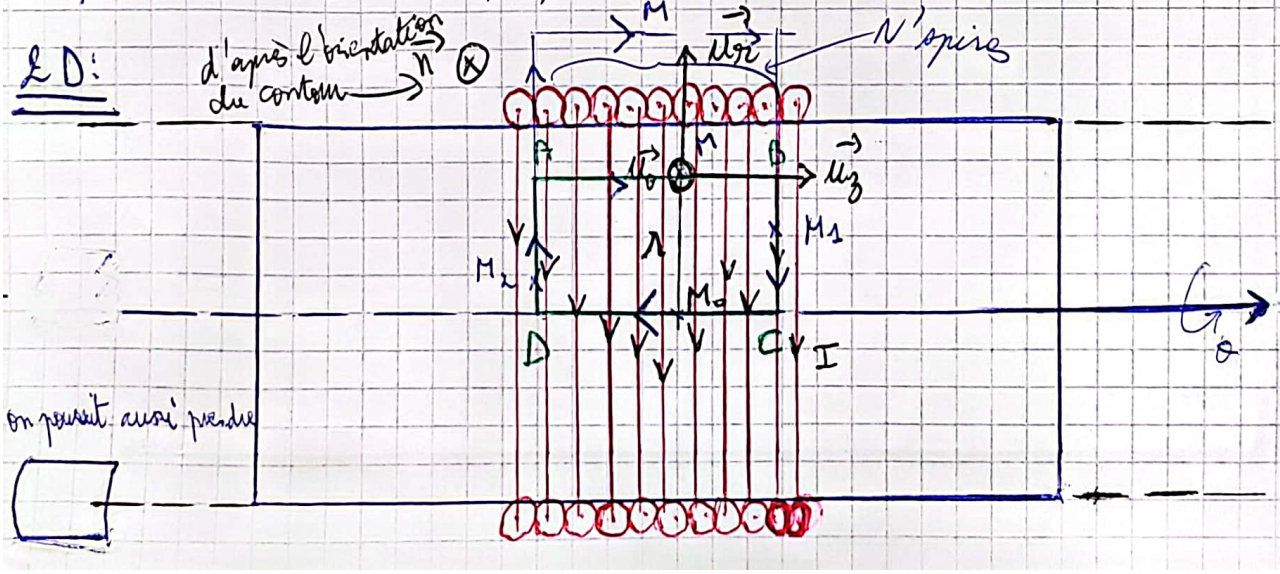
$$\vec{u}_{1\to 2} \wedge (\vec{B}(M_2) - \vec{B}(M_1)) = \mu_0 \vec{j_s}$$

4) Champ magnétique crée par un solénoïde infini :



Déterminer le champ magnétique crée par un solénoïde ∞ en tout pt de l'espace sachant que $\vec{B}(M_0) = \mu_0 n I \vec{u_z}$ avec $M_0 \in (Oz)$

2 D :



on pourrait aussi prendre

Scanné avec CamScanner

Étape (1) : - le plan $(M;\vec{u_r};\vec{u_\theta})$ est un plan de symétrie de la distribution du courant, donc $\vec{B}$ est porté par $\vec{u_z}$

Rq : • le plan $(M;\vec{u_r};\vec{u_z})$ est un plan d'antisymétrie de la distribution du courant donc $\vec{B} \perp$ à ce plan.

• le plan $(M;\vec{u_\theta};\vec{u_z})$ n'est ni p_s ; ni p_{NS}

- La distribution du courant est invariante par rotation d'angle θ (solénoïde) et translation suivant z (infini).

Conl : $\vec{B}(M) = B(r)\vec{u_z}$.

Étape (2) :

$d\vec{\ell} \,//\, \vec{B} \Rightarrow d\vec{\ell} = dl\,\vec{u_z}$. Soit $(\mathcal{E})$ un segment AB passant par M, mais (AB) n'est pas un contour fermé

$$\oint \vec{B}(M)\cdot d\vec{\ell} = \int_A^B \vec{B}(M)\cdot d\vec{\ell}(M) + \int_B^C \vec{B}(M_1)\cdot d\vec{\ell}(M_1) + \int_C^D \vec{B}(M_0)\, d\vec{\ell}(M_0) + \int_D^A \vec{B}(M_2)\cdot d\vec{\ell}(M_2)$$

($\int_B^C$ et $\int_D^A$: 0)

$$= \int_A^B B(M)\,\vec{u_z}\cdot \underbrace{dl(M)}_{dz(M)}\cdot\vec{u_z} + \int_C^D B(M_0)\,\vec{u_z}\cdot \underbrace{dl(M_0)}_{dz(M_0)}\,\vec{u_z}$$

$dz(M)$: composante $d(zM) > 0$; $dz(M_0)$: composante $dz(M_0) < 0$

$$= \int_A^B B(M)\cdot dz + \int_C^D B(M_0)\,dz$$

$$= B(M)\underbrace{[z_B - z_A]}_{\ell} + B(M_0)\underbrace{[z_D - z_C]}_{-\ell} = [B(M) - B(M_0)]\,\ell$$

Étape (3) :

↳ En un point M à l'intérieur : $I_e = 0 \Rightarrow [B(M) - B(M_0)]\,\ell = 0$

$\Rightarrow B(M) = \mu_0 n I$. Le champ magnétique est uniforme à l'intérieur d'un solénoïde ∞.

↳ En un point M à l'extérieur :

$I_e = (-)N'I = \frac{-N'}{\ell}\cdot\ell\cdot I$ or $n = \frac{N}{L} = \frac{N'}{\ell}$

(- : I sortant ; $\vec{n}$ orientée par le contour entrant)

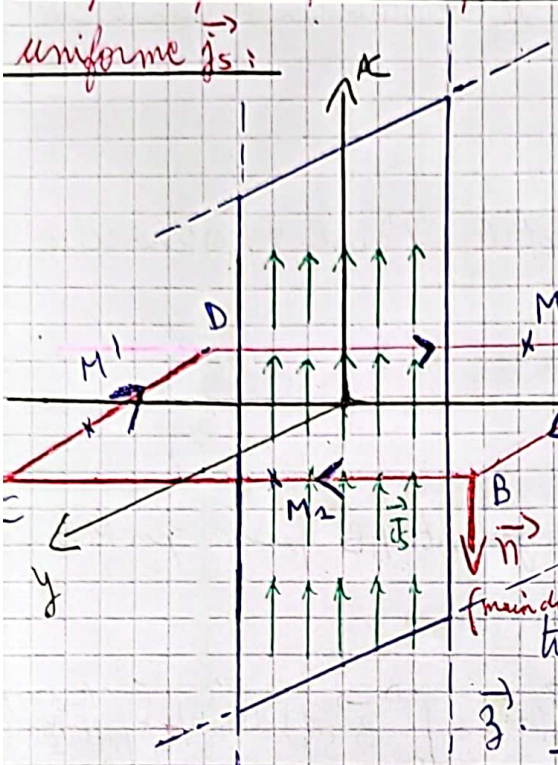
$I_e = -n\ell I$

d'où $[B(M) - B(M_0)] = \mu_0 I_e \Rightarrow [B(M) - \mu_0 n I]\,\ell = \mu_0(-n\ell I)$

Scanné avec CamScanner

donc $\boxed{B(M)=0}$

5) Champ créé par un plan ∞ parcouru par un courant surfacique uniforme $\vec{j_s}$:



Le champ $\vec{B}(M)$?

Étape 1 : * le plan $(M;\vec{x};\vec{z})$ plan de symétrie de la distribution du courant donc $\vec{B}$ est porté par $\vec{u_y}$.

* le plan $(M;\vec{y};\vec{z})$ est un plan d'antisymétrie du courant

* la distribution du courant est invariante par translation suivant $\vec{x}$ et $\vec{y}$ donc $\vec{B}$ ne dépend que de $\vec{z}$. CCL : $\vec{B} = B(z)\cdot\vec{u_y}$

Étape 2 : $d\vec{\ell} // \vec{B} \Rightarrow d\vec{\ell} // \vec{u_y}$ donc $(\mathcal{C})$ est un segment AB mais n'est pas fermé. Soit $\mathcal{E} = ABCD$

$$\oint \vec{B}(M)\cdot d\vec{\ell}(M) = \int_A^B \vec{B}(M)\cdot d\vec{\ell}(M) + \int_B^C \underbrace{\vec{B}(M_2)\cdot d\vec{\ell}(M_2)}_{=0} + \int_C^D \vec{B}(M')\cdot d\vec{\ell}(M')$$

car $\vec{B}(M_2)\perp d\vec{\ell}(M_2)$ $+ \int_D^A \underbrace{\vec{B}(M_2)\cdot d\vec{\ell}(M_2)}_{0}$

car $\vec{B}(M_2)\perp d\vec{\ell}(M_2)$

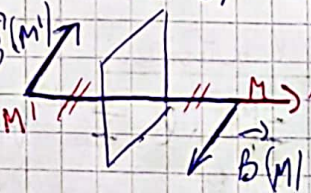
$$\oint \vec{B}(M)\cdot d\vec{\ell}(M) = \int_A^B \vec{B}(M)\cdot d\vec{\ell}(M) + \int_C^D \vec{B}(M')\, d\vec{\ell}(M')$$

$$= \int_A^B \vec{B}(M)\, dy\, \vec{u_y} + \int_C^D \vec{B}(M')\, \underbrace{dy}_{<0}\, \vec{u_y}$$

or Tout plan Π_S du courant est $\Pi_{A.S}$ du champ.

dans notre cas : $(O;x;y) = \Pi_S$ du courant $\rightarrow (O;x;y) = \Pi_{AS}$ du champ

$\Rightarrow \vec{B}(M') = \text{antisym}(\vec{B}(M)) = -\vec{B}(M)$



d'où $\oint \vec{B}(M)\cdot d\vec{\ell}(M)$ =

$$= \int_A^B \vec{B}(M)\, dy\, \vec{u_y} - \int_C^D \vec{B}(M)\cdot dy\, \vec{u_y} = B(M)\left[y_B - y_A\right]$$

Scanné avec CamScanner

$$= B(M)\underbrace{[y_0 - y_M]}_{\ell} - B(M)\underbrace{[y_D - y_C]}_{-\ell}$$

$$= 2B(M).\ell$$

Etape 3 : $I_c = \int \vec{J_S} . d\ell \vec{n} = \int J_S \vec{u_x} . d\ell (-\vec{u_x}) = -J_S . \ell$

d'où $2B(M)\ell = \mu_0(-J_S \ell) \Rightarrow \begin{cases} \vec{B}(M) = \dfrac{-\mu_0 J_S}{2} \vec{u_y} \\ \vec{B}(M') = \dfrac{\mu_0 J_S}{2} \vec{u_y} \end{cases}$

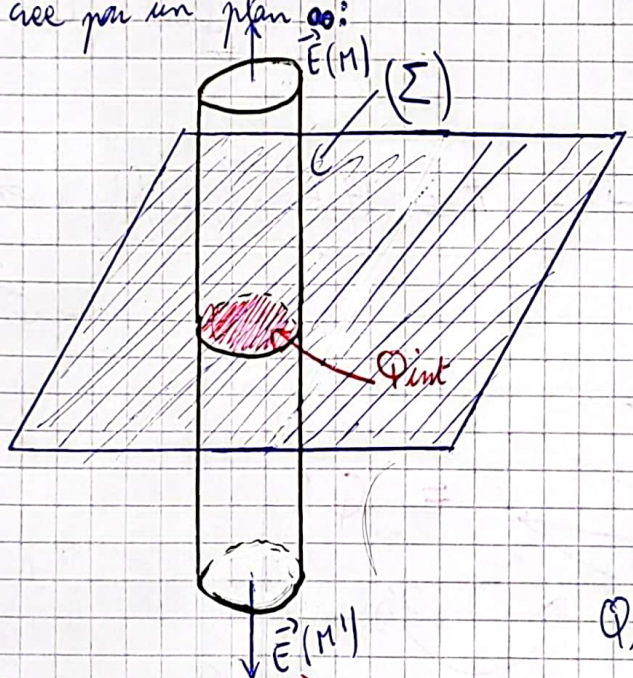
$$\vec{B}(z=0^+) - \vec{B}(z=0^-) = \left[\frac{-\mu_0 J_S}{2} - \frac{\mu_0 J_S}{2}\right]\vec{u_y}$$

$$= -\mu_0 J_S (\vec{u_z} \wedge \vec{u_x}) = \mu_0 J_S (\vec{u_x} \wedge \vec{u_z})$$

$$= \mu_0 \vec{J_S} \wedge \vec{u_z}$$

donc $\vec{B}(z=0^+) - \vec{B}(z=0^-) = \mu_0 \vec{J_S} \wedge \vec{n}$ ($z=0^- \to z=0^+$)

Rq : $\vec{E}$ créé par un plan ∞ :

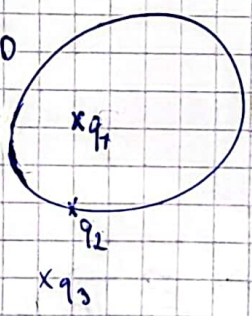


$$\begin{cases} \oiint \vec{E}(M).d\vec{S}(M) = 2E(M).S \\ \oiint \vec{E}(M).d\vec{S} = \dfrac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \dfrac{\sigma S}{\varepsilon_0} \end{cases}$$

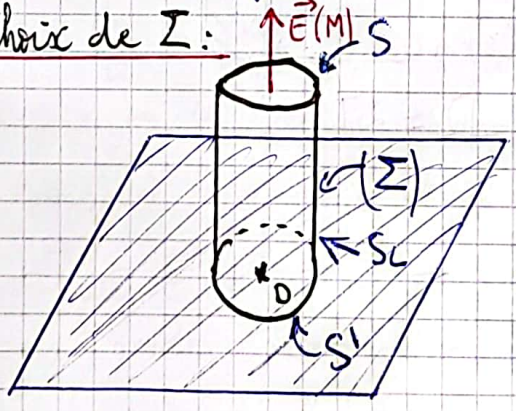
$$\Rightarrow E(M) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

!!

$$Q_{int} = q_1 + \frac{1}{2} q_2 + 0$$



Autre choix de Σ :



Scanné avec CamScanner

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E}(M)\cdot d\vec{S}(M) = \iint_{M\in S} \vec{E}(M)\cdot d\vec{S}(M) + \iint_{M\in(S_L)} \overbrace{\vec{E}(M)\cdot d\vec{S_L}}^{0} + \cancel{\iint_{O\in S'} \vec{E}(O)\cdot d\vec{S'}}$$

0 car O est un centre de symétrie

$$= \iint E(M)\cdot dS = E(M)\cdot S$$

$$\oiint \vec{E}(M)\cdot d\vec{S}(M) = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma S/2}{\varepsilon_0}$$

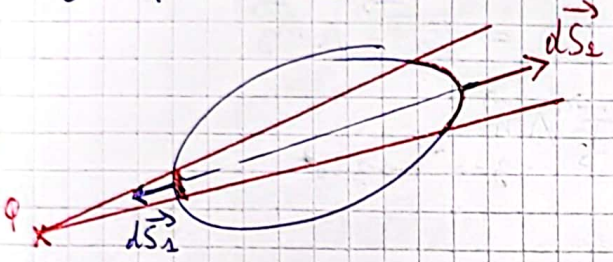
la charge est divisée par 2 car $\in$ à la surface

d'où $E(M)\cdot \cancel{S} = \frac{\sigma \cancel{S}}{2\varepsilon} \Rightarrow E(M) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

En effet :

$$\oiint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\times\Omega = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

↳ Si Q est à l'extérieur :

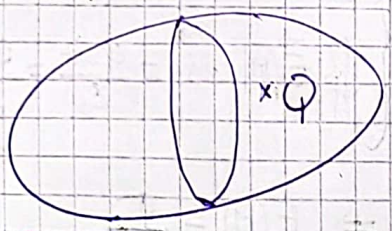


$\Rightarrow \Omega = 0$

$\Rightarrow \oiint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\times 0 = 0$

donc $Q_{int} = 0$.

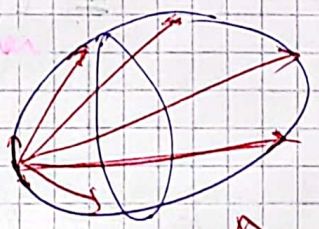
↳ Si Q est à l'intérieur :



$\Omega = 4\pi \Rightarrow \oiint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\cancel{4\pi}\varepsilon_0}\times \cancel{4\pi} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$

donc $Q_{int} = Q$

↳ Si $Q \in (\Sigma)$



$= Q$

même angle

Solide $\Omega = 2\pi$

$$\oiint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\times 2\pi = \frac{Q}{2\varepsilon_0}$$

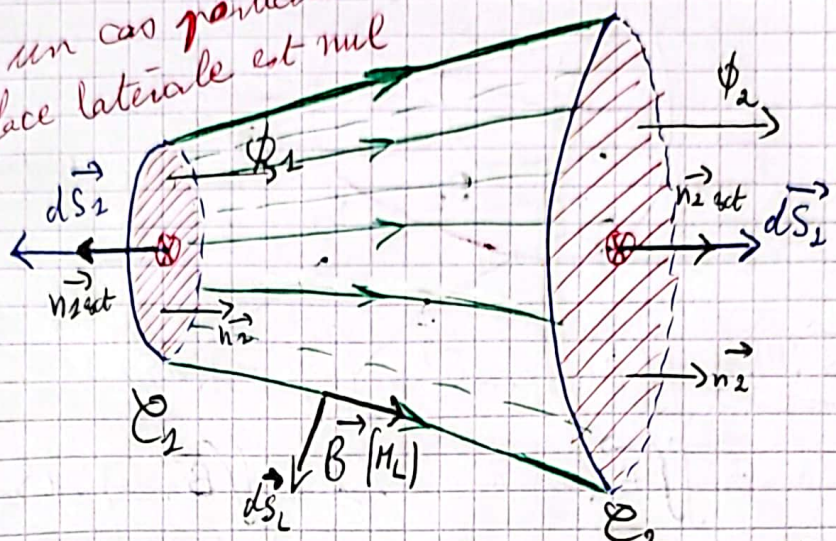
donc $Q_{int} = \frac{Q}{2}$

Scanné avec CamScanner

4/ Conséquence du postulat: On considère un tube du champ (ensemble des lignes de champ partant de $\mathcal{C}_1$ vers $\mathcal{C}_2$.

$$\oiint_{M\in(S)} \vec{B}(M)\cdot d\vec{S}(M) = 0 \qquad \Sigma = S_1 \cup S_L \cup S_2$$

⚠ c'est un cas particulier où le flux à travers la surface latérale est nul



$$\oiint_{M\in(S)} \vec{B}(M)\cdot d\vec{S}(M) = \iint_{M_1\in S_1} \vec{B}(M_1)\cdot d\vec{S}_1 + \iint_{M\in S_L} \vec{B}(M_L)\cdot d\vec{S}_L + \iint_{M_2\in S_2} \vec{B}(M_2)\cdot d\vec{S}_2$$

$$\| \quad 0 = \iint \vec{B}(M_1)\cdot d\vec{S}_1 \cdot \vec{n}_{1ext} + 0 + \iint \vec{B}(M_2)\cdot dS_2 \cdot \vec{n}_{2ext}$$

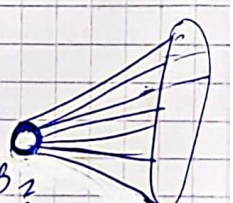
On pose: $\begin{cases} \phi_1 = \iint \vec{B}(M_1)\cdot dS_1 \cdot \vec{n}_1 \\ \phi_2 = \iint \vec{B}(M_2)\cdot dS_2 \cdot \vec{n}_2 \end{cases}$ or $\begin{cases} \vec{n}_{1ext} = -\vec{n}_1 \\ \vec{n}_{2ext} = \vec{n}_2 \end{cases}$

d'où $0 = -\phi_1 + \phi_2 \Rightarrow \phi_1 = \phi_2$ conservation du flux.

Si S_1 et S_2 sont des surfaces de faible dimension $\Rightarrow$ $\vec{B}(M_1)$ et $\vec{B}(M_2)$ sont quasi-uniformes respectivement sur S_1 et S_2.

$$\phi_1 = \iint \vec{B}(M_1)\cdot d\vec{S}_1 = B_1 S_1 \Rightarrow B_1 S_1 = B_2 S_2$$
$$\phi_2 = \iint \vec{B}(M_2)\cdot d\vec{S}_2 = B_2 S_2$$

donc $\frac{B_1}{B_2} = \frac{S_2}{S_1} \Rightarrow : \left[S_2 > S_1 \Leftrightarrow B_1 > B_2 \right]$

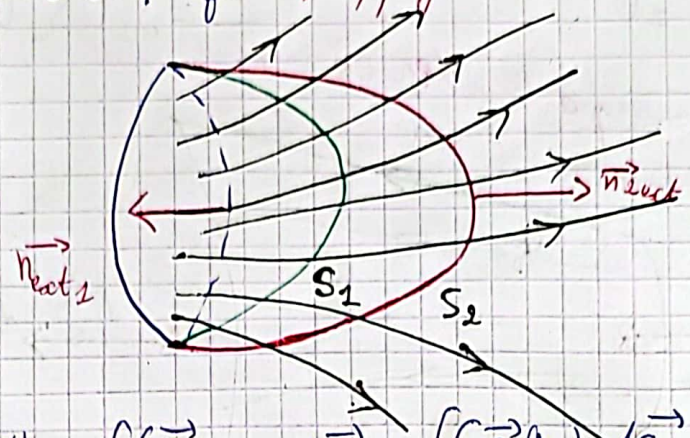


dans la zone où les lignes de champs sont rapprochées, le champ est intense dans la zone où les lignes de champs sont écartées, le champ est faible.

$\oint \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = 0$. $\vec{E}$ est à circulation conservative, càd que la circulation du champ garde la même valeur et le chemin suivi en gardant le même état initial et final.

Scanné avec CamScanner

de même $\vec{B}$ est à flux conservatif càd le flux de $\vec{B}$ conserve sa valeur quelque soit la surface s'appuyant sur même contour.



$\Sigma = S_1 \cup S_2$ surface fermée

$$\oiint \vec{B}(M) \cdot d\vec{S}(M) = \iint \vec{B}(M_1) \cdot d\vec{S}_1 + \iint \vec{B}(M_2) \cdot d\vec{S}_2$$

$$0 = \iint \vec{B}(M_1) \cdot dS_1 \cdot \vec{n}_{1ext} + \iint \vec{B}(M_2) \cdot dS_2 \cdot \vec{n}_{2ext}$$

Mines 1995 Question 4 (quand on peut séparer les variables) (ENS 2001)
≡ centrale 2016 (sans $\vec{A}$)
CCP 2007 (conducteurs / condensateurs ... etc).

5) potentiel vecteur $\vec{A}(M)$:

Rappel: $\begin{cases} \vec{rot}\,\vec{E} = \vec{0} \\ \vec{rot}(\vec{grad}) = \vec{0} \end{cases}$ $\xrightarrow{\exists \text{ un potentiel scalaire } V(M)}$ $\vec{E}(M) = -\vec{grad}\,V(M)$

$\begin{cases} \text{div}\,\vec{B} = 0 \\ \text{div}(\vec{rot}) = 0 \end{cases}$ $\xrightarrow{\exists \text{ un potentiel vecteur } \vec{A}(M) \text{ tq (PB - page 2)}}$

$$\boxed{\vec{B}(M) = \vec{rot}(\vec{A}(M))}$$

Equation locale.

Rq: $\text{div}(\vec{rot}) = 0$, $\vec{rot}(\vec{grad}) = 0$ (D R G)

donc $\iint_{M \in (S)} \vec{B}(M) \cdot d\vec{S} = \iint_{M \in (S)} \vec{rot}\,\vec{A}(M) \cdot d\vec{S}(M)$

Théorème de Stokes

$$\boxed{\iint_{M \in (S)} \vec{B}(M) \cdot d\vec{S}_{(M)} = \oint_{P \in (\mathcal{C})} \vec{A}(P) \cdot d\vec{\ell}(P)}$$

Relation intégrale.

Expression de $\vec{A}(M)$:

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{P \in (D)} \frac{\vec{SC}(P)}{PM} + \vec{cte}$$

Rappel: $\int_{P \in (D)} \frac{SQ(P)}{4\pi\varepsilon_0 PM} + cte$

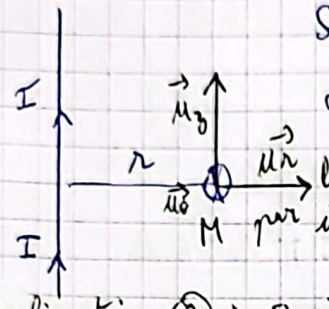
Scanné avec CamScanner

donc $\vec{A}(M)$ est un vrai vecteur $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \vec{A}(M) \in \Pi_S \\ \vec{A}(M) \perp \Pi_{A.S} \end{cases}$$ de la distribution de courant.

Rq : $\vec{A}(M)$ ne possède aucune interprétation physique. C'est juste un intermédiaire de calcul pour calculer le champ $\vec{B}$.

Application ① : Fil ∞

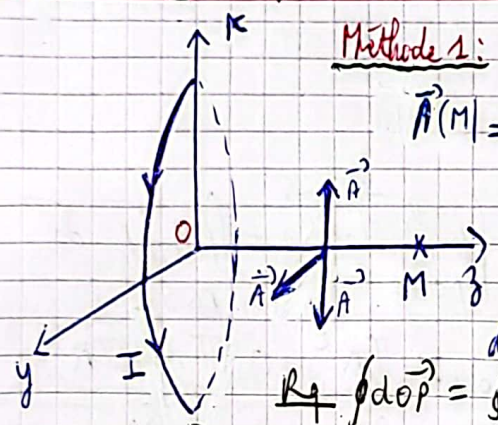


Sachant que le champ crée par un fil infini est $\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{u_\theta}$ déduire $\vec{A}(M)$ en utilisant la relation locale.

le plan $(M; \vec{u_r}; \vec{u_\theta})$ est un Π_{AS} de la distribution du courant donc $\vec{A}$ est porté par $\vec{u_z}$. la distribution du courant est invariante par rotation d'angle θ et translation suivant $\vec{z}$. donc $\vec{A}$ ne dépend que de r donc $\vec{A}(M) = A(r)\vec{u_z}$

donc $\vec{rot}(\vec{A}(M)) = -\frac{dA}{dr}\vec{u_\theta}$

Application ② : Spire circulaire :



Méthode 1 : $\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint \frac{\vec{SC}(P)}{PM} + \cancel{\vec{cte}}$ $\vec{0}$ (car distribution finie).

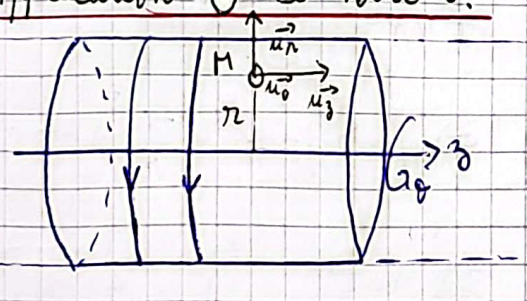
$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint \frac{I\,d\vec{l}(P)}{PM}$ or $PM = \sqrt{R^2+z^2} = cte$

$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi PM}\oint d\vec{OP}$ or $\oint d\vec{OP} = [OP]_{P_0}^{P_0} = \vec{OP_0} - \vec{OP_0} = \vec{0}$

donc $\vec{A}(M) = \vec{0}$.

Rq $\oint d\vec{OP} = \oint d(R\vec{u_r}) = R\oint d\theta\,\vec{u_\theta} \neq R\vec{u_\theta}\oint d\theta$ car $\vec{u_\theta}$ dépend de θ

Application ③ Solénoïde ∞ :



Sachant que $\vec{B}(M) = \begin{cases} \mu_0 n I\,\vec{u_z} & \text{à l'intérieur} \\ \vec{0} & \text{à l'extérieur.} \end{cases}$

déduire $\vec{A}(M)$ en utilisant la relation intégrale.

Correction :

① $\vec{B} = \vec{rot}\,\vec{A} \Rightarrow \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{-dA}{dr}$ donc $dA = \frac{-\mu_0 I}{2\pi}\frac{dr}{r}$

donc $A(r) = \frac{-\mu_0 I}{2\pi}\ln(r) + cte$; $(A(r\to\infty) \neq 0$ car dist est $\infty)$

② on a plutôt $\oint d\vec{OP} = R\oint d\vec{u_r} = R[u_r]_0^{2\pi} = R[\vec{u_r}(\theta=2\pi) - \vec{u_r}(\theta=0)] = \vec{0}$

Méthode 2 : Tout plan contenant l'axe $\vec{z}$ est un plan d'antisymétrie de la distribution du courant donc $\vec{A}$ est nul.

Scanné avec CamScanner

1] le plan $(M, \vec{u_r}, \vec{u_z})$ est un plan d'a.s du courant donc $\vec{A}$ est porté par $\vec{u_\theta}$. la distribution du courant est invariante par rotation d'angle θ et translation suivant $\vec{z}$ donc $\vec{A}$ ne dépend que de r.

CCL $\vec{A}(M) = A(r)\vec{u_\theta}$

2] choix du contour: $d\vec{l} // \vec{A} \Rightarrow d\vec{\ell} = d\ell\,\vec{u_\theta}$ donc $(\mathcal{C})$ est un cercle

$$\oint \vec{A}(M).\vec{d\ell}(M) = \oint A(r)\vec{u_\theta}\,d\ell\vec{u_\theta} = \oint A(r).r.d\theta = 2\pi r A(r)$$

3]. Choix de (S) s'appuyant sur $(\mathcal{C})$

$\vec{dS} // \vec{B} \Rightarrow \vec{dS} = dS\,\vec{u_z}$ donc (S) est un disque.

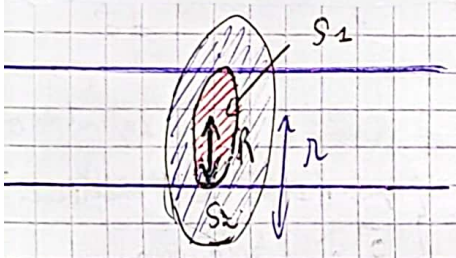
↳ Si M est à l'intérieur:

$$\oint_{P\in(S)} \vec{B}(P).\vec{dS}(P) = \iint \mu_0 n I \vec{u_z}.dS.\vec{u_z} = \mu_0 n I \pi r^2$$

d'où $2\pi r A(r) = \mu_0 n I \pi r^2$

$$A(r<R) = \frac{\mu_0 n I r}{2}$$

→ Si M est à l'extérieur:



$$\oint \vec{B}(P).\vec{dS}(P) = \iint_{P\in S_1} B(\vec{P}).\vec{dS_1} + \iint_{P\in S_2} B(\vec{P}).\vec{dS_2}$$

$$= \mu_0 n I \underbrace{\pi R^2}_{S_1} + 0\left(\underbrace{\pi r^2 - \pi R^2}_{S_2}\right)$$

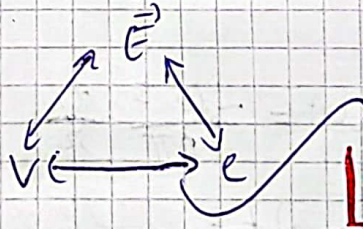
$$= \mu_0 n I \pi R^2$$

Donc $2\pi r\,A(r) = \mu_0 n I \pi R^2 \Rightarrow A(r>R) = \frac{\mu_0 n I R^2}{2r}$ (car dérivable)

Rq $A(r=R^+) = A(r=R^-)$

IV] Equation de poisson :

Rappel:



$$\Delta V(M) + \frac{\rho(M)}{\varepsilon_0} = 0$$

Solution générale $V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint \frac{\rho(P).d\tau(P)}{PM} + cte$

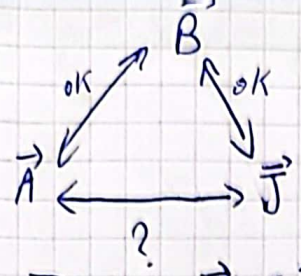
$\Delta = div(grad)$

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{SQ(P)}{PM} + cte$$

Question: Montrer que dans le cas d'un champ magnétique uniforme.

$$\vec{A}(M) = \frac{1}{2}\vec{B} \wedge \vec{OM}$$

Scanné avec CamScanner



$$\begin{cases} \overrightarrow{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{J} \\ \vec{B} = \overrightarrow{rot}\,\vec{A} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\,\vec{A}\right) = \mu_0 \vec{J}$$

on définit le Laplacien vectoriel (S.G) par :

$$\vec{\Delta} = \overrightarrow{grad}\,div - \overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\right)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\,\vec{A}\right) = \overrightarrow{grad}\,div - \Delta\vec{A}$$

↳ sans "→" car on a mis à côté un vecteur.

$$\mu_0 \vec{J} = \overrightarrow{grad}\,div\,\vec{A} - \Delta\vec{A}$$

$$\Rightarrow \Delta\vec{A}(M) + \mu_0 \vec{J}(M) = \overrightarrow{grad}\,div\,\vec{A}$$

$$\text{or } \vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{dC}(P)}{PM} + \vec{cte} = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{P\in D} \frac{\vec{J}(P)\,d\tau}{PM} + \vec{cte}$$

↑ Solution d'une équation de la forme :

$$\Delta\vec{A}(M) + \mu_0 \vec{J}(M) = \vec{0}.$$

par analogie avec l'électrostatique

DR G

$\overrightarrow{grad}\,div\,\vec{A} = 0$ mais $\overrightarrow{grad}\,div \neq \vec{0}$??

Solution : Non unicité de $\vec{A}(M)$:

$\vec{A}(M)$ n'est pas unique, en effet si $\vec{A}$ est un potentiel vecteur de $\vec{B}$ alors $\overrightarrow{rot}\,\vec{A} = \vec{B}$

$\rightarrow \vec{A'} = \vec{A} + \overrightarrow{grad}\,\varphi$ ($\forall\varphi$) est un potentiel vecteur de $\vec{B}$ car :

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{A'} = \overrightarrow{rot}\,\vec{A} + \underbrace{\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{grad}\,\varphi\right)}_{\vec{0}} = \overrightarrow{rot}(\vec{A}) + \vec{0} = \vec{B}.$$

$$\rightarrow \vec{A} = \vec{A'} - \overrightarrow{grad}\,\varphi \overset{div}{\Rightarrow} div\,\vec{A} = div\,\vec{A'} - div\left(\overrightarrow{grad}\,\varphi\right) = div\,\vec{A'} - \Delta\varphi.$$

donc $\forall A'\ \exists\varphi$ tq $\Delta\varphi = div\,\vec{A'} \Rightarrow \boxed{div\,\vec{A} = 0}$ condition de Jauge Coulomb.

d'où $\boxed{\Delta\vec{A}(M) + \mu_0 \vec{J}(M) = \vec{0}}$ Equation de poisson

donc $\forall \vec{A}\ \exists\varphi$ tq $\Delta\varphi = -div\,\vec{A} \Rightarrow div\,\vec{A'} = 0$

Question : Montrer que dans le cas d'un champ magnétique uniforme :

$$\vec{A}(M) = \frac{1}{2}\vec{B} \wedge \vec{OM}$$

Scanné avec CamScanner

Réponse : $\vec{rot}\,\vec{A} = \vec{B}$ $\quad div\,\vec{A} = 0$

Choix d'un système de coordonnées :

on choisit les coordonnées cylindriques : $\vec{B} = B_r \vec{u_r} + B_\theta \vec{u_\theta} + B_z \vec{u_z}$

↳ $\vec{rot}\,\vec{A}(M) = \frac{1}{2} \vec{rot}(\vec{B} \wedge \vec{OM})$

(voir doc la dernière relation) $= \frac{1}{2}\left[(div\,\vec{OM}).\vec{B} + (\vec{OM}.\vec{grad})\vec{B} - (div\,\vec{B}).\vec{OM} - (\vec{B}.\vec{grad})\vec{OM}\right]$

⊕ $div\,\vec{OM} = div(r\vec{u_r} + z\vec{u_z}) = \frac{1}{r}\frac{\partial(r.r)}{\partial r} + 0 + \frac{\partial z}{\partial z}$

$= \frac{1}{r}\frac{\partial r^2}{\partial r} + 1 = \frac{2r}{r}\frac{\partial r}{\partial r} + 1 = 3$

⊕ $div\,\vec{B} = 0$ Maxwell Flux :

⊕ $(\vec{B}.\vec{grad})\vec{OM} = \left[(B_r\vec{u_r} + B_\theta\vec{u_\theta} + B_z\vec{u_z})\left(\frac{\partial}{\partial r}\vec{u_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\vec{u_\theta} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{u_z}\right)\right].\vec{OM}$

$(\vec{B}.\vec{grad})\vec{OM} = \left(B_r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{B_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + B_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\vec{OM}$

$= B_r\frac{\partial(r\vec{u_r}+z\vec{u_z})}{\partial r} + \frac{B_\theta}{r}\frac{\partial(r\vec{u_r}+z\vec{u_z})}{\partial\theta} + B_z\frac{\partial(r\vec{u_r}+z\vec{u_z})}{\partial z}$

$= B_r\left[\frac{\partial r}{\partial r}\vec{u_r} + \vec{0}\right] + \frac{B_\theta}{r}\left[r\frac{\partial\vec{u_r}}{\partial\theta} + \vec{0}\right] + B_z\left[\vec{0} + \frac{\partial z}{\partial z}\vec{u_z}\right]$

$= B_r\vec{u_r} + B_\theta\vec{u_\theta} + B_z\vec{u_z}$

$= \vec{B}$

⊕ $(\vec{OM}.\vec{grad}).\vec{B} = \vec{0}$ car $\vec{B}$ est uniforme.

d'où $\vec{rot}\,\vec{A} = \frac{1}{2}\left[3\vec{B} + \vec{0} + \vec{0} - \vec{B}\right] = \frac{1}{2} \times 2\vec{B} = \vec{B}$.

↳ $div\,\vec{A} = \frac{1}{2} div(\vec{B} \wedge \vec{OM}) = \frac{1}{2}\left[\vec{OM}.\vec{rot}\,\vec{B} - \vec{B}.\vec{rot}\,\vec{OM}\right]$

⊕ $\vec{rot}\,\vec{B} = \vec{0}$ car $\vec{B}$ est uniforme.

⊕ $\vec{rot}\,\vec{OM} = \begin{vmatrix} \frac{1}{r}\vec{u_r} & \vec{u_\theta} & \frac{1}{r}\vec{u_z} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ r & r.0 & z \end{vmatrix} = \vec{0}$ après calcul

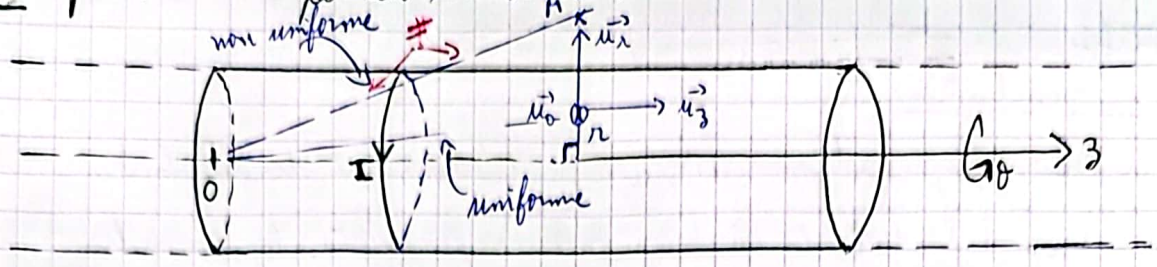
$\vec{OM} = r\vec{u_r} + z\vec{u_z}$; v_r v_z ; V_r V_θ V_z

d'où $div\,\vec{A} = 0$

Ccl : Si $\vec{B}$ est uniforme alors $\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B} \wedge \vec{OM}$ est un potentiel vecteur de $\vec{B}$.

Scanné avec CamScanner

App : pot vecteur créé par un solénoïde :



$$\begin{cases} \vec{B}(M) = \mu_0 n I \vec{u}_z & \text{si } M \text{ est à l'intérieur} \\ \vec{B}(M) = \vec{0} & \text{si } M \text{ est à l'extérieur} \end{cases}$$

Déduire $\vec{A}(M)$

↳ Si M est à l'intérieur : $\vec{A}(M) = \frac{1}{2}\left(\mu_0 n I \vec{u}_z\right) \wedge (r\vec{u}_r + z\vec{u}_z)$

$\vec{B}$ est uniforme : $\vec{A}(M) = \frac{\mu_0 n I r}{2} \vec{u}_z \wedge \vec{u}_r + \vec{0} = \frac{\mu_0 n I r}{2} \vec{u}_\theta$

↳ Si M est à l'extérieur : $\vec{AM}(M) \neq \frac{1}{2} \vec{B} \wedge \vec{OM} = \frac{1}{2} \vec{0} \wedge \vec{OM} = \vec{0}$

Car $\vec{B}$ est non uniforme de O vers M quand M est à l'extérieur

on calcule alors $\vec{A}(M)$ avec les méthodes précédentes.

Scanné avec CamScanner

LCP 2006
CNC 2011

Dipôle magnétique : (Mines)

I] Defs et modélisation :

Un dipôle magnétique est une distribution de courant de très faibles dimensions devant la distance où l'on calcule ses effets. Approximation dipolaire.

Un dipôle magnétique est une boucle de courant modélisée par une spire circulaire de rayon a, de vecteur surface $\vec{S}$ et parcourue par un courant I.

Le dipôle magnétique est caractérisé par un moment dipolaire défini par

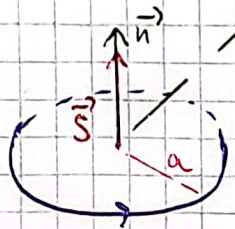
$$\boxed{\vec{m} = I\vec{S}} \quad A \cdot m^2.$$

M

effets { champ $\vec{B}$ et potentiel $\vec{A}$

r

$a \ll r$ approximation dipolaire



$$\vec{S} = S \cdot \vec{n}$$

II] Analogie Electro – magnéto Statique :

$$\vec{p} = q \cdot \vec{NP}$$

$$V(M) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{OM}}{4\pi\varepsilon_0 OM^3} = \frac{p\cos(\theta)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$\vec{p} \cdot \leftrightarrow \vec{m} \wedge$

$$\vec{m} = I\vec{S}$$

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \wedge \vec{OM}}{OM^3} = \frac{\mu_0 m \sin\theta}{4\pi r^2} \vec{u_\varphi}$$

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{3(\vec{p}\cdot\vec{OM})\vec{OM} - \vec{p}\,OM^2}{OM^5}\right]$$

$\vec{p} \cdot \leftrightarrow \vec{m} \cdot$

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3(\vec{m}\cdot\vec{OM})\vec{OM} - \vec{m}\cdot OM^2}{OM^5}\right]$$

$$\vec{E}(M) = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[2\cos(\theta)\vec{u_r} + \sin\theta\,\vec{u_\theta}\right]$$

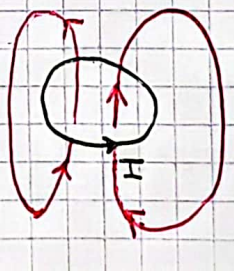
$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3}\left[2\cos(\theta)\vec{u_r} + \sin(\theta)\vec{u_\theta}\right]$$

$$\vec{E} \wedge d\vec{OM} = \vec{0}$$

$$\Downarrow$$

$$r(\theta) = r_0 \sin^2(\theta)$$

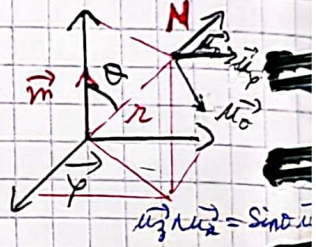
Valable dans l'approximation dipolaire



$$\vec{B} \wedge d\vec{OM} = \vec{0}$$

$$\Downarrow$$

$$r(\theta) = r_0 \sin^2(\theta)$$

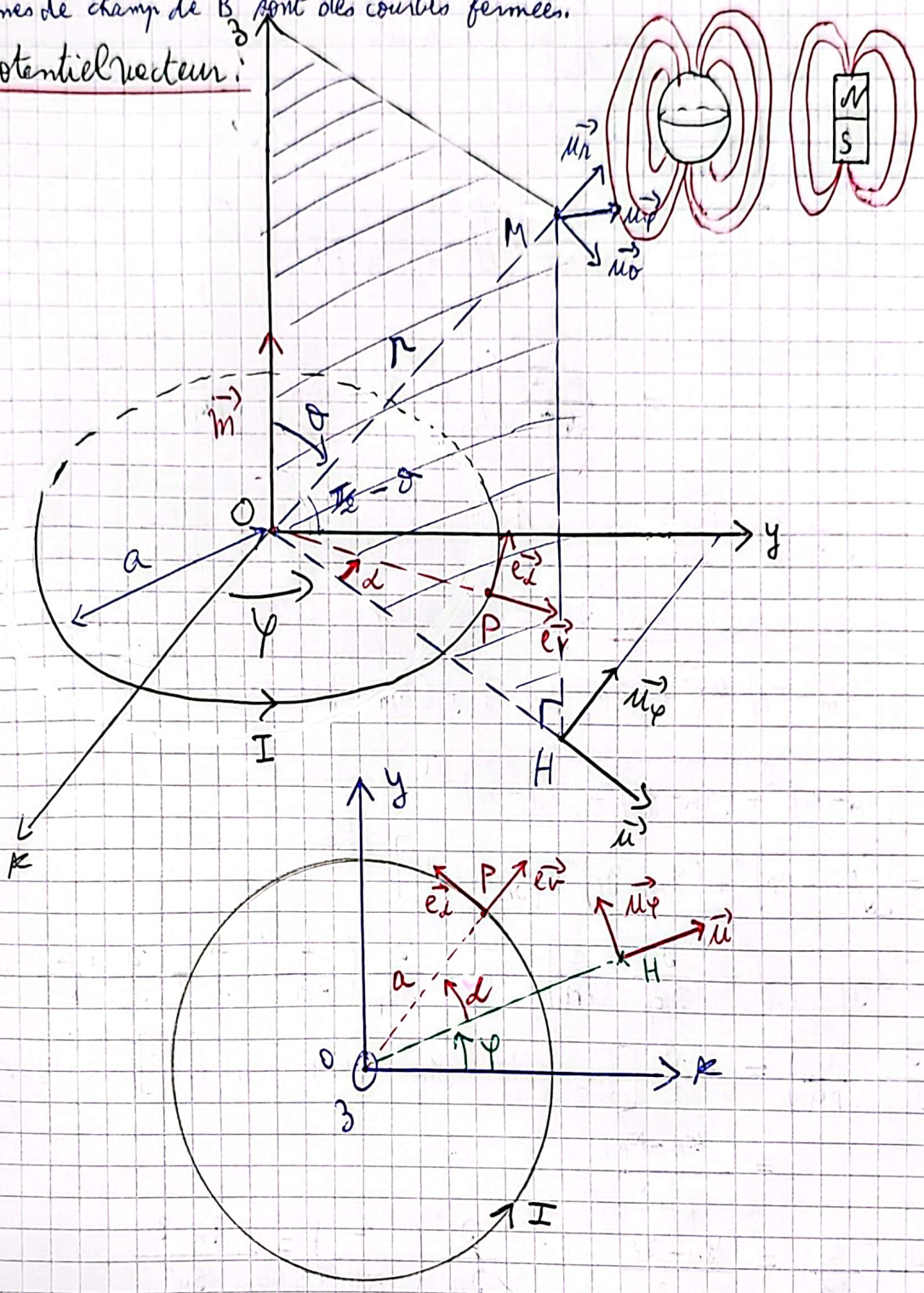


Scanné avec CamScanner

* Les lignes de champ de $\vec{E}$ et de $\vec{B}$ sont identiques à grande distance (dans l'approximation dipolaire)

* Les lignes de champ de $\vec{E}$ sont dirigées de $+q$ vers $-q$ donc non fermées
* les lignes de champ de $\vec{B}$ sont des courbes fermées.

III) potentiel vecteur:



Analyse de Symétrie et d'invariances:

* Le plan $(M; \vec{u_r}; \vec{u_\theta})$ est un plan d'antisymétrie de la distribution du courant donc $\vec{A}$ est porté par $\vec{u_\varphi}$.
* La distribution du courant est invariante par rotation d'angle φ donc $\vec{A}$ ne dépend pas de φ.

Scanné avec CamScanner

Ccl: $\boxed{\vec{A}(M) = A(r;\theta)\,\vec{u_\varphi}}$

Calcul de $\vec{A}$:

Méthode ① : Théorème de Kelvin

$$\oint f \cdot d\vec{\ell} = -\iint \vec{\text{grad}}\, f \wedge d\vec{S}$$

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{I\,d\vec{\ell}(P)}{PM} + \cancel{\vec{d\ell} \to \vec{0}}$$

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{\ell}(P)}{PM} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \iint -\vec{\text{grad}}_{(P)}\left(\frac{1}{PM}\right) \wedge d\vec{S}$$

↑ Th. de Kelvin

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \iint d\vec{S} \wedge -\underbrace{\vec{\text{grad}}_{(P)}\left(\frac{1}{PM}\right)}_{?}$$

Mq $\vec{\text{grad}}_{(P)}\left(\frac{1}{PM}\right) = \frac{\vec{PM}}{PM^3}$ ⚠ $\vec{\text{grad}}_{(M)}\left(\frac{1}{PM}\right) = \frac{\vec{MP}}{MP^3} = \frac{-\vec{PM}}{PM^3}$

En coordonnées cartésiennes: (c'est une relation intrinsèque donc ne dépend pas du système de coordonnées).

$$PM = \left\| (x_M - x_P)\,\vec{u_x} + (y_M - y_P)\,\vec{u_y} + (z_M - z_P)\,\vec{u_z} \right\|$$

$$= \sqrt{(x_M - x_P)^2 + (y_M - y_P)^2 + (z_M - z_P)^2}$$

$$\frac{1}{PM} = \left[(x_M - x_P)^2 + (y_M - y_P)^2 + (z_M - z_P)^2\right]^{-1/2}$$

or $\vec{\text{grad}}_{(P)}\left(\frac{1}{PM}\right) = \frac{\partial}{\partial x_P}\left(\frac{1}{PM}\right)\vec{u_x} + \frac{\partial}{\partial y_P}\left(\frac{1}{PM}\right)\vec{u_y} + \frac{\partial}{\partial z_P}\left(\frac{1}{PM}\right)\vec{u_z}$

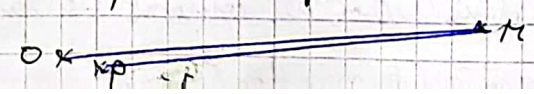
or $\frac{\partial}{\partial x_P}\left(\frac{1}{PM}\right) = -\frac{1}{2}\left[(x_M - x_P)^2 + (y_M - y_P)^2 + (z_M - z_P)^2\right]^{-3/2} \times 2(x_M - x_P) \times (-1)$

$$= \frac{x_M - x_P}{PM^3}$$

$$\frac{\partial}{\partial y_P}\left(\frac{1}{PM}\right) = \frac{y_M - y_P}{PM^3} \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial z_P}\left(\frac{1}{PM}\right) = \frac{z_M - z_P}{PM^3}$$

d'où $\vec{\text{grad}}_{(P)}\left(\frac{1}{PM}\right) = \frac{x_M - x_P}{PM^3}\vec{u_x} + \frac{y_M - y_P}{PM^3}\vec{u_y} + \frac{z_M - z_P}{PM^3}\vec{u_z} = \frac{\vec{PM}}{PM^3}$

d'où $\vec{A}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \iint d\vec{S} \wedge \frac{\vec{PM}}{PM^3}$ or dans l'approximation dipolaire $PM \simeq OM$



Scanné avec CamScanner

d'où $\vec{A}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left(\iint d\vec{S}\right) \wedge \frac{\vec{OM}}{OM^3} = \frac{\mu_0 \vec{IS}}{4\pi} \wedge \frac{\vec{OM}}{OM^3}$

$\vec{S}$

$$\boxed{\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \wedge \vec{OM}}{OM^3}}$$

Forme intrinsèque du potentiel vecteur

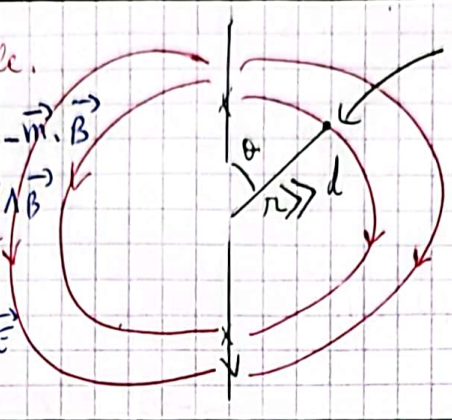
Rq énergie potentielle.

$E_p = -\vec{p}.\vec{E} \hookrightarrow E_p = -\vec{m}.\vec{B}$

$\vec{\Gamma} = \vec{p} \wedge \vec{E} \hookrightarrow \vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}$ ← couple

$\vec{F} = (\vec{p}.\overrightarrow{grad}).\vec{E}$

$\hookrightarrow \vec{F} = (\vec{m}.\overrightarrow{grad}).\vec{E}$ ← Force



$\overrightarrow{rot}\,\vec{E} = \vec{0}$ $\quad \overrightarrow{rot}\,\vec{B} = \vec{0}$

$div\,\vec{E} = 0$ $\quad div\,\vec{B} = 0$

⇓ vérifient les mêmes équations locales

les lignes de champs des champ électrostatique et magnétostatique ont même allure à grande distance (càd dans l'approximation dipolaire).

Voir dernier schéma précédent:

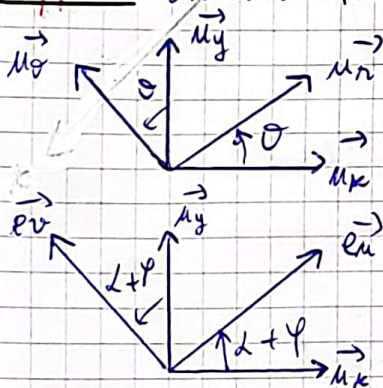
$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{P \in (D)} \frac{S\vec{C}(P)}{PM} + \cancel{\vec{cte}}^{\vec{0}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{P \in (D)} \frac{d\vec{\ell}(P)}{PM}$$

Mq $\vec{A}(M) = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^2} \sin\theta\, \vec{u_\varphi}$.

Réponse:

↳ $d\vec{\ell}(P) = d(\vec{OP})$ or $\vec{OP} = a\vec{e_a} \Rightarrow d\vec{\ell}(P) = d(a\vec{e_r}) = a\,d\vec{e_r}$.

Rappel: en coordonnées cylindriques



$d\vec{r} = dr\,\vec{u_r} + r\,d\theta\,\vec{u_\theta}$

$d\vec{e_r} = d(\alpha+\varphi)\,\vec{e_v} = d\alpha\,\vec{e_v}$

car $\varphi = cte$ (on fait la somme sur les point P)

$\Rightarrow$ α variable $\Rightarrow d\vec{\ell}(P) = a\,d\alpha\,\vec{e_v}$

↳ $PM = \|\vec{PM}\| = \|\vec{OM} - \vec{OP}\| = \|r\vec{u_r} - a\vec{e_r}\|$

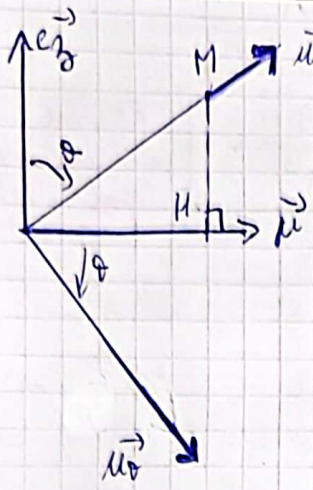
$$PM = \sqrt{r^2 + a^2 - 2ar\,\vec{u_r}.\vec{e_u}} = r\left[1 + \frac{a^2}{r^2} - \frac{2a}{r}\vec{u_r}.\vec{e_u}\right]^{1/2}$$

$$\frac{1}{PM} = \frac{1}{r}\left[1 + \frac{a\alpha}{r^2} - \frac{2a}{r}\vec{u_r}.\vec{e_u}\right]^{-1/2}$$

$\vec{u_r}.\vec{e_u} = \cos(\pi/2 - \theta)\cos\alpha = \sin\theta\cos\alpha$

Scanné avec CamScanner

Autre méthode de calcul de $\vec{u_r} \cdot \vec{e_u}$:



$$\vec{u_r} = \cos(\theta)\vec{u_z} + \sin(\theta)\vec{u}$$

$$\Rightarrow \vec{u_r} \cdot \vec{e_u} = \cos(\theta)\underbrace{\vec{u_z} \cdot \vec{e_u}}_{0 \text{ car } \vec{e_u} \in (Oxy) \perp \vec{u_z}} + \sin(\theta)\vec{u} \cdot \vec{e_u}$$

$$\vec{u_r} \cdot \vec{e_u} = \sin(\theta)\cos(\alpha)$$

plan OHM

$$\frac{1}{PM} = \frac{1}{r}\left[1 + \frac{a^2}{r^2} - \frac{2a}{r}\sin(\theta)\cos(\alpha)\right]^{-1/2}$$

$$\oint \frac{d\vec{e}(P)}{PM} = \oint \frac{1}{r}\left[1 + \frac{a^2}{r^2} - \frac{2a}{r}\sin(\theta)\cos(\alpha)\right]^{-1/2} \cdot \underbrace{d\vec{OP}}_{a\,d\alpha\,\vec{e_v}}$$

Dans l'approximation dipolaire $a \ll r \Rightarrow$ D.L à l'ordre le plus bas non nul

$$\oint \frac{d\vec{e}(P)}{PM} = \frac{1}{r}\oint \left[\underbrace{1}_{\text{ordre 0}} + \underbrace{\frac{a}{r}\sin\theta\cos(\alpha)}_{\text{ordre 1}}\right] d\vec{OP}$$

or $\oint 1\, d\vec{OP} = \left[\vec{OP}\right]_{P_0}^{P_0} = \vec{OP_0} - \vec{OP_0} = \vec{0}$

d'où $\oint \frac{d\vec{e}(P)}{PM} = \frac{1}{r}\oint \frac{a}{r}\sin(\theta)\cos(\alpha)\, a\, d\alpha\, \vec{e_v}$

$$= \frac{a}{r^2}\sin(\theta)\oint \cos(\alpha)\, d\alpha\, \vec{e_v}$$ ($\vec{e_v}$ dépend de α.)

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint \frac{d\vec{e}(P)}{PM} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{a^2}{r^2}\sin(\theta)\oint \cos(\alpha)\, d\alpha\, \vec{e_v}$$

or par analyse de symétrie $\vec{A}(M) = \vec{A}(M) \cdot \vec{u_\varphi} = A(M)$

d'où $A(M) = \vec{A}(M) \cdot \vec{u_\varphi} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{a^2}{r^2}\sin(\theta)\oint \cos(\alpha)\, d\alpha\, \underbrace{\vec{e_v} \cdot \vec{u_\varphi}}_{\cos\alpha}$

car $(\vec{e_u}, \vec{u}) = \alpha$

$\vec{e_v} \perp \vec{e_u}$

$\vec{u_\varphi} \perp \vec{u}$

$$(\vec{e_v}, \vec{u_\varphi}) = \alpha$$

$$A(M) = \frac{\mu_0 (\pm\pi a^2)}{4\pi r^2}\frac{\sin\theta}{\pi}\oint \cos^2(\alpha)\, d\alpha$$

$$= \frac{\mu_0 I S}{4\pi r^2}\frac{\sin(\theta)}{\pi}\oint \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}\, d\alpha$$

Scanné avec CamScanner

$$= \frac{\mu_0 m}{4\pi r^2} \frac{\sin(\theta)}{\pi} \frac{1}{2} \left[\alpha + \frac{\sin(2\alpha)}{2} \right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{\mu_0 m}{4\pi r^2} \frac{\sin(\theta)}{\pi} \frac{1}{2} \times 2\pi = \frac{\mu_0 m}{2\pi r^2} \sin(\theta) \Rightarrow \vec{A}(M) = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^2} \sin(\theta) \vec{u_\varphi}$$

III) Champ magnétique :

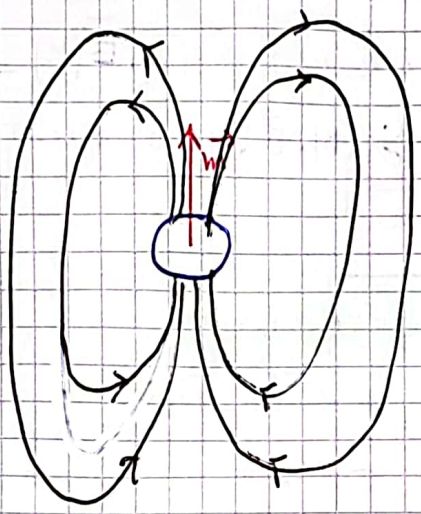
$$\vec{B}(M) = \vec{rot}(\vec{A}(M))$$

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^2} \left[2\cos(\theta) \vec{u_r} + \sin(\theta) \vec{u_\theta} \right]$$

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{3(\vec{m} \cdot \vec{OM}) \cdot \vec{OM} - \vec{m} \cdot OM^2}{OM^5} \right]$$

IV) Lignes de champ :

$$\vec{B}(M) \wedge d\vec{OM} = \vec{0} \Rightarrow r(\theta) = r_0 \sin^2(\theta)$$



L.C de $\vec{B}$ d'un dipôle

Scanné avec CamScanner

Les conducteurs en équilibre électrostatique

Les condensateurs (CCP 2007) (CCP 2002 TSI)

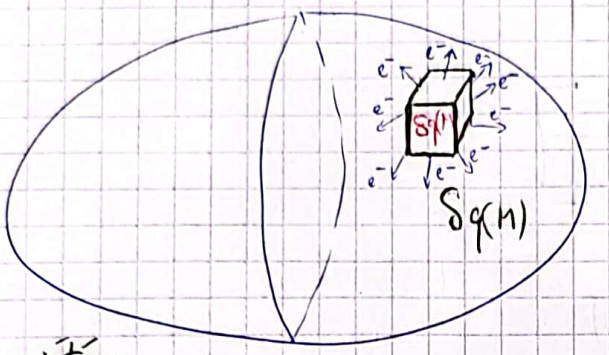
I) Les conducteurs en équilibre électrostatique:

1) Définition:

Un conducteur est un matériau contenant des charges libres exp: les métaux contiennent des électrons libres, les électrolytes

2) Conditions d'équilibre:

un conducteur est en équilibre électrostatique en absence de mouvement d'ensemble des charges libres.



$$\vec{v}(M) = \frac{1}{N}\sum_i \vec{v}_i(M) = \vec{0}$$

3) propriétés:

↳ 2e PFD appliqué sur $\delta q(M)$ s'écrit : $\delta q(M).\vec{E}(M) = \delta m.\left.\frac{d\vec{v}(M)}{dt}\right|_R$

or $\vec{v}(M) = \vec{0} = cte \Rightarrow \delta q(M).\vec{E}(M) = \vec{0}$ avec $M \in$ conducteur

$\Rightarrow$ ($\vec{v}$ intérieur) $\boxed{\vec{E}_{int}(M) = \vec{0}}$

Le champ à l'intérieur d'un C.E.E est nul.

$\longrightarrow dV(M) = -\vec{E}(M).d\vec{OM}$ or $\vec{E}(M) = \vec{0}$

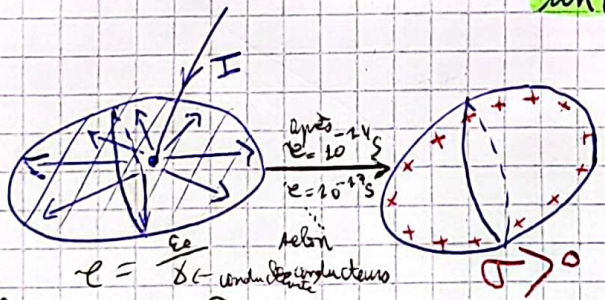
$\Rightarrow dV(M) = 0 \Rightarrow \boxed{V_{int}(M) = cte}$

Le C.E.E est un volume équipotentiel.

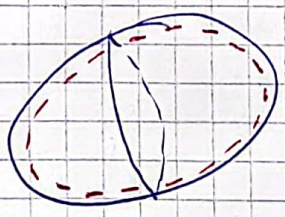
↳ div $\vec{E}(M) = \frac{\rho(M)}{\varepsilon_0}$ or $\vec{E}(M) = \vec{0} \Rightarrow \boxed{\rho_{int}(M) = 0}$

un CCE est non chargé en volume.

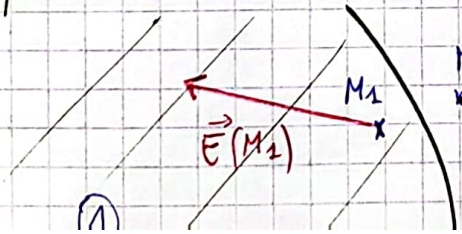
Rq:

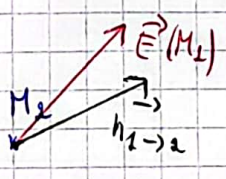


$\sigma = \frac{\varepsilon_0}{\delta}$ ← conducteur



4) Théorème de Coulomb:

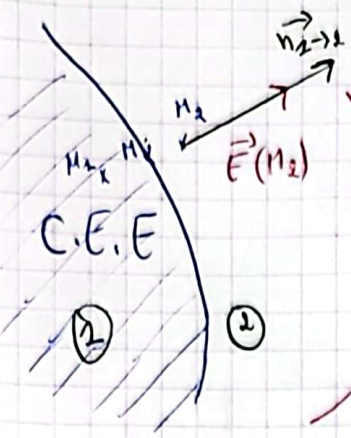




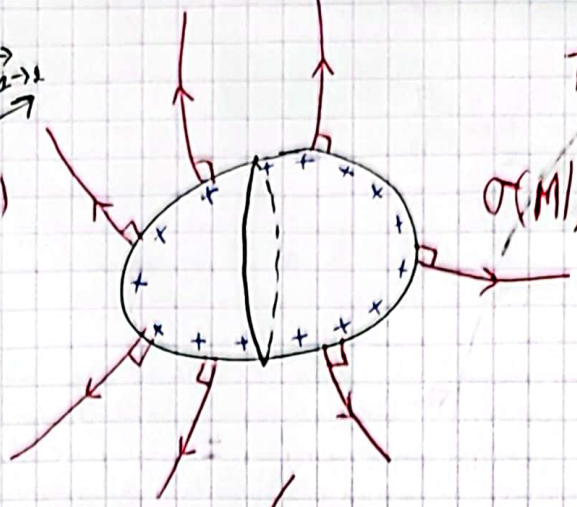
$$\vec{E}(M_2) - \vec{E}(M_1) = \frac{\sigma(M)}{\varepsilon_0}\vec{n}_{1\to 2}$$

Scanné avec CamScanner

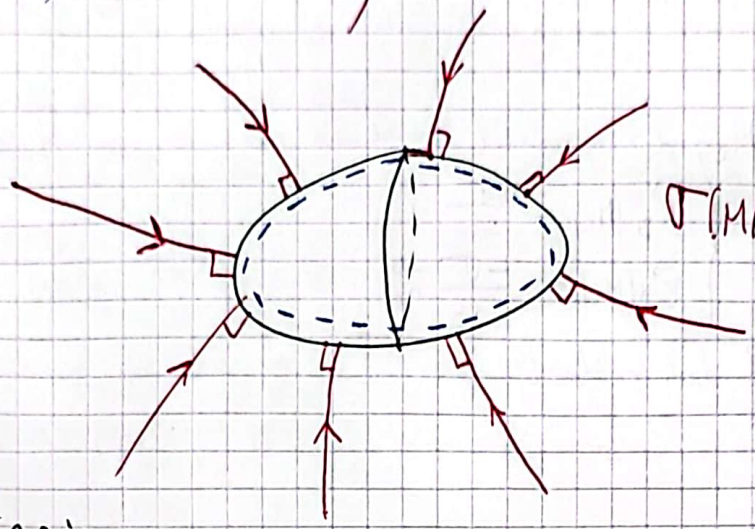
Si le milieu est un C.E.E : $\vec{E}(M_2) = \vec{0} \Rightarrow \boxed{\vec{E}(M_2) = \frac{\sigma(M)}{\varepsilon_0} \vec{n}_{2\to 2}}$



Théorème de Coulomb.



Les LC sont perpendiculaires au voisinage du conducteur (relation de passage oblige)



5/ EXERCICE:

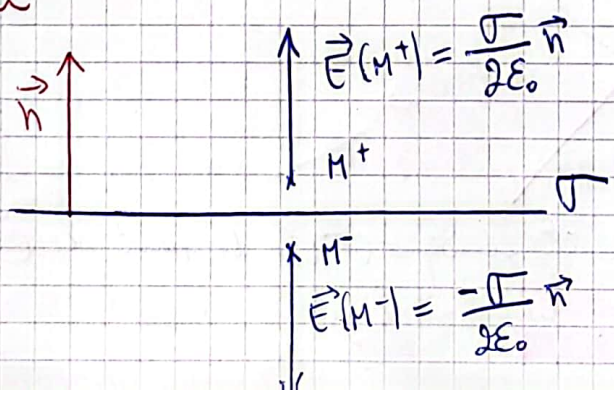
1) Rappeler l'expression du champ électrique crée par un plan infini portant la charge surfacique uniforme σ.

2) depuis un point intérieur M_i ou extérieur M_E au voisinage de la surface d'un conducteur, l'élément de surface dS apparaît comme un plan ∞ portant la charge σ. Quelle est la valeur du champ électrique appliqué aux charges de l'élément dS.

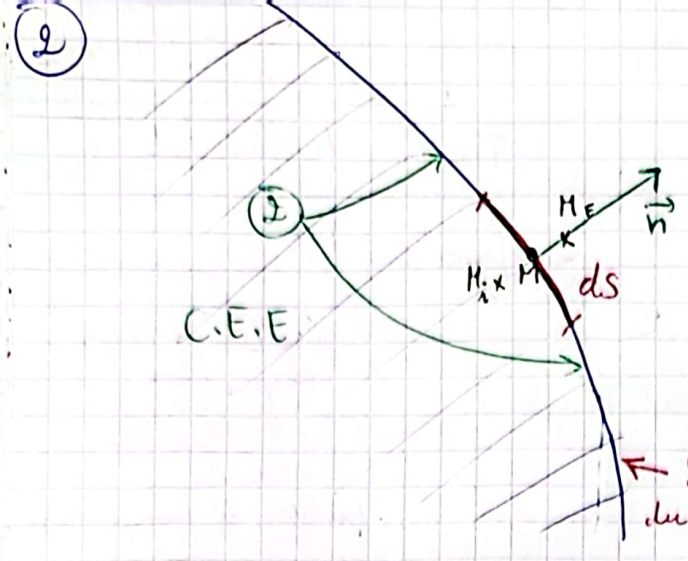
3) Mq dS apparaît comme étant soumis à une force électrostatique à laquelle peut être associée une pression électrostatique.

Réponse:

1)



Scanné avec CamScanner



← Surface du conducteur = Reste de la surface du conducteur $\cup$ dS

① ② ③

↳ pour un point M_i ou M_e; dS apparaît comme un plan ∞, car M_i et M_e sont très voisins de M $\Rightarrow$ $\begin{cases} \vec{E}_3(M_e) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{n} \\ \vec{E}_3(M_i) = \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{n} \end{cases}$

$\begin{cases} \vec{E}_1(M_e) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n} & \text{Th. de Coulomb} \\ \vec{E}_1(M_i) = \vec{0} & \text{C.E.E} \end{cases}$

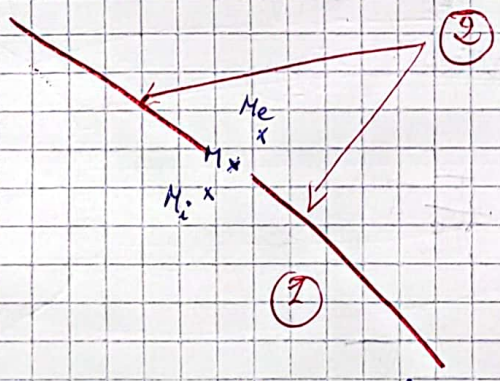
$\vec{E}_1 = \vec{E}_2 + \vec{E}_3 \Rightarrow \vec{E}_2 = \vec{E}_1 - \vec{E}_3$

$\begin{cases} \vec{E}_2(M_i) = \vec{E}_1(M_i) - \vec{E}_3(M_i) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{n} \\ \vec{E}_2(M_i) = \vec{E}_1(M_e) - \vec{E}_3(M_e) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n} - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{n} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{n} \end{cases}$

Rq : $\vec{E}_2(M_i) = \vec{E}_2(M_e) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{n} = E_2(M)$

en effet

continuité du champ créé par le reste du conducteur :



3) la force appliquée sur dS de charge $dq = \sigma\, dS$ de part de ② est : $\boxed{\delta\vec{F} = dq \cdot \vec{E}_2(M)}$

Scanné avec CamScanner

$$\delta\vec{F} = \sigma \cdot dS \cdot \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{n} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} dS\vec{n}$$

or par déf d'une pression : $P = \frac{\delta F}{\delta S}$

d'où $\Rightarrow \boxed{P_e = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}}$

6) Effet de pointe :

Le champ électrique au voisinage d'un condensateur si ce dernier à la forme de pointe, càd si sa courbure est importante est intense.

- on considère un conducteur uniformé de 2 sphères R_1 et R_2 avec $R_2 < R_1$ reliés par un fil conducteur.
- le potentiel d'un conducteur sphérique de charge q et de rayon R est

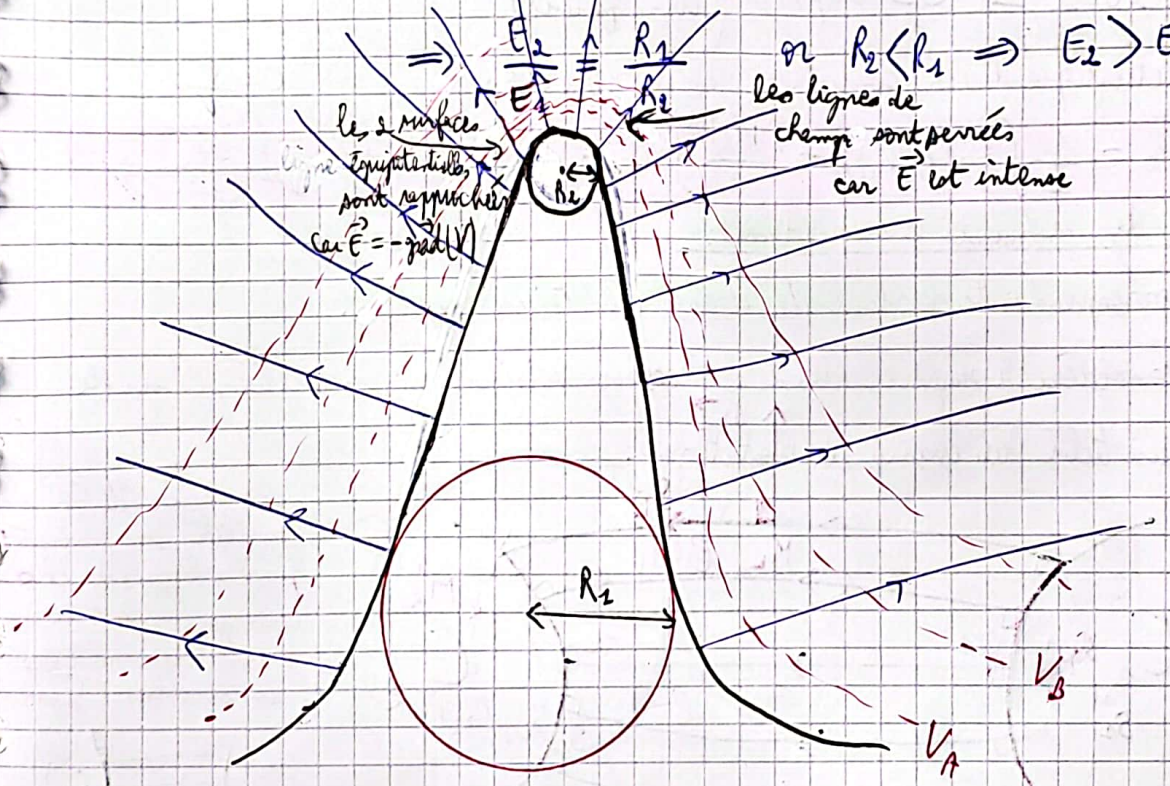
$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} \quad (1)$$

- le champ au voisinage de la surface est $E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$ (2)

D'après (1) et (2) ; $E = \frac{V}{R}$ or $V_1 = V_2 = V$

$$\Rightarrow E_1 R_1 = E_2 R_2$$

$$\Rightarrow \frac{E_2}{E_1} = \frac{R_1}{R_2}$$ or $R_2 < R_1 \Rightarrow E_2 > E_1$



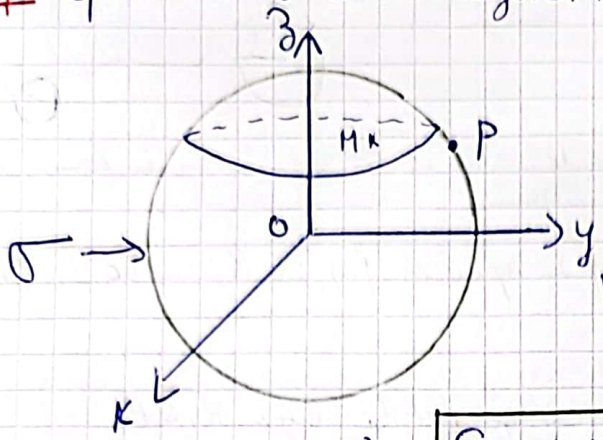
Le champ est intense au voisinage de la sphère de plus petit rayon d'où le pouvoir ionisant des pointes. Les équipotentielles sont resserées au niveau de la pointe d'où un champ électrique intense.

Scanné avec CamScanner

(7) Capacité d'un conducteur seul dans l'espace:

La capacité d'un conducteur est le rapport $C = \frac{Q}{V} > 0$ (Farad) qui ne dépend que de la géométrie de la surface du conducteur.

Exp: Sphère conductrice de rayon R.



$$V(M) = \int \frac{\delta Q(P)}{4\pi\varepsilon_0 PM}$$

$V(M) = V(O) = \int \frac{\delta Q(P)}{4\pi\varepsilon_0 PO}$ or $PO = R = cte$ (volume équipotentiel).

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R}\int \delta Q(P) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

$$\Rightarrow \boxed{C = 4\pi\varepsilon_0 R}$$

Rq: $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9\ F^{-1} \cdot m$

⊕ Capacité de la terre: $C = \frac{R}{9\cdot 10^9} = \frac{6400 \times 10^3}{9\cdot 10^9} = \frac{64}{9} \cdot 10^{-3}$

$C \simeq 1\ mF$

⊕ Si $R = 10cm \Rightarrow C \simeq 10pF$ (très faible)

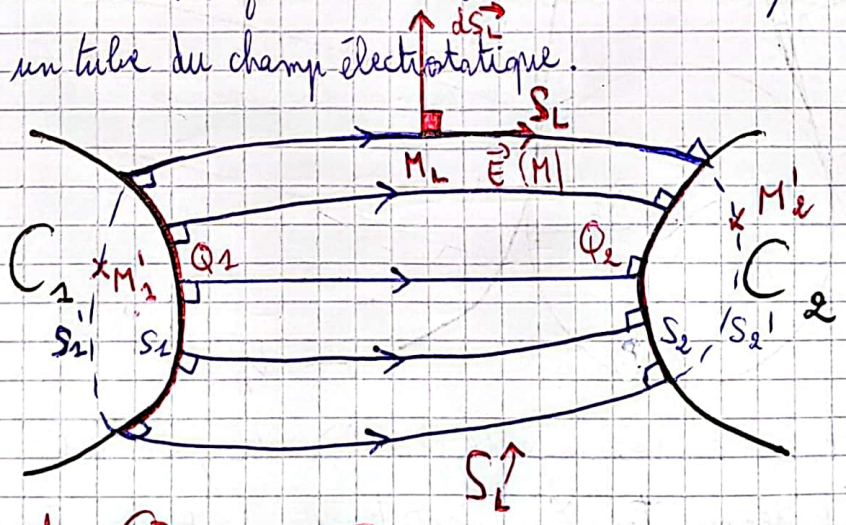
L'énergie électrostatique d'un conducteur en équilibre est: $C = \frac{Q}{V}$

$$E_e = \frac{1}{2}\int \delta Q(P)\, V(P) = \frac{V_0}{2}\int \delta Q = \frac{V}{2}\cdot Q = \frac{QV}{2} \overset{\downarrow}{=} \frac{Q^2}{2C} > 0.$$

8) Théorème des éléments correspondants:

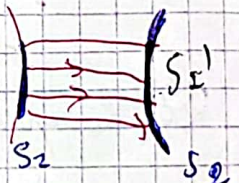
2 éléments correspondants portent des charges électriques opposées.

Déno: On considère 2 surfaces sur 2 conducteurs voisins qui sont reliés l'un de l'autre par un tube du champ électrostatique.



Mq $Q_1 = -Q_2$

On connaît les surfaces correspondantes par les lignes de champ ceux qui sortent de l'une doivent tous entrer dans l'autre



S_2 et S'_2 sont correspondantes; S_1 et S_L aussi.

Scanné avec CamScanner

Soit $\Sigma = S_1' \cup S_L \cup S_2'$ → Surface fermée

tube du champ

$$\oiint \vec{E}(M)\cdot d\vec{S}(M) = \iint_{M_2' \in S_1'} \vec{E}(M_1')\cdot d\vec{S}(M_1') + \iint_{M_L \in S_L} \vec{E}(M_L)\cdot d\vec{S_L} + \iint_{M_2' \in S_2'} \vec{E}(M_2')\cdot d\vec{S_2'}$$

$\vec{0}$ car $M_1' \in C_1$ avec C_1 conducteur donc $\vec{E}_{int\,C_1} = \vec{0}$

$\vec{0}$ car $d\vec{S_L} \perp \vec{E}(M_L)$

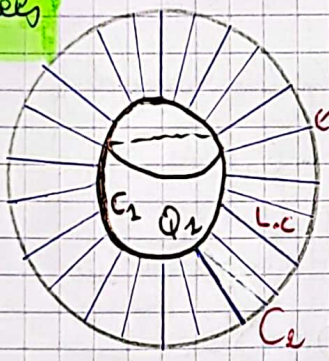
$\vec{0}$ car $M_2' \in C_2$ " "

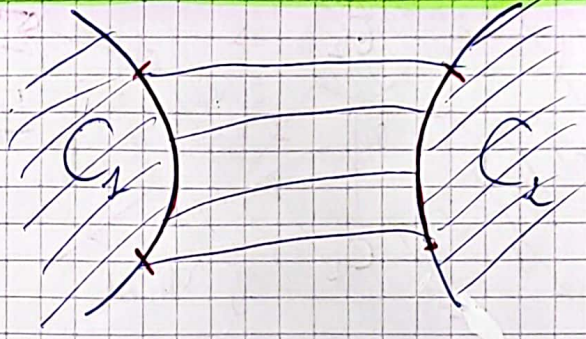
d'où $\oiint \vec{E}(M)\cdot d\vec{S}(M) = 0$ or $\oiint \vec{E}(M)\cdot d\vec{S}(M) = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{Q_1+Q_2}{\varepsilon_0}$

d'où $Q_1 + Q_2 = 0 \Rightarrow Q_1 = -Q_2$.

9) Influence électrostatique.

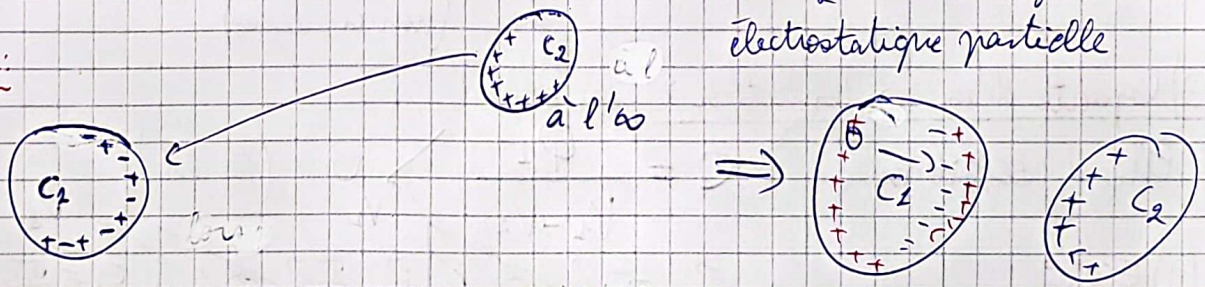
2 conducteurs en état d'influence électrostatique totale portent des charges opposées



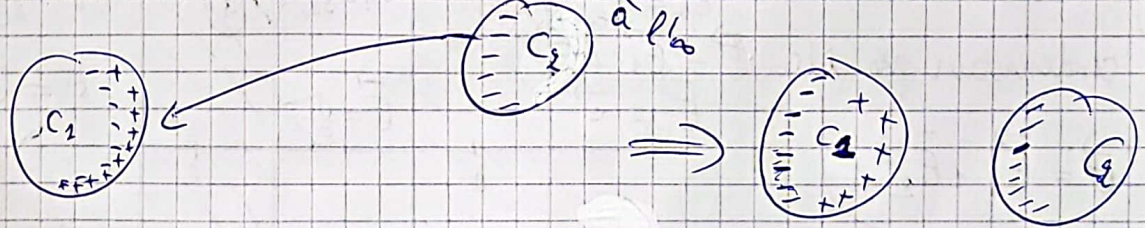


C_1 et C_2 sont en influence électrostatique partielle

Exp 1:



Exp 2:



Lorsqu'on approche un conducteur C_2 chargé positivement à un

conducteur C_1 non chargé ; les charges se répartissent de manière à garder $\vec{E}_{1\,int} = \vec{E}_{2\,int} = \vec{0}$. On dit que C_1 et C_2 sont en influence électrostatique

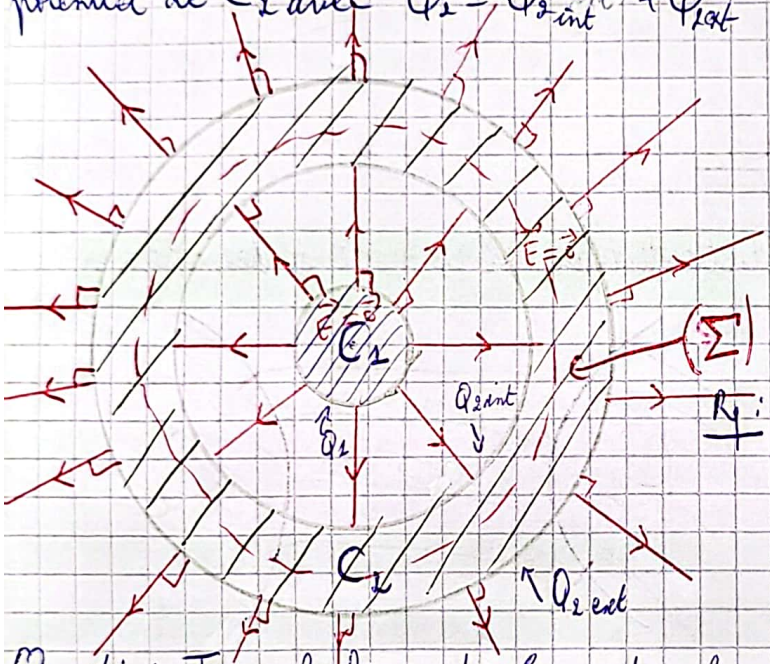
II) Condensateurs :

C'est un système de 2 conducteurs C_1 et C_2 dont l'un entoure complètement l'autre (C_1 et C_2 sont en influence électrostatique totale).

C_2 est l'armature interne du condensateur ; C_2 est l'armature externe du condensateur.

1) Charges sur les armatures d'un condensateur en équilibre :

Soient $(Q_1 ; V_1)$ la charge et le potentiel de C_1 et $(Q_2 ; V_2)$ la charge et le potentiel de C_2 avec $Q_2 = Q_{2\,int} + Q_{2\,ext}$



D'après le Th de Gauss.

$$\oiint \vec{E}(M) \cdot d\vec{S}(M) = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \text{ avec}$$

$$\begin{cases} \vec{E}(M) = \vec{0} \text{ en } M \in C_2 \\ Q_{int} = Q_1 + Q_{2\,int} \end{cases}$$

R : Th. des éléments correspondants

$$Q_{2\,int} = -Q_1$$

$$Q_2 = Q_{2\,ext} + Q_{2\,int} \Rightarrow Q_{2\,ext} = Q_2 + Q_1$$

Question : Tracez les lignes de champs dans le cas où $V_1 > V_2 > 0$.

(voir ci-dessus)

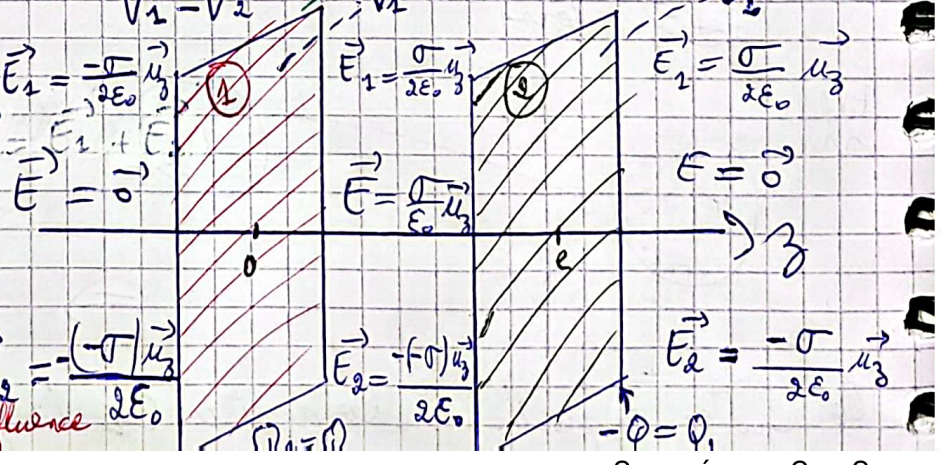
3) Capacité d'un condensateur :

Elle est définie par : $C = \dfrac{Q_1}{V_1 - V_2} > 0$ (Farad)

4) Exos :

↳ condensateur plan idéal :

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$



On néglige les effets de bords donc les 2 plaques sont en influence

Scanné avec CamScanner

$$V_1 - V_2 = \int_{V_2}^{V_1} dV = \int_e^0 -\vec{E}(M)\cdot d\vec{OM} = \int_0^e \vec{E}(M)\cdot d\vec{OM}$$

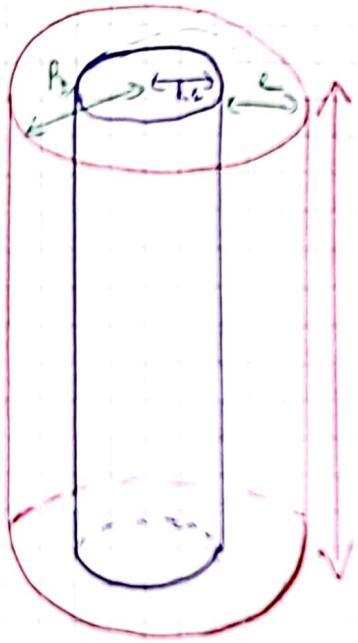
$$V_1 - V_2 = \int_0^e \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u_z}\cdot d\vec{OM} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\int_0^e dz = \frac{\sigma e}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow C = \frac{Q_1}{V_1 - V_2} = \frac{\sigma S}{\frac{\sigma e}{\varepsilon_0}} = \frac{\varepsilon_0 S}{e}$$

pour augmenter la capacité du condensateur, on augmente S, on diminue e ou on utilise un milieu diélectrique (isolant) au lieu du vide.

* dans ce cas: $C = \varepsilon_r \left(\frac{\varepsilon_0 S}{e}\right)$

Le condensateur cylindrique:



$e = R_2 - R_1 \ll h$; $R_1 \simeq R_2$

AN $C = \frac{2\pi\varepsilon_0 h}{\ln\left(1+\frac{e}{R_1}\right)} \simeq \frac{2\pi\varepsilon_0 h}{e/R_1} = \frac{\varepsilon_0(2\pi R_1)h}{e}$

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{e}$$

Scanné avec CamScanner

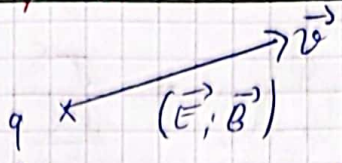
Correction Mines physique 1 MP2005 pb3; fait avec le prof FR.

FORCE DE LAPLACE

Mines ponts AC 2008

I) Action d'un champ électromagnétique sur un circuit.

1) Rappel! Action d'un champ



Soit q une charge ponctuelle de vitesse $\vec{v}$ plongée dans un champ électromagnétique $(\vec{E};\vec{B})$. Cette charge subit la force électromagnétique dite force de Lorentz

$\vec{F_L} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$ tq $\vec{F_e} = q\vec{E}$ est la force électrique.

$F_m = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ est la force magnétique.

La force magnétique ne travaille pas en effet :

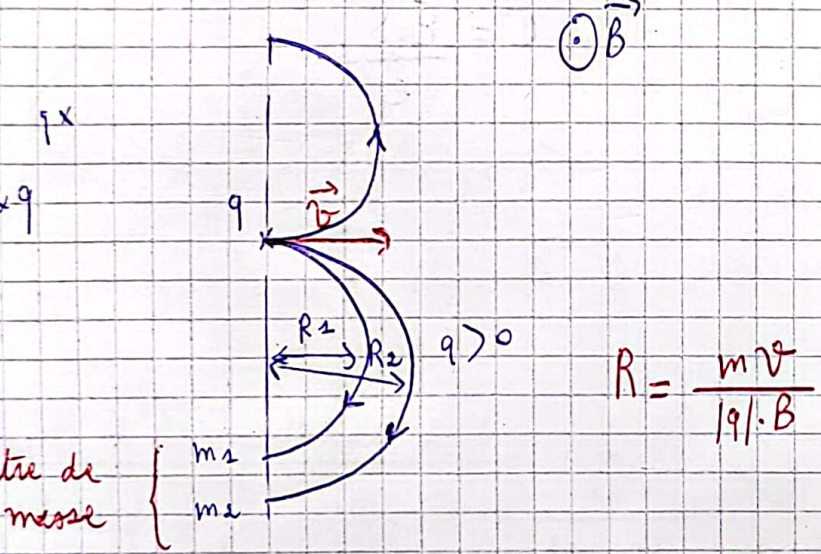
$$P_m = \vec{F_m} \cdot \vec{v} = q(\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} = q(\vec{v} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{B} = 0$$

Donc le terme magnétique ne peut ni accélérer ni décélérer la charge.

En effet: D'après le T.P.C $\frac{dE_c}{dt} = P_m = 0$

$\Rightarrow E_c = cte \Rightarrow v = cte \Rightarrow$ Mvmt uniforme.

Exp° → cyclotron.
→ spectroscopie de masse.



$$R = \frac{mv}{|q| \cdot B}$$

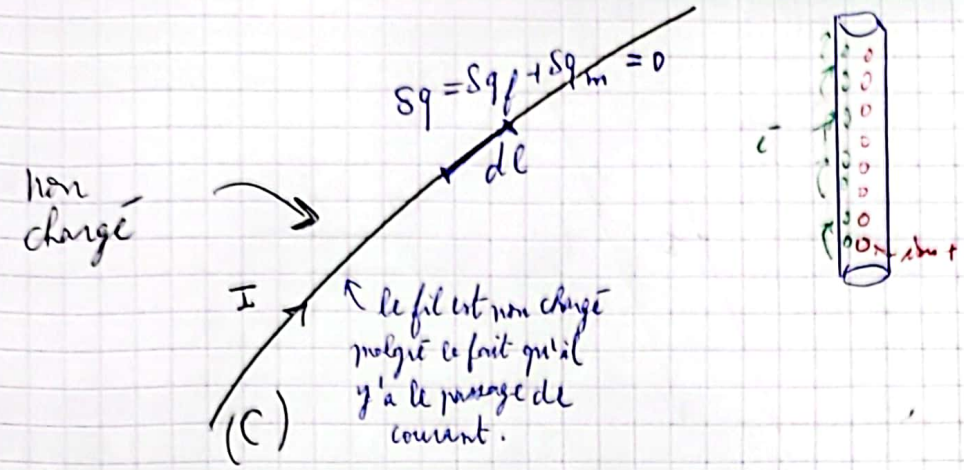
→ Expérience de Stern-Gerlach (Mines - ponts PSI2008)

2) Action d'un champ magnétique sur un circuit filiforme:

Soit (C) un circuit filiforme parcouru par un courant I et placé dans un champ électromagnétique extérieur $(\vec{E};\vec{B})$. Ce circuit subit une force électromagnétique.

Soit δq une charge élémentaire. Cette charge subit la force $\delta q = \delta q_f + \delta q_m$

Scanné avec CamScanner



$$\delta\vec{F_L} = \delta q_f\left(\vec{E} + \vec{v_f}\wedge\vec{B}\right) + \delta q_m\left(\vec{E} + \vec{v_m}\wedge\vec{B}\right)$$

$$= \underbrace{\left(\delta q_f + \delta q_m\right)}_{0}\vec{E} + \delta q_m\,\vec{v_m}\wedge\vec{B}$$

donc $\delta\vec{F_L} = \delta q_m\,\vec{v_m}\wedge\vec{B} = \delta q_m\,\dfrac{d\vec{\ell}}{dt}\wedge\vec{B}$

or $I = \dfrac{\delta q_m}{dt}$ le débit de charge $\Rightarrow$ $\delta\vec{F_L}(P) = \underbrace{I\,d\vec{\ell}(P)}_{\delta\vec{C}(P)}\wedge\vec{B}(P)$

donc $\vec{F_L} = \displaystyle\int_{P\in(\mathcal{C})} I\cdot d\vec{\ell}(P)\wedge\vec{B}(P)$ Force de Laplace

$\vec{\Gamma}_{A;L} = \displaystyle\int_{P\in(C)}\vec{AP}\wedge\delta\vec{F_L} = \vec{AP_a}\wedge\vec{F_L}$ Moment de la force de Laplace

↖ on ne connaît pas le point d'application

3) Action d'un champ E.M sur un circuit surfacique :

↳ $\vec{F_L} = \displaystyle\iint_{P\in(C)}\vec{j_S}(P)\cdot dS(P)\wedge\vec{B}(P)$

↳ $\Gamma_{A,L} = \displaystyle\iint_{P\in(C)}\vec{AP}\wedge\delta\vec{F_L}$

4) Action d'un champ E.M sur un circuit volumique :

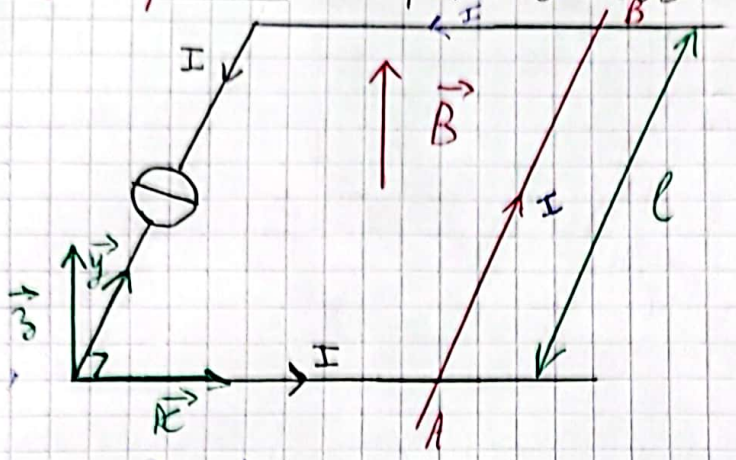
↳ $\vec{F_L} = \displaystyle\iiint_{P\in(C)}\vec{j}(P)\cdot d\tau(P)\wedge\vec{B}(P)$

↳ $\vec{\Gamma}_{A,L} = \displaystyle\iiint_{P\in(C)}\vec{AP}\wedge\delta\vec{F_L}$

II) Applications :

Scanné avec CamScanner

1) Rails de Laplace : CCP DEUG 2005.



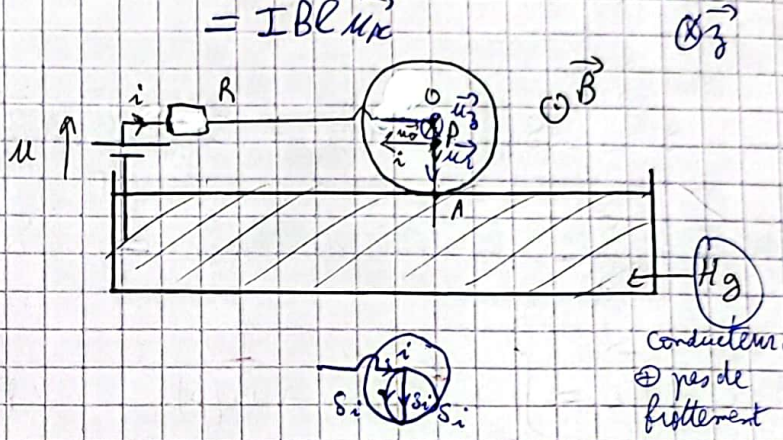
$\vec{B}$ uniforme

$$\vec{F_L} = \int I\,\vec{d\ell} \wedge \vec{B} = \int I\,dy\,\vec{u_y} \wedge B\,\vec{u_z} = IB\int_A^B dy\,\vec{u_x}$$

$$= IB\ell\,\vec{u_x}$$

2) Roue de Barlow : (CCP 2008) :

Voir polycopié.



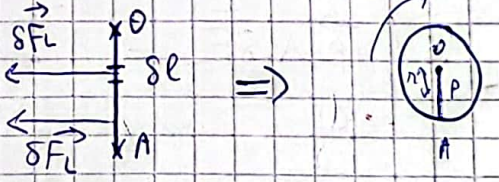
1) $\delta\vec{F_L}(P) = I\vec{d\ell}(P) \wedge \vec{B}(P)$

$= I\,dr\,\vec{u_r} \wedge B(-\vec{u_z})$

$= -IB\,dr\,\vec{u_r} \wedge \vec{u_z}$

$-\vec{u_\theta}$

$\delta\vec{F_L} = I \cdot B \cdot dr\,\vec{u_\theta}$



la roue tournera dans le sens horaire

2) $\vec{\Gamma}_{O,L} = \int \vec{OP} \wedge \delta\vec{F_L} = \int r\,\vec{u_r} \wedge IB\,dr\,\vec{u_\theta}$

$= IB\int_0^a r\,dr\,\vec{u_r} \wedge \vec{u_\theta}$

$= \frac{IBa^2}{2}\,\vec{u_z}$

Rq : $\vec{B}$ est uniforme : $\vec{\Gamma}_{O,L} = \vec{OG} \wedge \vec{F_L} = \frac{a}{2}\vec{u_r} \wedge \int IB\,dr\,\vec{u_\theta}$

$= \frac{IBa}{2}\int_0^a dr\,\vec{u_r} \wedge \vec{u_\theta}$

$\vec{\Gamma}_{O,L} = \frac{IBa^2}{2}\,\vec{u_z}$

Scanné avec CamScanner

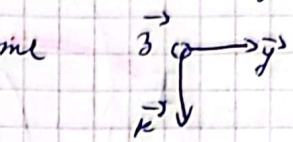
3) Équilibre d'une barre perpendiculaire dans un champ magnétique:

Lorsque la barre est en équilibre. $\sum \mathcal{M}_O(\vec{F}) = \vec{0}$ car $\frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} = J_\Delta \vec{\Omega} = \vec{0}$

$\left(\frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} = \sum \mathcal{M}_O(\vec{F})\right)$.

$\Rightarrow \mathcal{M}_O(\vec{P}) + \mathcal{M}_O(\text{liaison}) + \mathcal{M}_O(\vec{F_L})$

$\vec{OG} \wedge \vec{P} + \vec{0} + \vec{OG} \wedge \vec{F_L} = \vec{0}$ le pt d'application de $\vec{F_L}$ est G en effet $\delta\vec{F_L}$ est uniforme



$\frac{l}{2} u_r \wedge mg + \frac{l}{2} u_r \wedge \int I d\vec{\ell} \wedge \vec{B} = \vec{0}$

$\Rightarrow \frac{-mgl}{2} \sin\theta \, u_3 + \frac{l}{2} u_r \int I \, dr \, u_r \wedge B(-u_3) = \vec{0}$

$\Rightarrow \sin(\theta_e) = \frac{IBl}{mg} \Rightarrow \theta_e = 12°$.

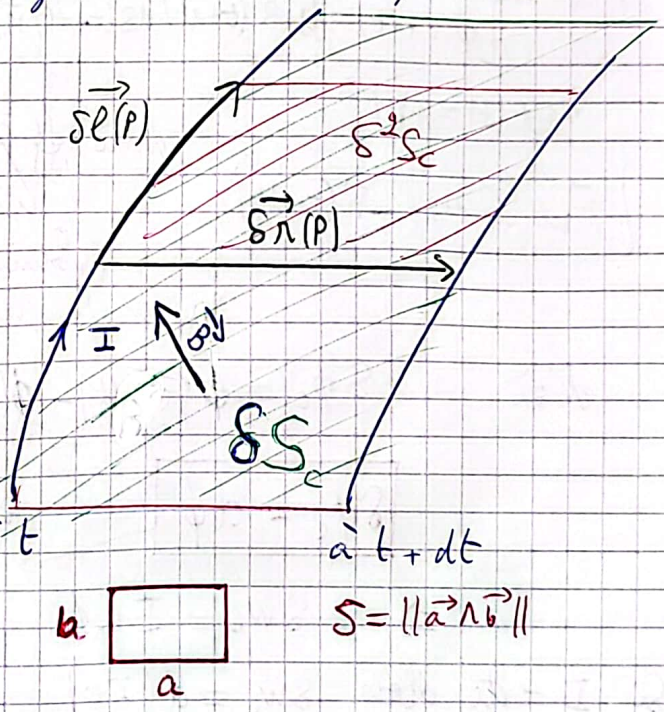
III) Travail de la force de Laplace:

1) Travail élémentaire: on considère un circuit filiforme parcouru par un courant i plongé dans un champ magnétique $\vec{B}$. Le travail élémentaire de la force de la place élémentaire appliquée sur un élément de longueur au cours d'un déplacement élémentaire $\delta\vec{r}$ est:

$\delta^2 W_L = \vec{\delta F_L} \cdot \vec{\delta r}(P)$

$\delta^2 W_L = I\left(\vec{\delta\ell}(P) \wedge \vec{B}(P)\right) \cdot \vec{\delta r}(P)$

$= I \underbrace{\left(\vec{\delta r}(P) \wedge \vec{\delta\ell}(P)\right)}_{\delta^2 \vec{S_c}} \cdot \vec{B}(P)$



$\delta^2 \vec{S_c} = \vec{\delta r}(P) \wedge \vec{\delta\ell}(P)$ est la surface élémentaire coupée (balayée) par $\vec{\delta\ell}(P)$ pendant dt.

$S = \|\vec{a} \wedge \vec{b}\|$

$\delta^2 W_L = I \underbrace{\vec{B}(P) \cdot \delta^2 \vec{S_c}}_{\delta^2 \phi_c}$

d'où $\delta^2 W_L = I \cdot \delta^2 \phi_c$ ①

le travail élémentaire de la force de Laplace au cours d'un déplacement élémentaire de l'ensemble du circuit $\boxed{\delta W_L = I \cdot \delta\phi_c}$ ② ($\int \delta\vec{\ell}$ ① ⇒ ②) $\delta\phi_c = \int_{(c)} \vec{B} \cdot (\vec{\delta\ell} \wedge \delta\vec{r})$

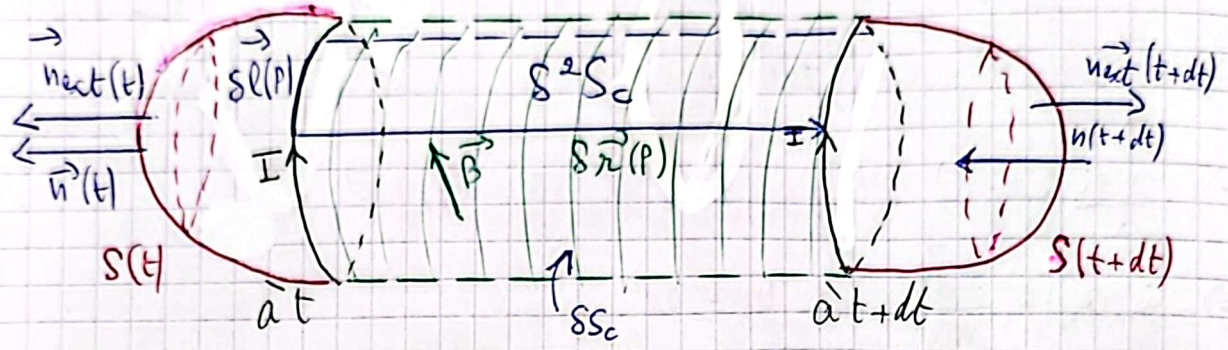
$\delta\phi_c$ est le flux coupé élémentaire, c'est le flux de $\vec{B}$ à travers la surface balayée par le circuit pendant

Scanné avec CamScanner

2) Cas d'un circuit de composants matériels constants et d'un champ E.M stationnaire

Objectif : Montrer que $\vec{F_L}$ est conservative sous certaines conditions.

On considère un circuit fermé parcouru par un courant I et qui subit un champ magnétique permanent $\vec{B}$



Soit $\Sigma = S(t) \cup S_c \cup S(t+dt)$ une surface fermée

$$\Rightarrow \oiint \vec{B}\cdot d\vec{S} = \iint_{M\in S(t)} \vec{B}(t)\cdot dS(t)\, \vec{n}_{ext}(t) + \delta\phi_c + \iint_{M\in S(t+dt)} \vec{B}(t+dt)\, dS(t+dt)\, \vec{n}_{ext}(t+dt)$$

le flux dépend de la géométrie du contour

$\phi'(t+dt)$ mais puisque indéformable donc la géométrie du contour ne change

On pose $\begin{cases} \phi(t) = \iint \vec{B}(t)\cdot dS(t)\cdot \vec{n}(t) \\ \phi(t+dt) = \iint \vec{B}(t+dt)\, dS(t+dt)\, \vec{n} \end{cases}$

or $\begin{cases} \vec{n}_{ext}(t) = \vec{n}(t) \\ \vec{n}_{ext}(t+dt) = -\vec{n}(t+dt) \end{cases}$

d'où $\oiint \vec{B}\cdot d\vec{S} = \phi(t) + \delta\phi_c - \phi(t+dt)$

à t	10 Wb	2 Wb	−12 Wb
à t+dt	7 Wb	2 Wb	−9 Wb

(0 postulat MW flux)

Wibert unité du flux

mais $10+2-9 = 1\,Wb \neq 0$!

en régime variable le flux à travers une surface fermée est nul mais à tout instant pas forcément sur un intervalle de temps. pour le régime variable c'est nul sur tt intervalle de temps

d'où $\delta\phi_c = \phi(t+dt) - \phi(t)$

$$\boxed{\delta\phi_c = d\phi}$$

or $\delta W_L = I\cdot\delta\phi_c$

donc au lieu de calculer $\delta\phi_c$ on peut calculer ϕ à travers S(t) et le différencier

$$\Rightarrow \delta W_L = I\, d\phi$$

Si $I = cte$ alors $\delta W_L = d(I\phi)$

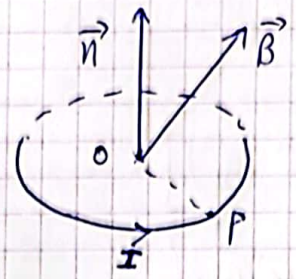
$$\Rightarrow \boxed{\delta W_L = -dE_{p,L}}$$ Théorème de Maxwell.

avec $\boxed{E_{p,L} = -I\phi + \cancel{cte}^{\,0}}$

IV) Action d'un champ magnétique sur un dipôle magnétique :

Scanné avec CamScanner

1) Force de Laplace:



$$\vec{F}_L = \oint_{\text{circuit fermé}} I.\delta\vec{\ell}(P) \wedge \vec{B}(P)$$

↳ Si $\vec{B}$ est uniforme: $\vec{F_L} = I\left(\oint \vec{dOP}\right) \wedge \vec{B}(P)$

or $\oint \vec{dOP} = \left[\vec{OP}\right]_{P_0}^{P_0} \Rightarrow \vec{F_L} = \vec{0}$

↳ Si $\vec{B}$ non uniforme: $\vec{F_L} = (\vec{m}.\vec{grad}).\vec{B} \iff \vec{Fe} = (\vec{p}.\vec{grad}).\vec{E}$

2) moment de la force de Laplace:

$$\vec{\Gamma}_{O;L} = \oint_{P\in(P)} \vec{OP} \wedge \delta\vec{F_L} = \oint_{P\in(P)_{\text{dipôle}}} \vec{OP} \wedge I(\vec{d\ell}(P) \wedge \vec{B}(P))$$

$$= I \oint \vec{OP} \wedge (\vec{dOP} \wedge \vec{B}(P))$$

or $\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{B}.(\vec{A}.\vec{C}) - \vec{C}.(\vec{A}.\vec{B})$

$$\vec{\Gamma}_{O;L} = I\left[\oint \vec{dOP}.(\vec{OP}.\vec{B}(P)) - \oint \vec{B}(P).(\vec{OP}.\vec{dOP})\right]$$

Cas (1): Si $\vec{B}$ est uniforme:

$$\oint \vec{B}(P).(\vec{OP}.\vec{dOP}) = \vec{B}\oint d\left(\frac{\vec{OP}^2}{2}\right) = \vec{B}\left[\frac{\vec{OP}^2}{2}\right]_{P_0}^{P_0} = \vec{0}.$$

$$\Rightarrow \vec{\Gamma}_{O;L} = I\oint \vec{dOP}.(\vec{OP}.\vec{B})$$

Mq $\boxed{\vec{\Gamma}_{O;L} = \vec{m} \wedge \vec{B}}$:

Réponse:

$$\vec{\Gamma}_{O;L} = I\oint \vec{OP}(\vec{OP}.\vec{B}) = I/2\left[\oint \vec{OP}.(\vec{OP}.\vec{B}) + \oint \vec{OP}.(\vec{OP}.\vec{B})\right] \ast$$

or $\ast \oint d(\vec{OP}(\vec{OP}.\vec{B})) = \left[\vec{OP}.(\vec{OP}.\vec{B})\right]_{P_0}^{P_0} = \vec{0}$

$\ast \oint d(\vec{OP}.(\vec{OP}.\vec{B})) = \oint \vec{dOP}.(\vec{OP}.\vec{B}) + \oint \vec{OP}.(\vec{dOP}.\vec{B})$

Scanné avec CamScanner

d'où $\oint d\overrightarrow{OP}\cdot(\overrightarrow{OP}\cdot\vec{B}) = -\oint \overrightarrow{OP}(d\overrightarrow{OP}\cdot\vec{B})$

on remplace dans (*)

$$\vec{\Gamma}_{O;L} = \frac{I}{2}\left[\oint d\overrightarrow{OP}(\overrightarrow{OP}\cdot\vec{B}) - \oint \overrightarrow{OP}(d\overrightarrow{OP}\cdot\vec{B})\right]$$

$$= I/2 \oint \left[d\overrightarrow{OP}\cdot(\vec{B}\cdot\overrightarrow{OP}) - \overrightarrow{OP}\cdot(\quad)\right]$$

$$= \frac{I}{2}\oint\left[\vec{B}\cdot(\vec{A}\cdot\vec{C}) - \vec{C}\cdot(\vec{A}\cdot\vec{B})\right]$$

$$= \frac{I}{2}\oint \vec{A}\wedge(\vec{B}\wedge\vec{C})$$

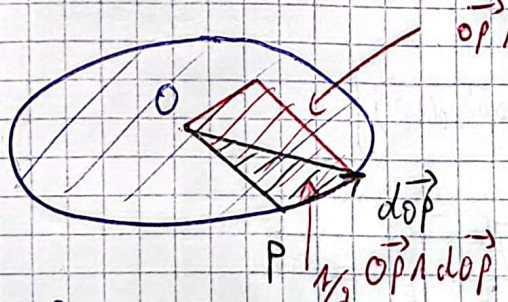
$$= \frac{I}{2}\oint \vec{B}\wedge(d\overrightarrow{OP}\wedge\overrightarrow{OP})$$

$$\vec{\Gamma}_{O;L} = \frac{-I}{2}\oint(d\overrightarrow{OP}\wedge\overrightarrow{OP})\wedge\vec{B}$$

$$= I\times\left[\frac{1}{2}\oint_{P\in(\mathcal{D})}\overrightarrow{OP}\wedge d\overrightarrow{OP}\right]\wedge\vec{B}$$

$$= I\vec{S}\wedge\vec{B} \quad \text{or} \quad \vec{m} = I\vec{S}$$

$$\boxed{\vec{\Gamma}_L = \vec{m}\wedge\vec{B}} \longleftrightarrow \vec{\Gamma} = \vec{P}\wedge\vec{E}.$$



$$\vec{S} = \frac{1}{2}\oint \overrightarrow{OP}\wedge d\overrightarrow{OP}$$

Cas (1): $\vec{\Gamma}_L \simeq \vec{m}\wedge\vec{B} \longleftrightarrow \vec{\Gamma} = \vec{P}\wedge\vec{E}$

↳ cas d'un circuit filiforme: $\vec{m} = \frac{1}{2}\oint \overrightarrow{OP}\wedge I\,d\overrightarrow{OP}$

↳ cas d'un circuit surfacique: $\vec{m} = \frac{1}{2}\iint \overrightarrow{OP}\wedge\vec{j_S}\cdot dS$

↳ cas d'un circuit volumique: $\vec{m} = \frac{1}{2}\iiint \overrightarrow{OP}\wedge\vec{j}\,d\tau$

Scanné avec CamScanner

Ex° Calcul de $\vec{m}$

1) disque chargé en rotation : Un disque non conducteur de rayon R et d'axe (Oz) uniformément chargé en surface tourne à la vitesse angulaire $\vec{\Omega} = \Omega \vec{u_z}$.

Montrez que le moment magnétique associé au disque chargé en rotation est :

$$\vec{\mathcal{M}} = \frac{\pi \sigma R^4}{4} \vec{\omega}$$

2) Sphère chargée surfaciquement en rotation : Une sphère de centre O et de rayon R portant la charge électrique $q>0$ répartie uniformément sur la surface et en mouvement de rotation uniforme de vitesse angulaire $\vec{\Omega} = \Omega \vec{u_z}$

a) exprimer $\vec{j_s}(P)$ en un point P de la surface en fonction de q, R, ω etc

b) déduire que le moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ de la sphère est $\vec{\mathcal{M}} = \frac{qR^2}{3} \vec{\Omega}$

Méthode (1) :

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \iint \vec{OP} \wedge \vec{j_s} \, dS = \frac{1}{2} \iint R \vec{u_r} \wedge \sigma \vec{v} \, dS$$

$$= \frac{\sigma}{2} \iint R \vec{u_r} \wedge (\dot{r} \vec{u_r} + r\dot{\theta} \vec{u_\theta}) \, dS$$

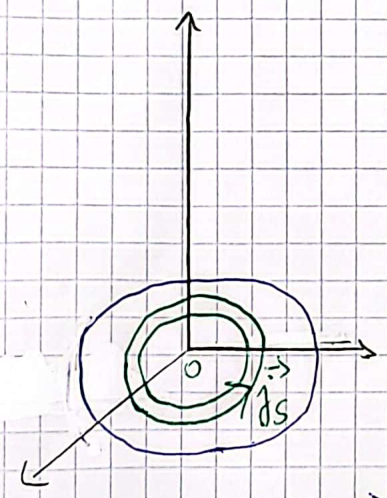
$$= \frac{\sigma}{2} \iint r^2 \dot{\theta} \vec{u_z} \, dS$$

$$= \frac{\sigma}{2} \iint r^2 \dot{\theta} \, \underbrace{dr \, r \, d\theta}_{dS} \vec{u_z}$$

$$= \frac{\sigma \vec{\omega}}{2} \iint r^3 \, dr \, d\theta \qquad (\omega = \dot{\theta} \vec{u_z})$$

$$= \frac{\sigma}{2} \vec{\omega} \times 2\pi \times \frac{1}{4} R^4$$

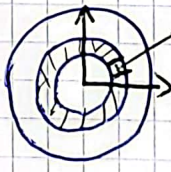
$$\vec{m} = \frac{\sigma \pi R^4}{4} \vec{\omega}$$



Méthode (2) : découpage

$\vec{m} = \int \delta \vec{m}$ (moment du disque) (moment d'une spire)

donc $\vec{m} = \int \delta I \cdot \vec{S}$ tq $\delta I = \frac{\delta q}{T}$;



$\delta^2 q = \sigma \, dr \, r \, d\theta$

↓ intégration sur θ

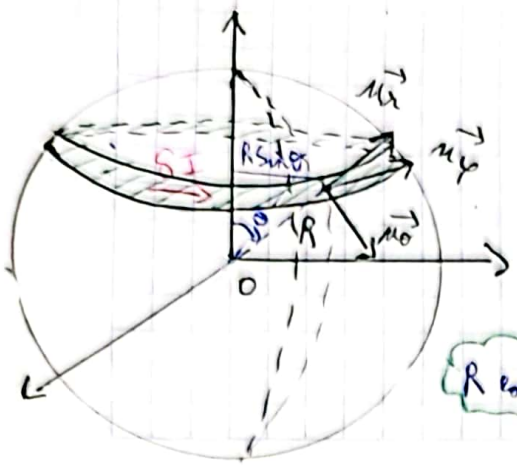
$\delta q = \sigma \, dr \, r \, 2\pi$

$\delta I = \sigma r dr \frac{2\pi}{T} \omega = \sigma \omega r dr$

$\vec{m} = \int \sigma \omega r dr \cdot \pi r^2 \vec{u_z} = \sigma \omega \pi \int r^3 dr \vec{u_z}$

d'où $\vec{m} = \frac{\sigma \pi R^4}{4} \vec{\omega}$

Scanné avec CamScanner



$(R$ est constant$)$

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} r \\ r\dot{\theta} \\ r\sin\theta\,\dot{\varphi} \end{vmatrix}$$

Méthode (1) :

$$\vec{m} = \frac{1}{2}\iint \vec{OP} \wedge \vec{\pi_S}\, dS$$

$$= \frac{1}{2}\iint R\vec{u_r} \wedge \sigma\vec{v}\, dS$$

$$= \frac{\sigma}{2}\iint R\vec{u_r} \wedge v\vec{u_\varphi}\, dS$$

$$= \frac{\sigma R}{2}\iint \frac{r}{R}\sin\theta\,\dot{\varphi}\, dS\,(-\vec{u_\theta})$$

$$= \frac{\sigma R^2}{2}\omega \iint \sin\theta\, R\,d\theta\, R\sin\theta\, d\varphi\,(-u_\theta)$$

$$= \frac{\sigma R^4}{2}\omega \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin^3\theta\, d\theta\,(-\vec{u_\theta})$$

⚠ $\vec{u_\theta}$ dépend de θ.

ou $\vec{m} = m\vec{u_z}$

d'où $\vec{m} = \left(\frac{\sigma R^4 \omega}{2} \times 2\pi \int_0^{\pi} \sin^2\theta\, d\theta\,(-\vec{u_z}\cdot\vec{u_z})\right)$

$$\vec{m} = \sigma\pi R^4\omega \int_0^{\pi} \sin^3(\theta)\, d\theta\, \vec{u_z}$$

$$= \sigma\frac{4}{3}\pi R^2 \cdot R^2\vec{\omega}$$

$$= \frac{\sigma S R^2}{3}\vec{\omega}$$

$$\vec{m} = \frac{qR^2}{3}\vec{\omega}$$

Méthode (2) : découpage.

$\vec{m} = \int \delta\vec{m}$ ← moment d'une spire

↑ moment de la sphère

$\vec{m} = \int \delta I \cdot \vec{S}$ et $\delta I = \frac{\delta q}{T}$ avec $\delta q = \int \delta^2 q = \int \sigma\, dS$

$$= \sigma \int R\,d\theta\, R\sin\theta\, d\varphi$$

$$= \sigma R^2 \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$\delta q = \sigma R^2 \sin\theta\, d\theta\, 2\pi$$

$$\delta I = \frac{\delta q}{T} = \sigma R^2 \sin\theta\, d\theta\, \frac{2\pi}{T}$$

$$= \sigma R^2 \sin\theta\, d\theta\, \omega$$

$$\vec{m} = \int \delta I S = \int \sigma\omega R^2 \sin\theta\, d\theta\, \pi (R\sin\theta)^2 \vec{u_z}$$

$$= \sigma\omega R^2 \pi R^2 \int \sin\theta\, d\theta \sin^2\theta\, \vec{u_z}$$

Scanné avec CamScanner

$$= \sigma \omega R^4 \pi \int_0^{\pi} \sin^3\theta \, d\theta \, \vec{u_z}$$

$$= \frac{q}{4\pi R^2} \omega \pi R^4 \cdot \frac{4}{3} \vec{u_z}$$

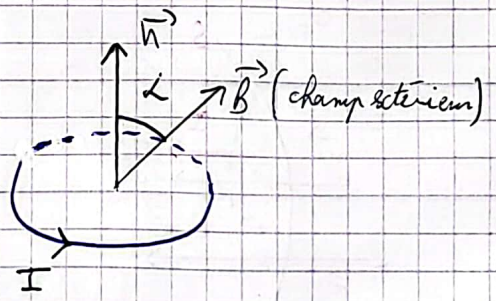
$$\vec{m} = \frac{qR^2}{3} \omega \vec{u_z}$$

3) Energie potentielle magnétique :

$$E_{p;L} = -I\phi = -I \iint \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

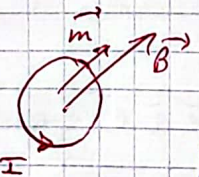
Si B est uniforme $E_{p;L} = -I\vec{B} \iint d\vec{S}$

$$E_{p;L} = -I\vec{S} \cdot \vec{B} \Rightarrow \boxed{E_{p;L} = -\vec{m} \cdot \vec{B}} \Leftrightarrow \boxed{E_{p;e} = -\vec{p} \cdot \vec{E}}$$



$$E_{p;L} = -mB\cos\alpha$$

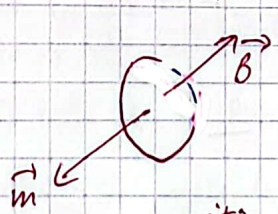
$\alpha = 0$



$E_{p;L} = E_{p;min} = -mB$

position d'équilibre stable.

$\alpha = \pi$



$E_{p;L} = E_{p;L\,max} = mB$

position d'équilibre instable

Scanné avec CamScanner

CL: Dans un champ uniforme le couple tend à aligner le dipôle // au champ (appelé aussi la force et nulle) et dans le même sens.

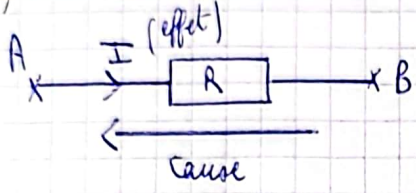
Dans un champ non uniforme, la force de Laplace déplace le dipôle vers la zone où le champ magnétique est maximal, et le moment de la force de la place oriente le dipôle // et dans le même sens du champ.

II) Loi d'Ohm locale:

C'est une relation qui lie les courants dans un conducteur au causes qui les produisent.

1) Modèle de Drüde:

On suppose par la suite qu'il n'y a que le champ magnétique est absent

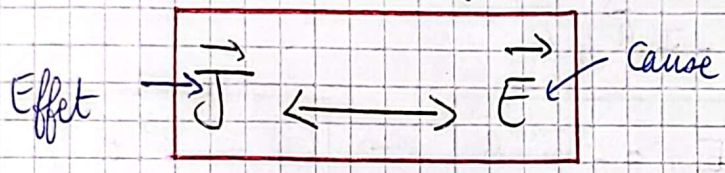


$U = RI$ avec $U = V_A - V_B = \int_B^A dV$

Loi d'ohm intégrale

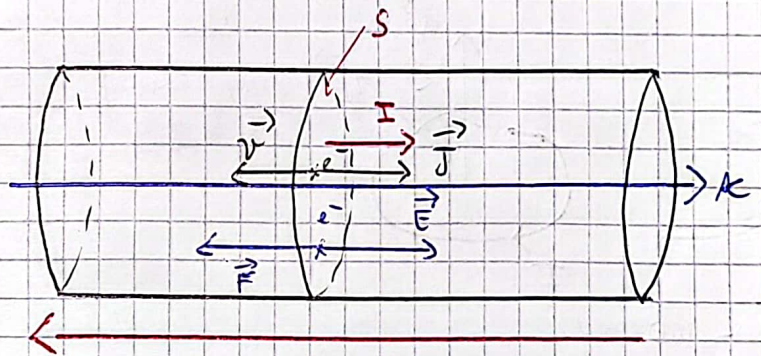
$U = -\int_B^A \vec{E} \cdot \vec{dl}$

grandeurs intégrales → $I = \iint \vec{J} \cdot \vec{dS}$

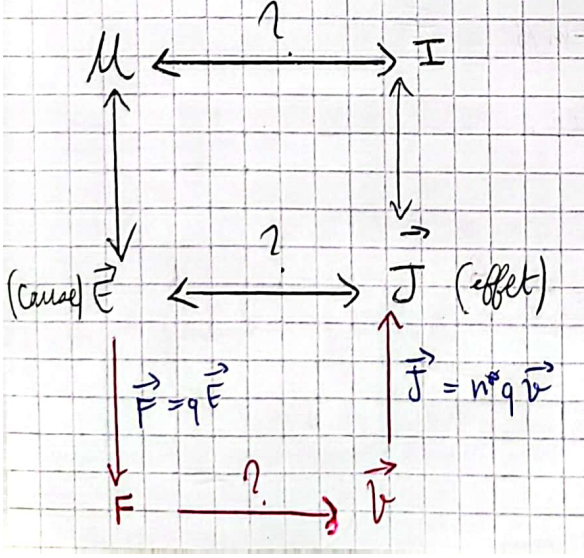


grandeurs locales

Loi d'OHM locale



U



Le PFD appliqué à e⁻ s'écrit:

$\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow q\vec{E} = \frac{d\vec{v}}{dt} m$

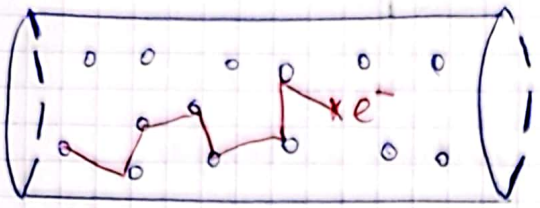
on est en régime stationnaire

donc $d\vec{v} = \frac{q}{m} \vec{E} . dt$

$\rightarrow \vec{v} = \frac{q\vec{E}t}{m} + \vec{cte}$

↳ $\vec{v}$ diverge!!

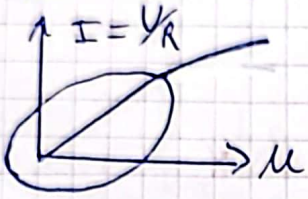
Scanné avec CamScanner



il faut donc considérer une force qui limite la vitesse de l'électron.

$\vec{F_e} + \vec{F_f} = m\vec{a}$ avec $\vec{F_f} = -\alpha\vec{v}$ Force de frottement visqueux qui modélise l'action du réseau (les chocs) sur l'électron ; C'est le modèle de Drude (loi phénoménologique, expérimentale)

Si la vitesse ↗ alors $\vec{F_f} = -\beta\vec{v}^2$ et alors la loi d'OHM ne sera plus valable quand la vitesse est trop grande (limites du modèle de Drude).



Donc $q\vec{E} - \alpha\vec{v} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\alpha}{m}\vec{v} = \frac{q}{m}\vec{E}$

on pose $\tau = \frac{m}{\alpha}$ constante du temps ; $\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\tau} = \frac{q}{m}\vec{E}$

$\Rightarrow \vec{v} = \vec{v_h}(t) + \vec{v_p}$

⊕ $\frac{d\vec{v_h}}{dt} + \frac{\vec{v_h}}{\tau} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v_h}(t) = \vec{A}e^{-t/\tau}$

⊕ $\vec{v_p} = \vec{cte}$ car $\frac{q\vec{E}}{m} = \vec{cte} \Rightarrow \frac{d\vec{v_p}}{dt}^{\vec{0}} + \frac{\vec{v_p}}{\tau} = \frac{q\vec{E}}{m}$

donc $\vec{v_p} = \frac{q\tau}{m}\vec{E}$

⊕ donc $\vec{v} = Ae^{-t/\tau} + \frac{q\tau}{m}\vec{E}$

τ est le temps de relaxation du milieu : $\vec{v_h}(t > 5\tau) \simeq \vec{0}$

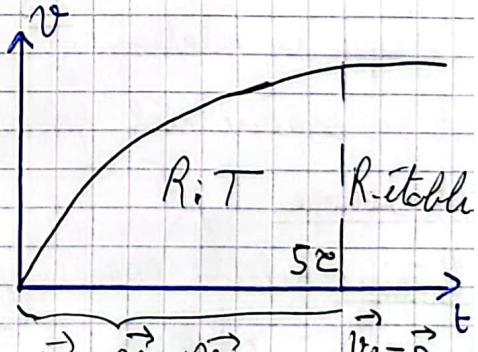
ODG : $\tau = \frac{m}{\alpha}$

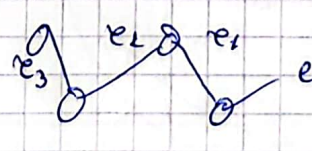
$\tau \sim 10^{-14}$ s très faible (τ représente la durée moyenne entre deux chocs successifs).

donc v_h s'annule instantanément.

Si m ↗ τ ↗

Si α ↗ τ ↓





Scanné avec CamScanner

$\Rightarrow \vec{v} = \frac{q\tau}{m}\vec{E} \Rightarrow \boxed{\vec{v} = \mu \vec{E}}$

avec $\mu = \frac{q\tau}{m}$ est la mobilité des porteurs de charges.

or $\vec{J} = n^* \cdot q \cdot \vec{v}$ d'où $\vec{J} = n^* \cdot q \cdot \frac{q\tau}{m}\vec{E}$

$$\boxed{\vec{J} = \gamma \cdot \vec{E}}$$

avec $\gamma = \frac{n^* q^2 \tau}{m}$ (S, m^{-1})

est la conductivité électrique du milieu.

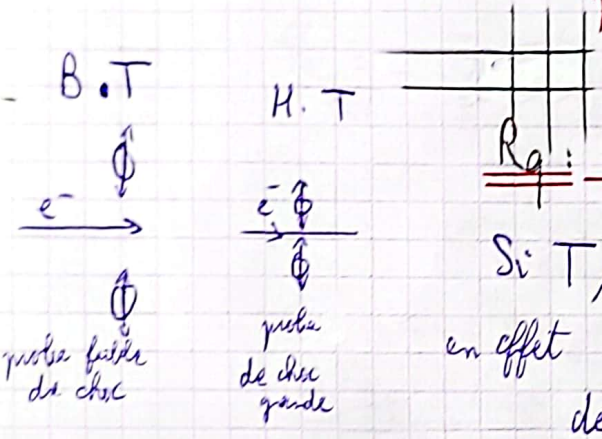
Loi d'Ohm locale

ODG de γ : à $T = 298\,K$

Métal	Ag	Cu	Au	Al
$\gamma (10^7\ \Omega^{-1}.m^{-1})$	6,22	5,88	4,55	3,65

Si $T \nearrow \Rightarrow \gamma_{métal} \searrow$

car si $T \nearrow$ alors le nombre de chocs par unité de temps $\nearrow \Rightarrow \tau \nearrow \Rightarrow \gamma \searrow$



Rq : pour les semi-conducteurs :

Si $T \nearrow \Rightarrow \gamma_{\text{semi-conducteur}} \nearrow$

en effet si $T \nearrow$ alors le nbr de porteurs de charges $\nearrow \Rightarrow n^* \nearrow \Rightarrow \gamma \nearrow$

(Voir cours Semi-conducteurs).

ODG $\gamma_{\text{isolant}} : 10^{-22} \searrow$

ODG $\gamma_{\text{semi-conducteur}} : 1 ; 10^{-2} ; 10^{2} ; 10^{-4}$ ... changé selon nos besoins

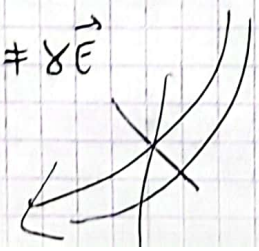
Lorsque la relation $\vec{J} = \gamma \vec{E}$ est vérifiée expérimentalement avec γ est un scalaire réel positif et uniforme alors le milieu est : linéaire, homogène et isotrope.

linéaire : Relation cause-effet linéaire. $\vec{J} = \gamma \vec{E}$ (relation linéaire)

Si $\vec{E}$ intense $\vec{J} \neq \gamma \vec{E}$

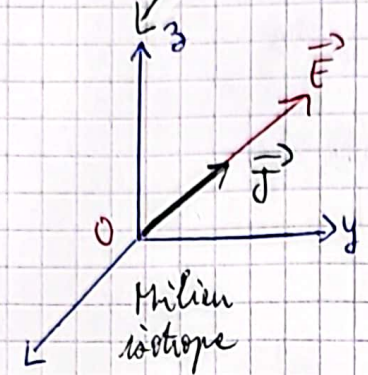
Homogène : γ uniforme

isotrope : $\vec{J} \parallel \vec{E}$



Scanné avec CamScanner

$\vec{J} = \gamma \vec{E}$

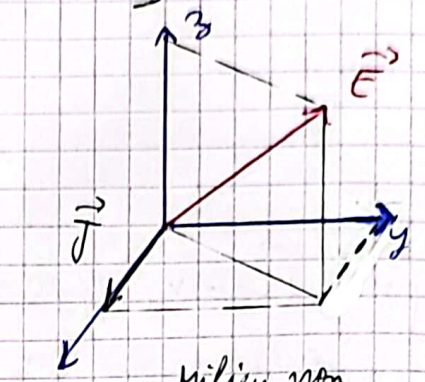


Milieu isotrope

$$\vec{J} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \vec{E}$$

$$\vec{J} = \gamma \vec{E}$$

scalaire > 0



Milieu non isotrope (anisotrope).

$$\begin{pmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

matrice notée $[\gamma]$ ou $\underline{\underline{\gamma}}$

$$\Rightarrow \begin{cases} J_x = \gamma E_x \\ J_y = 0 \\ J_z = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{J} = J_x \vec{u_x} + J_y \vec{e_y} + J_z \vec{e_z}$$

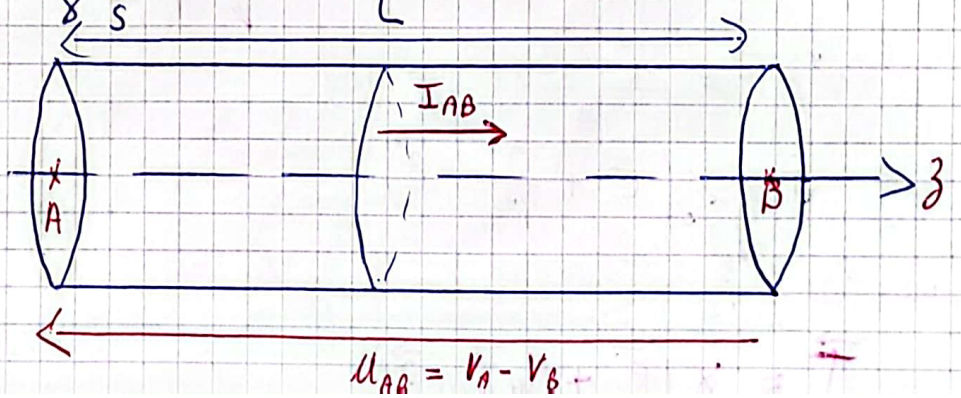
$$\vec{J} = \gamma E \vec{u_x}$$

Dans certains matériaux linéaires $\vec{J} \not\parallel \vec{E}$ (milieu non isotrope). alors la conductivité est un tenseur (γ) ou $\underline{\underline{\gamma}}$ qui s'explicite dans une base par une matrice carrée. On peut choisir une base principale dans laquelle la matrice est diagonale tq $\begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_3 \end{pmatrix}$ avec $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ sont les conductivités principales.

2) Résistance électrique et loi d'OHM macroscopique:

on considère un conducteur cylindrique ohmique de longueur L de section S et on suppose que le champ $\vec{E}$ est uniforme.

Montrer que $R = \frac{1}{\gamma} \frac{L}{S}$



Scanné avec CamScanner

$U_{AB} = R\, I_{AB} \Rightarrow R = \frac{U_{AB}}{I_{AB}}$

$U_{AB} = V_A - V_B = -\int_B^A \vec{E}.d\vec{\ell} = \int_A^B \vec{E}.d\vec{\ell} = \int_{z_A}^{z_B} E.\vec{u_z}.d\vec{\ell}$

$= E\int_{z_A}^{z_B} dz$

$= E(z_B - z_A)$

$= E.L$

$I_{AB} = \iint \vec{j}.d\vec{S} = \iint \gamma \underbrace{\vec{E}}_{\vec{E}.\vec{u_z}}.\underbrace{d\vec{S}}_{dS\,\vec{u}_{AB}} = \gamma E \iint dS = \gamma E S$

$R = \frac{EL}{\gamma E S} = \frac{1}{\gamma}\frac{L}{S} = \rho\frac{L}{S}$

$\rho = \frac{1}{\gamma}$ est la résistivité $(\Omega.m)$

$G = \frac{1}{R}$ est la conductance $(S = \Omega^{-1})$

VI) Effet magnétorésistance et effet HALL :

1) Action d'un champ magnétique :

Le PFD appliqué à e^- s'écrit :

$m\frac{d\vec{v}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v}\wedge\vec{B}) - \alpha\vec{v}$

$\Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} + \underbrace{\left(\frac{\alpha}{m}\right)}_{\frac{1}{\tau}}\vec{v} = \frac{q}{m}(\vec{E} + \vec{v}\wedge\vec{B})$

or le régime permanent est atteint rapidement :

donc $\underbrace{\frac{d\vec{v}}{dt}}_{\to\vec{0}} + \frac{1}{\tau}\vec{v} = \frac{q}{m}(\vec{E} + \vec{v}\wedge\vec{B})$

donc $\vec{v} = \frac{q\tau}{m}(\vec{E} + \vec{v}\wedge\vec{B})$

$\downarrow n^*q$

$n^*q\vec{v} = \frac{n^*q^2\tau}{m}(\vec{E} + \vec{v}\wedge\vec{B})$

$\vec{j} = \gamma_0\left(\vec{E} + \frac{\vec{j}}{n^*q}\wedge\vec{B}\right)$

C_H ou $R_H = \frac{1}{n^*q}$ est dite constante de HALL.

$\vec{E_a}$ appliqué $\to$ apparaît $\vec{E_H} = -R_H\vec{j}\wedge\vec{B}$

$\vec{j} = \gamma(\vec{E} + R_H\vec{j}\wedge\vec{B})$ donc $\vec{j} = \gamma_0\vec{E_a}$

Scanné avec CamScanner

$R_H \vec{J} \wedge \vec{B}$ est responsable soit de : → effet magnétorésistance / → effet HALL.

(la géométrie du conducteur qui détermine lequel se présente.)

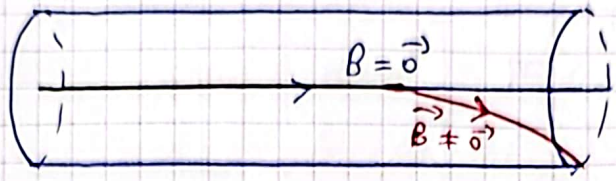
2) Effet magnétorésistant :

$R > R_0$

R : en présence de $\vec{B}$

R_0 : en absence de $\vec{B}$

$$R = \frac{1}{\gamma}\frac{L}{S}$$



Voir Séance TD (CNC 2007)

Voir Séance TD (CNC 2007)

$$\vec{J} = \underbrace{\frac{\gamma_0}{1+(\tau\omega_c)^2}\begin{pmatrix} 1 & \tau\omega_c & 0 \\ -\tau\omega_c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+(\tau\omega_c)^2 \end{pmatrix}}_{\gamma} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

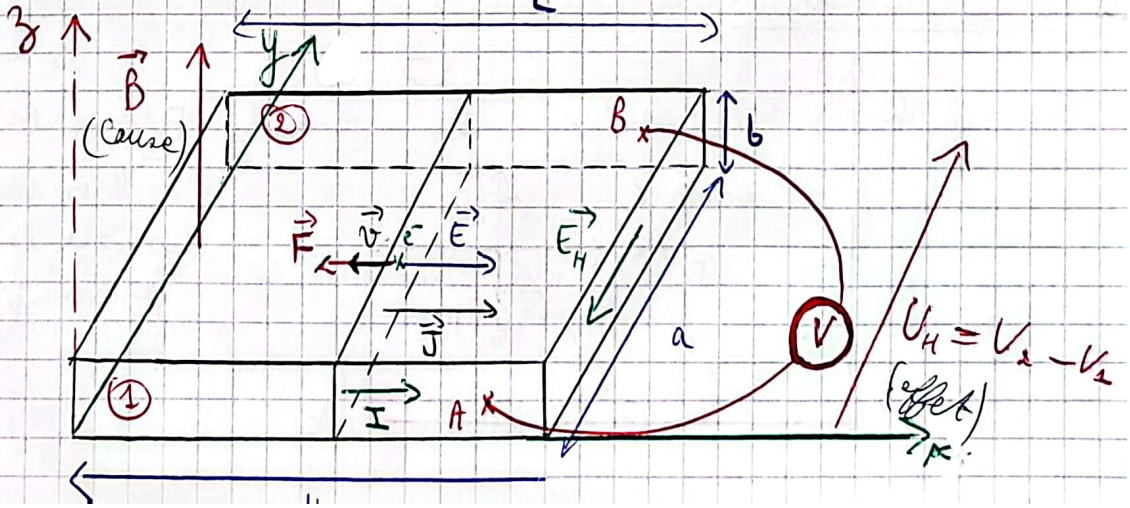
En absence de $\vec{B}$: $R_0 = \frac{U_{AB}}{I_{AB}} = \frac{E.L}{\gamma_0 . E.S} = \frac{1}{\gamma_0}\frac{L}{S}$

En présence de $\vec{B}$: $R = \frac{E.L}{\frac{\gamma_0}{1+(\tau\omega_c)^2} E.S} = \frac{1+(\tau\omega_c)^2}{\gamma_0}\frac{L}{S}$

$= R_0\left(1+(\tau\omega_c)^2\right)$

2) Effet HALL : (1879)

a) Mise en évidence de l'effet HALL : Soit un ruban conducteur à section rectangulaire de grande longueur suivant (O_x), de largeur a, d'épaisseur b et parcouru par un courant continu I de densité $\vec{J}$ uniforme



Scanné avec CamScanner

Un courant électrique traversant un matériau plongé dans un champ magnétique engendre une tension perpendiculaire à celui ci dite tension de HALL proportionelle à ce champ $\vec{B}$. C'est l'effet HALL

b) Démonstration. $U_H = f(B)$

$\vec{J} = \gamma(\vec{E} + R_H \vec{J} \wedge \vec{B})$.

Mathématiquement :

$$\vec{J} = \gamma(\vec{E} + R_H \overbrace{\vec{J} \wedge \vec{B}}^{\neq 0})$$ (en régime permanent)

$\exists ?$

J_x O_x $\vec{E}_a \rightarrow O_x$ O_x O_z

$\exists J_y \Leftarrow \vec{J}_{//\vec{Oy}}$ $\vec{E}_{H//\vec{Oy}} \xLeftarrow{\exists} O_y \neq 0$

$\downarrow t_q$

$\vec{E}_H = -R_H \vec{J} \wedge \vec{B} = -R_H J \vec{u_x} \wedge B \vec{u_z} = R_H J B \vec{u_y}$

or $I = Jab$ donc $\vec{E}_H = R_H \frac{I}{ab} B \vec{u_y}$

et on a $U_H = v_2 - v_1 = \int_1^2 -\vec{E}_H \cdot \vec{dl}$

$= \frac{-R_H}{ab} I B \int_1^2 \vec{u_y} \cdot \vec{dl}$

$= \frac{-R_H}{ab} I B \int_1^2 dy$

$= \frac{-R_H I}{\cancel{a}b} I B \cancel{a}$

donc $U_H = \left(\frac{-R_H I}{b}\right) B$

effet Cause

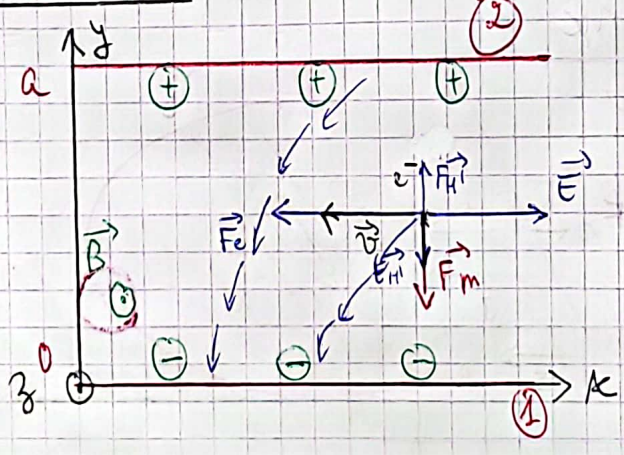
Rq : $\exists \vec{E}_{H//\vec{Oy}}$ c'est l'effet HALL

$\exists J_y$ c'est l'effet magnétorésistant.

l'existence de l'un ou l'autre dépend de la géométrie du conducteur (dans le cas général c'est les 2 qui existent).

Physiquement :

i) en régime transitoire :



crée dûe à l'accumulation des charges sur 1 et

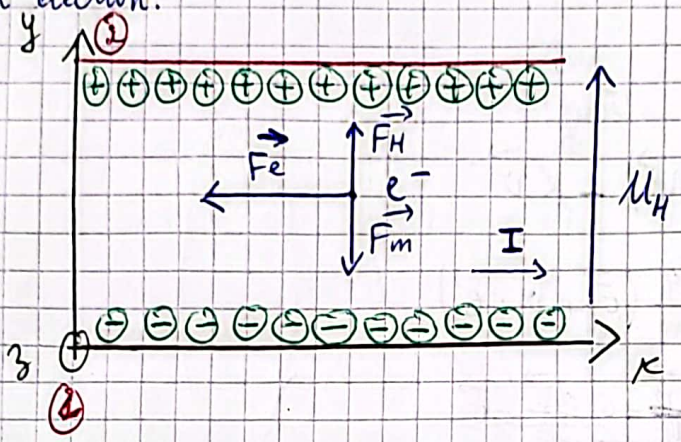
$\|\vec{F_H'}\|$ augmente jusqu'à atteindre $\|\vec{F_m}\|$ on atteint à ce moment là le régime permanent

$\vec{F_m} = q\vec{v} \wedge \vec{B} = q v \vec{u_x} \wedge B\vec{u_z}$ avec $v<0$

$\vec{F_m} = q v B(-\vec{u_y}) \underset{q=-e}{=} e v B \vec{u_y}$

l'effet de la force magnétique est de déplacer l'électron vers la face ①, la face ① se charge négativement, le défaut d'électrons provoque l'apparition d'une charge >0 sur la face ②, les charges ⊕ et ⊖ vont crée un champ électrique dit champ de HALL qui agit sur les électrons de conduction.

ii) en régime permanent : la force de HALL annulle la force magnétique subie par un électron.



$\vec{F_H} = -\vec{F_m}$

$\Rightarrow q\vec{E_H} = -q\vec{v} \wedge \vec{B}$

$\Rightarrow \vec{E_H} = -\vec{v} \wedge \vec{B}$

$= -\frac{\vec{J}}{n^* q} \wedge \vec{B}$

$$\boxed{\vec{E_H} = -R_H \vec{J} \wedge \vec{B}}$$

c) Utilité : pour un courant I, la mesure de U_H donne la valeur de B, c'est le principe de Tesla-mètre (sonde à Effet HALL).

AN : $B = 1\,T$ (1 T c'est intense) ; $I = 1\,A$; $b = 0{,}1\,mm$.

↳ cas d'un conducteur métallique :

Exp cuivre $n^* = 8{,}5 \times 10^{28}\,m^{-3} \Rightarrow R_H = -0{,}74 \cdot 10^{-10}\,C^{-1}.m^3$

$$\underset{\text{effet}}{U_H} = \left(-\frac{R_H I}{b}\right) . \underset{\text{cause}}{B}$$

$U_H = 0{,}74\,\mu H$ effet très faible non mesurable par un voltmètre

* Si on utilise un isolant $n^* \sim 10^{-12}$ I impossible à conduire il faut un tension énorme.

* Si on utilise un semi-conducteur dopé n :

$n^* = 10^{22}\,m^{-3} \Rightarrow R_H = -0{,}62 \times 10^{-3}\,C^{-1}.m^3$

$\Rightarrow U_H = 6{,}2\,V$ bcp plus élevée.

Scanné avec CamScanner

3) Effet magnétorésistance :

V. Effet de magnéto résistance.

Un milieu ohmique de temps de relaxation τ possède n charges de conduction (de charge q et de masse m) par unité de volume. Une différence de potentiel impose un champ électrique $\vec{E}(M)$ en tout point M de ce milieu.

V.1. Quelle est la conductivité γ_0 du milieu ? ($\gamma_0 = \frac{n^* q^2 \tau}{m}$)

V.2. Un champ magnétique $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$ est appliqué au milieu. Montrer qu' en régime permanent, le vecteur densité volumique de courant peut être écrit sous la forme $\vec{j} = [\gamma]\vec{E}$ en explicitant la matrice $[\gamma]$ en fonction de la conductivité γ_0 et de la pulsation cyclotron ω_c définie par : $\omega_c = \frac{qB_0}{m}$. On utilisera les coordonnées cartésiennes.

V.3. Le milieu occupe l'espace situé entre les plans $x = 0$ et $x = a$. Il est soumis à une différence de potentiel : $U_0 = V(x=0) - V(x=a)$. Quelle est la résistance R_0 d'une section S de ce milieu conducteur en l'absence de champ magnétique ?

V.4. Quelle est la nouvelle valeur R de la résistance du conducteur en présence du champ magnétique $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$? La comparer à R_0 pour un champ de $B_0 = 1T$, pour un milieu métallique.

Données : $q = -1,6.10^{-19} C$; $m = 9,1.10^{-31} kg$; $\tau = 10^{-15} s$.

($\vec{E}$ est uniforme).

1) $\gamma_0 = \frac{n^* q^2 \tau}{m}$

2) Le PFD appliqué sur q s'écrit :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) - \alpha \vec{v}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\alpha}{m}\vec{v} = \frac{q}{m}(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

en régime permanent : $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}$

$$\frac{\alpha}{m}\vec{v} = \frac{q}{m}(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}_0)$$

$$= \frac{q}{m}(\vec{E} + \vec{v} \wedge B_0 \vec{e}_z)$$

$$\frac{\vec{v}}{\tau} = \frac{q}{m}\vec{E} + \frac{qB_0}{m}\vec{v} \wedge \vec{e}_z \qquad \text{or } \vec{J} = n^* q \vec{v}$$

$$\frac{\vec{J}}{n^* q} \times \frac{1}{\tau} = \frac{q}{m}\vec{E} + \omega_c \frac{\vec{J}}{n^* q} \wedge \vec{e}_z$$

$$\vec{J} = \frac{n^* q^2 \tau}{m}\vec{E} + \omega_c \tau \vec{J} \wedge \vec{e}_z$$

$$\begin{pmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \end{pmatrix} = \gamma_0 \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} + \tau \omega_c \begin{pmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} J_x = \gamma_0 E_x + \tau \omega_c J_y & (1) \\ J_y = \gamma_0 E_y + \tau \omega_c (-J_x) & (2) \\ J_z = \gamma_0 E_z & (3) \end{cases}$$

Scanné avec CamScanner

on remplace ① dans ②

$$J_y = \gamma_0 E_y - \tau\omega_c (\gamma_0 E_x + \tau\omega_c J_y)$$

$$J_y \left[1 + (\tau\omega_c)^2\right] = \gamma_0 (E_y - \tau\omega_c E_x)$$

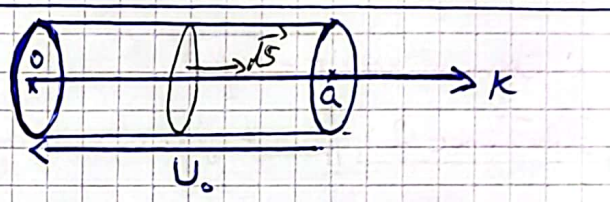
$$J_y = \frac{\gamma_0}{1+(\tau\omega_c)^2} \left[-\tau\omega_c E_x + E_y\right] \quad \text{donc}$$

de même $J_x = \frac{\gamma_0}{1+(\tau\omega_c)^2}\left[\tau\omega_c E_y + E_x\right]$

$$J_z = \gamma_0 E_z = \frac{\gamma_0}{1+(\tau\omega_c)^2} \times \left(1+(\tau\omega_c)^2\right) E_z$$

$$\begin{pmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{\gamma_0}{1+(\tau\omega_c)^2} \begin{pmatrix} 1 & \tau\omega_c & 0 \\ -\tau\omega_c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+(\tau\omega_c)^2 \end{pmatrix}}_{\gamma \text{ ou } [\gamma]} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

3) loi ohm $R_0 = \frac{1}{\gamma_0}\frac{a}{S}$



4) $\hookrightarrow \underbrace{V(x=0) - V(x=a)}_{U_0} = -\int_{x=a}^{x=0} \vec{E}.d\vec{OM}$

$\vec{E} = E_x \vec{u}_x$ on U_0 ← imposée donc on suppose qu'il n'y a pas de d.d.p existant d'autres axes y, z...

$$U_0 = \int_{x=0}^{x=a} \vec{E}(M).d\vec{OM} = \int_{x=0}^{x=a} E_x.\vec{u}_x.d\vec{OM}$$

$$U_0 = E_x \int_0^a dx = E_x.a$$

$$\hookrightarrow I = \iint \vec{J}.d\vec{S} = \iint \vec{J}.dS.\vec{u}_x = \iint J_x.dS = J_x.S$$

$$I = \frac{\gamma_0}{1+(\tau\omega_c)^2} E_x.S$$

donc $R = \frac{U}{I} = \frac{E_x a}{\frac{\gamma_0}{1+(\tau\omega_c)^2}.E_x.S} = \frac{1}{\gamma_0}\frac{a}{S}\left(1+(\tau\omega_c)^2\right)$

donc $R = R_0\left(1+(\tau\omega_c)^2\right) > R_0$ effet magnétorésistant

Physiquement, puisque les électrons sont déviés ils subissent plus de chocs donc $R > R_0$.

effet magnétorésistant: augmentation de la résistance d'un milieu par application d'un champ magnétique

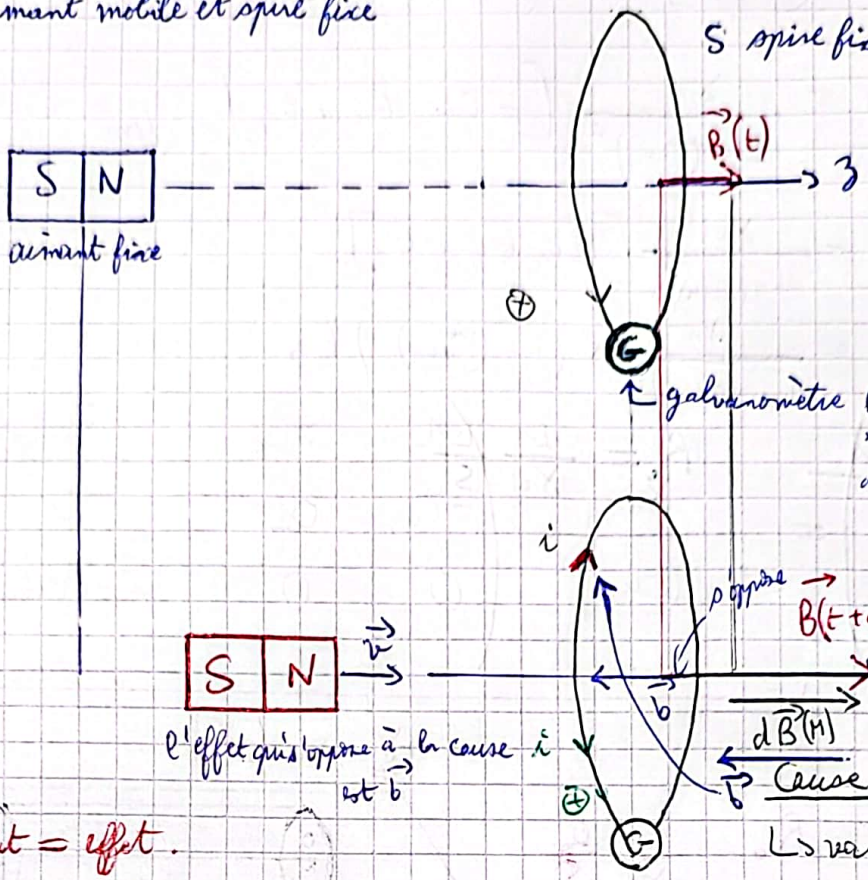
Scanné avec CamScanner

INDUCTION ELECTROMAGNÉTIQUE

I) phénomène d'induction électromagnétique:

Expérience 1: Aimant mobile et spire fixe

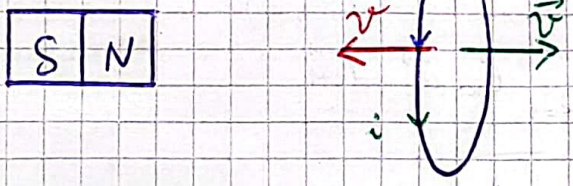
à t:



À t+dt

i courant induit = effet.

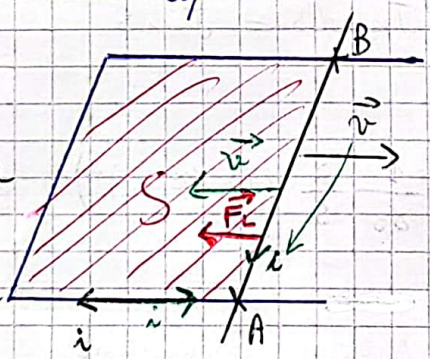
Expérience 2: Aimant fixe et spire mobile



Cause :
↳ variation du champ $\vec{B}$

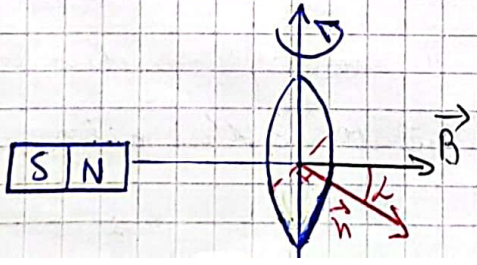
Expérience 3: Rails de Laplace.

$\vec{dF_L}$ est une force de freinage elle s'oppose au mvt de la barre



Cause:
↳ variation de S
suit le sens de i
l'effet qui s'oppose à la cause
et $\vec{dF_L} = i\vec{dl} \wedge \vec{B}$
on cherche à minimiser S donc la force $\vec{dF_L}$ et donc le sens de i
Cause: variation de l

Expérience 4:



Scanné avec CamScanner

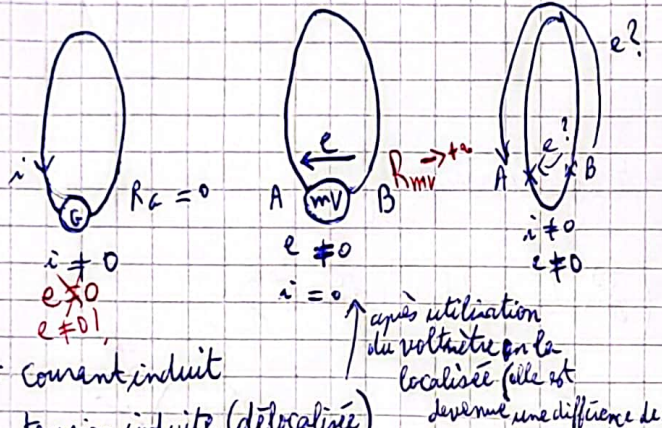
①, ②, ③ et ④ ⇒ la cause est la variation de $\Phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S}$ (Wb)

- Dans l'expérience ① si on approche l'aimant à la spire on constate l'apparition d'un courant i dans la spire dans le sens (−). Si on éloigne l'aimant de la spire, le sens du courant et le sens (+). Ce courant est appelé le courant induit, il est plus intense quand le déplacement est rapide (voir exo).
- Dans l'expérience ②, les résultats sont identiques à l'expérience 1, en effet si on avance la spire vers l'aimant, le sens du courant est (−). Si on retire la spire, le sens du courant s'inverse.

Cl: lorsqu'un circuit subit une variation du flux magnétique, un courant électrique apparaît dans le circuit. C'est le phénomène d'induction électromagnétique.

Rq: on peut mesurer au lieu d'un courant induit une tension induite e entre les bornes de la spire en utilisant un milivoltmètre

Rq:

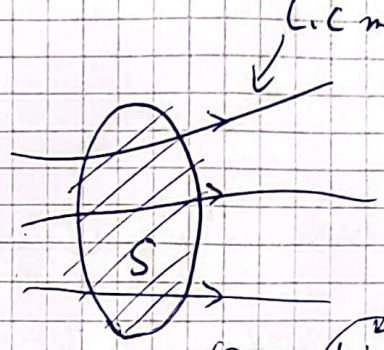


après utilisation du voltmètre on la localisée (elle est devenue une différence de potentiel).

i : courant induit

e : tension induite (délocalisée)

c'n'est pas une différence de potentiel !! elle dépend du chemin suivi (c'est une tension)



on ne voir que effet

$$e = \frac{-d\Phi}{dt}$$ Cause

On voit mntn qu'on est en régime variable donc plus de lois locales électrostatiques/magnétostatiques.

II) Lois de l'induction:

1) Loi de Faraday:

la force électromotrice induite e dans un circuit est reliée à la variation du flux magnétique à travers la relation:

$$e = \frac{-d\Phi}{dt}$$

force électromotrice induite — grandeur intégrale

avec $\Phi = \iint_{M \in (S)} \vec{B}(M) \cdot d\vec{S}(M)$

e est une grandeur intégrale

effet

cause

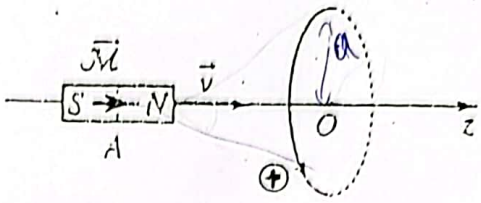
et le flux du champ magnétique à travers le circuit

Scanné avec CamScanner

Loi de Lenz : le courant induit apparaît dans le sens tel qu'il s'oppose par ses effets à la cause qui lui a donné naissance. La loi de Lenz interprète le signe "−" apparaissant dans la loi de Faraday.

5.1 Courant induit par un aimant mobile

Une spire circulaire d'axe Oz, de rayon a de résistance R est immobile. Sur son axe, on déplace à vitesse $\vec{v} = v\vec{u}_z$ constante ($v > 0$) un petit aimant A d'abscisse $x < 0$ assimilé à un dipôle magnétique de moment $\vec{\mathcal{M}} = \mathcal{M}\vec{u}_z$.



a) Prévoir par la loi de Lenz le sens du courant i induit dans la spire.
Ce sens est-il modifié si :
- au lieu d'approcher l'aimant de la spire, on le retire ?
- on approche l'aimant de la spire après l'avoir retourné ?

b) Déterminer le flux Φ envoyé par l'aimant à travers la spire.

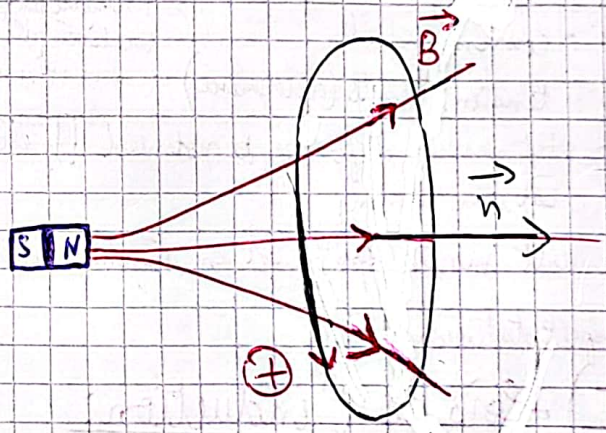
c) Dans quelle position de l'aimant (vis-à-vis de la spire) le courant induit est-il maximal ?

d) Quelle est la force magnétique qu'exerce l'aimant sur la spire ?

a) Etape (1) : choix arbitraire de l'orientation du circuit

Etape (2) : Signe de ϕ. $\phi = \iint \vec{B}.\vec{dS} = \iint \vec{B}.dS.\vec{n} > 0$

Etape (3) : variation de ϕ



- Si on approche l'aimant

$\Rightarrow B \nearrow \Rightarrow |\phi| \nearrow$

or $\phi > 0 \Rightarrow \phi \nearrow \Rightarrow \frac{d\phi}{dt} > 0$

$\Rightarrow e < 0 \Rightarrow i < 0$ (voir après)

- Si on éloigne l'aimant

$\Rightarrow B \searrow \Rightarrow |\phi| \searrow$ or $\phi < 0 \Rightarrow \phi \searrow \Rightarrow \frac{d\phi}{dt} < 0 \Rightarrow e > 0 \Rightarrow i > 0$

Si on inverse le nord et le Sud le courant dirigera vers l'autre sens

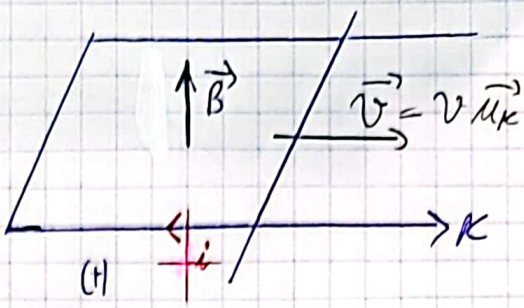
et donc si on approche l'aimant $B \nearrow \Rightarrow i > 0$

et donc si on éloigne l'aimant $B \searrow \Rightarrow i > 0$.

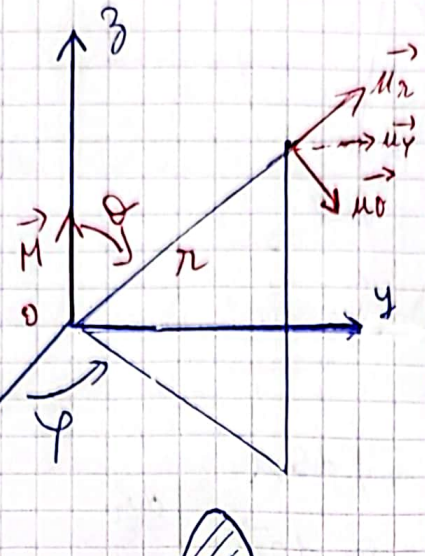
Rq : ces résultats ne dépendent pas du choix arbitraire fixé dans étape (1).

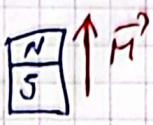
Scanné avec CamScanner

Autre exemple :



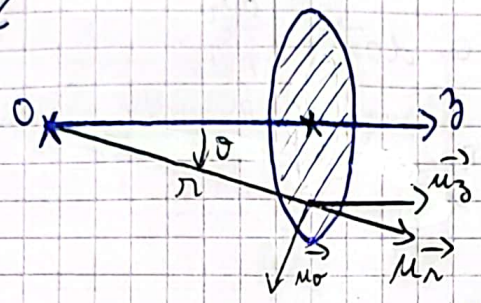
b)





$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3}\left(2\cos\theta\,\vec{u}_r + \sin\theta\,\vec{u}_\theta\right)$$

Prop ① :

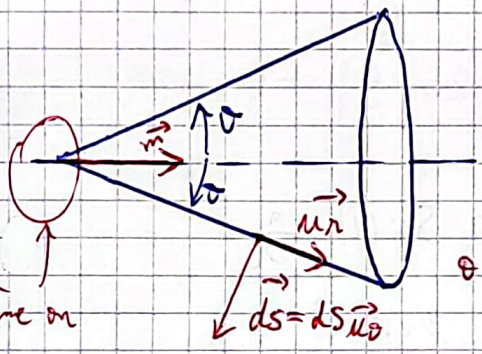


r et $\theta \neq$ cte

$\vec{dS} \not\parallel \vec{u}_r$

$\vec{dS} \not\perp \vec{u}_\theta$

Prop ② :



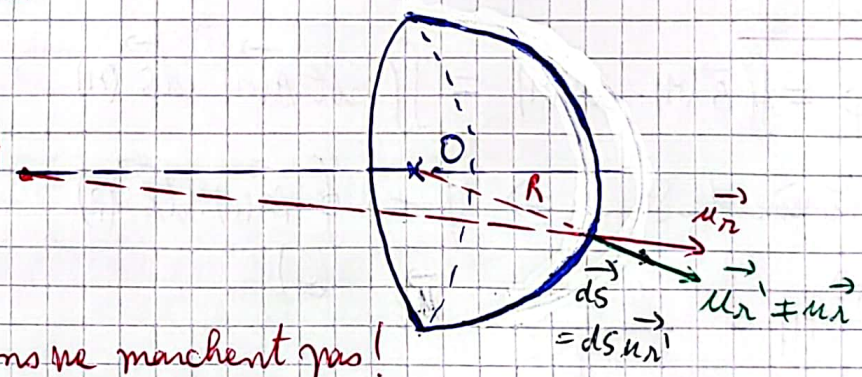
$\vec{B}.\vec{dS} = B_\theta . dS$

$\theta = cte$

$\theta = cte$

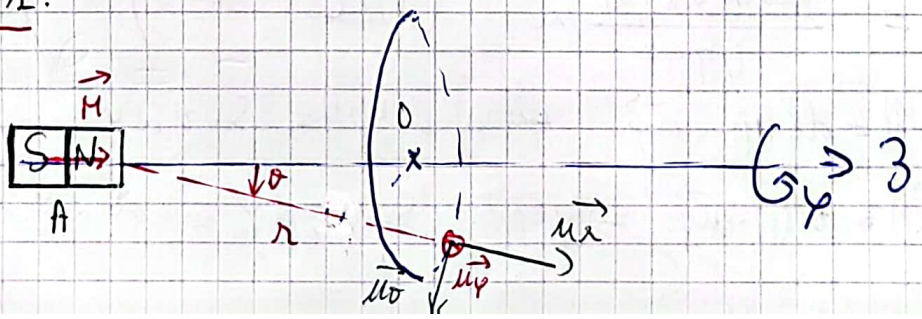
problème on a pas ici l'expression de $\vec{B}$ en plus d'approximation dipolaire

Prop ③ :

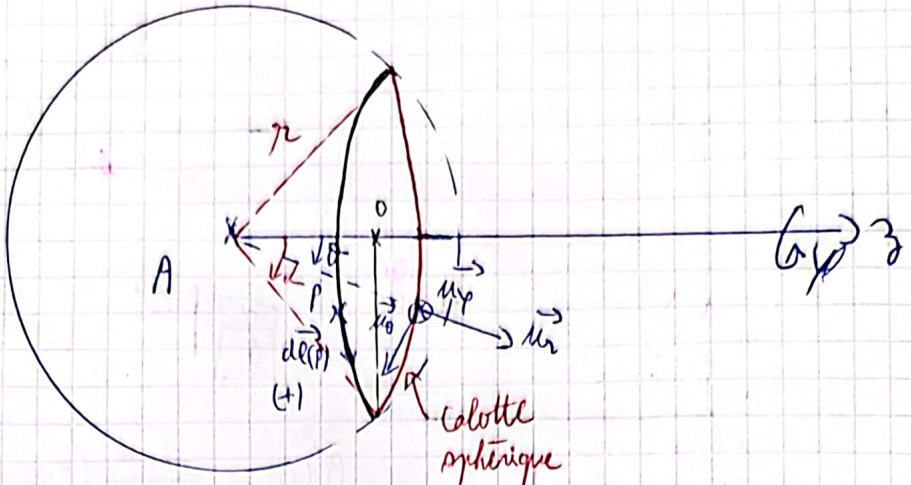


Toutes ces propositions ne marchent pas !

donc Méthode 1 :



Scanné avec CamScanner



$$\phi = \iint \vec{B}(M)\, d\vec{S}(M) = \iint (B_r \vec{u_r} + B_\theta \vec{u_\theta})\, dS\, \vec{u_r}$$

$$\phi = \iint \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} (2\cos\theta)\, r\, d\theta\, r \sin\theta\, d\varphi \quad \text{car} \quad d\vec{o}\vec{m} = \begin{vmatrix} dr \\ r\, d\theta \\ r\sin\theta\, d\varphi \end{vmatrix}$$

$$\phi = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} \cdot r^2 \int_0^\alpha 2\cos(\theta)\sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$= \frac{\mu_0 m}{4\pi r} \int_0^\alpha d\sin^2(\theta) \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi}$$

$$= \frac{\mu_0 m}{2r} \left[\sin^2(\theta)\right]_0^\alpha$$

$$= \frac{\mu_0 m}{2r} \sin^2(\alpha) \qquad r\sin(\alpha) = \frac{a}{r}$$

$$\text{donc} \quad \phi = \frac{\mu_0 m a^2}{2r^3} = \frac{\mu_0 m a^2}{2(a^2+z^2)^{3/2}}$$

Méthode ② :

$$\phi = \iint \vec{B}(M) \cdot d\vec{S}(M) = \iint \vec{rot}\, \vec{A}(M) \cdot d\vec{S}(M)$$

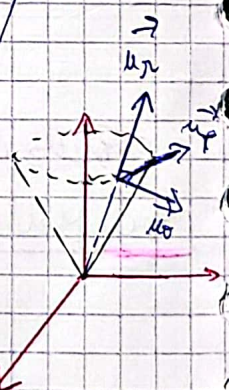
Théorème de Stokes $\Rightarrow \phi = \oint_{(C)} \vec{A}(P) \cdot d\vec{\ell}(P)$

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0 m \sin\theta}{4\pi r^2} \vec{u_\varphi}$$

$$\Rightarrow \vec{A}(P) = \frac{\mu_0 m \sin(\alpha)}{4\pi r^2} \vec{u_\varphi} \quad (\forall P \in C \quad \theta = \alpha).$$

Si $d\vec{\ell}(M) = d\ell(M) \cdot \vec{u_\varphi}$ alors $d\ell(M) = r\sin\theta\, d\varphi$

$$\Rightarrow d\vec{\ell}(P) = d\ell(P) \cdot \vec{u_\varphi} \Rightarrow d\ell(P) = r\sin(\alpha)\, d\varphi = r \times \frac{a}{r} d\varphi = a\, d\varphi$$



Scanné avec CamScanner

$$d\vec{\ell}(P) = a\, d\varphi\, \vec{u_\varphi}$$

$$\phi = \oint \frac{\mu_0 m}{4\pi r^2} \sin\alpha\, \vec{u_\varphi} \cdot a\, d\varphi\, \vec{u_\varphi}$$

$$= \frac{\mu_0 m}{4\pi r^2} \sin\alpha\, a \oint d\varphi$$

$$= \frac{\mu_0 m}{4\pi r^2} \sin\alpha\, a\, 2\pi = \frac{\mu_0 m a^2}{2r^3}$$

On distingue par la suite 2 types d'inductions:

↳ **Induction de Neuman:**

Circuit fixe et champ magnétique non permanent (exp ①) ← dépendent du référentiel

↳ **Induction de Lorentz:**

Circuit mobile et champ magnétique permanent (exp 2;3;4)

III) Induction de Neuman:

1) champ électromoteur: $\vec{E}_m(M;t)$ d'après la loi de Faraday

↳ $e = \frac{-d\phi}{dt}$ avec $\phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S}$ ⇒ e est une grandeur intégrale

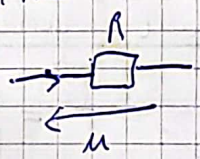
e : force électromotrice induite

⇒ La grandeur locale de e est le champ électromoteur E_m.

par analogie:

↳ $u = V_A - V_B = \int_B^A dV = \ominus \int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = +RI$

u : grandeur intégrale ; convention récepteur. ; $\vec{E}$: grandeur locale



Par définition:

$$\boxed{e = +\oint_{M \in (\mathcal{E})} \vec{E}_m(M;t) \cdot d\vec{\ell}(M)}$$

↑ générateur car c'est une tension induite donc générée

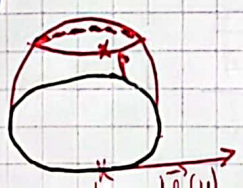
on sait que: $e = \frac{-d\phi}{dt} = \frac{-d}{dt} \iint_{P \in (S)} \vec{B}(P;t) \cdot d\vec{S}(P) = \frac{-d}{dt} \iint_{P \in (S)} \vec{rot}\, \vec{A}(P;t) \cdot d\vec{S}(P)$

d'après le théorème de Stokes:

$$e = \frac{-d}{dt} \oint \vec{A}(M;t) \cdot d\vec{\ell}(M)$$

$$e = -\oint \frac{\partial \vec{A}(M;t)}{\partial t} \cdot d\vec{\ell}(M)$$

le circuit est fixe donc ne dépend



Scanné avec CamScanner

donc par identification :

$$\vec{E}_m(M;t) = -\frac{\partial \vec{A}(M;t)}{\partial t}$$

Champ électromoteur dans le cas de l'induction de Neuman.

Rq : En coordonnées cartésiennes : $f(M;t) = f(x;y;z;t)$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial t}dt$$

$$\Rightarrow \frac{df}{dt} = \frac{dx}{dt}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{dy}{dt}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{dz}{dt}\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \frac{df}{dt} = \left(\dot{x}\frac{\partial}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial}{\partial y} + \dot{z}\frac{\partial}{\partial z}\right)f + \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \frac{df}{dt} = \left[\underbrace{\left(\dot{x}\vec{u_x} + \dot{y}\vec{u_y} + \dot{z}\vec{u_z}\right)}_{\vec{v}}\underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{u_x} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{u_y} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{u_z}\right)}_{\overrightarrow{grad}}\right]f + \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$\frac{d\cdot}{dt} = \frac{\partial \cdot}{\partial t} + \left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{grad}\right)\cdot$$

dérivée particulaire — dérivée locale — dérivée convective

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{grad}\right)\cdot\vec{A} \qquad \text{si } \vec{v} = 0 \text{ (circuit immobile)}$$

donc $\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

2) Équation de Maxwell faraday :

↳ En régime statique :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V$$

$\downarrow \vec{rot}$

$$\boxed{\vec{rot}\,\vec{E} = \vec{0}}$$ Relation locale.

$\Leftrightarrow$

$$\boxed{\oint \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = \vec{0}}$$ Relation intégrale

↳ En régime variable :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V + \vec{E}_m \Rightarrow \vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Scanné avec CamScanner

$$\rightarrow \overrightarrow{rot}\,\vec{E} = \overrightarrow{rot}\left(-\overrightarrow{grad}\,V\right) + \overrightarrow{rot}\left(\frac{-\partial \vec{A}}{\partial t}\right)$$

$\overrightarrow{rot}\left(-\overrightarrow{grad}\,V\right) = \vec{0}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{rot}\,\vec{E} = \frac{-\partial}{\partial t}\overrightarrow{rot}\,\vec{A} \quad \text{d'où}$$

équation locale

$$\boxed{\overrightarrow{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

source de $\vec{E}$: "la variation temporelle de $\vec{B}$ induit un champ électrique"

loi de Lenz

Équation de Maxwell faraday en régime variable

équation intégrale

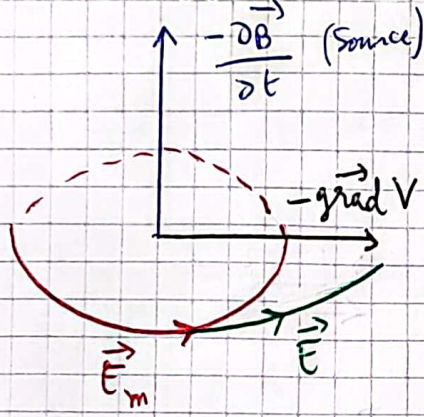
$$\boxed{e = \frac{-d\phi}{dt}}$$

Loi de Faraday.

⚠ les lignes de champ de $\vec{E}$ ne sont pas forcément des courbes fermées:

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{E} = \frac{-\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{0} \quad ; \quad \vec{E} = \vec{E}_m + \left(-\overrightarrow{grad}\,V\right)$$

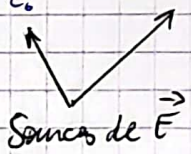
↑ L.C courbes fermées



source de $\vec{E}$

En régime statique : $\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$; $\overrightarrow{rot}\,\vec{E} = \vec{0}$

En régime variable : $\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$; $\overrightarrow{rot}\,\vec{E} = \frac{-\partial \vec{B}}{\partial t}$



Rq: $\overrightarrow{rot}\,\vec{E} = \frac{-\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \overrightarrow{rot}\,\vec{E} \neq \vec{0} \Rightarrow \oint \vec{E}\cdot d\vec{\ell} \neq \vec{0}$

$\vec{E}$ à circulation non conservative.

en effet; $\oint \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = \oint \left(-\overrightarrow{grad}\,V + \vec{E}_m\right)\cdot d\vec{\ell}$

$= \oint -\overrightarrow{grad}\,V \cdot d\vec{\ell} + \oint \vec{E}_m \cdot d\vec{\ell}$

$\overrightarrow{grad}\,f \cdot d\vec{\ell} = df$

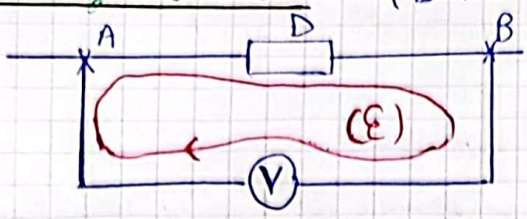
$= -\oint dV + \oint \vec{E}_m \cdot d\vec{\ell}$

$\oint dV = 0$

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = e \neq 0$$

Scanné avec CamScanner

3) Loi d'Ohm généralisée : (Démo pas nécessaire)



$$\oint \vec{E}.d\vec{\ell} = \int_{ADB} \vec{E}.d\vec{\ell} + \int_{BVA} \vec{E}.d\vec{\ell}$$

or $\hookrightarrow \oint \vec{E}.d\vec{\ell} = \oint \left(-\overrightarrow{grad}\, V + \vec{E_m}\right).d\vec{\ell} = 0 + \oint \vec{E_m}.d\vec{\ell} = e$

$\hookrightarrow u_{AB} = V_A - V_B = \int_B^A dV = -\int_{BVA} \vec{E}.d\vec{\ell}$ d'où $\int_{BVA} \vec{E}.d\vec{\ell} = -u_{AB}$

d'où $e = \int_{ADB} \vec{E}.d\vec{\ell} - u_{AB}$

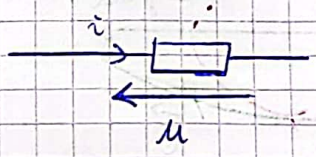
$$\Rightarrow \boxed{u_{AB} = \int_{ADB} \vec{E}.d\vec{\ell} - e}$$

Loi d'OHM généralisée

En absence du phénomène d'induction : $e = 0$

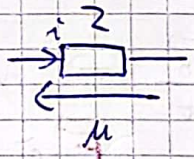
$$u_{AB} = \int_{ADB} \vec{E}.d\vec{\ell}$$

Si D est un résistor : $u_{AB} = Ri$



↓ en général

$$\underline{u_{AB}} = \underline{Z} \times \underline{i}$$



En présence du phénomène d'induction :

$$\boxed{\underline{u_{AB}} = \underline{Z}.\underline{i} - \underline{e}}$$

Loi d'OHM généralisée

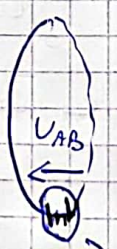
(il faut avoir un régime sinusoïdal pour utiliser cette notation complexe).

4) App Aimant mobile et spire fixe.

$e = -\frac{d\phi}{dt}$

≡

$u_{AB} = 0$ (circuit fermé)



le voltmètre l'a localisée

$\Rightarrow i = 0 \Rightarrow u_{AB} = -e$

$e = Ri$ (Propriété déjà généralisée) Voltmètre : $i = 0$

Suite de l'exercice (courant induit par un aimant mobile):

3) $i = ?$

la spire est un circuit fermé $\Rightarrow U_{AB} = 0$

$$i = \frac{e}{R} = \frac{-1}{R}\frac{d\phi}{dt} \quad \text{avec} \quad \phi = \frac{\mu_0 m a^2}{2r^3} = \frac{\mu_0 m a^2}{2(a^2+z^2)^{3/2}}$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\mu_0 m a^2}{2}\frac{d}{dt}(a^2+z^2)^{-3/2}$$

$$= \frac{\mu_0 m a^2}{2}\left(\frac{-3}{\cancel{2}}\right)(a^2+z^2)^{-5/2} \times \cancel{2}\, z \underbrace{\dot{z}}_{v}$$

$$i = \frac{-1}{R}\,\frac{-3\mu_0 m a^2}{2}\,\frac{zv}{(a^2+z^2)^{5/2}} = \frac{3\mu_0 m a^2}{2R}\,\frac{zv}{(a^2+z^2)^{5/2}}$$

Si $v \nearrow$, $|i| \nearrow$

pour déterminer z il suffit de dériver i à z et trouver le max de cette fonction.

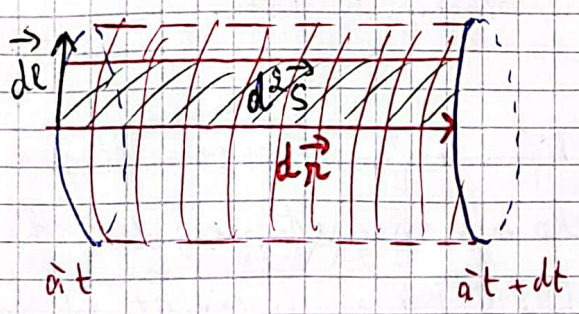
IV) Induction de Lorentz:

1) Champ électromoteur:

par définition : $e = \oint \vec{E}_m \cdot \vec{dl}$ (1)

$$\oplus \quad e = \frac{-d\phi}{dt} \quad \text{or} \quad d\phi = \delta\phi_c = \oint \vec{B}\cdot d^2\vec{S} = \oint \vec{B}\cdot(d\vec{r}\wedge d\vec{l})$$

$$= \oint d\vec{l}\cdot(\vec{B}\wedge d\vec{r})$$



$$\text{donc} \quad \frac{d\phi}{dt} = \oint d\vec{l}\cdot\left(\vec{B}\wedge\frac{d\vec{r}}{dt}\right)$$

$$= \oint(\vec{B}\wedge\vec{v})\cdot d\vec{l}$$

$$\Rightarrow e = -\oint(\vec{B}\wedge\vec{v})\cdot d\vec{l}$$

$$e = \oint(\vec{v}\wedge\vec{B})\cdot d\vec{l} \quad (2)$$

d'après (1) et (2) : $\boxed{\vec{E}_m = \vec{v}\wedge\vec{B}}$

2) Conversion électromécanique:

la puissance de la force de Laplace (puissance mécanique) est :

$$P_{lap} = \oint \delta\vec{F}_L\cdot\vec{v} = \oint(i\,d\vec{l}\wedge\vec{B})\cdot\vec{v} = i\oint(d\vec{l}\wedge\vec{B})\cdot\vec{v}$$

$$P_{lap} = i\oint(\vec{B}\wedge\vec{v})\cdot d\vec{l}$$

Scanné avec CamScanner

$$P_{elm} = -i \oint (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{\ell}$$

$$= -i \oint \vec{E_m} \cdot d\vec{\ell}$$

$$= -i e$$

$$= -e\, i$$

or $P_{ele} = e \times i$ d'où $\boxed{P_{elm} = -P_{ele}}$ (même sens)

donc $\boxed{P_L + P_e = 0}$ Conversion électromécanique parfaite

↳ Si $P_L < 0 \Rightarrow P_e > 0 \Rightarrow$ générateur électrique

Mec → Electrique

Alternateur / dynamo / microphone / éolienne

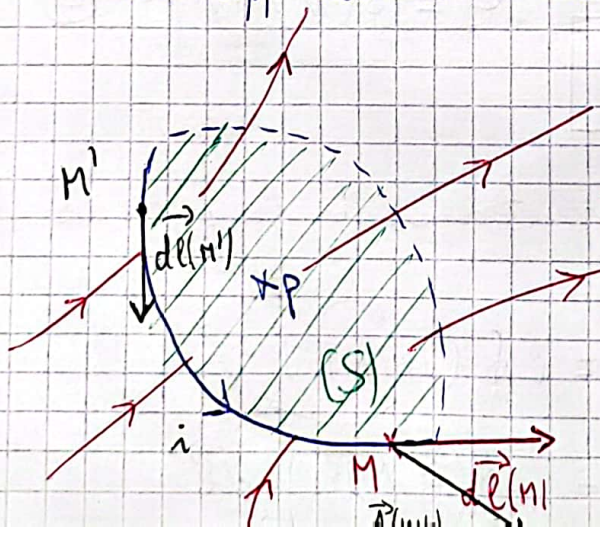
↳ Si $P_e < 0 \Rightarrow P_L > 0 \Rightarrow$ moteur électrique

électrique → Mec

Moteurs synchrones / asynchrones / sèchoir / machine à laver.

V) Phénomène d'auto-induction:

1) définition: Soit $(\mathcal{C})$ un circuit filiforme fermé parcouru par un courant i. Ce circuit engendre un champ magnétique, dit champ magnétique propre. Le flux de ce champ à travers le circuit est appelé le flux propre. Si le flux propre varie au cours du temps, un phénomène d'induction apparait dans le circuit. C'est le phénomène d'auto-induction.



$\vec{B_p}$ C'est le champ magnétique propre.

$$\Phi_p = \iint_{P \in (S)} \vec{B_p}(P;t) \cdot \vec{dS}(P)$$

$$\Phi_p = \iint_{P \in (S)} \vec{rot}\, \vec{A_p}(P;t) \cdot \vec{dS}(P)$$

Scanné avec CamScanner

$\Phi_p = \oint_{M\in(\mathcal{E})} \vec{A}(M;t)\cdot d\vec{\ell}(M)$ [Rappel : $\vec{A}(M;t) = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\oint_{P\in(C)} \frac{d\vec{\ell}(P)}{PM}$ $+_{P\in(S)}$]

↑ (Th de Stokes)

dans notre cas $\vec{A}(M;t) = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\oint_{M'\in(\mathcal{E})} \frac{d\vec{\ell}(M')}{M'M}$

$\Phi_p = \oint_{M\in(\mathcal{E})}\left(\frac{\mu_0 i}{4\pi}\oint_{M'\in(\mathcal{E})}\frac{d\vec{\ell}(M')}{M'M}\right)d\vec{\ell}(M)$

$\Phi_p = \left[\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{M\in(\mathcal{E})}\oint_{M'\in(\mathcal{E})}\frac{d\vec{\ell}(M)\cdot d\vec{\ell}(M')}{MM'}\right]\times i$

On définit l'inductance propre L par $\Phi_p = L\times i$

(on la définit pour séparer les causes (*) du phénomène d'auto induction).

par identification : $L = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{M\in(\mathcal{E})}\oint_{M'\in(\mathcal{E})}\frac{d\vec{\ell}(M)\cdot d\vec{\ell}(M')}{MM'}$ (H : Henry)

(*) 2 causes sont : ↱ variation de i

↳ variation de L à cause de la variation de la géométrie du circuit. (L ne dépend que de la géométrie et μ_0 (+))

donc si i ou L varie Φ_p varie et donc le phénomène d'autoinduction apparaît

($L>0$ car $d\vec{\ell}(M)$ et $d\vec{\ell}(M')$ sont dans le même sens de i).

Rq : Si on se trouve dans un autre milieu : (X 2001)

$L = \frac{\mu_0\mu_r}{4\pi}\oint_{M\in(\mathcal{E})}\oint_{M'\in(\mathcal{E})}\frac{d\vec{\ell}(M)\cdot d\vec{\ell}(M')}{MM'}$

Ne jamais utiliser cette formule pour calculer L

μ_r est la perméabilité relative du milieu. (*)

on définit : la force électromotrice auto-induite par :

$e_p = -\frac{d\Phi_p}{dt}$

Si le circuit est indéformable $L = cte \Rightarrow e_p = -L\frac{di}{dt}$

(*) on utilise plutôt : $L = \frac{\Phi_p}{i}$

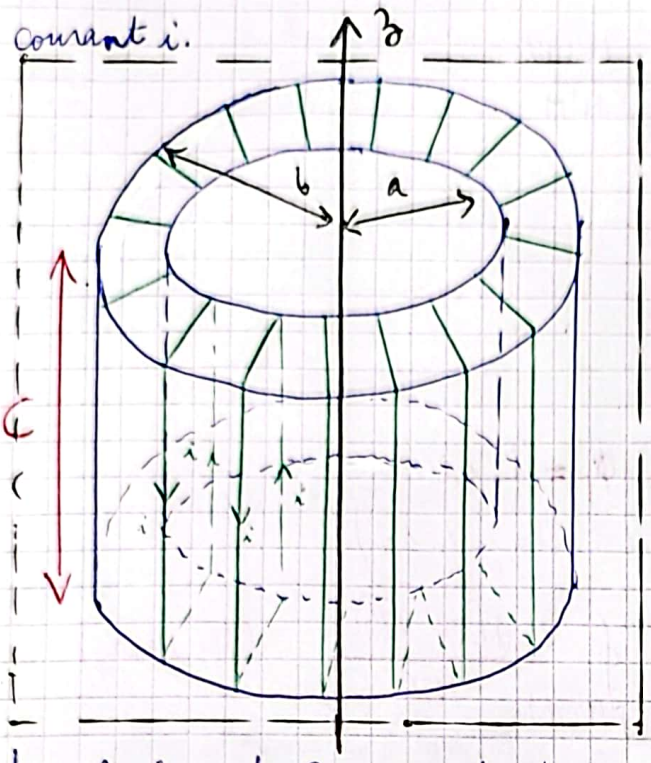
$L = ? \Leftarrow \Phi_p = ? \Leftarrow \vec{B} = ?$

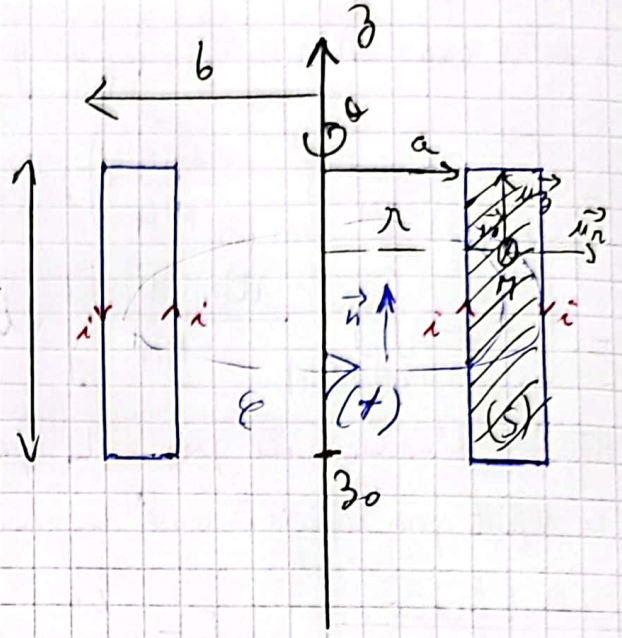
↖ th d'ampère ↱ intégral ↳ local. programme F.R.

Scanné avec CamScanner

Ex: Calcul de L d'un tore.

On considère un tore de rayon intérieur a, de rayon extérieur b, de hauteur c, de section rectangulaire et de N spires jointives parcourues par un courant i.





↳ Analyse de Symetrie et d'invariance

le plan $(M;\vec{u_r},\vec{u_z})$ est un plan de Symetrie de la distribution de courant donc B est porté par $\vec{u_\theta}$.

la distribution du courant est invariante par rotation d'angle θ

donc $\vec{B}(M) = B(r;z)\vec{u_\theta}$.

↳ Choix du contour :

$d\vec{\ell} // \vec{B} \Rightarrow d\vec{\ell} // \vec{u_\theta}$ donc le contour d'Ampère est un cercle de rayon r.

$$\oint \vec{B}(M).d\vec{\ell}(M) = \oint B(r;z)\vec{u_\theta}.dl\vec{u_\theta}$$

$$= B(r;z)r\oint d\theta$$

$$= B(r;z)r\,2\pi$$

- Si M est à l'extérieur du tore ($r > b$ et $r < a$ $I_e = 0$)

donc $B(r;z) = 0$

Si M est à l'intérieur du tore. ($a < r < b$)

donc $B(r;z) = \dfrac{\mu_0 N i}{2\pi r}$

Scanné avec CamScanner

↳ Calcul du flux propre :

flux propre de chque spire (c'est le flux de la spire et des N−1 spires sur elles. du pt de vue du tore le flux lui est propre mais pour la spire non.

$\Phi_p = N \cdot \varphi_p$ ← flux à travers une spire

$\varphi_p = \iint_{(S)} \vec{B} \cdot \vec{dS}$ pourquoi $\vec{B}$ et pas $\vec{B_p}$? c'est le champ appliqué par une seule spire c'est l'induction mutuelle.

(S) ↑ surface s'appuyant sur la spire

on a $\vec{B} = B\vec{u_\theta} \Rightarrow \vec{dS} = dS\vec{u_\theta}$ $(\vec{u_\theta} \perp \vec{dS})$

$$\varphi_p = \iint B(r;z)\vec{u_\theta} \cdot dS\vec{u_\theta} = \iint \frac{\mu_0 N i}{2\pi r} dr\,dz = \frac{\mu_0 N i}{2\pi} \int_a^b \frac{dr}{r} \cdot \int_{z_0}^{z_0+c} dz$$

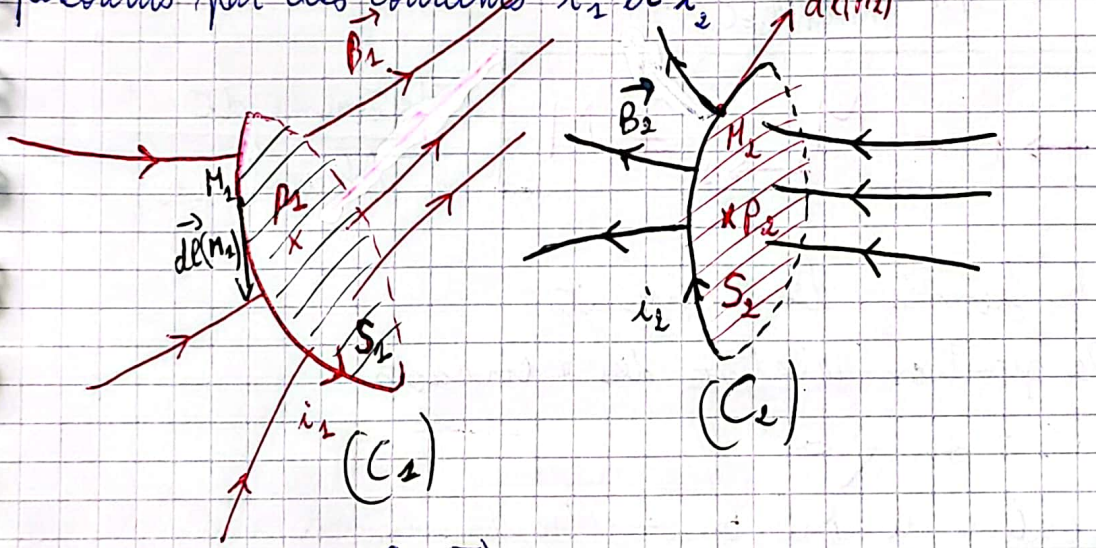
$$\varphi_p = \frac{\mu_0 N i}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \times c$$

$$\Phi_p = \frac{\mu_0 N^2}{2\pi} c \ln\left(\frac{b}{a}\right) \cdot i$$

donc $$L = \frac{\mu_0 N^2 c}{2\pi} \ln(b/a)$$

- L ne dépend que de la géométrie
- $L > 0$.

VI] phénomène d'induction mutuelle : on considère deux circuits (C_1) et (C_2) parcourus par des courants i_1 et i_2



On note $\Phi_{1\to 2} = \iint_{P_2 \in (S_2)} \vec{B_1}(P_2;t) \cdot \vec{dS_2} = \oint_{M_2 \in (C_2)} \vec{A_1}(M_2;t) \cdot \vec{dl}(M_2)$

Flux mutuel de $\vec{B_1}$ à travers S_2

Scanné avec CamScanner

or $\Phi_{2\to1} = \iint_{P_1 \in S_1} \vec{B}_2(P_1;t)\cdot d\vec{S}_1 = \oint_{M_1 \in (C_1)} \vec{A}_2(M_1;t)\, d\vec{\ell}(M_1)$

or $\begin{cases} \Phi_{1\to2} \sim i_1 \\ \Phi_{2\to1} \sim i_2 \end{cases}$ $\Rightarrow$ on définit les inductances mutuelles par :

$$\begin{cases} \Phi_{1\to2} = M_{1\to2} \times i_1 \\ \Phi_{2\to1} = M_{2\to1} \times i_2 \end{cases}$$

b) Expressions formelles de $M_{1\to2}$ et $M_{2\to1}$:

$M_{1\to2} = \dfrac{\Phi_{1\to2}}{i_1}$ avec $\Phi_{1\to2} = \oint_{M_2 \in (C_2)} \vec{A}_1(M_2;t)\, d\vec{\ell}(M_2)$

or $\vec{A}_1(M_2;t) = \dfrac{\mu_0 i_1}{4\pi} \oint_{M_1 \in (C_1)} \dfrac{d\vec{\ell}(M_1)}{M_1M_2}$

$$\Rightarrow \Phi_{1\to2} = \oint_{M_2 \in (C_2)} \left(\frac{\mu_0 i_1}{4\pi} \oint_{M_1 \in (C_1)} \frac{d\vec{\ell}(M_1)}{M_1M_2} \right) d\vec{\ell}(M_2)$$

d'où $M_{1\to2} = \dfrac{\mu_0}{4\pi} \oint_{M_2 \in C_1} \oint_{M_1 \in C_2} \dfrac{d\vec{\ell}(M_2)\cdot d\vec{\ell}(M_1)}{M_1M_2}$ $\Longrightarrow$

de même $M_{2\to1} = \dfrac{\mu_0}{4\pi} \oint_{M_1 \in C_1} \oint_{M_2 \in C_2} \dfrac{d\vec{\ell}(M_1)\cdot d\vec{\ell}(M_2)}{M_1M_2}$

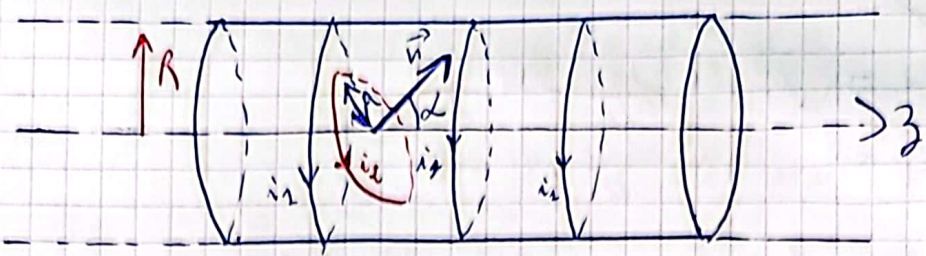
$$\boxed{M_{1\to2} = M_{2\to1} = M}$$

Théorème de Neumann.

- M dépend de la géométrie des 2 circuits
- M dépend de la position relative des 2 circuits
- M peut être >0 ou <0.

c) Exemples de calculs de M : On considère un solénoïde infini par le courant i_1 et une spire circulaire parcourue par un courant i_2 à l'intérieur du solénoïde infini. Calculer $M_{2\to1}$.

Scanné avec CamScanner



$$M_{2\to 1} = M_{1\to 2} = \frac{\phi_{1\to 1}}{i_1} \quad \text{or} \quad \phi_{1\to 1} = \iint \vec{B_1}\cdot d\vec{S_1} = \iint \mu_0 n i_1 dS_1 \cos\alpha$$

$$\phi_{1\to 1} = \mu_0 n i_1 \pi a^2 \cos\alpha$$

$$\text{donc} \quad M = \mu_0 n \pi a^2 \cos\alpha.$$

VII) Energie électromagnétique:

On considère 2 circuits C_1 et C_2.

le flux à travers C_1 est $\iint \vec{B}\cdot d\vec{S_1} = \iint (\vec{B_1} + \vec{B_2})\cdot d\vec{S_1}$

$$= \iint \vec{B_1}\cdot d\vec{S_1} + \iint \vec{B_2}\cdot d\vec{S_1}$$

$$= \phi_{1\to 1} + \phi_{2\to 1}$$

le flux à travers C_2 est $\iint \vec{B}\cdot d\vec{S_2} = \iint (\vec{B_1} + \vec{B_2})\cdot d\vec{S_2}$

$$= \iint \vec{B_1}\cdot d\vec{S_2} + \iint \vec{B_2}\cdot d\vec{S_2}$$

$$= \phi_{1\to 2} + \phi_{2\to 2}$$

$$\text{donc} \begin{cases} \phi_1 = L_1 \times i_1 + M \times i_2 \\ \phi_2 = M \times i_1 + L_2 \times i_2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$$

représentation matricielle utile dans le cas de plusieurs circuits mais hors programme (2 circuits max)

$$\text{donc} \begin{cases} e_1 = -\frac{d\phi_1}{dt} = -L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} \\ e_2 = -\frac{d\phi_2}{dt} = -L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt} \end{cases}$$

← Valables si C_1 et C_2 sont indéformables et fixes l'un par rapport à l'autre

objectif: $E_m = ? \leftarrow P_m = ? \leftarrow u = ? \leftarrow \phi = ?$

Scanné avec CamScanner

d'après la loi d'ORM généralisée :

$$\begin{cases} u_1 = R_1 i_1 - e_1 = R_1 i_1 + L_1 \dfrac{di_1}{dt} + M \dfrac{di_2}{dt} \\ u_2 = R_2 i_2 - e_2 = R_2 i_2 + L_2 \dfrac{di_2}{dt} + M \dfrac{di_1}{dt} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P_1 = u_1 \times i_1 = R_1 i_1^2 + L_1 i_1 \dfrac{di_1}{dt} + M i_1 \dfrac{di_2}{dt} \\ P_2 = u_2 \times i_1 = R_2 i_2^2 + L_2 i_2 \dfrac{di_2}{dt} + M i_2 \dfrac{di_2}{dt} \end{cases}$$

$$\Rightarrow P = P_1 + P_2 = \underbrace{R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2}_{P_J \text{ puissance (thermique) dissipée par effet Joule}} + \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2\right)}_{\text{puissance magnétique}}$$

$= -P_{\text{électrique}}$ reçue

or $P_m = \dfrac{dE_m}{dt}$

(grandeur extensive mais non additive)

d'où $E_m = \underbrace{\frac{1}{2} L_1 i_1^2}_{\text{énergie magnétique propre à } C_1} + \underbrace{\frac{1}{2} L_2 i_2^2}_{\text{énergie magnétique propre à } C_2} + \underbrace{M i_1 i_2}_{\text{énergie magnétique due au couplage.}}$

(les lignes de champs de C_1 (une partie ou tout) aboutissent à C_2).

Autre expression : $E_m = \frac{1}{2}\left[(L_1 i_1 + M i_2) i_1 + (L_2 i_2 + M i_1) i_2\right]$

$$= \frac{1}{2}\left(\phi_1 \times i_1 + \phi_2 \times i_2\right)$$

Dans le cas de N circuits : $\boxed{E_m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} \phi_k \times i_k} \Leftrightarrow \boxed{E_e = \frac{1}{2} \sum_k Q_k V_k}$

Question : Sachant que $E_m \geq 0$ (voir cours en E.M).

Mq $\underbrace{M^2}_{\text{ce qui est mutuel}} \leq \underbrace{L_1 . L_2}_{\text{ce qui est propre}}$

Réponse : $E_m = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2$

$\frac{2}{i_1^2}$

$$\frac{2E_m}{i_1^2} = L_1 + L_2 \left(\frac{i_2}{i_1}\right)^2 + 2M \frac{i_2}{i_1}$$

on pose $x = \dfrac{i_2}{i_1}$; $L_2 x^2 + 2M x + L_1 = \dfrac{2E_m}{i_1^2} \geq 0$

$$\Rightarrow \Delta' = M^2 - L_1 L_2 \leq 0$$

Scanné avec CamScanner

$\Rightarrow M^2 \leqslant L_1 L_2 \Rightarrow |M| \leqslant \sqrt{L_1 L_2}$

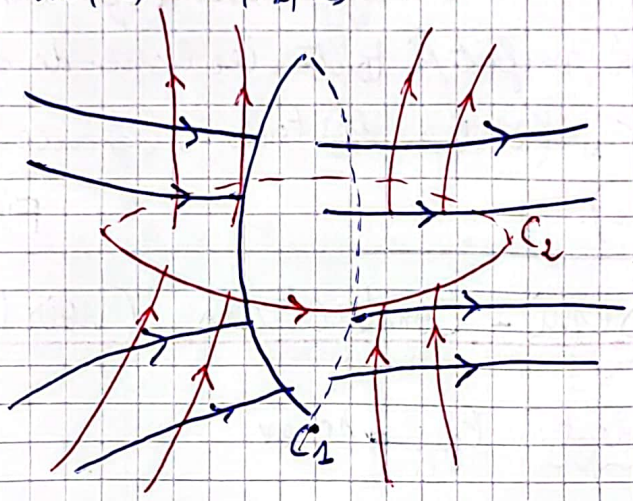
On définit le coefficient de couplage par : $0 \leqslant K = \dfrac{|M|}{\sqrt{L_1 L_2}} \leqslant 1$

↳ Si $K = 0 \Rightarrow M = 0$ pas de couplage magnétique

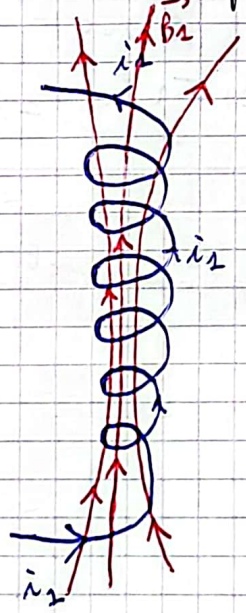
Exp : $M = \dfrac{\mu_0}{4\pi} \oint\oint \dfrac{d\vec{\ell}(M_1) \cdot d\vec{\ell}(M_2)}{M_1 M_2}$

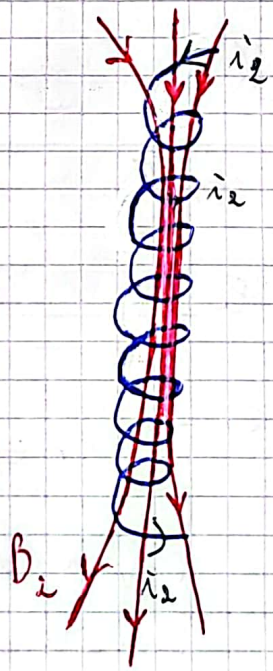
⊕ C_1 et C_2 à l'∞ : $M_1 M_2 \to +\infty \Rightarrow M = 0$

⊕ $C_1 \perp C_2$: $d\vec{\ell}(M_1) \perp d\vec{\ell}(M_2) \Rightarrow M = 0$



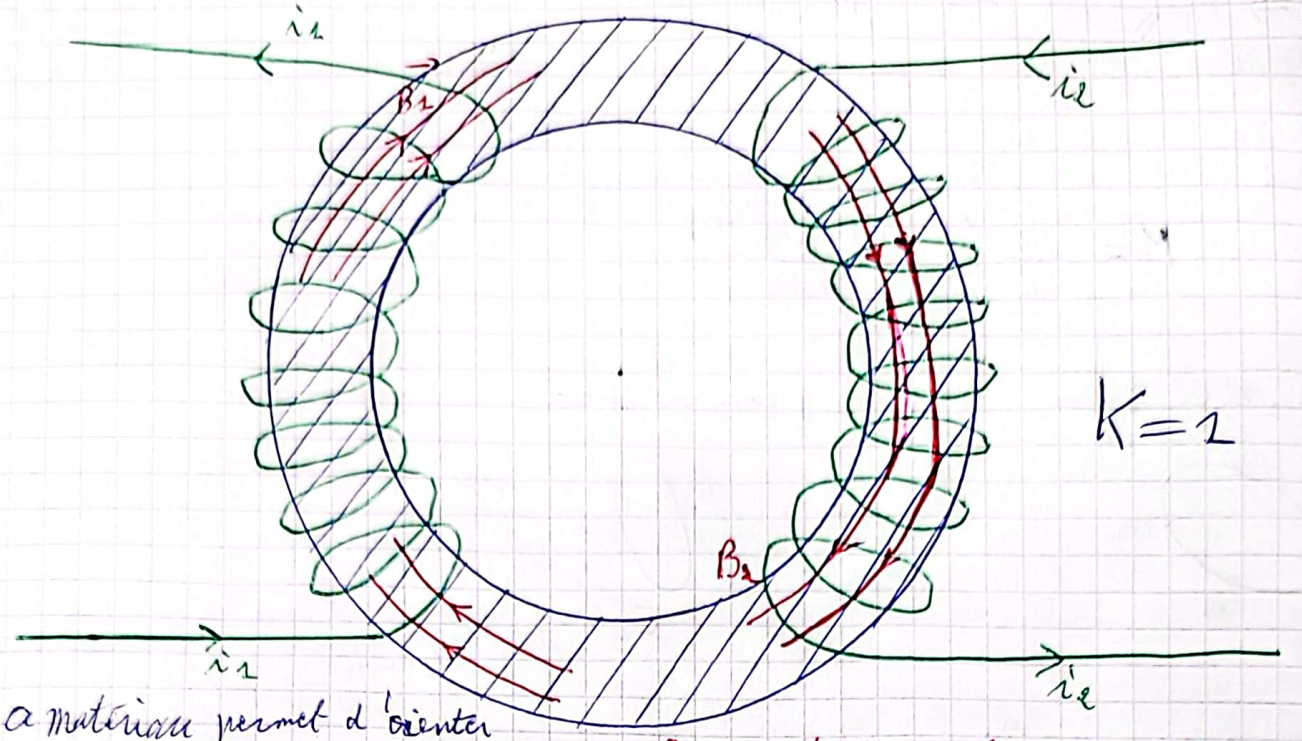
↳ Si $K = 1 \Rightarrow M = \sqrt{L_1 L_2}$ c'est un couplage parfait





$0 \leqslant K \leqslant 1$

Scanné avec CamScanner



$K = 1$

a matériau permet d'orienter les lignes de champ de C_1 vers C_2.

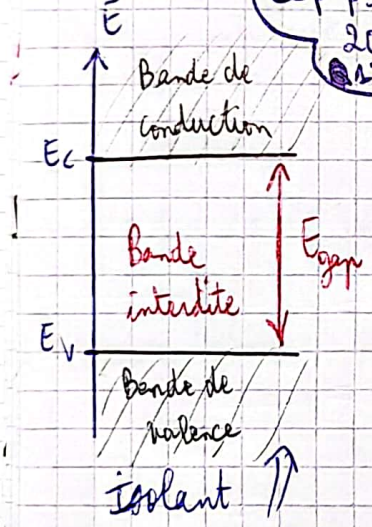
↑ matériaux ferromagnétique

On dit qu'un couplage est parfait si toutes les lignes de champ partant de C_1 aboutissent à C_2 (et bien sûr toutes les lignes de champ partant de C_2 aboutissent à C_1).

FIN

CCP PSI 2009 (17 min)

Semi-Conducteurs (voir DOC):

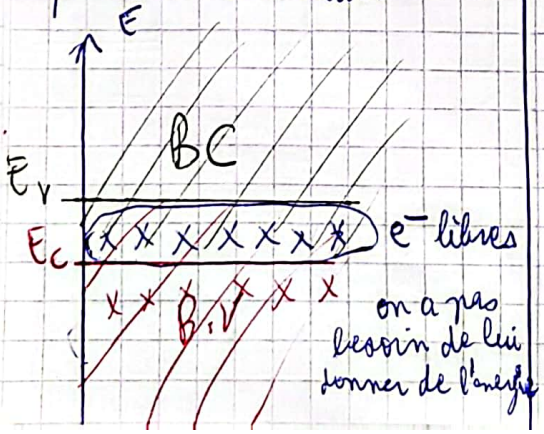


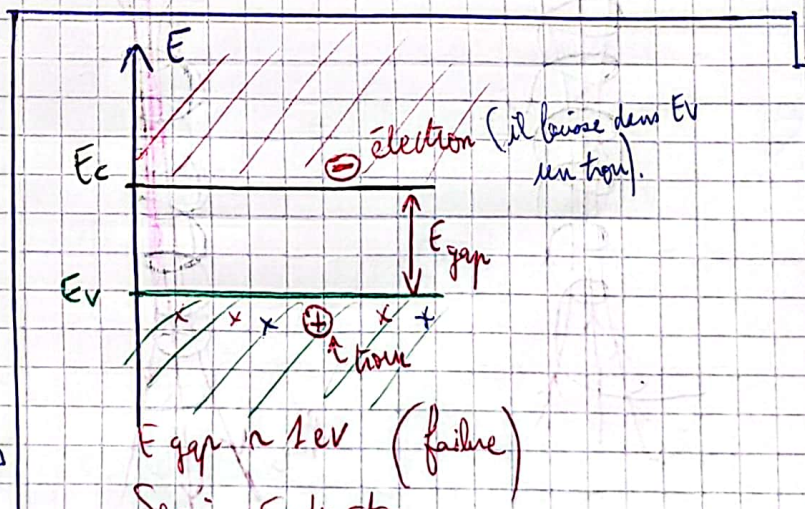
Isolant: $E_{gap} \sim 10$ eV

$K_B T = 1{,}38 \times 10^{-23} \times 300$ J $= \dfrac{1{,}38 \times 3 \times 10^{-21}}{1{,}6 \times 10^{-19}} = 3 \cdot 10^{-2}$ eV

$K_B T \ll E_{gap}$ pour que $K_B T \sim E_{gap} \Rightarrow T = 10^3$ K !!

pour un conducteur:





$E_{gap} \sim 1$ eV (faible)

Semi-Conducteur

Scanné avec CamScanner

$n = \frac{N}{V} = P = n_{(i)} = A T^{3/2} \exp\left(\frac{-E_g}{K_B T}\right)$ ← charge de gap

intrinsèque ↗ ↑ Constante propre du matériaux.

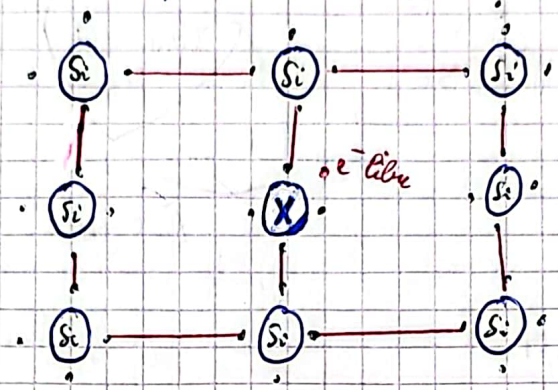
Si $T \nearrow \Rightarrow \begin{cases} T^{3/2} \nearrow \\ \frac{1}{T} \searrow \Rightarrow \frac{-E_g}{K_B T} \nearrow \end{cases} \Rightarrow n_i \nearrow \Rightarrow \gamma \nearrow$ ccl : si $T \nearrow \Rightarrow \gamma_{s.c} \nearrow$

Mais quand même l'influence de la température reste non remarquable.

Solution: Dopage: $\begin{cases} n \\ P \end{cases}$ Semi conducteur extrinsèque.

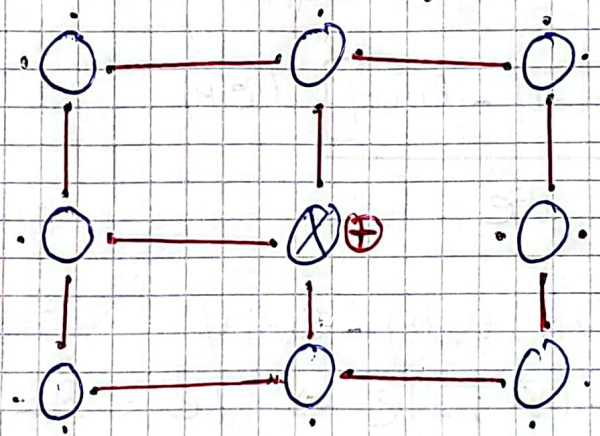
⚠ $n \neq P$ dans le cas de dopage n ; $n > P$.
dans le cas de dopage P ; $n < P$

Dopage n: ~~Si~~ → Atome pentavalent ·X·



déficit en charges positives

Dopage P: Si → Atome tétravalent ·X·



déficit en charges négatives

le dopage se fait par insersion de dopants "impuretés" en faible quantité dans le réseau cristallin du matériau par substitution.

Scanné avec CamScanner

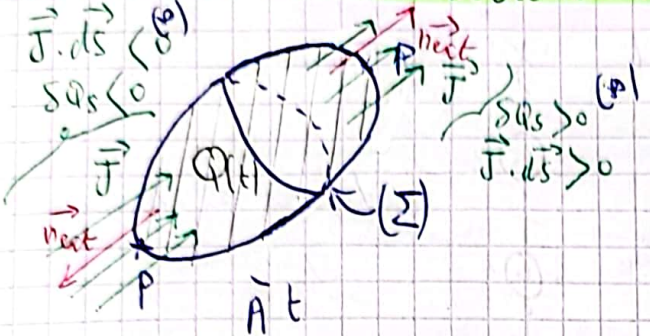
Les équations de Maxwell en régime variable

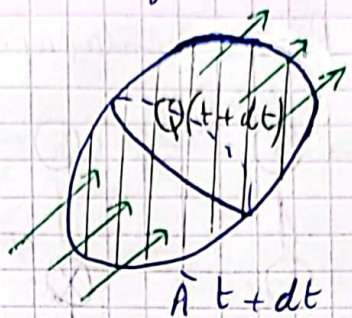
I) Equation locale de conservation de la charge : (Equation de continuité)

Montrer que $\boxed{\underbrace{\operatorname{div}\vec{J}(M;t)}_{\text{cause}} + \underbrace{\frac{\partial \rho(M;t)}{\partial t}}_{\text{effet}} = 0}$ ← pas de création de charges

→ $+0$ (à voir son interprétation plus tard)

Bilan de charge : On considère un volume V fixe et indéformable.





$\frac{\partial \rho}{\partial t} \not= -J$

$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div}\vec{J}$

la cause c'est la divergence de déplacement des charges pas le déplacement des charges

↳ $dQ = Q(t+dt) - Q(t)$

$= \iiint_{M\in(V)} \rho(M;t+dt)\, d\tau(M) - \iiint_{M\in(V)} \rho(M;t)\, d\tau(M)$

(indéformable ; volume fixe)

$= \iiint_{M\in(V)} \underbrace{\left[\rho(M;t+dt) - \rho(M;t)\right]}_{d\rho}\, d\tau(M)$

Rappel : $d\rho = \rho(M+dM;\, t+dt) - \rho(M;t)$

$\Rightarrow \frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\underbrace{\vec{v}}_{\vec{0}} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}})\rho \Rightarrow d\rho = \frac{\partial \rho}{\partial t}.dt$

$dQ = \iiint_{M\in(V)} \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dt\, d\tau(M) \Rightarrow \boxed{\frac{dQ}{dt} = \iiint_{M\in(V)} \frac{\partial \rho}{\partial t}\, d\tau(M)}$ (1)

Rappel :

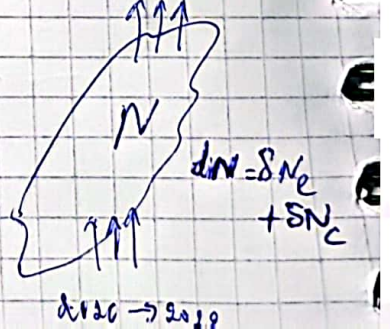
$dU = \delta W + \delta Q$

effet — Travail reçu algébriquement — énergie thermique reçue algébriquement

$dU = +\underbrace{\delta U_e}_{\text{reçue}}$ (effet ; cause)

en général

$dX = \delta X_e + \delta X_c$



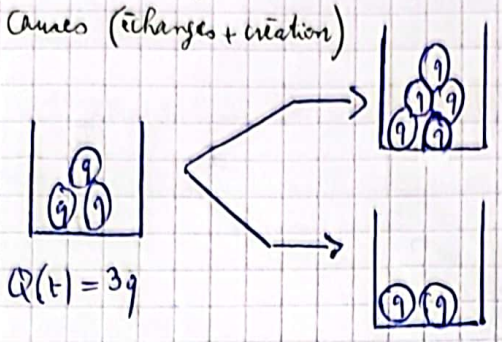
Scanné avec CamScanner

$dS = \delta S_e + \delta S_c$ avec $\delta S_e = \frac{\delta Q}{T_e}$

reçus

causes (échanges + création)

$dQ = +\delta Q_{entrant}$ (reçue) $= -\delta Q_{sortant}$ (fournit)



$dQ = \delta Q_e = -\delta Q_s$

↳ $dQ = +\delta Q_e + 0 = -\delta Q_s \Rightarrow \boxed{\frac{dQ}{dt} = \frac{-\delta Q_s}{dt}}$ (2)

effet ; cause ; pas de création de charges

$\frac{\delta Q_s}{dt} = I = \iint_{P \in (\Sigma)} \vec{j}(P;t) \cdot d\vec{S}(P)$ avec $d\vec{S} = dS \vec{n}_{ext}$

car $\vec{n}_{ext} \Rightarrow Q_s$. (*) voir schéma.

D'après le théorème d'Ostrogradski

$$\boxed{\frac{\delta Q_s}{dt} = I = \iiint_{M \in (V)} \operatorname{div} \vec{j}(M;t)\, d\tau(M)} \quad (3)$$

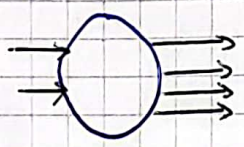
D'après (1) ; (2) et (3)

$\iiint \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau = -\iiint \operatorname{div} \vec{j} \cdot d\tau$

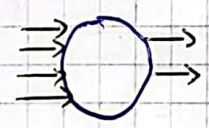
$\operatorname{div} \vec{j}(M;t) + \frac{\partial \rho(M;t)}{\partial t} = 0 + 0$

cause ; effet ; pas de création de charges ; ↳ voir plus tard.

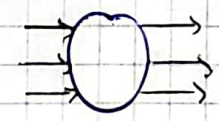
Interprétation :



$\phi_e < \phi_s \Rightarrow \operatorname{div} \vec{j} > 0 \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} < 0 \Rightarrow \rho \searrow$



$\phi_e > \phi_s \Rightarrow \operatorname{div} \vec{j} < 0 \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} > 0 \Rightarrow \rho \nearrow$



$\phi_e = \phi_s \Rightarrow \operatorname{div} \vec{j} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \rho = cte$

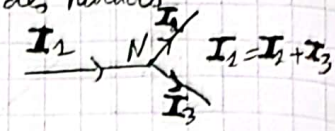
Scanné avec CamScanner

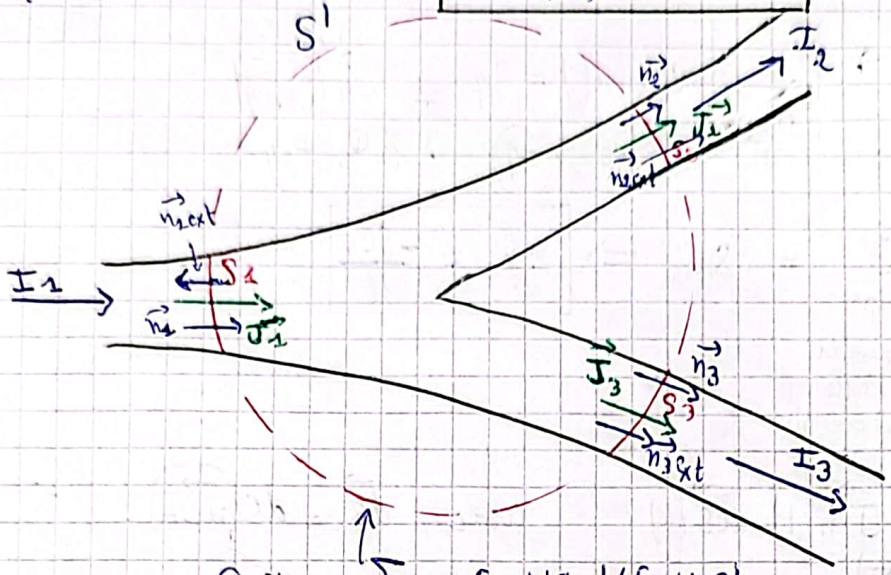
En régime stationnaire : $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

$\Rightarrow \boxed{\operatorname{div} \vec{J}(M) = 0}$ $\vec{J}$ est à flux conservatif ; en effet.

$\Downarrow$

$\iiint_{M \in (V)} \operatorname{div} \vec{J}(M) \cdot d\tau(M) = 0 \Rightarrow \boxed{\oiint_{P \in (\Sigma)} \vec{J}(P) \cdot d\vec{S}(P) = 0}$ $\Rightarrow$ loi des Nœuds





Soit $\Sigma = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S'$

$$\oiint_{P \in (\Sigma)} \vec{J}(P) \cdot d\vec{S}(P) = 0 = \iint_{P_1 \in S_1} \vec{J}(P_1) \cdot d\vec{S}(P_1) + \iint_{P_2 \in S_2} \vec{J}(P_2) \cdot d\vec{S}(P_2) + \iint_{P' \in S'} \vec{J}(P') \cdot d\vec{S}(P') + \iint_{P_3 \in S_3} \vec{J}(P_3) \cdot d\vec{S}(P_3)$$

régime stationnaire ; $\vec{J} \perp d\vec{S}$ sur S'

$$\Rightarrow \iint \vec{J}(P_1) \cdot dS_1 \cdot \vec{n}_{1ext} + \iint \vec{J}(P_2) \cdot dS_2 \cdot \vec{n}_{2ext} + \iint \vec{J}(P_3) \cdot dS_3 \cdot \vec{n}_{3ext} = 0$$

ou $\begin{cases} I_1 = \iint \vec{J}(P_1) \cdot dS_1 \cdot \vec{n}_1 \\ I_2 = \iint \vec{J}(P_2) \cdot dS_2 \cdot \vec{n}_2 \\ I_3 = \iint \vec{J}(P_3) \cdot dS_3 \cdot \vec{n}_3 \end{cases}$ avec $\begin{cases} \vec{n}_2 = -\vec{n}_{1ext} \\ \vec{n}_2 = \vec{n}_{2ext} \\ n_3 = \vec{n}_{3ext} \end{cases}$

$$-I_1 + I_2 + I_3 = 0 \Rightarrow I_1 = I_2 + I_3$$

II) Équations de Maxwell :

1) Équations de Maxwell en régime stationnaire :

$\operatorname{div} \vec{E}(M) = \frac{\rho(M)}{\varepsilon_0}$	Maxwell Gauss	Théorème d'Ostrogradski	$\oiint_{P \in (\Sigma)} \vec{E}(P) \cdot d\vec{S}(P) = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$ Th de Gauss
$\operatorname{div} \vec{B}(M) = 0$	Maxwell Flux ou Maxwell Thomson		$\oiint_{P \in (\Sigma)} \vec{B}(P) \cdot d\vec{S}(P) = 0$ $\vec{B}$ est à flux conservatif
$\vec{rot}\, \vec{E}(M) = \vec{0}$	Maxwell Faraday	Théorème de Stokes	$\oint \vec{E}(P) \cdot d\vec{\ell}(P) = 0$ $\vec{E}$ à circulation conservative
$\vec{rot}\, \vec{B}(M) = \mu_0 \vec{J}(M)$	Maxwell Ampère		$\oint \vec{B}(P) \cdot d\vec{\ell}(P) = \mu_0 I_c$ Théorème d'Ampère

Équations locales $\rightarrow$ c'est $\vec{J}_c$ Équations intégrales

Scanné avec CamScanner

- d'après M.G et M.A les sources de $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont respectivement Q et I.
- d'après M.G la charge est la cause de divergence du champ $\vec{E}$.
- d'après M.T le champ $\vec{B}$ ne diverge pas à cause de l'absence de monopôle magnétique.
- d'après M.F $\vec{E}$ est un champ non tourbillonaire, il est dirigé vers les potentiels décroissants
- d'après M.A $\vec{B}$ est un champ tourbillonaire, les lignes de champ de $\vec{B}$ tournent autour de la source

2) Équations de Maxwell en régime variable :

$$\begin{cases} \operatorname{div}\vec{E}(M;t) = \dfrac{\rho(M;t)}{\varepsilon_0} & \text{Maxwell Gauss} \\ \operatorname{div}\vec{B}(M;t) = 0 & \text{Maxwell Flux ou Maxwell Thomson} \\ \vec{\operatorname{rot}}\,\vec{E}(M;t) = -\dfrac{\partial \vec{B}(M;t)}{\partial t} & \text{Maxwell Faraday} \\ \vec{\operatorname{rot}}\,\vec{B}(M;t) = \mu_0\left[\vec{j}_c(M;t) + \varepsilon_0\dfrac{\partial \vec{E}(M;t)}{\partial t}\right] & \text{Maxwell Ampère} \end{cases} \xrightarrow{\text{Théorème d'Ostrogradski}} \begin{cases} \oiint_{P\in(\Sigma)} \vec{E}(P;t)\,d\vec{S}(P) = \dfrac{Q_{int}(t)}{\varepsilon_0} & \text{Th de Gauss} \\ \oiint_{P\in(\Sigma)} \vec{B}(P;t)\,d\vec{S}(P) = 0 & \vec{B} \text{ est à flux conservatif} \\ e = -\dfrac{d\phi}{dt} & \text{loi de Faraday} \\ \oint_{P\in(\mathcal{C})} \vec{B}(P)\cdot d\vec{\ell}(P) = \mu_0\left(I_{e;c}(t) + I_{e;d}(t)\right) & \text{Théorème d'Ampère généralisé} \end{cases}$$

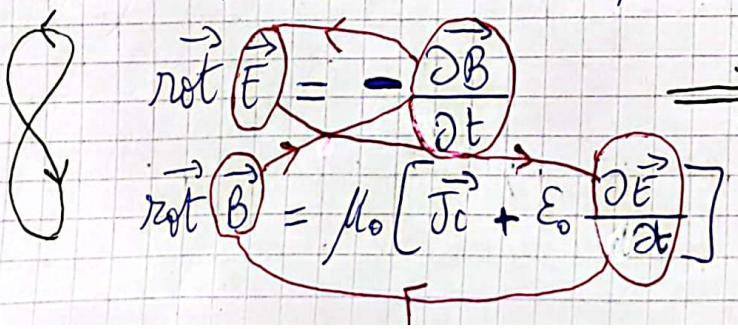
$\xrightarrow{\text{Théorème de Stokes}}$

$\vec{j}_c$: conduction (déplacement des charges dans un conducteur)

$\vec{j}_d(M;t)$: déplacement

Équations locales

- d'après Maxwell Faraday la variation temporelle du champ magnétique induit un champ électrique telles que les lignes de champ de $\vec{E}$ sont des courbes fermées qui tournent autour de $\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$.
- d'après Maxwell Gauss et Maxwell Flux, la charge et la variation temporelle de $\vec{B}$ représentent les sources de $\vec{E}$.
- les courants de conduction et de déplacement sont les sources de $\vec{B}$ (d'après Ampère) telles que les lignes de champ de $\vec{B}$ sont des courbes fermées qui tournent autour du courant total. ($\vec{B}$ est un champ tourbillonaire)
- d'après Maxwell Ampère : une variation temporelle de $\vec{E}$ induit $\vec{B}$

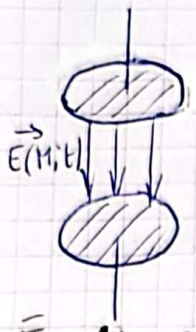


$\Longrightarrow$ Couplage électromagnétique

C'est la cause de l'onde électromagnétique

Scanné avec CamScanner

$\vec{E}_0(t) \xrightarrow{M.A} \vec{B}_2(M;t) \xrightarrow{M.F} \vec{E}_2(M;t) \xrightarrow{MA} \vec{B}_3(M;t) \xrightarrow{M.F} E_4(M;t)$



3) Équation locale de conservation de la charge:

d'après l'équation de Maxwell ampère;

$$\vec{rot}\,\vec{B} = \mu_0\left(\vec{J_c} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) \xrightarrow{div} div(\vec{rot}\,\vec{B}) = \mu_0\left(div\,\vec{J_c} + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} div\,\vec{E}\right)$$

d'après M.G: $0 = \mu_0\left(div\,\vec{J_c} + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho}{\varepsilon_0}\right)\right)$

d'où $\boxed{div\,\vec{J_c} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$ Équation de conservation de la charge

III) Les équations de poisson généralisées:

1) Existence des potentiels:

$\begin{cases} div\,\vec{B} = 0 \\ div(\vec{rot}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\vec{B}(M;t) = \vec{rot}\,\vec{A}(M;t)}$

$\xRightarrow{\text{en R.S}} \vec{B}(M) = \vec{rot}\,\vec{A}(M)$

↳ Existence de $\vec{A}$:

↳ Existence de V:

* $\vec{rot}\,\vec{E} = \frac{-\partial \vec{B}}{\partial t}$ or $\vec{B} = \vec{rot}\,\vec{A} \Rightarrow \vec{rot}\,\vec{E} = \frac{-\partial\, \vec{rot}\,\vec{A}}{\partial t}$

$\Rightarrow \vec{rot}\left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = \vec{0} \xrightarrow{\exists V /} \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{grad}(-V)$

* $\vec{rot}\,(\vec{grad}) = \vec{0}$

$\Rightarrow \boxed{\vec{E}(M;t) = -\vec{grad}\,V(M;t) - \frac{\partial \vec{A}(M;t)}{\partial t}} \xrightarrow{\text{En R.S}} \vec{E}(M) = -\vec{grad}\,V(M)$

2) non unicité de $\vec{A}$ et V:

Rq: Non unique càd que deux potentiels diffèrent d'une variable et pas seulement d'un cte.

↳ non unicité de $\vec{A}$:

$\vec{A}$ n'est pas unique en effet si $\vec{A}$ est un potentiel vecteur de $\vec{B}$: $\vec{rot}\,\vec{A} = \vec{B}$

Alors $\boxed{\vec{A'} = \vec{A} + \vec{grad}\,\varphi}$ est un potentiel vecteur de $\vec{B}$ car:

$\vec{rot}\,A' = \vec{rot}\,\vec{A} + \vec{rot}(\vec{grad}\,\varphi) = \vec{B}$.

Scanné avec CamScanner

↳ Non unicité de V : Soient $(V;\vec{A})$ et $(V';\vec{A'})$ deux couples de potentiels :

$$\begin{cases} \vec{E} = -\vec{grad}\, V - \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{E} = -\vec{grad}\, V' - \dfrac{\partial A'}{\partial t} \end{cases} \Rightarrow \vec{grad}\, V' + \frac{\partial \vec{A'}}{\partial t} = \vec{grad}\, V + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

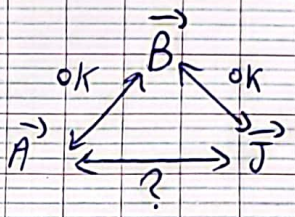
$$\Rightarrow \vec{grad}\, V' + \frac{\partial}{\partial t}\left(\cancel{\vec{A}} + \vec{grad}\, \varphi\right) = \vec{grad}\, V + \cancel{\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}$$

donc $\underbrace{\vec{grad}\, V'}_{\text{dérivées spatiales}} = \vec{grad}\left(V - \dfrac{\partial \varphi}{\partial t}\right)$

intégration sur l'espace $\Rightarrow$ $\boxed{V'(M;t) = V(M;t) - \dfrac{\partial \varphi}{\partial t} + \underbrace{\psi(t)}_{\text{dépend du temps et pas de l'espace}}}$

3) Equations de poisson généralisées :

↳ Équation de poisson de $\vec{A}$:



$$\begin{tikzcd} & \vec{B} \arrow[dl, leftrightarrow, "ok"'] \arrow[dr, leftrightarrow, "ok"] & \\ \vec{A} \arrow[rr, leftrightarrow, "?"'] & & \vec{J} \end{tikzcd}$$

$\vec{B} = \vec{rot}\, \vec{A}$

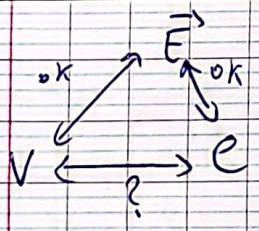
$\vec{rot}\, \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$ $\Rightarrow \vec{rot}(\vec{rot}\, \vec{A}) = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

donc $\vec{grad}\, div\, \vec{A} - \Delta \vec{A} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial}{\partial t}\left(-\vec{grad}\, V - \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)$

or $\boxed{\mu_0 \varepsilon_0 c^2 = 1}$ voir cours O.E.M

donc $\Delta \vec{A} + \mu_0 \vec{J} - \dfrac{1}{c^2} \dfrac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \vec{grad}\left(div\, \vec{A} + \dfrac{1}{c^2} \dfrac{\partial V}{\partial t}\right)$ (1)

↳ Équation de poisson de V :



$$\begin{tikzcd} & \vec{E} \arrow[dl, leftrightarrow, "ok"'] \arrow[dr, leftrightarrow, "ok"] & \\ V \arrow[rr, leftrightarrow, "?"'] & & \rho \end{tikzcd}$$

$div\, \vec{E} = \rho / \varepsilon_0$

$\vec{E} = -\vec{grad}\, V - \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

$\longrightarrow div\left(-\vec{grad}\, V - \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$

$\Rightarrow div(\vec{grad}\, V) + \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} = \dfrac{-\partial}{\partial t}\left(div\, \vec{A}\right)$

$\downarrow -\dfrac{1}{c^2} \dfrac{\partial^2 V}{\partial t^2}$

$\Delta V + \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} - \dfrac{1}{c^2} \dfrac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \dfrac{-\partial}{\partial t}\left(div\, \vec{A} + \dfrac{1}{c^2} \dfrac{\partial V}{\partial t^2}\right)$ (2)

Scanné avec CamScanner

il faut que $\operatorname{div}\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t}$ ne dépende pas du temps (2) ni de l'espace (1)

or $\vec{A}$ et $\vec{V}$ ne sont pas uniques $\Rightarrow$ $\boxed{\operatorname{div}\vec{A}(M;t) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial V(M;t)}{\partial t} = 0}$

Condition de Jauge Lorentz.

En R.S : $\boxed{\operatorname{div}\vec{A}(M) = 0}$ Jauge coulomb

CCl :

$$\Delta\vec{A}(M;t) + \mu_0\vec{j}(M;t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}(M;t)}{\partial t^2} = \vec{0}$$

$$\Delta V(M;t) + \frac{\rho(M;t)}{\varepsilon_0} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V(M;t)}{\partial t^2} = 0$$

Equations de Poisson généralisées

4) Les potentiels retardés :

Rappel : En régime statique :

$$\begin{cases} \Delta V(M) + \frac{\rho(M)}{\varepsilon_0} = 0 \\ \Delta\vec{A}(M) + \mu_0\vec{j}(M) = \vec{0} \end{cases} \xrightarrow{\text{Solutions générales}} \begin{cases} V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{P\in(D)}\frac{\rho(P)\,d\tau(P)}{PM} \\ \vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{P\in(D)}\frac{\vec{j}(P)\,d\tau(P)}{PM} \end{cases}$$

distribution finie

Démonstration Hors programme

généralisation $\rightarrow$

$$\begin{cases} V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{P\in(D)}\frac{\delta Q(P)}{PM} \\ \vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{P\in(D)}\frac{\vec{\delta C}(P)}{PM} \end{cases}$$

En régime variable :

$$\begin{cases} \Delta V(M;t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V(M;t)}{\partial t^2} + \frac{\rho(M;t)}{\varepsilon_0} = 0 \\ \Delta\vec{A}(M;t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}(M;t)}{\partial t^2} + \mu_0\vec{j}(M;t) = \vec{0} \end{cases}$$

Solutions générales $\rightarrow$

$$\begin{cases} V(M;t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{P\in(D)}\frac{\rho\left(P;t-\frac{PM}{c}\right)}{PM}\,d\tau(P) \\ \vec{A}(M;t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{P\in(D)}\frac{\vec{j}\left(P;t-\frac{PM}{c}\right)}{PM}\,d\tau(P) \end{cases}$$

Démo : voir cours OEM

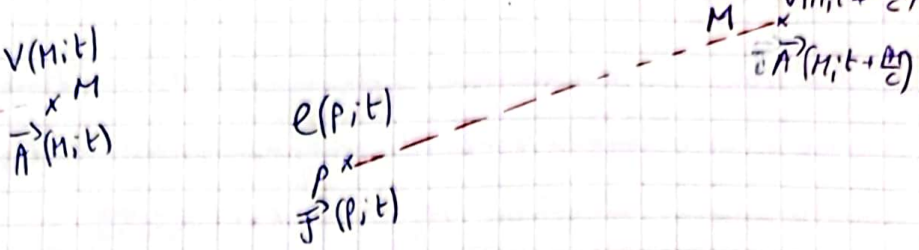
$\rightarrow$ les potentiels retardés.

Scanné avec CamScanner

$\rho\left(P;t-\frac{PM}{c}\right)$

$\vec{j}\left(P;t-\frac{PM}{c}\right)$

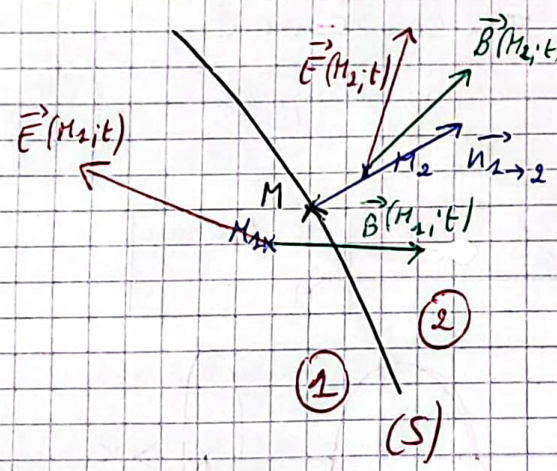
$\Delta t = \frac{PM}{c}$ temps de propagation de l'information.



les potentiels au point M à l'instant t sont sensibles à la charge et au courant existant au point P à l'instant $t-\frac{PM}{c}$.
le temps $\frac{PM}{c}$ correspond au temps nécessaire pour que l'information sur ρ et $\vec{j}$ se propage du point P au point M dans le vide à la vitesse C.

IV) Relations de passage:

Dans le cas d'une modélisation surfacique les équations de Maxwell sont remplacées par les relations de passage:



les relations de passage sont complémentaires aux équations de Maxwell. Les dernières ne sont pas définies pour une distribution surfacique. $\vec{E}$ est discontinue ; elle est une dérivée !

$$\vec{E}(M_2;t) - \vec{E}(M_1;t) = \frac{\sigma(M;t)}{\varepsilon_0}\vec{n}_{1\to 2}$$

$$\vec{B}(M_2;t) - \vec{B}(M_1;t) = \mu_0 \vec{j}_S(M;t) \wedge \vec{n}_{1\to 2}$$

$-\frac{M_2M}{c}$ $-\frac{M_1M}{c}$ M_2M et M_1M sont négligeables

Remarque: les relations sont les mêmes qu'en régime statique.

Les potentiels $\vec{A}$ et V sont continus en tout point M de l'espace.

Scanné avec CamScanner

IV) Approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS) (ou Approximation des régimes quasi-permanents (ARQP))

1) Définition: le régime quasi-permanent ou lentement variable est un régime dans lequel le temps de propagation est négligeable devant le temps caractéristique du phénomène $\mathcal{C}$. $\Delta t \ll \mathcal{C}$.

Si le phénomène est périodique, le temps caractéristique $\mathcal{C}$ est la période du phénomène T. $\Delta t \ll T \Rightarrow \frac{PM}{c} \ll T \Rightarrow PM \ll T \cdot c = \lambda$

P
x
$e(P;T-\Delta t)$
$e(P;T)$

x M
$V(M;T)$
$V(M;T+\Delta t)$

$V(M;T+\Delta t) \simeq V(M;T) + \Delta t \frac{\partial V(M;t)}{\partial t} + \cdots\cdots$

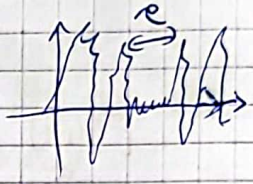
$V(M;T+\Delta t) \simeq V(M;T) + \frac{\Delta t}{T} V(M;t)$

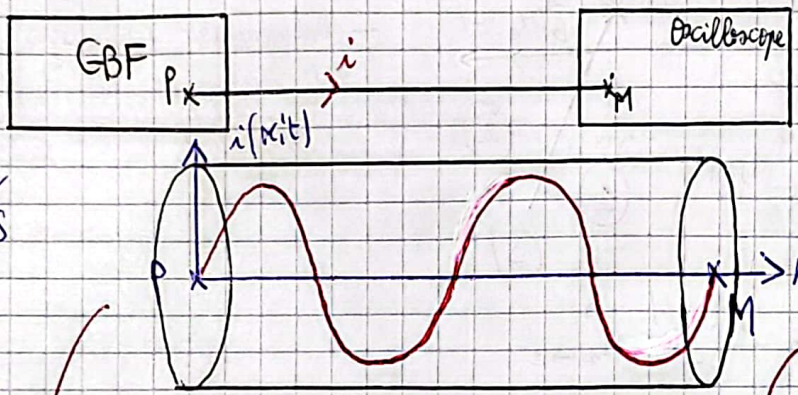
or $\Delta t \ll T \Rightarrow V(M;T+\Delta t) \simeq V(M;t)$

↑ ARQS

$\Rightarrow$ pas de terme de propagation.

Rq Si le phénomène est apériodique: on travaille avec $\mathcal{C}$ qui est la plus petite durée entre 2 variations "remarquables"

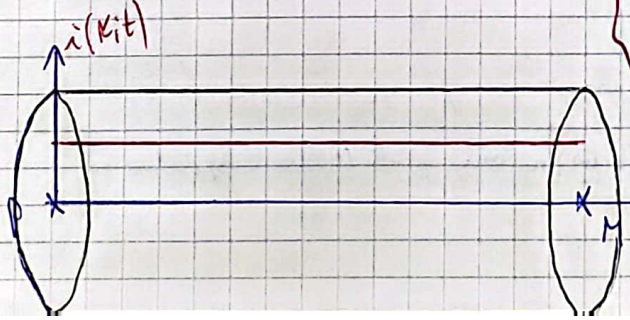




~~ARQS~~

$PM \ll \lambda$

ARQS



Attention: pour un circuit de dimensions infinies l'ARQS n'est plus valable; $d \ll \lambda$ ↑ ∞

Scanné avec CamScanner

2) Les équations de Maxwell dans l'ARQS :

Dans le régime variable :

$$\begin{cases} \operatorname{div}\vec{E}(M;t) = \dfrac{\rho(M;t)}{\varepsilon_0} \\ \operatorname{div}\vec{B}(M;t) = 0 \\ \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E}(M;t) = -\dfrac{\partial \vec{B}(M;t)}{\partial t} \\ \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B}(M;t) = \mu_0\left[\vec{J}(M;t) + \varepsilon_0\dfrac{\partial \vec{E}(M;t)}{\partial t}\right] \end{cases} \xrightarrow[\text{l'ARQS}]{\text{Dans}} \begin{cases} \operatorname{div}\vec{E}(M;t) = \dfrac{\rho(M;t)}{\varepsilon_0} \\ \operatorname{div}\vec{B}(M;t) = 0 \\ \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E}(M;t) = -\dfrac{\partial \vec{B}(M;t)}{\partial t} \\ \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B}(M;t) = \mu_0\left(\vec{J}_c(M;t) + \vec{0}\right) \end{cases}$$

($\vec{J} = \vec{J}_c + \vec{J}_d$; on a pas envie de le négliger)

En effet ; dans l'ARQS : $\|\mu_0 \vec{J}_d\| \ll \|\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B}\|$ (ce n'est pas $\ll \|\mu_0 \vec{J}_c\|$ c'est un cas particulier voir ondes).

Démo :

$$\frac{\|\mu_0 \vec{J}_d\|}{\|\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B}\|} = \frac{\mu_0\varepsilon_0\left\|\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right\|}{\|\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B}\|} \sim \frac{\frac{1}{c^2}\frac{E_0}{T}}{\frac{B_0}{D}} = \frac{E_0}{B_0}\cdot\frac{D}{c^2 T} \quad (1)$$

$\operatorname{div} \sim \frac{1}{D}$; $\|\overrightarrow{\operatorname{rot}}\| \sim \frac{1}{D}$; $\|\overrightarrow{\text{grad}}\| \sim \frac{1}{D}$; $\|\Delta .\| \sim \frac{1}{D^2}$

Rq : $X = X_0 \cos(\omega t) \longrightarrow X \sim X_0$

$\frac{\partial X}{\partial t} = -X_0\,\omega \sin(\omega t) \longrightarrow \frac{\partial X}{\partial t} \sim \omega X_0 \sim \frac{X_0}{T}$

↳ $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \longrightarrow \|\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E}\| = \left\|-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right\|$

$\longrightarrow \frac{E_0}{D} = \frac{B_0}{T} \Rightarrow \frac{E_0}{B_0} = \frac{D}{T}$ (2)

On remplace (2) dans (1) : $\frac{\|\mu_0 \vec{J}_d\|}{\|\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B}\|} = \frac{D}{T}\cdot\frac{D}{c^2 T} = \left(\frac{D}{cT}\right)^2 = \left(\frac{\Delta t}{T}\right)^2$

or $\Delta t \ll T \Rightarrow \mu_0\|\vec{J}_d\| \ll \|\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B}\| \Rightarrow \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{J}_c$!

3) les équations de poisson dans l'ARQS :

$\operatorname{div}\vec{B}(M;t) = \vec{0} \longrightarrow \vec{B}(M;t) = \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{A}(M;t)$

$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E}(M;t) = -\frac{\partial \vec{B}(M;t)}{\partial t} \longrightarrow \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

⚠ Dans l'ARQS ; $\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \neq \vec{0}$.

Dans l'ARQS ; on néglige le terme de retard (= de propagation).

$$\begin{cases} \Delta V(M;t) - \dfrac{1}{c^2}\cancel{\dfrac{\partial^2 V(M;t)}{\partial t^2}} + \dfrac{\rho(M;t)}{\varepsilon_0} = 0 \\ \Delta \vec{A}(M;t) - \dfrac{1}{c^2}\cancel{\dfrac{\partial^2 \vec{A}(M;t)}{\partial t^2}} + \mu_0 \vec{J}(M;t) = \vec{0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V(M;t) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{P\in(D)} \dfrac{\rho(P;t)}{PM}\, d\tau(P) \\ \vec{A}(M;t) = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{P\in(D)} \dfrac{\vec{J}(P;t)}{PM}\, d\tau(P) \end{cases}$$

Scanné avec CamScanner

4/ Equation de conservation de la charge :

Dans l'ARQS : $\overrightarrow{rot}\,\vec{B} = \mu_0\left[\vec{j} + \vec{0}\right]$ $\left(\vec{j} = \vec{j_c}\right)$

$\downarrow$ div

$div\left(\overrightarrow{rot}\,\vec{B}\right) = \mu_0\, div\,\vec{j}$

or $div\left(\overrightarrow{rot}\right) = 0 \Rightarrow$ $\boxed{div\,\vec{j}(M;t) = 0}$ $\xrightarrow{\text{Théorème d'Ostrogradski}}$ $\boxed{\oiint_{P\in(\Sigma)} \vec{j}(P;t)\cdot d\vec{S}(P) = 0}$

$\Downarrow$

Loi des Nœuds reste valable dans l'ARQS

La loi d'OHM $u = Ri$ ne reste plus valable il faut ajouter la force électromotrice induite. ⚠

Couplage de champs :

Méthode mathématique :

a) $\overrightarrow{rot}\,\vec{E} = \dfrac{-\partial \vec{B}}{\partial t}$ avec $\vec{E} = E(r;t)\,\vec{u_\theta}$

$\overrightarrow{rot}\,\vec{E} = \left[\frac{1}{r}\frac{\partial E}{\partial \theta} - 0\right]\vec{u_r} + \left[0 - \frac{\partial E}{\partial r}\right]\vec{u_\theta} + \vec{0} = \frac{-\partial E}{\partial r}\vec{u_\theta}$

d'où $\dfrac{-\partial E}{\partial r}\vec{u_\theta} = \dfrac{-\partial B}{\partial t}\vec{u_\theta} \Rightarrow \dfrac{\partial E}{\partial r} = \dfrac{+\partial B}{\partial t}$

↳ $\overrightarrow{rot}\,\vec{B} = \mu_0\left[\vec{0} + \varepsilon_0\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right] = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

$\vec{0}$: courant de conduction nul car on est dans le vide !!

or $\vec{B} = B(r;t)\,\vec{u_\theta}$ d'où $\overrightarrow{rot}\,\vec{B} = \left[0 - \dfrac{\partial B}{\partial z}\right]\vec{u_r} + \vec{0} + \dfrac{1}{r}\left[\dfrac{\partial (rB)}{\partial r} - 0\right]\vec{u_z}$ ($\partial B/\partial z = 0$)

$\overrightarrow{rot}\,\vec{B} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial (rB)}{\partial r}\vec{u_z} = \dfrac{1}{r}\left[B + r\dfrac{\partial B}{\partial r}\right]\vec{u_z}$

d'où $\left[\dfrac{B}{r} + \dfrac{\partial B}{\partial r}\right]\vec{u_z} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial E}{\partial t}\vec{u_z}$

$\Rightarrow \dfrac{B}{r} + \dfrac{\partial B}{\partial r} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial E}{\partial t}$

$\frac{\partial}{\partial t}$ ↳ $\Rightarrow \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial B}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{\partial B}{\partial t}\right) = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 E}{\partial t^2}$

Scanné avec CamScanner

$\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\partial E}{\partial r}$

donc $\frac{1}{r}\frac{\partial E}{\partial r} + \frac{\partial^2 E}{\partial r^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$

d'où $\frac{\partial^2 E}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial E}{\partial r} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$

b) $E(r,t) = E_0 e(r) e^{-t/\tau}$

d'où $E_0 e^{-t/\tau}\frac{\partial^2 e(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}E_0 e^{-t/\tau}\frac{\partial e(r)}{\partial r} - \frac{1}{c^2}\frac{1}{\tau^2}E_0 e(r) e^{-t/\tau} = 0$

donc $\frac{\partial^2 e(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial e(r)}{\partial r} + \frac{1}{\tau^2 c^2} e(r) = 0$

on pose $z = \frac{ir}{\tau c}$ $\times \frac{1}{\left(\frac{i}{\tau c}\right)^2}$

$\frac{d^2 e}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{de}{dz} - \frac{1}{c^2}\frac{1}{\frac{-1}{\tau^2 c^2}} e(r) \times \frac{1}{z^2} = 0$

$e''(z) + \frac{1}{z}e'(z) + e(z) = 0$

$e(z) = \frac{(-z)^0}{(0!)^2}\left(\frac{z}{2}\right)^{2\times 0} + \frac{(-1)^2}{(1!)^2}\left(\frac{z}{2}\right)^{2\times 1} + \frac{(-1)^2}{(2!)^2}\left(\frac{z}{2}\right)^{2\times 2}$

$e(z) = 1 - \frac{z^2}{4} + \frac{z^4}{64}$ or $z = \frac{ir}{\tau c}$

$\Rightarrow e(r) = 1 + \frac{r^2}{4\tau^2 c^2} + \frac{r^4}{64\tau^4 c^4} \Rightarrow E(r,t) = E_0\left[1 + \frac{r^2}{4\tau^2 c^2} + \frac{r^4}{64\tau^4 c^4}\right] e^{-t/\tau}$

$E_0(t) \longrightarrow B_1 \longrightarrow E_2 \longrightarrow B_3 \longrightarrow E_4$

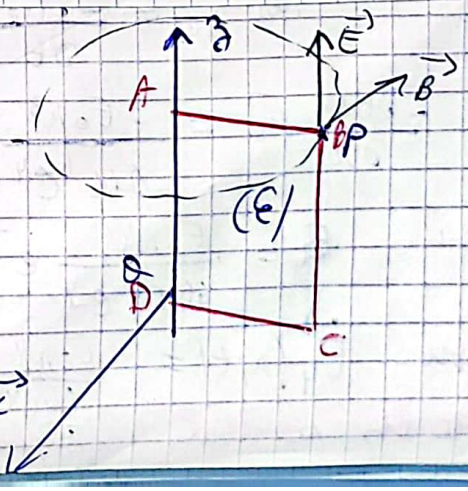
$E_0(t) = E_0 e^{-t/\tau}$; $E_2(t) = E_0 \frac{r^2}{4\tau^2 c^2} e^{-t/\tau}$; $E_4(t) = \frac{r^4}{64\tau^4 c^4} e^{-t/\tau}$

on a $\vec{E} = E(r,t)\vec{u_z}$; $\vec{B} = B(r,t)\vec{u_\theta}$

on applique le théorème d'Ampère au contour $(\mathcal{C})$.

$\oint_{P\in(\mathcal{C})} \vec{B}(P)\cdot d\vec{l}(P) = \mu_0\left(I_{e,c}(t) + I_{e,d}(t)\right)$

on a $I_{e,c}(t) = 0$ (vide $\vec{j_c} = \vec{0}$)



Scanné avec CamScanner

et $I_{e,d}(t) = \iint \vec{j_d} \cdot \vec{dS} = \pi r^2 \cdot \vec{j_d}$ et $\vec{j_d} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{-\varepsilon_0 E_0}{2} e^{-t/\tau}$

donc $I_{e,d}(t) = -\pi r^2 \frac{\varepsilon_0 E_0}{\tau} e^{-t/\tau}$

et $\vec{B}(P) = B(r;t)\vec{u_\theta}$ et $\vec{dl} = r\,d\theta\,\vec{u_\theta}$

donc $B_1(r;t)\, r\, 2\cancel{\pi} = -\frac{\cancel{\pi} r^2 E_0}{\tau c^2} e^{-t/\tau}$; $\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$

d'où $B_1(r;t) = \frac{-E_0}{2c^2\tau} e^{-t/\tau} r$

d) Stokes
$$\begin{cases} \iint \vec{rot}\, \vec{E_2}(M;t) \cdot \vec{dS} = \oint \vec{E_2}(M;t)\, \vec{dl} \\ \iint \vec{rot}\, \vec{E_2} \cdot \vec{dS} = -\iint \frac{\partial \vec{B_1}}{\partial t} \cdot \vec{dS} \end{cases}$$

$$\oint \vec{E_2} \cdot \vec{dl} = \frac{-\partial}{\partial t} \iint \vec{B_1} \cdot \vec{dS}$$

$$\int_A^B \vec{E_2} \cdot \vec{dl} + \int_B^C \vec{E_2} \cdot \vec{dl} + \int_C^D \vec{E_2} \cdot \vec{dl} + \int_D^A \vec{E_2} \cdot \vec{dl} = \frac{-\partial}{\partial t} \iint \vec{B_1} \cdot \vec{dS}$$

$$\int_A^B \vec{E_2}\, \cancel{dy}^{\,0}\, \vec{u_y} + \int_B^C \vec{E_2} \cdot \vec{dz}\, \vec{u_z} + \int_C^D \vec{E_2} \cdot dy\, \vec{u_y} + \int_D^A \vec{E_2} \cdot dz \cdot \vec{u_z} = \frac{-\partial}{\partial t} \iint \vec{B_1} \cdot \vec{dS}$$

$$E_2 \overbrace{(z_C - z_B)}^{-h} + \cancel{E_2}^{\,0} (z_A - z_B) = \frac{-\partial}{\partial t} \iint \vec{B_1}\, dS\, \vec{u_\theta}$$

$$-E_2 \cancel{h} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \frac{-E_0}{2c^2\tau} e^{-t/\tau} r\, dr \int dz = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{E_0}{4c^2\tau} e^{-t/\tau} r^2 \right) \cancel{h}$$

d'où $E_2 = \frac{E_0}{4c^2\tau^2} e^{-t/\tau} r^2$

(e) $\vec{rot}\, \vec{B_3} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E_2}}{\partial t}$; $\frac{1}{r} \frac{\partial r B_3}{\partial r} \vec{u_z} = \frac{-E_0 r^2}{4c^4\tau^3} e^{-t/\tau} \vec{u_z}$

donc $\frac{\partial r B_3}{\partial r} = \frac{-E_0 r^3}{4c^4\tau^3} e^{-t/\tau} \Rightarrow r B_3 = \frac{-E_0 r^4}{16 c^4 \tau^3} e^{-t/\tau} + \cancel{C}^{\,0}$

donc $\vec{B_3}(r;t) = \frac{-E_0 r^3}{16 c^4 \tau^3} e^{-t/\tau} \vec{u_\theta}$

* $\vec{E_4}$; $\vec{rot}\, \vec{E_4} = \frac{-\partial \vec{B_3}}{\partial t}$

$$\Rightarrow \frac{-\partial E_4}{\partial r} \vec{u_\theta} = \frac{-E_0 r^3}{16 c^4 \tau^4} e^{-t/\tau} \vec{u_\theta}$$

donc $E_4 = \frac{E_0 r^4}{64 c^4 \tau^4} e^{-t/\tau}$

d'où $\vec{E_4}(r;t) = \frac{E_0 r^4}{64 c^4 \tau^4} e^{-t/\tau} \vec{u_z}$

donc les résultats physiques sont compatibles avec les résultat mathématiques

Scanné avec CamScanner

Application du cours de l'induction : (Induction de Brentz) :

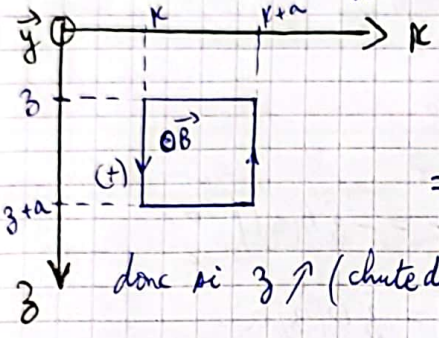
Chute d'un cadre : Un cadre de coté a de masse m de résistance R est placé dans un champ magnétique permanent non uniforme. $\vec{B} = (B_0 - bz)\vec{u_y}$ avec z est la côte du côté supérieur du cadre.

1) déterminer le sens du courant lorsque le cadre est en chute.

2) calculer le courant induit i par 2 méthodes.

3) donner l'expression de la force de Laplace et montrer qu'elle joue le rôle d'une force de freinage

4) établir l'équa - diff du mvt et la résoudre sachant que $z(0) = 0$



1) $\phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S}$ avec $dS = dS\,\vec{u_y}$ (main droite)

$\Rightarrow \phi = \iint B\vec{u_y} \cdot dS\,\vec{u_y} = \iint B \cdot dS > 0$

donc si $z \nearrow$ (chute du cadre) $\Rightarrow B \searrow \Rightarrow \phi \searrow \Rightarrow \frac{d\phi}{dt} < 0 \Rightarrow e > 0 \Rightarrow \boxed{i > 0}$

2) $u = Ri - e$ or $u = 0$ (le cadre est un circuit fermé)

$\Rightarrow 0 = Ri - e \Rightarrow e = Ri \Rightarrow i = \frac{e}{R}$

→ Méthode (1) : $e = \frac{-d\phi}{dt}$ avec $\phi = \iint B \cdot dS = \iint (B_0 - bz) \cdot dx \cdot dy$

$$\phi = \int_x^{x+a} dx \int_z^{z+a} (B_0 - bz)\,dz = a\left[B_0 z - \frac{b}{2} z^2\right]_z^{z+a}$$

$$= a\left[B_0\left((z+a) - z\right) - \frac{b}{2}\left((z+a)^2 - z^2\right)\right]$$

$$= a\left[B_0 a - \frac{b}{2}\left(z^2 + a^2 + 2az - z^2\right)\right]$$

$$= a^2\left[B_0 - \frac{b}{2}(2z + a)\right]$$

$$\Rightarrow e = -\frac{d\phi}{dt} = -a^2\left(\frac{-b}{x}\right) x \dot{z} = ba^2 \dot{z}$$

$$\Rightarrow i = \frac{e}{R} = \frac{ba^2 \dot{z}}{R}$$

→ Méthode (2) : $e = \oint \vec{E}_m \cdot d\vec{\ell}$

Scanné avec CamScanner

c. $e = \int_A^B \vec{E}_m \cdot d\vec{\ell} + \int_B^C \vec{E}_m \cdot d\vec{\ell} + \int_C^D \vec{E}_m \cdot d\vec{\ell} + \int_D^A \vec{E}_m \cdot d\vec{\ell}$

d. or $\vec{E}_m = \vec{v} \wedge \vec{B} = \dot{z}\,\vec{u}_z \wedge B\vec{u}_y = -B\dot{z}\,\vec{u}_x$

e. ① $\int_A^B \vec{E}_m \cdot d\vec{\ell} = \int_A^B -B\dot{z}\,\vec{u}_x \cdot dz\,\vec{u}_z = 0$

② $\int_C^D \vec{E}_m \cdot d\vec{\ell} = \int_C^D -B\dot{z}\,\vec{u}_x \cdot dz \cdot \vec{u}_z = 0$

③ $\int_B^C \vec{E}_m \cdot d\vec{\ell} = \int_B^C -B\dot{z}\,\vec{u}_x \cdot d\vec{\ell} = -\dot{z}\int_B^C B(z+a)\,dx$

$= -\dot{z}\,B(z+a)\int_x^{x+a} dx$

$= -\dot{z}\,a\,B(z+a)$

④ $\int_D^A \vec{E}_m \cdot d\vec{\ell} = \int_0^A -B\dot{z}\,\vec{u}_x \cdot dx\,\vec{u}_x = -\dot{z}\int_D^A B(z)\,dx = -\dot{z}B(z)\int_{x+a}^{x} dx$

$= \dot{z}\,B(z)\,a.$

donc $e = \dot{z}a\left[B(z) - B(z+a)\right] = \dot{z}a\left[(B_0 - bz) - (B_0 - b(z+a))\right]$

$= \dot{z}\,a \times ba$

$e = ba^2\dot{z}$

d'où $i = \dfrac{ba^2\dot{z}}{R}$

3) $\vec{f}_L = \oint i\,d\vec{\ell} \wedge \vec{B} = i\left[\int_A^B d\vec{\ell} \wedge \vec{B} + \int_B^C d\vec{\ell} \wedge \vec{B} + \int_C^D d\vec{\ell} \wedge \vec{B} + \int_D^A d\vec{\ell} \wedge \vec{B}\right]$

$= i\left(\int_A^B dz\,\vec{u}_z \wedge B\vec{u}_y + \int_B^C dx\,\vec{u}_x \wedge B(z+a)\,\vec{u}_y + \int_C^D dz\,\vec{u}_z \wedge B\vec{u}_y + \int_D^A dx\,\vec{u}_x \wedge B(z)\,\vec{u}_y\right.$

$= i\left[-\int_A^B B\,dz\,\vec{u}_x - \int_C^D B\,dz\,\vec{u}_x + \int_B^C B(z+a)\,dx\,\vec{u}_z + \int_D^A B(z)\,dx\,\vec{u}_z\right]$

$= i\left[-\left(\int_z^{z+a} B\cdot dz + \int_{z+a}^{z} B\cdot dz\right)\vec{u}_x + \left(\int_x^{x+a} B(z+a)\,dx + \int_{x+a}^{x} B(z)\,dx\right)\vec{u}_y\right.$

$= i\left[\int_x^{x+a}\left(B(z+a) - B(z)\right)dx\right]\vec{u}_z = i\left[B(z+a) - B(z)\right]\int_x^{x+a} dx\,\vec{u}_z$

$\vec{f}_L = i\left[B_0 - bz - ba - B_0 + bz\right]a\,\vec{u}_z = i(-ba)a\,\vec{u}_z = -ba^2\,\dfrac{ba^2\dot{z}}{R}\,\vec{u}_y$

Scanné avec CamScanner

$\vec{f_L} = \frac{-(ba^2)^2}{R} \dot{z}\,\vec{u_z} = -\alpha\vec{v}$ avec $\alpha = \frac{(ba^2)^2}{R}$

donc $\vec{f_L}$ est équivalente à une force de frottements fluide = Force de freinage.

d) le PFD appliqué sur le cadre s'écrit :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} - \alpha\vec{v} \Rightarrow m\frac{dv}{dt}\vec{u_z} = mg\vec{u_z} - \alpha v\vec{u_z}$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{\alpha}{m}v = g$$

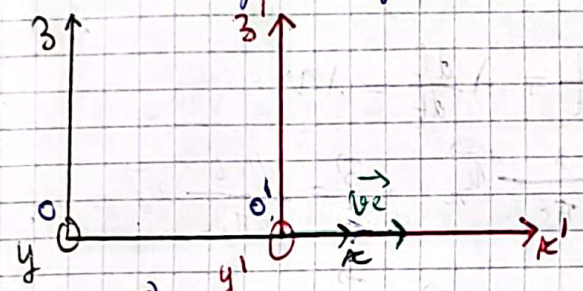
$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = g$$

d'où $v(t) = Ae^{-t/\tau} + \tau g$ or $v(t=0) = 0 \Rightarrow v(t) = v_\ell(1 - e^{-t/\tau})$

avec $\tau = \frac{m}{\alpha} = \frac{mR}{(ba^2)^2}$ et $v_\ell = \tau g$.

VI) Transformation des champs électromagnétiques par changement de référentiel galiléen :

Soient R et R' deux référentiels galiléens tq R' est en translation rectiligne uniforme par rapport à R avec une vitesse $\vec{v_e}$



$$\vec{v_e} = \vec{v}(O'/R) + \vec{\Omega}(R'/R) \wedge \vec{O'M}^{\vec{0}}$$
$$= \vec{v}(O'/R)$$

Soient $\begin{cases}\vec{E}\\ \vec{B}\end{cases}$ le champ E.M dans R et $\begin{cases}\vec{E'}\\ \vec{B'}\end{cases}$ le champ E.M dans R'

Soit q une charge ponctuelle de vitesse $\vec{v_a}$ dans R et $\vec{v_r}$ dans R'.

Dans R la charge q est soumise à la force de Lorentz $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v_a} \wedge \vec{B})$

dans le référentiel R' la charge q est soumise à la force de Lorentz $\vec{F'} = q(\vec{E'} + \vec{v_r} \wedge \vec{B'})$

or la force est invariante par changement de référentiel en mécanique classique. d'où $\vec{F} = \vec{F'}$ donc $q(\vec{E} + \vec{v_a} \wedge \vec{B}) = q(\vec{E'} + \vec{v_r} \wedge \vec{B'})$

donc $\vec{E} + \vec{v_a} \wedge \vec{B} = \vec{E'} + \vec{v_r} \wedge \vec{B'}$

$$\Rightarrow \vec{E} + (\vec{v_r} + \vec{v_e}) \wedge \vec{B} = \vec{E'} + \vec{v_r} \wedge \vec{B'}$$

$$\Rightarrow \vec{E} + \vec{v_e} \wedge \vec{B} + \vec{v_r} \wedge \vec{B} = \vec{E'} + \vec{v_r} \wedge \vec{B'} \quad \forall \vec{v_r}$$

Scanné avec CamScanner

$$\begin{cases} \vec{E}' = \vec{E} + \vec{v}_e \wedge \vec{B} \\ \vec{B}' = \vec{B} \end{cases}$$

Formules de transformation classiques du champs

VOIR CCP 2003

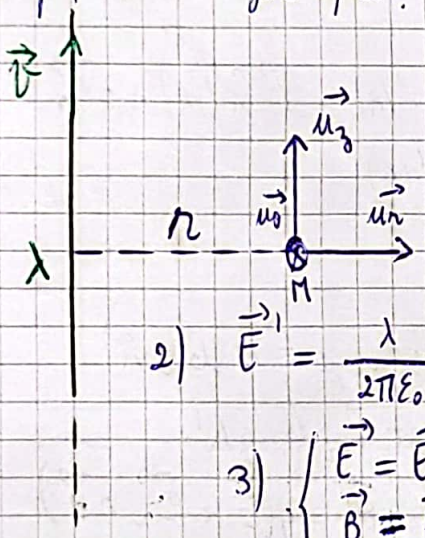
Application :

Soit un fil rectiligne infini de charge linéique qui se déplace à une vitesse constante $\vec{v} = v\vec{u}_z$ tq $v \ll c$ dans un référentiel galiléen R.

1) pour un observateur lié au référentiel absolu R déterminer les expressions de $\vec{E}$ et $\vec{B}$

2) pour un observateur lié à R' où le fil est immobile déterminer les expressions des champs $\vec{E}'$ et $\vec{B}'$

3) les résultats sont-ils compatibles avec les formules des transformations des champs électromagnétiques ? Commentez.



$$i = \frac{dq}{dt} = \lambda \frac{dl}{dt} = \lambda v.$$

1) $\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{u}_r$; $\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}\vec{u}_\theta = \frac{\mu_0 \lambda v}{2\pi r}\vec{u}_\theta$

2) $\vec{E}' = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$ 2) $\vec{E}' = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{u}_r$; $\vec{B}' = \vec{0}$

3) $\begin{cases} \vec{E} = \vec{E}' - \vec{v}_e \wedge \vec{B} \\ \vec{B} = \vec{B}' \end{cases}$ Formules classiques (DL à l'ordre 0).

Dans notre cas : $\begin{cases} \vec{E} = \vec{E}' \Rightarrow \vec{E} \neq \vec{E}' - \vec{v}_e \wedge \vec{B} \\ \vec{B} \neq \vec{B}' \end{cases}$

3) le changement pour le champ électromagnétique ne peut pas être traité dans le cadre de la mécanique classique, il est nécessaire de se placer dans le cadre de la théorie relativiste et utiliser la transformation de Lorentz-poincaré.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ ct' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ ct \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \beta = \frac{v}{c} \\ \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \text{ coeff de Lorentz} \\ = \left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{-1/2} \end{cases}$$

en méca classique

$\begin{cases} x' = x - v_x t \; ; \; z' = z - v_z t \\ y' = y - v_y t \; ; \; t' = t \end{cases}$

Scanné avec CamScanner

$$\begin{cases} \vec{E}_{/\!/} = \vec{E'}_{/\!/} \\ \vec{E}_{\perp} = \gamma\left(\vec{E'}_{\perp} - \vec{v_e} \wedge \vec{B'}_{\perp}\right) \end{cases}$$

→ à l'ordre 0 nous donne les formules classiques

$/\!/ \vec{v_e}$

$\perp$ à $\vec{v_e}$

$$\begin{cases} \vec{B}_{/\!/} = \vec{B'}_{/\!/} \\ \vec{B}_{\perp} = \gamma\left(\vec{B'}_{\perp} + \frac{\vec{v_e}}{c^2} \wedge \vec{E'}_{\perp}\right) \end{cases}$$

Dans notre cas $\vec{v_e}$ porté par $\vec{u_z}$ et $\begin{cases} \vec{E}_{/\!/} = \vec{E'}_{/\!/} = \vec{0} \\ \vec{B}_{/\!/} = \vec{B'}_{/\!/} = 0 \end{cases}$

↳ $\gamma\left(\vec{B'_{\perp}} + \frac{\vec{v_e}}{c^2} \wedge \vec{E'_{\perp}}\right) = \gamma\left(\vec{B'} + \frac{v}{c^2}\vec{u_z} \wedge \vec{E'}\right)$

$= \gamma\left(\vec{0} + \frac{v}{c^2}\vec{u_z} \wedge \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{u_r}\right)$

$= \gamma \frac{v}{c^2} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \vec{u_\theta}$ or $\mu_0 \varepsilon_0 c^2 = 1$

$= \gamma \mu_0 \frac{\lambda v}{2\pi r} \vec{u_\theta}$

$\gamma\left(\vec{B'_{\perp}} + \frac{\vec{v_e}}{c^2} \wedge \vec{E'_{\perp}}\right) = \frac{\mu_0 \lambda v}{2\pi r}\vec{u_\theta} = \vec{B}$ ↓ DL à l'ordre 1 : $\gamma \simeq 1$

↳ $\gamma\left(\vec{E'_{\perp}} - \vec{v_e} \wedge \vec{B'_{\perp}}\right) = \gamma\left(\vec{E'} - v\vec{u_z} \wedge \vec{B'}\right) = \gamma \vec{E'}$

$\gamma\left(\vec{E'_{\perp}} - \vec{v_e} \wedge \vec{B'_{\perp}}\right) = \vec{E}$ ↓ DL à l'ordre 1

Si les résultats sont encore incompatibles on pousse le D.L à un ordre supérieur.

Scanné avec CamScanner

Énergie électromagnétique:

I) puissance volumique: $P_v(M;t)$ cédée par le champ à la matière:

1) Expression de $P_v(M;t)$:

Un porteur de charge q de vitesse $\vec{v}$ dans un champ électromagnétique $(\vec{E};\vec{B})$ subit la force $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$. La puissance de cette force est:

$$\vec{F}.\vec{v} = q\vec{E}.\vec{v} + q(\vec{v} \wedge \vec{B}).\vec{v}$$

$$= q\vec{E}.\vec{v} + q(\underbrace{\vec{v} \wedge \vec{v}}_{\vec{0}} | \vec{B}$$

$$\vec{F}.\vec{v} = q\vec{E}.\vec{v}$$

donc la puissance magnétique est nulle.

Dans le cas d'un élément $d\tau$ contenant des charges fixes et mobiles, la puissance élémentaire est $dP = \delta q_f . \vec{E} . \cancel{\vec{v_f}}^{\vec{0}} + \delta q_m . \vec{E} . \vec{v_m}$

la puissance volumique cédée par le champ à la matière est $P_v = \frac{dP}{d\tau}$

$$= \frac{\delta q_m}{d\tau} \vec{E}.\vec{v_m}$$

$$P_v = \rho \vec{v_m}.\vec{E}$$

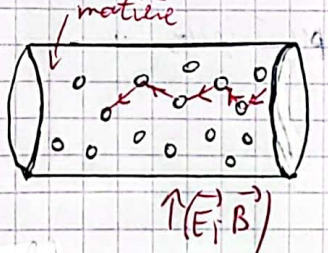
$$\boxed{\mathcal{P}_v(M;t) = \vec{J}(M;t).\vec{E}(M;t)}$$

Dans le cas d'un conducteur ohmique $\vec{J} = \gamma \vec{E} \Rightarrow$

$$P_v(M;t) = \frac{J^2(M;t)}{\gamma} > 0$$

$$P_v(M;t) = \gamma \vec{E}^2(M;t)$$

C'est la puissance volumique dissipée par effet joule.



2) Équation locale de la conservation de la charge:

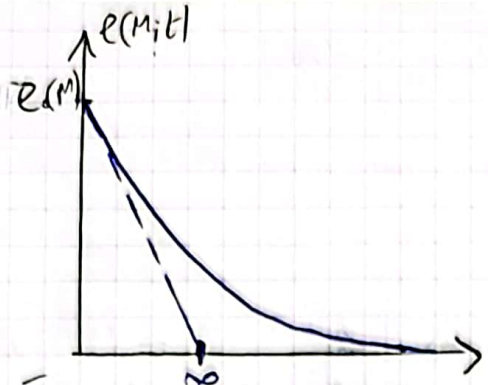
$$\operatorname{div}\vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \text{or} \quad \vec{J} = \gamma\vec{E}$$

$$\Rightarrow \gamma \operatorname{div}\vec{E} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \gamma \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0 \quad \xrightarrow{\text{M.G}} \quad \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\rho}{\tau} = 0 \quad \text{avec } \tau = \frac{\varepsilon_0}{\gamma}$$

Scanné avec CamScanner

$\Rightarrow \boxed{\rho(M,t) = \rho_0(M) e^{-t/\tau}}$



ODG: cuivre

$\gamma = 5{,}88 \cdot 10^7\ S.m^{-1}$

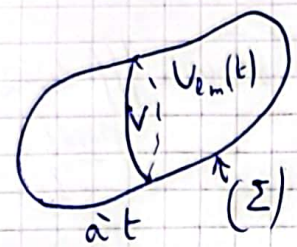
$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ F.m^{-1}$

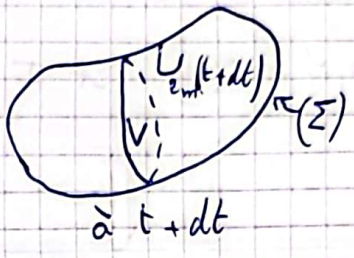
$\tau = 1{,}5 \cdot 10^{-19}\ s$

$\Rightarrow \rho(M,t)$ s'annulle instantanément

II) Équation locale de conservation de l'énergie électromagnétique (Équation locale de Poynting):

1) Bilan d'énergie électromagnétique: on considère un volume V fixe et indéformable contenant l'énergie E.M $U_{em}(t)$ à l'instant t et $U_{em}(t+dt)$ à l'instant $t+dt$.





Bilan de charge:

pas de création de charge

$$\underbrace{dQ}_{\text{effet}} = \underbrace{-\delta Q_s}_{\text{échangé}} + 0 + 0$$

pas de dissipation de charge.

avec $dQ = Q(t+dt) - Q(t)$

Bilan d'énergie E.M:

perdue par effet joule

$$dU_{em} = -\delta U_{ray} + 0 - \delta U_{cédée}$$

dU_{em}: restante dans le système

δU_{ray}: rayonnée, sortante

0: pas de création de l'énergie E.M

avec $dU_{em} = U_{em}(t+dt) - U_{em}(t)$

la variation de l'E.M pendant dt peut être dûe:

- au déplacement de l'énergie électromagnétique qui traverse la surface (Σ), la quantité d'énergie traversant (Σ) pendant dt est dite énergie électromagnétique élémentaire rayonnée. δU_{ray}
- aux pertes d'énergie électromagnétique à l'intérieur du volume V, la quantité d'énergie électromagnétique cédée par le champ à la matière pendant dt et

Scanné avec CamScanner

notée $\delta U_{cédée}$ d'où $\frac{dU_{em}}{dt} + \frac{\delta U_{ray}}{dt} = -\frac{\delta U_{cédée}}{dt}$

or $P = \frac{\delta U}{dt}$ donc $\boxed{\frac{dU_{em}}{dt} + P_{ray} = -P_{cédée}}$ (*)

Analogie →

Équation intégrale de conservation de l'énergie électromagnétique.

→ $\frac{dQ}{dt} + \frac{\delta Q_S}{dt} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{dQ}{dt} + I = 0}$ ← pas de dissipation de la charge

Équation intégrale de conservation de la charge.

avec : $e = \frac{\delta Q}{\delta \tau} \Rightarrow \delta Q = e\,\delta\tau$

$\Rightarrow Q(t) = \iiint_{M\in(V)} e(M;t) \cdot d\tau(M)$ et $I = \oiint_{P\in(\Sigma)} \vec{j}(P;t) \cdot d\vec{S}(P) = \iiint_{M\in(V)} \operatorname{div}\vec{j}(M;t) \cdot d\tau(M)$

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{j}(M;t) + \frac{\partial e(M;t)}{\partial t} = 0}$$

Équation locale de conservation de la charge.

cause — effet

$\vec{j}$ est le vecteur densité volumique de courant qui caractérise le déplacement des charges. $\vec{j} = e\vec{v}$

(*) avec : $\boxed{P_{cédée} = \iiint_{M\in(V)} P_v(M;t) \cdot d\tau(M)}$ puissance cédée par le champ E.M à la matière (1)

↳ on définit la densité volumique de l'E.M par :

$u_{em}(M;t) = \frac{\delta U_{em}}{\delta \tau} \Rightarrow \delta U_{em} = u_{em}(M;t) \cdot \delta\tau$

$\Rightarrow \boxed{U_{em}(t) = \iiint_{M\in(V)} u_{em}(M;t)\, d\tau(M)}$

$\Rightarrow dU_{em}(t) = U_{em}(t+dt) - U_{em}(t) = \iiint_{M\in(V)} u_{em}(M;t+dt)\, d\tau(M) - \iiint_{M\in(V)} u_{em}(M;t)\, d\tau(M)$

(volume fixe indéformable) $= \iiint_{M\in(V)} \left[u_{em}(M;t+dt) - u_{em}(M;t)\right] d\tau(M)$

Scanné avec CamScanner

$$dU_{em} = \iiint_{M\in(V)} \frac{\partial U_{em}(M;t)}{\partial t}\, dt\, d\tau(M) \Rightarrow \boxed{\frac{dU_{em}}{dt} = \iiint_{M\in(V)} \frac{\partial U_{em}(M;t)}{\partial t}\, d\tau(M)} \quad (2)$$

$$I = \frac{SQ_S}{dt} = \oiint_{P\in(\Sigma)} \vec{J}(P;t)\cdot d\vec{S}(P)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{P_{ray} = \frac{SU_{ray}}{dt} = \oiint_{P\in(\Sigma)} \vec{\Pi}(P;t)\cdot d\vec{S}(P)}$$

avec $\vec{\Pi}(P;t)$ (ou $\vec{R}(P;t)$) est le vecteur densité volumique de courant d'énergie E.M qui caractérise le déplacement de l'énergie électromagnétique E.M.

C'est le vecteur de pointing $\Rightarrow$ $\boxed{P_{ray} = \iiint \operatorname{div}\vec{\Pi}(M;t)\cdot d\tau(M)}$ (3)

on remplace (1), (2) et (3) dans (*) :

$$\iiint_{M\in(V)} \frac{\partial U_{em}(M;t)}{\partial t}\, d\tau(M) + \iiint_{M\in(V)} \operatorname{div}\vec{\Pi}(M;t)\, d\tau(M) = -\iiint_{M\in(V)} P_V(M;t)\cdot d\tau(M)$$

$$\Rightarrow \boxed{\underbrace{\operatorname{div}\vec{\Pi}(M;t)}_{\text{causes}} + \underbrace{\frac{\partial U_{em}(M;t)}{\partial t}}_{\text{effet}} = \underbrace{-\vec{J}(M;t)\cdot\vec{E}(M;t)}_{\text{cause}}}$$

C'est l'équation locale de pointing

Analogie $\vec{J} = e\vec{v}$, $\vec{\Pi} = \mu_{em}\cdot\vec{c}$ dans le vide à démontrer

2) Expression de $U_{em}(M;t)$ et $\vec{\Pi}(M;t)$:

on sait que : $\vec{rot}\,\vec{B} = \mu_0\left[\vec{J} + \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right]$

$$\Rightarrow \vec{J} = \frac{1}{\mu_0}\vec{rot}\,\vec{B} - \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \vec{J}\cdot\vec{E} = \frac{\vec{E}}{\mu_0}\vec{rot}\,\vec{B} - \varepsilon_0\vec{E}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow -\vec{J}\cdot\vec{E} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0\vec{E}^2\right) - \frac{\vec{E}}{\mu_0}\vec{rot}\,\vec{B}$$

or $\operatorname{div}(\vec{E}\wedge\vec{B}) = \vec{B}\cdot\vec{rot}\,\vec{E} - \vec{E}\,\vec{rot}\,\vec{B}$

$$\Rightarrow -\vec{E}\,\vec{rot}\,\vec{B} = \operatorname{div}(\vec{E}\wedge\vec{B}) - \vec{B}\cdot\vec{rot}\,\vec{E} = \operatorname{div}(\vec{E}\wedge\vec{B}) - \vec{B}\left(\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{-\vec{E}\cdot\vec{rot}\,\vec{B}}{\mu_0} = \operatorname{div}\left(\frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}\right) + \frac{1}{\mu_0}\vec{B}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \operatorname{div}\left(\frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{B^2}{2\mu_0}\right)$$

d'où $-\vec{J}\cdot\vec{E} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\right) + \operatorname{div}\left(\frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{B^2}{2\mu_0}\right)$

Scanné avec CamScanner

$$= \operatorname{div}\left(\frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0}\right)$$

or $-\vec{j}\cdot\vec{E} = \operatorname{div}\vec{\Pi} + \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{M}_{em}$ d'où :

$$\vec{\Pi}(M;t) = \frac{\vec{E}(M;t)\wedge\vec{B}(M;t)}{\mu_0}$$ Vecteur de Poynting

$$\mathcal{M}_{em}(M;t) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \vec{E}^2(M;t) + \frac{\vec{B}^2(M;t)}{2\mu_0}$$ densité volumique d'énergie électromagnétique.

1) Bilan d'énergie d'un cylindre conducteur en régime stationnaire :

On considère un conducteur cylindrique de rayon a de longueur $L \gg a$, de conductivité γ et parcouru par un courant I.

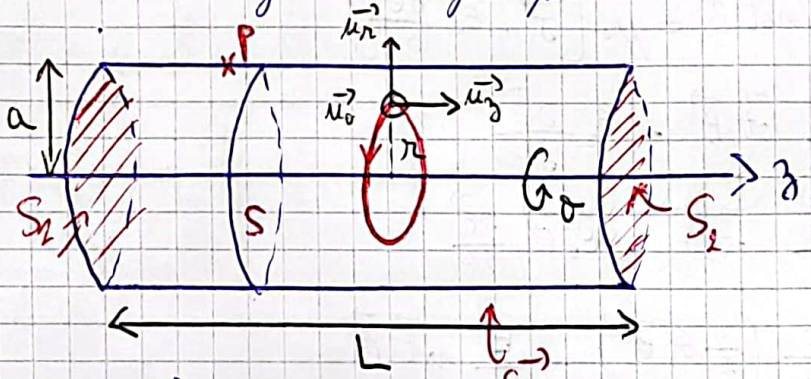
1) Déterminer l'expression du champ $\vec{E}$ et déduire que $P_{cédée} = RI^2$

2) Déterminer l'expression du champ $\vec{B}$ en appliquant le théorème d'Ampère

3) déterminer l'expression du vecteur de Poynting et déduire que $P_{ray} = -RI^2$. commenter.

4) donner l'expression de l'énergie électromagnétique.

Solution :



1)

$$\vec{j} = \gamma\vec{E} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{j}}{\gamma} = \frac{I}{\gamma S}\cdot\vec{u_z}$$

$$P_v = \vec{j}\cdot\vec{E} = \gamma E^2 = \gamma\left(\frac{I}{\gamma S}\right)^2 = \frac{1}{\gamma S^2} I^2$$

$$P_{cédée} = \iiint P_v(M;t)\cdot d\tau(M) = \frac{1}{\gamma S^2} I^2 \iiint d\tau$$

$$P_{cédée} = \frac{1}{\gamma S^2} I^2 \times S \times L = \left(\frac{1}{\gamma}\frac{L}{S}\right) I^2 = RI^2$$

Scanné avec CamScanner

2) $\vec{B}(M) = B(r)\cdot\vec{u_\theta} \Rightarrow d\vec{\ell} = dl\,\vec{u_\theta}$

$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \oint B(r)\,\vec{u_\theta}\cdot r\,d\theta\,\vec{u_\theta} = 2\pi r\,B(r)$

$\oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0\, I_e = \mu_0 J \pi r^2$ (M à l'intérieur)

$2\pi r\, B(r<a) = \mu_0 J \pi r^2$

$\Rightarrow \vec{B}(r<a) = \frac{\mu_0 J r}{2}\vec{u_\theta}$

$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0} = \frac{E\vec{u_z}\wedge B\vec{u_\theta}}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0}\frac{I}{\gamma S}\frac{\mu_0 J r}{2}(-\vec{u_r})$

$\vec{\Pi} = \frac{-I}{2\gamma S}\cdot\left(\frac{I}{S}\right) r\,\vec{u_r} = \frac{-I^2}{2\gamma S^2} r\,\vec{u_r}$

$P_{ray} = \oiint \vec{\Pi}\cdot d\vec{S} = \underbrace{\iint \vec{\Pi}\cdot d\vec{S_1}}_{0 \text{ car } d\vec{S_1}\perp\vec{\Pi}} + \iint \vec{\Pi}\cdot d\vec{S_L} + \underbrace{\iint \vec{\Pi}\cdot d\vec{S_2}}_{0 \text{ car } d\vec{S_2}\perp\vec{\Pi}} = \iint \vec{\Pi}\cdot d\vec{S_L}$

$P_{ray} = \iint_{P\in(S)} \vec{\Pi}(P;t)\cdot d\vec{S_L}$

$\vec{\Pi}(M;t)$ ↘ !!

$P_{ray} = \iint \frac{-I^2}{2\gamma S^2}\,@\vec{u_r}\cdot dS_L\,\vec{u_r} = \frac{-I^2}{2\gamma S^2}\, a\, 2\pi a L$

$= \frac{-I^2}{\gamma S^2}(\pi a^2)\cdot L$

$= \frac{-L}{\gamma S} I^2$

$\Rightarrow \boxed{P_{ray} = -RI^2}$

définit sortante du système "−" indique alors qu'elle est en réalité entrante

Rq $P_{ray} = -P_{cédée}$

or $\frac{dU_{em}}{dt} + P_{ray} = -P_{cedée}$

$\Rightarrow \frac{dU_{em}}{dt} = 0 \Rightarrow U_{em} = cte$ car le régime est stationnaire ($I = cte$!! indépendant du temps).

4) $U_{em} = \iiint \left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0}\right) d\tau$

$U_{em} = \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{I}{\gamma S}\right)^2 \iiint d\tau + \frac{1}{2\mu_0}\iiint \left(\frac{\mu_0 I r^2}{2S}\right)^2 d\tau$

Scanné avec CamScanner

$$= \frac{\varepsilon_0 I^2}{2\gamma^2 S} \cdot S.L + \frac{\mu_0 I^2}{2\times 4S^2} \iiint r^2 dr\, r\, d\theta\, dz$$

$$= \frac{\varepsilon_0 L}{2\gamma^2 S} I^2 + \frac{\mu_0 I^2}{8S^2} \frac{a^4}{4} \times 2\pi L$$

$$= \frac{\varepsilon_0 L}{2\gamma^2 S} I^2 + \frac{\mu_0 I^2}{16\pi^2 a^4} \pi a^4 . L$$

$$= \frac{\varepsilon_0 L}{2\gamma^2 S} I^2 + \frac{\mu_0 I^2 L}{16\pi} = \frac{L I^2}{2} \left(\frac{\varepsilon_0}{\gamma^2 S} + \frac{\mu_0}{4\pi} \right)$$

Voir problème étude d'un haut parleur (entier)

(1)

Étude d'un Haut parleur:

$\vec{B}$ → $\vec{B_a} = \vec{B}_{aimant}$ permanent → Induction de Lorentz ($\vec{B}$ permanent + bobine mobile) $\Rightarrow e_L$

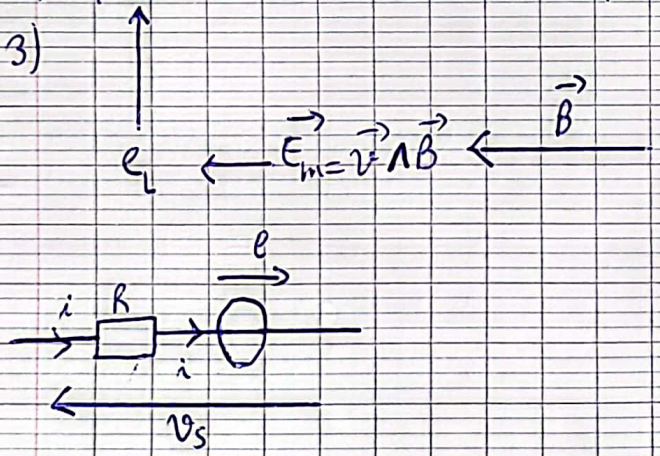
$\vec{B}$ → $\vec{B_p}$ non permanent → Induction de Neumann ($\vec{B}$ non permanent fixe / bobine).

$\Rightarrow e_N$.

$$\Rightarrow \begin{cases} e_L = e_m = \oint \vec{E}_m . d\vec{l} \quad \text{avec } \vec{E}_m = \vec{v} \wedge \vec{B} = v\vec{u_z} \wedge B\vec{u_r} = vB\vec{u_\theta} \\ e_N = e_p = -\frac{d\Phi_p}{dt} = -L\frac{di}{dt} \end{cases}$$

2) Tension → courant → $\vec{B}$ → Force de Laplace

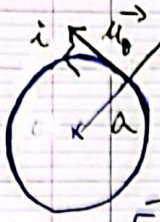
3)



$v_s = Ri - e$.

Scanné avec CamScanner

2) $d\vec{f_L} = i\,d\vec{\ell} \wedge \vec{B} = i\,a\,d\theta\,\vec{u_\theta} \wedge B\vec{u_r} = -i\,a\,B\,d\theta\,\vec{u_z}$



$\Rightarrow$ pour une spire : $\vec{f_L} = -i\,a\,B\,2\pi\,\vec{u_z}$

$\Rightarrow$ pour une bobine : $\vec{F_L} = N \times \vec{f_L}$

$\vec{F_L} = -i\,B\,\ell\,\vec{u_z}$

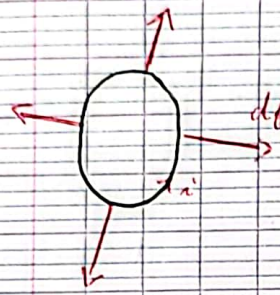
Remarque : $\vec{f_L}$ (projet) = ?

$d\vec{f_L}$ (projet) $= i\,d\vec{\ell} \wedge \vec{B_p} = i\,a\,d\theta\,\vec{u_\theta} \wedge B_p\vec{u_z}$ (main droite)

$d\vec{f_L}$ (projet) $= i\,a\,B_p\,d\theta\,\vec{u_r} \neq \vec{0}$

$\vec{f_L}$ (projet) $= \oint i\,a\,B_p\,d\theta\,\vec{u_r} = -i\,a\,B_p \oint d\vec{u_\theta} = -i\,a\,B_p\,[\vec{u_\theta}]_0^{2\pi} = \vec{0}$

$-d\vec{u_\theta}$



$\Rightarrow$ effet de déformation.

4) voir début ⊕ : $e_L = \int \vec{V}B\,\vec{u_\theta} \cdot d\ell\,\vec{u_\theta} = VB \int d\ell = VB\ell$

avec $\ell = (2\pi a) \times N$

d'où $e = e_L + e_N = v\,\ell - L\,\frac{di}{dt}$ (grandeur mécanique)

or $v_s = Ri - e \Rightarrow \boxed{v_s = Ri + L\frac{di}{dt} - \textcircled{v}B\ell}$ équation électrique

5) PFD appliqué à l'équipage mobile :

$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F_r} + \vec{F_L} + \vec{F_f} + \vec{P} + \vec{R_N}$

$m\frac{dv}{dt}\vec{u_z} = -Kz\,\vec{u_z} - i\,B\,\ell\,\vec{u_z} - f\,v\,\vec{u_z} + (\vec{P} + \vec{R_N})$

$\cdot\vec{u_z}$ ↳ $\boxed{m\frac{dv}{dt} = -Kz - \textcircled{i}B\ell - f\,v}$ Équation mécanique

↳ grandeur électrique.

Scanné avec CamScanner

6) $v_s(t) = V_{s_0}\cos(\omega t) \Rightarrow \underline{v_s} = V_{s_0} e^{j\omega t}$

(1): $v_s = Ri + L\frac{di}{dt} - vB\ell$

(2): $m\frac{dv}{dt} = -Kz - fv - iB\ell$

(1) N.C: $\underline{v_s} = R\underline{i} + jL\omega\underline{i} - \underline{v}B\ell \Rightarrow \frac{\underline{v_s}}{\underline{i}} = R + jL\omega - \frac{\underline{v}}{\underline{i}}B\ell$

(2) N.C: $mj\omega\underline{v} = -K\underline{z} - f\underline{v} - \underline{i}B\ell$

or $\underline{v} = \frac{d\underline{z}}{dt} = j\omega\underline{z} \Rightarrow (jm\omega + \frac{K}{j\omega} + f)\underline{v} = -\underline{i}B\ell$

$$\Rightarrow \frac{\underline{v}}{\underline{i}} = \frac{-B\ell}{f + jm\omega + \frac{K}{j\omega}}$$

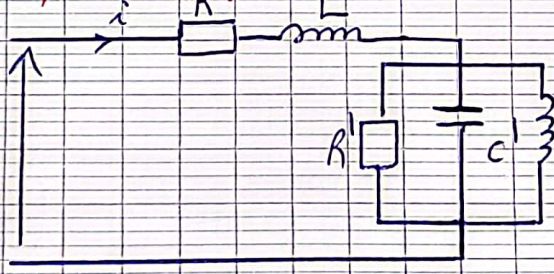
$$\underline{Z} = \frac{\underline{v_s}}{\underline{i}} = R + jL\omega + \underbrace{\frac{B^2\ell^2}{f + jm\omega + \frac{K}{j\omega}}}_{Z_{em}}$$

donc $\frac{1}{Z_{em}} = \frac{f}{B^2\ell^2} + j\left(\frac{m}{B^2\ell^2}\right)\omega + \frac{K}{jB^2\ell^2\omega}$

$$\frac{1}{Z_{em}} = \frac{1}{\frac{B^2\ell^2}{f}}_{R'} + j\underbrace{\left(\frac{m}{B^2\ell^2}\right)}_{C'}\omega + \frac{1}{j\underbrace{\left(\frac{B^2\ell^2}{K}\right)}_{L'}\omega}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{Z_{em}} = \frac{1}{Z_{R'}} + \frac{1}{Z_{C'}} + \frac{1}{Z_{L'}} = \frac{1}{R'} + jC'\omega + \frac{1}{jL'\omega}$$

donc par identification:



$R' \sim f$; $C' \sim m$; $L' \sim K$.

Scanné avec CamScanner

7/a)

① $\times i$: $v_s \times i = R i^2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} L i^2\right) - \underbrace{v B \ell i}_{P_{eL}}$ (1')

② $\times i$: $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m v^2\right) = -K_3 \frac{dz}{dt} - f v^2 + \underbrace{i B \ell v}_{P_L}$ (2')

Rq : $P_{eL} = e_L \times i = v B \ell \times i$

$\Rightarrow P_{eL} + P_L = 0$

$P_L = \vec{F_L} \cdot \vec{v} = -i B \ell \times v$

↑ translation

(1') − (2') : $v_s \times i - \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m v^2\right) = R i^2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} L i^2\right) - P_{eL} + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} K_3 z^2\right) + f v^2 - P_L$

$\Rightarrow \underbrace{v_s \times i}_{P_g} = \underbrace{R i^2}_{P_J} + \underbrace{f v^2}_{P_{(s)}=-P_f} + \frac{d}{dt}\left(\underbrace{\frac{1}{2} L i^2}_{E_{mag}} + \underbrace{\frac{1}{2} K_3 z^2}_{E_{élas}} + \underbrace{\frac{1}{2} m v^2}_{E_c}\right) - \underbrace{(P_{eL} + P_L)}_{0}$

$P_f = -f \cdot v^2$

↑ frottement

7/b) $\langle v_s \times i \rangle = R \langle i^2 \rangle + f \langle v^2 \rangle + \left\langle \frac{df(t)}{dt} \right\rangle$

avec $f(t) = \frac{1}{2} L i^2 + \frac{1}{2} K_3 z^2 + \frac{1}{2} m v^2$

rq $\langle F(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} F(t)\, dt$

$\left\langle \frac{df}{dt} \right\rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \frac{df}{dt} \times dt = \frac{1}{T}\left[f(t_0+T) - f(t_0)\right] = 0$ car $\begin{cases} v(t_0+T) = v(t_0) \\ i(t_0+T) = i(t_0) \\ z(t_0+T) = z(t_0) \end{cases}$

$\Rightarrow \langle P_g \rangle = \langle P_J \rangle + \langle P_S \rangle$

7/c) $\eta = \frac{\text{grandeur utile}}{\text{grandeur dépensée}} = \frac{\langle P_S \rangle}{\langle P_g \rangle} = \frac{\langle P_S \rangle}{\langle P_J \rangle + \langle P_S \rangle} = \frac{1}{1 + \frac{\langle P_J \rangle}{\langle P_S \rangle}}$

$= \frac{1}{1 + \frac{R \langle i^2 \rangle}{f \langle v^2 \rangle}}$

Si $R \downarrow \Rightarrow \eta \nearrow$. Rq : Si $B = 0 \Rightarrow F_L = 0 \Rightarrow v = 0$

$\Rightarrow \eta = 0$

Scanné avec CamScanner

Propagation des ondes électromagnétiques

I) Propagation de l'onde électromagnétique dans le vide :

On s'intéresse par la suite à la propagation d'ondes électromagnétiques dans une région vide de charges et de courant $\rho = 0$ et $\vec{j} = \vec{0}$.

1) Équation de D'Alembert :

Les équations de Maxwell s'écrivent dans ce cas :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} = 0 \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{B} = \mu_0 \left[\vec{j} + \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right] \end{cases} \quad \text{couplage E-M}$$

($\vec{j} = 0$)

↳ Équation de propagation de $\vec{E}$:

Il y'a une seule méthode : $\overrightarrow{\operatorname{rot}}$ (Maxwell faraday) :

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\left(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{E}\right) = -\overrightarrow{\operatorname{rot}}\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)$$

$$\overrightarrow{\operatorname{grad}}\left(\operatorname{div} \vec{E}\right) - \Delta \vec{E} = \frac{-\partial}{\partial t} \overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{B}$$

($\operatorname{div} \vec{E} = 0$)

$$\Delta \vec{E} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{B}\right) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$$

on pose $\mu_0 \varepsilon_0 = \dfrac{1}{c^2}$ $\quad (m^{-1}.s^2)$ (pour l'instant c est une cte on va mq par la suite que c'est la vitesse de la lumière dans le vide).

$$\Rightarrow \boxed{\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}}$$

Équation de D'alembert vérifiée par $\vec{E}$.

on pose $\square = \Delta - \dfrac{1}{c^2} \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}$ le D'Alembertien.

donc $\boxed{\square \vec{E} = \vec{0}}$

↳ Équation de propagation de $\vec{B}$: $\overrightarrow{\operatorname{rot}}$ (Maxwell Ampère) :

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\left(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{B}\right) = \overrightarrow{\operatorname{rot}}\left(\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$$

$$\overrightarrow{\operatorname{grad}}\left(\operatorname{div} \vec{B}\right) - \Delta \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{E}$$

($\operatorname{div} \vec{B} = 0$)

$$\Rightarrow -\Delta\vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) \Rightarrow \boxed{\Delta\vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}}$$

Equation de D'Alembert vérifiée par $\vec{B}$

donc $\boxed{\Box \vec{B} = \vec{0}}$

Remarque : En coordonnées cartésiennes :

$$\Delta\vec{E} = \Delta\left(E_x\vec{u_x} + E_y\vec{u_y} + E_z\vec{u_z}\right)$$

$$= (\Delta E_x)\vec{u_x} + (\Delta E_y)\vec{u_y} + (\Delta E_z)\vec{u_z}$$

or $\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$

proj $/\vec{Ox}$: $\Delta E_x - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0$

proj $/\vec{Oy}$: $\Delta E_y - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0$

proj $/\vec{Oz}$: $\Delta E_z - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0$

Avec :

$$\begin{cases} \Delta E_x = \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} \\ \Delta E_y = \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} \\ \Delta E_z = \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} \end{cases}$$

2) Solution de l'équation de D'Alembert :

Soit $f(M;t) = f(z;t)$ tq $\Delta f - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

L'équation de D'Alembert est invariante par symétrie d'espace et renversement du temps. En effet, $z \longrightarrow z'$; $t \longmapsto -t'$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial(-z')^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial(-t')^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial z'^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t'^2} = 0$$

On remarque alors que cette équation traduit un phénomène irréversible. (la méthode d'étude de l'irréversibilité c'est le calcul de S_c ou bien à travers l'équa diff par le changement de variable ci-dessous).

Exple : Oscillateur :

↳ en absence de frottements :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \xrightarrow{t \to -t'} \frac{d^2x}{dt'^2} + \omega^2 x = 0 \qquad \ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

même équation $\Rightarrow$ le déplacement est réversible

↳ en présence de frottements :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

$$\left(t \to -t' \right.$$

$$\frac{d^2x}{dt'^2} - \frac{\omega_0}{Q}\frac{dx}{dt'} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{ce n'est pas la même équation}$$

donc ce déplacement est irreversible.

(2) Diffusion thermique :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{1}{D}\frac{\partial T}{\partial t} = 0 \qquad \text{Equation de la chaleur.}$$

$$\begin{matrix} x \longmapsto -x' \\ t \longmapsto -t' \end{matrix} \Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x'^2} + \frac{1}{D}\frac{\partial T}{\partial t'} = 0$$

Dc la diffusion thermique est un phénomène irreversible (2. chaude $\xrightarrow{\not\to}$ 2. froide)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \quad \text{hypothèse : } \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial z}$$

$$\rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right) f = 0 \quad (*)$$

on pose $\begin{cases} p = z - ct \\ q = z + ct \end{cases}$ $f = f(z;t) \Rightarrow f = f(p;q)$

ou bien : $p = t - z/c$, $q = t + z/c$ $\Rightarrow f(z;t) = h(t - \frac{z}{c}) + g(t + \frac{z}{c})$

↳ $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial z}$

on obtiendra $f(z;t) = h(t - z/c) + g(t + z/c)$

en effet ; $df = \frac{\partial f}{\partial p} \cdot dp + \frac{\partial f}{\partial q} \cdot dq$

$$\Rightarrow \partial f = \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \partial p + \frac{\partial f}{\partial q} \cdot \partial q$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial z}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \cdot}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial p} \cdot \underbrace{\frac{\partial p}{\partial z}}_{1} + \frac{\partial}{\partial q}\underbrace{\frac{\partial q}{\partial z}}_{1}$$

d'où $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial q}$

↳ $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial p}\underbrace{\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)}_{=-c} + \frac{\partial}{\partial q}\underbrace{\left(\frac{\partial q}{\partial t}\right)}_{=+c}$

$\Rightarrow \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} = \frac{-\partial}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial q}$

$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} = 2\frac{\partial}{\partial p} \\ \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} = 2\frac{\partial}{\partial q} \end{cases}$

d'où d'après (*) $2\frac{\partial}{\partial p} \cdot 2\frac{\partial}{\partial q} f = 0$

$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial p}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial q}\right)_p\right]_q = 0$ (on peut aussi noter en bref : $\frac{\partial^2 f}{\partial p\,\partial q} = 0$

$\xrightarrow{\int . \partial p}$ $\left(\frac{\partial f}{\partial q}\right)_p = \text{cte}(q) = g'(q)$ ← car on va intégrer après

$\xrightarrow{\int . \partial q}$ $f(p;q) = \int g'(q) \cdot \partial q + \text{cte}(p) \Rightarrow f(p;q) = h(p) + g(q)$

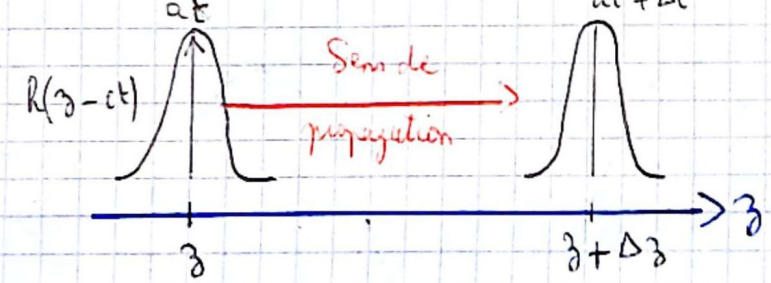
$\Rightarrow \boxed{f(z;t) = h(z-ct) + g(z+ct)}$

3) Interprétation de la solution de l'équation de D'Alembert :

↳ Soit $h(z-ct) = h\left((z+\Delta z) - c(t+\Delta t)\right)$ ← réapparaît

(a) onde progressive

hypothèse : h injective $\Rightarrow$ $z - ct = z + \Delta z - c(t+\Delta t) \Rightarrow 0 = \Delta z - c\Delta t \Rightarrow \Delta z = c\Delta t > 0$

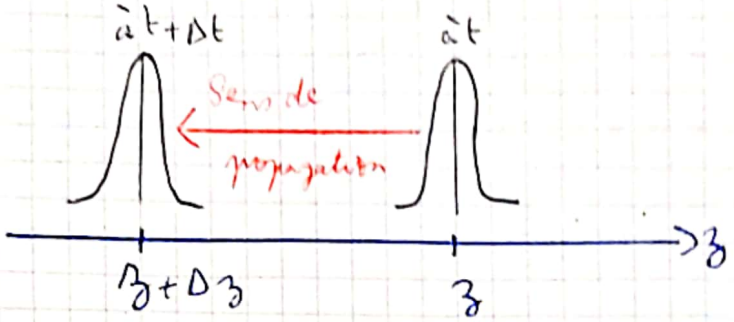


$v = \frac{(z+\Delta z) - z}{(t+\Delta t) - t} = \frac{\Delta z}{\Delta t} = c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$

or v est la vitesse de l'onde E.M dans le vide.

$\Rightarrow$ C est la vitesse de l'onde E.M dans le vide $= 3.10^8\ m.s^{-1}$.

de même : Soit $g(z+ct) = g(z+\Delta z) + c(t+\Delta t) \Rightarrow \Delta z = -c\Delta t < 0$



$z = \pm ct \Rightarrow$ terme de propagation

$h(z-ct) = R(-z+ct) = h\left(\underbrace{t-z/c}_{t-P/c}\right) = h(-t+z/c)$

Ccl : La solution de l'équation de D'alembert est la superposition de 2 ondes progressives, l'une dans le sens des $z\nearrow$ et l'autre dans le sens des $z\searrow$ (onde régressive).

Rq : onde progressive $\neq$ onde stationnaire

- onde progressive : couplage spatio-temporel $\Rightarrow$ existence d'un terme de propagation "$z \pm ct$"
- onde stationnaire : pas de couplage spatio-temporel. $\Rightarrow$ pas de terme de propagation.

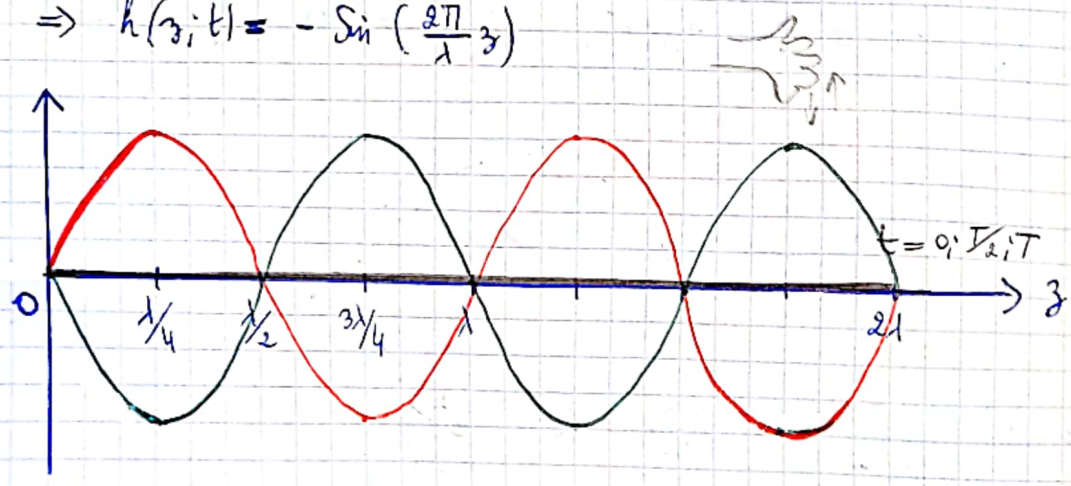
Exp : $h(z;t) = \sin(\omega t)\sin(Kz)$ avec $\begin{cases} \omega = \frac{2\pi}{T} \\ K = \frac{2\pi}{\lambda} \end{cases}$

$= \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}z\right)$

à $t = 0\ ;\ \frac{T}{2}\ ;\ T\ ;\ h(z;t) = 0\ \forall z$.

à $t = T/4 \Rightarrow h(z;t) = \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}z\right)$

à $t = \frac{3T}{4} \Rightarrow h(z;t) = -\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}z\right)$



c'est une onde qui vibre sur place = onde stationnaire

b) onde plane :

On définit la surface d'onde par l'ensemble des points M tq

$f(M;t) = cte$ à t donné

Exp 1 : 1) $f(M;t) = f(x;t)$

$f(x;t) = cte$ à t donné $\Rightarrow x = cte$ Équation d'un plan.

onde plane

2) $f(M;t) = f(y;t)$

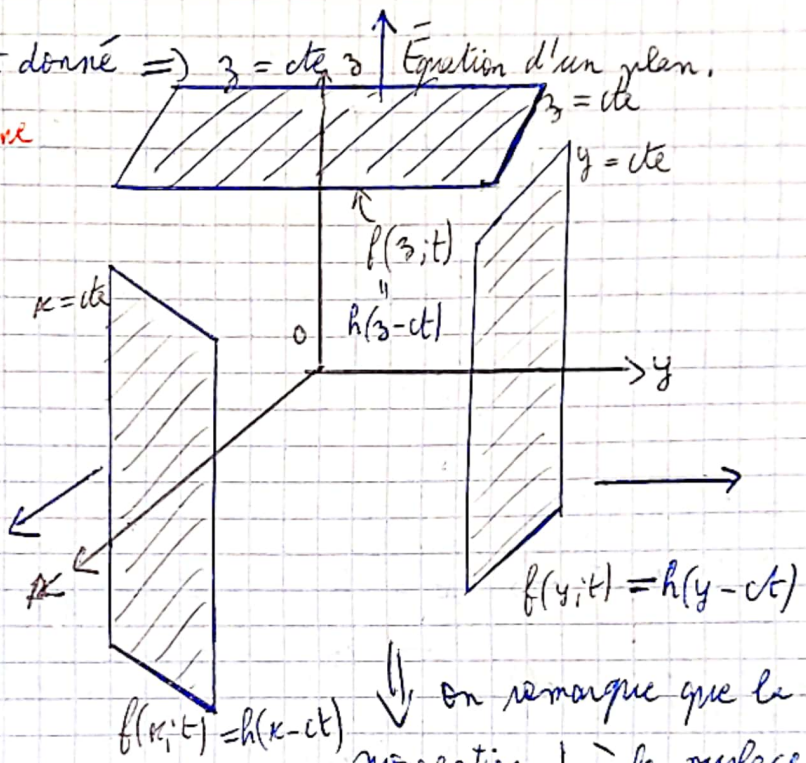
$f(y;t) = cte$ à t donné $\Rightarrow y = cte$ Équation d'un plan.

onde plane

3) $f(M;t) = f(z;t)$

$f(z;t) = cte$ à t donné $\Rightarrow z = cte$ Équation d'un plan.

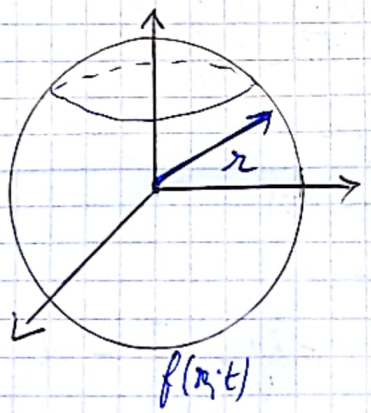
onde plane



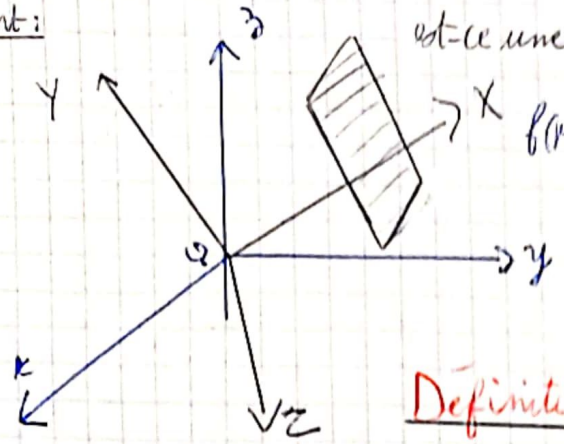
⇓ on remarque que la direction de propagation ⊥ à la surface d'onde

4) $r = OM$ (Base sphérique)

$f(r;t) = cte$ à t donné $\Rightarrow r = cte$ Équation d'une sphère $\Rightarrow$ onde sphérique.



Questionnement :



est-ce une onde plane ?

$f(M;t) = f(x;t)$

Christian Garin

Magnétisme
ondes électromagnétiques

* Laurence
* effet Zeeman
* expérience de Stern Gerlach.
* Moteur continu
* Moteur synchrone / asynchrone

* Milieu magnétiques (PSI)

Définition :

Une onde est dite plane s'il existe un système de coordonnées cartésiennes tq l'onde ne dépend que d'une seule variable d'espace et de temps.

Comment savoir si une onde est plane ?:

1) on voit si sa direction de propagation est cte cf exp ① ; ② ; ③ ; ⑤ dans ④ ce n'est pas le cas. ⚠ condition nécessaire mais pas suffisante.

2) on prend un plan ⊥ à la direction de propagation et on détermine si l'onde est cte sur ce plan.

Autres exemples :

↳ $f(M;t) = g(x) \cdot h(x - ct)$

$f(M;t)$ cte à t donné $\Rightarrow$ $x = cte$ c'est une onde plane.

↳ $f(M;t) = g(y) \cdot h(\underbrace{x - ct}_{\text{terme de propagation}})$

→ couplage spatio-temporel entre x et t

→ pas de couplage spatio-temporel entre y et t.

$\Rightarrow$ c'est une onde progressive suivant x et stationnaire suivant y.

↳ $f(M;t) = g \circ h(\alpha x + \beta y + \gamma z - ct)$ avec $\alpha ; \beta ; \gamma$ ctes.

Rq : $h(x - ct) = h(\vec{OM} \cdot \vec{u_x} - ct)$

$h(y - ct) = h(\vec{OM} \cdot \vec{u_y} - ct)$

$h(z - ct) = h(\vec{OM} \cdot \vec{u_z} - ct)$

$h(r - ct) = h(\vec{OM} \cdot \vec{u_r} - ct)$

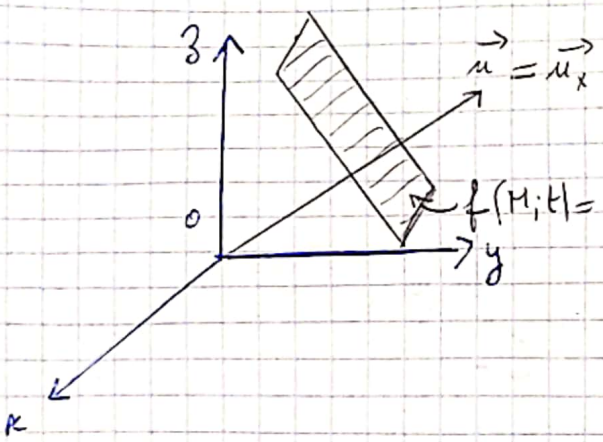
direction de propagation

$h(\alpha x + \beta y + \gamma z - ct) = h(\vec{OM} \cdot \vec{k} - ct)$

$\alpha x + \beta y + \gamma z = (\alpha \vec{u_x} + \beta \vec{u_y} + \gamma \vec{u_z}) \cdot (x \vec{u_x} + y \vec{u_y} + z \vec{u_z})$

$\vec{K}$; $\vec{OH}$

$= \vec{OH} \cdot \vec{K} = \vec{OH} \cdot K \cdot \vec{u}$ avec $\vec{u} = \vec{cte}$



$f(M;t) = cte \Rightarrow$ onde plane

↳ $f(M;t) = h(K) \cdot h(\alpha x + \beta y + \gamma z - ct)$ onde non plane

↳ $f(M;t) = h(r - ct) = h(\vec{OH} \cdot \vec{u_x} - ct) \Rightarrow$ onde non plane

$\vec{u_x} = \vec{cte}$

CCL: La solution de l'équation de D'Alembert : $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$ est $f(z;t) = h(z - ct) + g(z + ct)$

la solution est la superposition de 2 ondes planes progressives l'une se propage dans le sens des z ↗, l'autre dans le sens des z ↘ avec une vitesse C.

EX: Soit $f(M;t) = f(r;t)$ une onde sphérique qui vérifie l'équation de D'Alembert : $\Delta f - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$.

résoudre cette équation sachant que le laplacien de f est :

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rf)}{\partial r^2}$$

Résolution : $\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rf)}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$

$\Rightarrow \frac{\partial^2 (rf)}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 (rf)}{\partial t^2} = 0$

on pose $F = rf \Rightarrow \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0$

$\Rightarrow F(r;t) = h(r - ct) + g(r + ct)$

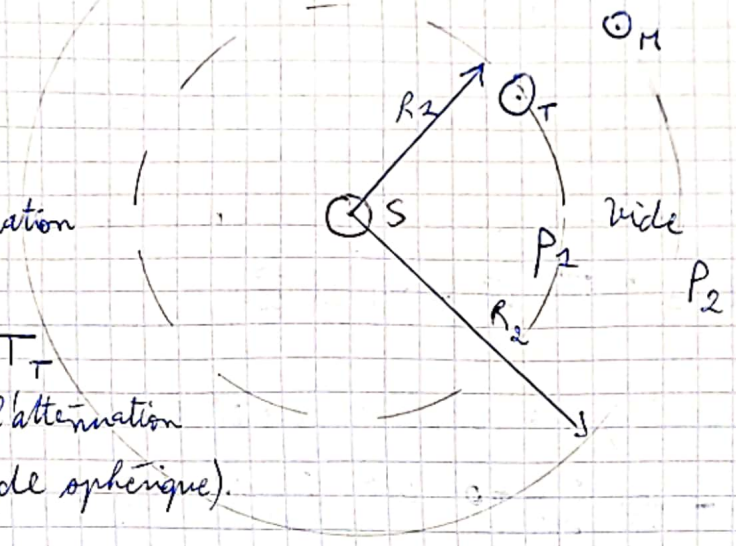
CamScanner

$\Rightarrow f(r) = \underbrace{\frac{1}{r} h(r-ct)}_{\text{O. sphérique qui se propage dans le sens des } r \nearrow \Rightarrow \frac{1}{r} \text{ est un terme d'atténuation}} + \underbrace{\frac{1}{r} g(r+ct)}_{\text{O. sphérique qui se propage dans le sens des } r \searrow \Rightarrow \frac{1}{r} \text{ est un terme d'amplification}}$

Remarque :

Atténuation $\neq$ dissipation.

Exp :



$P_1 = P_2 \Rightarrow$ pas de dissipation (vide)

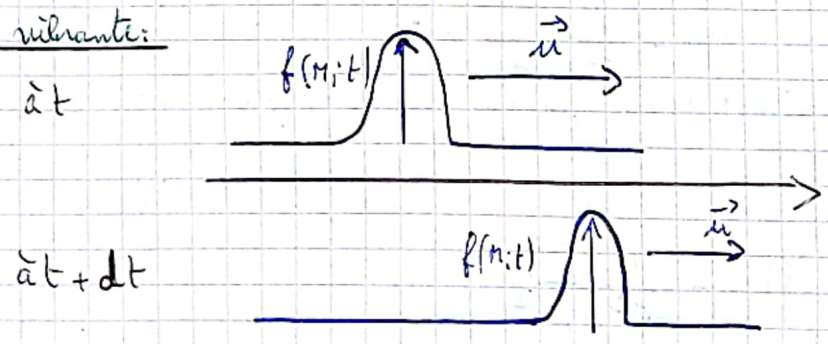
mais $T_M < T_T$ à cause de l'atténuation (c'est une onde sphérique).

4) Onde transversale / onde longitudinale :

Soit $f(M;t)$ un champ scalaire ou vecteur de direction de propagation $\vec{u}$.

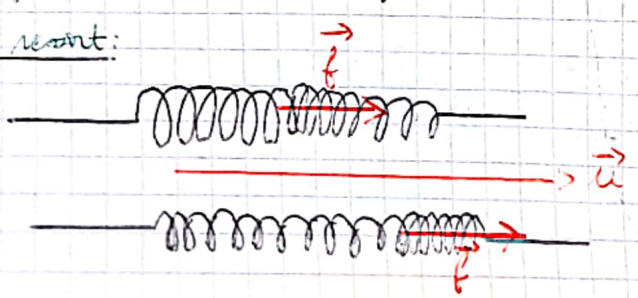
- l'onde est dite transversale si $\vec{u} \perp f(M;t)$

Exp corde vibrante :



l'onde est dite longitudinale si $\vec{u} \parallel \vec{f}$.

Exp : spire d'un ressort :



5) Relations de structure : Soit $\vec{E}(M;t) = \vec{E}(t - z/c)$ et $\vec{B}(M;t) = \vec{B}(t - z/c)$

1) Montrer que l'onde électrique est transversale en utilisant Maxwell Gauss.

2) Montrer que l'onde magnétique est transversale en utilisant Maxwell flux

3) Mq $\vec{\nabla} = \frac{-\vec{u_z}}{c} \frac{\partial .}{\partial t}$ (généralisation de $\Delta z = c\,\Delta t$ sous forme vectorielle)

4) Établir les relations de structure

Solution :

1) $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0 \Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$ (E_x, E_y ne dépendent pas de x et y, E_z)

$\Rightarrow \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$

$\Rightarrow E_z(t - z/c) = E_z(t) = 0$ car l'onde doit dépendre de l'espace et du temps.

donc $\vec{E} = E_x \vec{u_x} + E_y \vec{u_y} \perp \vec{u_z} \Rightarrow$ onde transversale électrique.

2) de même $\operatorname{div} \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{B} = B_x \vec{u_x} + B_y \vec{u_y} \perp \vec{u_z} \Rightarrow$ onde transverse magnétique

3) $\vec{\nabla}.\vec{E} = \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\partial (\vec{E}.\vec{u_z})}{\partial z}$

$\vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{\partial \vec{E}(t - z/c)}{\partial z} \vec{u_z} = \frac{\partial \vec{E}(t - z/c)}{\partial t} \times \frac{\partial t}{\partial (t - z/c)} \times \frac{\partial (t - z/c)}{\partial z} \vec{u_z}$

$\frac{\partial t}{\partial (t - z/c)} = \frac{\partial (t - z/c)}{\partial t} = 1$

$= \frac{\partial \vec{E}(t - z/c)}{\partial t} \times \underbrace{\frac{\partial t}{\partial (t - z/c)}}_{1} \times \left(\frac{-1}{c}\right) \vec{u_z}$

$\vec{\nabla}.\vec{E} = \frac{-u_z}{c} \frac{\partial \vec{E}(t - z/c)}{\partial t}$

$\Rightarrow \vec{\nabla} = \frac{-u_z}{c} \times \frac{\partial}{\partial t}$

⇒ généralisation : $\vec{\nabla} = \frac{-\vec{u}}{c} \frac{\partial}{\partial t}$

4) $\overrightarrow{rot}\,\vec{E} = \frac{-\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$\Rightarrow \frac{-\vec{u}}{c} \frac{\partial}{\partial t} \wedge \vec{E} = \frac{-\partial \vec{B}}{\partial t}$

$\Rightarrow \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c}\right)$ (c'est $\vec{B} = \frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c} + cte(\vec{z})$ n'est pas une onde)

$\Rightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c}}$ relation de structure (M.F)

Rq : on peut multiplier par cte(z) ça sera une amplitude mais pas avoir un terme tout seul dépendant que de z

et on a aussi :

$\overrightarrow{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \left[\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right]$

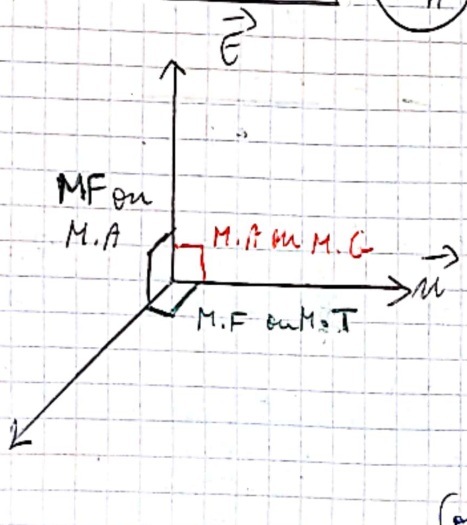
$\Rightarrow \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

$\Rightarrow \frac{-\vec{u}}{c} \frac{\partial}{\partial t} \wedge \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

$\Rightarrow \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{-\partial}{\partial t}(\vec{u} \wedge \vec{B})$

$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = -c\, \vec{u} \wedge \vec{B}}$ Relation de structure (M.A)

3) et 4) valables dans le cas d'une onde plane progressive dans le vide



$(\vec{E}; \vec{B}; \vec{u})$ forme un trièdre direct ⇒ l'onde est transversale électromagnétique.

Rq : $\|\vec{B}\| = \left\|\frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c}\right\|$

$\Rightarrow B = \frac{E}{c}$

(on ne peut pas comparer B et E car ils n'ont pas la même dimension !)

6) Onde Monochromatique :

Monochromatique = harmonique = sinusoïdale :

On considère une O.P.P.M (onde plane progressive monochromatique) qui se propage suivant l'axe z :

$$f(M;t) = f_0 \cos(\omega t - Kz + \varphi_0)$$

Eq : $Kz = \vec{k} \cdot \vec{OM}$ avec $\vec{k} = K \cdot \vec{u_z}$ sens de propagation

f_0 : est l'amplitude de l'onde.

$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$: est la pulsation, T est la période temporelle ; $f = \frac{1}{T}$ est la fréquence, c'est le nombre de périodes par unité de temps.

$\vec{K} = K\vec{u_z} = 2\pi\sigma\vec{u_z} = \frac{2\pi}{\lambda}\vec{u_z}$

$\vec{K}$ est le vecteur d'onde

λ : est la période spatiale = longueur d'onde

$\sigma = \frac{1}{\lambda}$ est le nombre d'onde.

φ_0 : est la phase à l'origine d'espace et de temps.

$\varphi(z;t) = \omega t - Kz + \varphi_0$ est la phase au point M à l'instant t qui traduit le couplage spatio-temporel.

Rq 1 : ω est une grandeur intrinsèque de l'onde qui ne dépend pas du milieu par contre K dépend du milieu.

Remarque (2) :

$f(z;t) = f_0 e^{-Kz} \cos(\omega t + \varphi_0)$ est une onde plane, stationnaire (pas de couplage spatio-temporel) monochromatique.

$f(z;t) = cte$ à t donné $\Rightarrow z = cte$ (plane)

monochromatique car sinusoïdale en fonction du temps ⚠

Remarque (3) : pour une "OEM" P.P.M.T qui se propage selon $z\nearrow$.

$$\vec{E} = \begin{cases} E_x = E_{0x}\cos(\omega t - Kz + \varphi_{0x}) \\ E_y = E_{0y}\cos(\omega t - Kz + \varphi_{0y}) \\ E_z = 0 \quad (T.E) \end{cases} \longrightarrow \vec{B} = \frac{\vec{u_z} \wedge \vec{E}}{c}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/c \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{vmatrix} = \begin{cases} B_x = \frac{E_y}{c} = \frac{E_{0y}}{c}\cos(\omega t - Kz + \varphi_{0y}) \\ B_y = \frac{E_x}{c} = \frac{E_{0x}}{c}\cos(\omega t - Kz + \varphi_{0y}) \\ B_z = 0 \quad (T.M) \end{cases}$$

⚠ **Remarque (4) :** L'O.P.P.M n'a pas de réalité physique car elle est illimitée transversalement (onde plane) et longitudinalement (monochromatique).

↳ On ne calculera pas la suite l'énergie d'une onde qui contient $\forall dz$ donc si elle est présente pendant un temps à t donné volume infini $\Rightarrow$ énergie infinie !

(Df du cos c'est $\mathbb{R}$ de $-\infty$ à $+\infty$).

En Notation complexe :

$$\begin{cases} -j\vec{K}\cdot\vec{E} = 0 \\ -j\vec{K}\cdot\vec{B} = 0 \\ -j\vec{K}\wedge\vec{E} = -j\omega\vec{B} \\ -j\vec{K}\wedge\vec{B} = \frac{1}{c^2} j\omega\vec{E} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{K}\cdot\vec{E} = 0 & \text{T.E} & \vec{E}\perp\vec{K} \\ \vec{K}\cdot\vec{B} = 0 & \text{T.M} & \vec{B}\perp\vec{K} \\ \vec{B} = \frac{\vec{K}\wedge\vec{E}}{\omega} & \leftarrow \text{relations de structure} & \\ \vec{E} = -c^2\frac{\vec{K}\wedge\vec{B}}{\omega} & & \end{cases}$$

$\vec{\nabla} \equiv -j\vec{K}$ et $\frac{\partial}{\partial t} = j\omega$ et les 2 relations de structures valables dans le cas d'une OPP M dans le vide.

$\vec{B} = \frac{\vec{K}\wedge\vec{E}}{\omega}$ Maxwell Faraday

$\vec{E} = -c^2\frac{\vec{K}\wedge\vec{B}}{\omega}$ Maxwell Ampère.

$\vec{K}\wedge(M.F)$: $\vec{K}\wedge\vec{B} = \vec{K}\wedge\left(\frac{\vec{K}\wedge\vec{E}}{\omega}\right) = \frac{1}{\omega}\left[\vec{K}.\overbrace{(\vec{K}\cdot\vec{E})}^{0 \text{ TE}} - \vec{E}(\vec{K}\cdot\vec{K})\right]$

$\Rightarrow \frac{-\omega}{c^2}\vec{E} = \frac{-K^2\vec{E}}{\omega}$

$\Rightarrow K^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$

$\Rightarrow \boxed{K = \frac{\omega}{c}}$

Relation de dispersion ($K = f(\omega)$) dans le vide (? → voir cours plasma)

donc $\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{T}\times\frac{1}{c} \Rightarrow \boxed{\lambda = cT}$

8) Aspect énergétique :

a) cas d'une OPP :

Densité volumique d'énergie électromagnétique :

$$\mathcal{U}_{em} = \underbrace{\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2}_{\mathcal{U}_e} + \underbrace{\frac{B^2}{2\mu_0}}_{\mathcal{U}_m}$$

or $\mathcal{U}_m = \frac{B^2}{2\mu_0}$ avec $B = \frac{E}{c} \Rightarrow \mathcal{U}_m = \frac{E^2}{2\mu_0 c^2} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}$

d'où $\boxed{\mathcal{U}_m(M;t) = \mathcal{U}_e(M;t)}$ équipartition de l'énergie entre la composante électrique et magnétique.

$\Rightarrow \mathcal{U}_{em} = \frac{B^2}{\mu_0} = \varepsilon_0 E^2$ (1)

↳ Vecteur de Poynting :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E.B}{\mu_0}\vec{u} = \frac{E^2}{\mu_0 C}\vec{u}$$

$$\boxed{\vec{\Pi} = C(\varepsilon_0 E^2)\,\vec{u}}$$

2

↳ Relation entre $\vec{\Pi}$ et $\vec{V}_{em}$:

$$\vec{\Pi}(M;t) \rightarrow \boxed{\vec{\Pi} = C \cdot u_{em} \cdot \vec{u} = u_{em} \cdot \vec{C}}$$

$(\vec{J} = \rho\,\vec{v}) = \rho v \vec{u}$.

$\updownarrow \vec{\Pi}$ $\quad \updownarrow u_{em}$

$\vec{K} = K\vec{u}$ direction de propagation de l'onde

C : vitesse de propagation de l'onde $\overset{?}{=}$ vitesse de déplacement de l'E.M.

$\vec{u}$: direction de déplacement de l'énergie électromagnétique

Caractérise le déplacement de l'énergie E.M (et non pas de propagation)

il peut avoir une moyenne temporelle pour un point M fixé (nous donne la direction de propagation) nulle donc pas de propagation mais tout de même il y'a déplacement (propagation ⇒ déplacement en moyenne non nul).

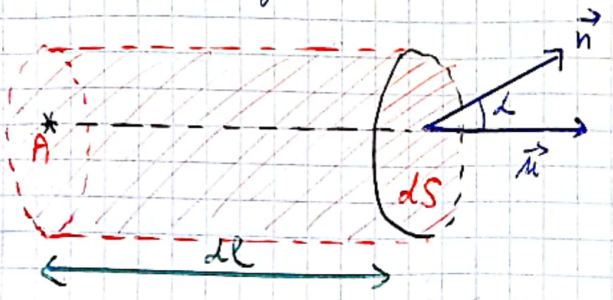
Montrer que la vitesse de propagation de l'énergie électromagnétique est $v_e = C$:

Démo : Bilan énergétique :

on considère une surface élémentaire $\vec{dS}$; $\vec{u}$ la direction de propagation et v_e la vitesse de propagation de l'énergie E.M.

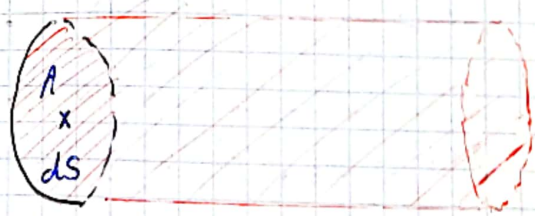
- l'énergie qui traverse dS entre t et t+dt est contenue dans le cylindre de surface dS et de longueur $dl = v_e . dt$:

À t



$$v_e = \frac{dl}{dt}$$

À t+dt



↳ $\delta^2 \mathcal{U}_{em} = \mathcal{U}_{em}(M;t) \cdot \delta^2\tau = \mathcal{U}_{em}(M;t) \cdot d\vec{S} \cdot d\vec{\ell}$

$\delta^2 \mathcal{U}_{em} = \mathcal{U}_{em}(M;t)\, dS \cdot d\ell \cdot \cos(\alpha)$

$\delta^2 \mathcal{U}_{em} = \mathcal{U}_{em}(M;t)\, dS \cdot v_e \cdot dt \cdot \cos(\alpha)$ (1)

↳ $\delta^2 \mathcal{U}_{em} = \delta P_{rayonné} \cdot dt = \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} \cdot dt = \Pi\, \vec{u} \cdot d\vec{S} \cdot dt$

$= c\, \mathcal{U}_{em}(M;t)\, dS \cos\alpha\, dt$ (2)

par identification $\boxed{v_e = c}$

b) cas d'une OPPM :

$\vec{E} = \begin{vmatrix} E_x = E_{0x}\cos(\omega t - kz + \varphi_{0x}) \\ E_y = E_{0y}\cos(\omega t - kz + \varphi_{0y}) \end{vmatrix} \rightarrow \underline{\vec{E}} = \begin{vmatrix} \underline{E_x} = \underline{E_{0x}}\, e^{j(\omega t - kz)} \\ \underline{E_y} = \underline{E_{0y}}\, e^{j(\omega t - kz)} \end{vmatrix}$

↳ $\mathcal{U}_{em} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0} = \varepsilon_0 E^2$

↳ $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = c \cdot \mathcal{U}_{em} \cdot \vec{u}$

} cas d'une O.P.P

obj : $\langle \mathcal{U}_{em} \rangle = ?$; $\langle \vec{\Pi} \rangle = ?$

i) en notation réelle :

↳ $\langle \mathcal{U}_{em}(M;t) \rangle = \varepsilon_0 \langle E^2 \rangle = \varepsilon_0 \langle \vec{E}^2 \rangle = \varepsilon_0 \langle E_x^2 + E_y^2 \rangle$

$= \varepsilon_0 \left(\frac{E_{0x}^2}{2} + \frac{E_{0y}^2}{2} \right)$

$= \frac{\varepsilon_0}{2} \left(E_{0x}^2 + E_{0y}^2 \right)$

↳ $\langle \vec{\Pi} \rangle = c \langle \mathcal{U}_{em} \rangle \cdot \vec{u} = \frac{\varepsilon_0 c}{2} \left(E_{0x}^2 + E_{0y}^2 \right) \vec{u}$.

↑ moyenne temporelle

ii) en notation complexe :

$\boxed{\langle f \cdot g \rangle = \frac{1}{2} Re\left(\underline{f} \cdot \underline{g}^* \right)}$ valable avec produit scalaire / vectoriel.

↳ $\langle \mathcal{U}_{em}(M;t) \rangle = \varepsilon_0 \langle E^2 \rangle = \frac{\varepsilon_0}{2} Re\left(\underline{\vec{E}} \cdot \underline{\vec{E}}^* \right)$

$\langle \mathcal{U}_{em}(M;t) \rangle = \frac{\varepsilon_0}{2} Re\left(\underline{\vec{E}_0} \cdot \underline{\vec{E}_0}^* \right) = \frac{\varepsilon_0 \| \vec{E_0} \|^2}{2}$

$\langle \mathcal{U}_e(M;t) \rangle = \frac{\varepsilon_0}{2} \left(E_{0x}^2 + E_{0y}^2 \right)$

↳ $\langle \vec{\Pi} \rangle = \left\langle \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right\rangle = \frac{1}{2\mu_0} Re\left(\underline{\vec{E}} \wedge \underline{\vec{B}}^* \right) = \frac{\varepsilon_0 c}{2} \left(E_{0x}^2 + E_{0y}^2 \right) \vec{u}$

CamScanner

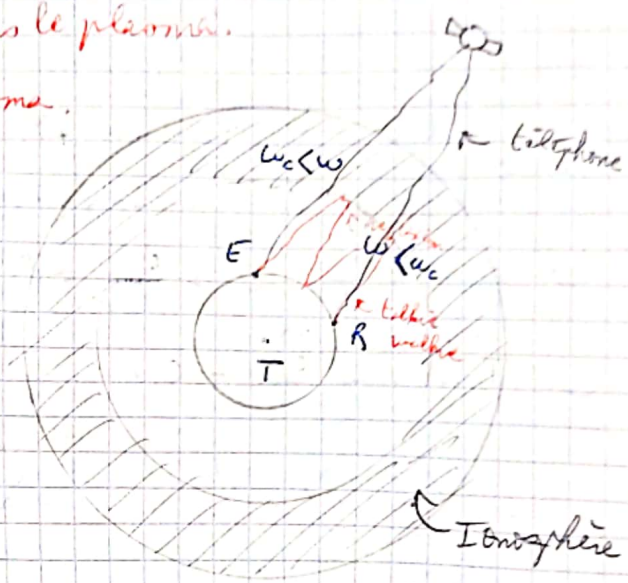
II) Propagation de l'onde électromagnétique dans le plasma:

1) définition: un plasma est un milieu ionisé globalement neutre et dilué constitué des ions (par exemple de charges $+e$ de densité n^+ et de masse M) et d'électrons (de charge $-e$, de densité n^- et de masse m), les 2 type de charges sont considérées sans interaction entre elles. [Exp: ionosphère / soleil / lampe / sans écran plasma ... etc]

obj:

↳ condition de propagation de l'onde dans le plasma.

↳ la structure de l'onde dans le plasma.



Rq:

↳ $\rho = \rho_+ + \rho_- = n^+ x(+e) + n^- x(-e)$

or $n^+ = n^- = n \Rightarrow \rho = 0$

↳ $\vec{J} = \vec{J}_+ + \vec{J}_-$

$= \rho_+ \vec{v}_+ + \rho_- \vec{v}_-$

$= ne(\vec{v}_+ - \vec{v}_-)$

$\vec{v} \neq \vec{0}$

⚠ $\vec{v}_+ \neq \vec{v}_-$ on peut même écrire $v_+ << v_-$ car $M_{ion} >> m_e$.

2) les équations de l'onde électromagnétique dans le plasma:

les équations de Maxwell s'écrivent dans le plasma:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{E} = 0 & (\rho = 0) \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{B} = \mu_0 \left[\vec{J} + \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right] \end{cases}$$

↳ **équation de propagation de $\vec{E}$:**

$\overrightarrow{\operatorname{rot}}$ (M.I.F): $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{E} = \overrightarrow{\operatorname{rot}} \left(-\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)$

$\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, \operatorname{div} \vec{E}^{0} - \Delta \vec{E} = -\dfrac{\partial}{\partial t} \overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{B} \Rightarrow \Delta \vec{E} = \dfrac{\partial}{\partial t} \left[\mu_0 \left(\vec{J} + \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \right]$

$$\boxed{\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} = 0}$$

CamScanner

↳ équation de propagation de $\vec{B}$:

$\vec{rot}(M.A)$: $\vec{rot}(\vec{rot}\,\vec{B}) = \mu_0\left[\vec{rot}\,\vec{j} + \vec{rot}\left(\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)\right]$

$\overrightarrow{grad}\,div\,\vec{B} - \Delta\vec{B} = \mu_0\,\vec{rot}\,\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\,\vec{rot}\,\vec{E}$

$\Delta\vec{B} = -\mu_0\,\vec{rot}\,\vec{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)$

$$\boxed{\Delta\vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} + \mu_0\,\vec{rot}\,\vec{j} = \vec{0}}$$

Ces 2 équations ne sont pas des équations de propagation car $\vec{j}$ est inconnue

or on sait que $\vec{j} = \gamma\vec{E}$ Cependant :

$\vec{j} = \gamma\vec{E}$ conducteur métallique + régime stationnaire

or le plasma n'est pas un conducteur métallique + le régime est variable.

γ ici sera alors en régime variable un complexe

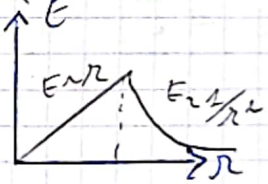
Cherchons $\vec{j}$: le PFD appliqué sur l'électron s'écrit (Centrale 2011 MP) (Centrale PC 2003)

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F_e} + \vec{F_m} + \vec{F_f} + m\vec{g} + \vec{F_r}$$

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} - e\vec{v}\wedge\vec{B} - \alpha\vec{v} + m\vec{g} - K\vec{r}$$

$\vec{F_f} = -\alpha\vec{v}$: Force de frottement qui modélise les chocs (modèle de Drude)

$\vec{F_r} = -K\vec{r}$: Force de rappel qui modélise les intéractions (modèle de Thomson)



Hypothèses :

↳ $F_r = -K\vec{r} \simeq \vec{0}$ les intéractions négligeables

($F_r = \frac{-K}{r^2}\vec{u_r}$ r très grand / car milieu dilué.

↳ $\frac{\|m\vec{g}\|}{\|-e\vec{E}\|} \sim \frac{10^{-31}\times 10}{10^{-15}\times 100} = 10^{-13} \ll 1$ (*)

↳ $\frac{\|\vec{F_m}\|}{\|\vec{F_e}\|} \sim \frac{evB}{eE}$ or $B \sim \frac{E}{c}$ donc $\frac{\|\vec{F_m}\|}{\|\vec{F_e}\|} \sim \frac{v}{c} \ll 1$ (*)

↳ $\vec{F_f} = -\alpha\vec{v} \simeq \vec{0}$ les chocs sont négligeables.

↳ $\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\overrightarrow{grad})\cdot\vec{v}$ | $\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}$: acc. locale ; $(\vec{v}\cdot\overrightarrow{grad})\cdot\vec{v}$ acc convective

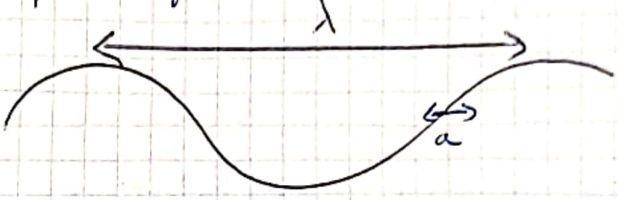
$$\frac{\|(\vec{v}\cdot\vec{\text{grad}})\cdot\vec{v}\|}{\|\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}\|} \sim \frac{v\cdot K\cdot \cancel{v}}{\omega\cdot \cancel{v}} = K\cdot\frac{v}{\omega}$$

$\left(\cancel{\vec{j}\cdot\vec{\text{grad}} = -\vec{j}\cdot\vec{k}}\right)$
$\vec{\nabla} = -\vec{j}\cdot k)$
(dans le vide oppn)

$$z = a\cos(\omega t - Kx) \longrightarrow v = \dot{z} \sim a\omega$$

$$\frac{\|(\vec{v}\cdot\vec{\text{grad}})\cdot\vec{v}\|}{\|\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}\|} \sim \frac{2\pi}{\lambda}\,\frac{a\cancel{\omega}}{\cancel{\omega}} \sim \frac{a}{\lambda}$$

On suppose que le champ $\vec{E}$ est quasi uniforme devant le déplacement de l'e^- $(\lambda \gg a)$



donc $\boxed{\frac{d\vec{v}}{dt} \sim \frac{\partial\vec{v}}{\partial t}}$ (*)

les hypothèses (*) sont tjrs faites
les autres peuvent changer.

CCl : $m\frac{\partial\vec{v}_-}{\partial t} = -e\vec{E}$

notation complexe $\longrightarrow$ $mj\omega\,\underline{\vec{v}}_- = -e\,\underline{\vec{E}} \Rightarrow \underline{\vec{v}}_- = \frac{-e}{jm\omega}\underline{\vec{E}}$

or $\underline{\vec{J}}_- = n(-e)\,\underline{\vec{v}}_- \Rightarrow \boxed{\underline{\vec{J}}_- = -j\frac{ne^2}{m\omega}\underline{\vec{E}}}$

de même $\boxed{\underline{\vec{J}}_+ = -j\frac{ne^2}{M\omega}\underline{\vec{E}}}$

or $\vec{J} = \underline{\vec{J}}_+ + \underline{\vec{J}}_- \Rightarrow \underline{\vec{J}} = \frac{-jne^2}{\omega}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)\vec{E}$

$\Rightarrow \boxed{\underline{\vec{J}} = \underline{\gamma}\,\underline{\vec{E}}}$ avec $\underline{\gamma} = \frac{-jne^2}{\omega}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)$
est un imaginaire pur

D'où les équations de propagation s'écrivent :

$$\begin{cases} \Delta\underline{\vec{E}} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\underline{\vec{E}}}{\partial t^2} - \mu_0\underline{\gamma}\frac{\partial\underline{\vec{E}}}{\partial t} = \vec{0} \\ \Delta\underline{\vec{B}} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\underline{\vec{B}}}{\partial t^2} - \mu_0\underline{\gamma}\frac{\partial\underline{\vec{B}}}{\partial t} = \vec{0} \end{cases}$$

or $\vec{\text{rot}}\,\underline{\vec{J}} = \underline{\gamma}\,\vec{\text{rot}}\,\underline{\vec{E}} = \underline{\gamma}\left(-\frac{\partial\underline{\vec{B}}}{\partial t}\right)$

Interprétation physique :

↳ la puissance volumique moyenne cédée par le champ à la matière
= la puissance volumique moyenne dissipée

$$\langle p_v \rangle = \langle \vec{j} \cdot \vec{E} \rangle = \frac{1}{2} Re\left(\vec{j} \cdot \vec{E}^*\right) = \frac{1}{2} Re\left(\underline{\gamma}\, \vec{E}\, \vec{E}^*\right)$$

$$= \frac{\|\vec{E}\|^2}{2} Re(\underline{\gamma}) = 0$$

car $\underline{\gamma}$ est un imaginaire pur.

⇒ pas de dissipation d'énergie par effet joule dans le plasma (pas de chocs)

Généralisation :

$$\underline{\gamma} = \gamma_1 + j\gamma_2$$

γ_1 : effet résistif ; γ_2 : effet inductif ou capacitif (selon son signe).

$$\langle p_v \rangle = \frac{\|\vec{E}\|^2}{2} Re(\underline{\gamma}) = \frac{\|\vec{E}\|^2}{2} \gamma_1$$

Exp :

$$\underline{Z} = \frac{1}{j\gamma_2} \frac{L}{S} = ; \quad \underline{Z_C} = \frac{1}{jCw} \; ; \; \underline{Z_L} = \frac{Lw}{j(-1)}$$

donc Si $\gamma_2 > 0$ capacitif
Si $\gamma_2 < 0$ inductif.

3) Solution de l'équation de propagation :

Relation de dispersion : $K = f(w)$

$K = \frac{w}{c}$ dans le vide ici c'est le plasma

On s'intéresse par la suite à la propagation d'une grandeur OPPM

$\vec{E} = \vec{E_0}\, e^{j(wt + \underline{K}z)}\, \vec{u_x}$. On remplace cette expression dans l'équation de propagation :

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu_0 \underline{\gamma} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$$

onde réelle = superposition d'OPPM

$$\hookrightarrow (j\underline{K})^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} (jw)^2 \vec{E} - \mu_0 \underline{\gamma}\, jw\, \vec{E} = \vec{0}$$

$$-\underline{K}^2 + \frac{w^2}{c^2} - j\mu_0 \underline{\gamma} w = 0$$

$$\Rightarrow \underline{K}^2 = \frac{w^2}{c^2} - j\mu_0 \frac{-jne^2}{w} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right) \cdot w$$

$$\underline{K}^2 = \frac{w^2}{c^2} + j^2 \mu_0 ne^2 \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right)$$

$$= \frac{w^2}{c^2} - \frac{ne^2}{\varepsilon_0 c^2} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right)$$

On pose $\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)}$ pulsation plasma

$$\Rightarrow \boxed{\underline{K}^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}}$$ Relation de dispersion

on distingue par la suite 2 cas : $\omega > \omega_p$ et $\omega < \omega_p$.

4) cas où $\omega > \omega_p$:

$\Rightarrow \underline{K}^2 > 0 \Rightarrow K$ est réel avec $K = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c}$

$\Rightarrow \underline{\vec{E}} = \underline{E_0}\, e^{j(\omega t - Kz)}\, \vec{u_K}$ c'est donc une OPPM.

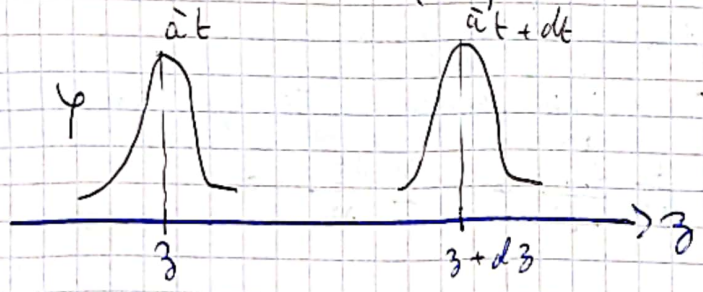
Soit $\underline{E_0} = E_0 e^{j\varphi_0} \Rightarrow \underline{\vec{E}} = E_0\, e^{j(\omega t - Kz + \varphi_0)}\, \vec{u_K}$

retour en notation réelle : $\boxed{\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - Kz + \varphi_0)\, \vec{u_K}}$ c'est une OPPM

terme de propagation = phase

on définit la vitesse de phase par la vitesse de propagation des plans équiphase

$$\varphi(z + dz;\, t + dt) = \varphi(z;\, t)$$



$$\omega t - Kz + \varphi_0 = \omega(t + dt) - K(z + dz) + \varphi_0$$

$$\Rightarrow 0 = \omega dt - K dz \quad \text{or} \quad v_\varphi = \frac{dz}{dt} \Rightarrow \boxed{v_\varphi = \frac{\omega}{K}}$$

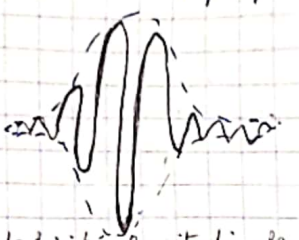
$$v_\varphi = \frac{\omega}{\frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}} > c$$

donc v_φ ne présente pas de réalité physique (matière ou énergie), elle ne représente que la vitesse de propagation de la phase.

On définit la vitesse de groupe par : $v_g = \frac{d\omega}{dk}$

(Démo : voir cours ondes mécaniques).

v_g est la vitesse de l'onde réelle (train d'ondes ou paquet d'ondes) c'est la vitesse de la superposition d'une infinité d'OPPM.



onde limitée longitudinalement (il faut donc une superposition continue d'OPPM sinon on aura une onde périodique).

$v_g = ?$ on a $k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$

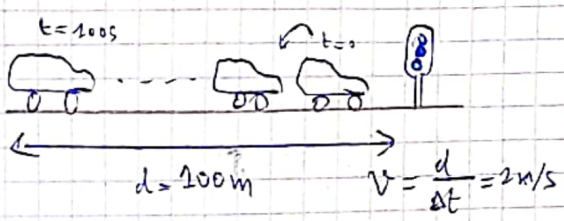
$\hookrightarrow 2k\,dk = \frac{2\omega\,d\omega}{c^2}$

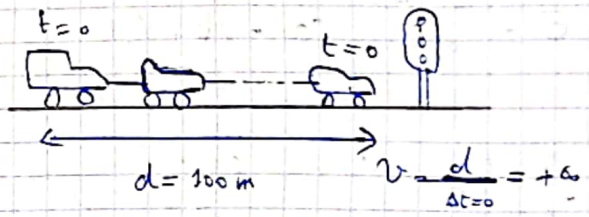
$$c^2 = \frac{\omega}{k} \cdot \frac{d\omega}{dk}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_g \cdot v_\varphi = c^2}$$

$$\Rightarrow v_g = \frac{c^2}{v_\varphi} = \frac{c^2}{c\sqrt{1-\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_g = c\sqrt{1-\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2} < c}$$





5) Cas où $\omega < \omega_p$:

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} = \frac{-(\omega_p^2 - \omega^2)}{c^2} = \frac{j^2(\omega_p^2 - \omega^2)}{c^2}$$

donc $\underline{k} = \pm j \cdot k'$ avec $k' = \frac{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}{c}$

et : $\underline{\vec{E}} = E_0 e^{j(\omega t - \underline{k} z + \varphi_0)} \vec{u_x}$

$\underline{\vec{E}} = E_0 e^{j(\omega t \mp j k' z + \varphi_0)} \vec{u_x}$

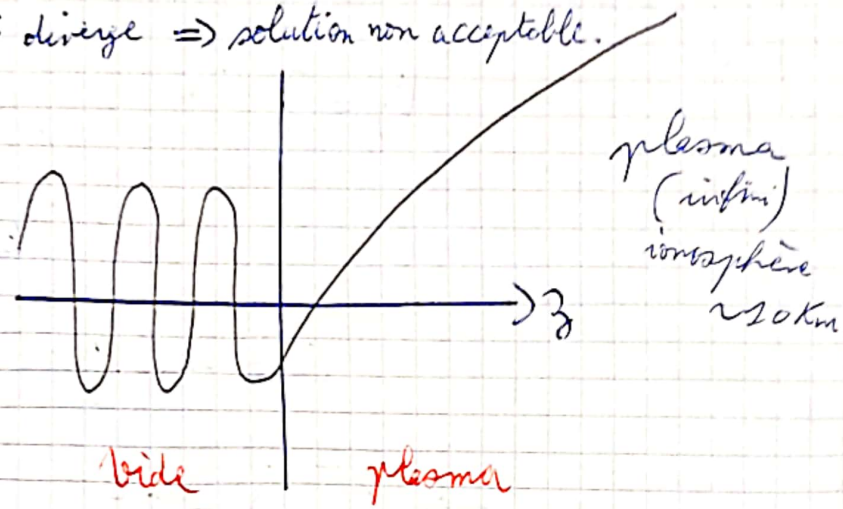
$\underline{\vec{E}} = E_0 e^{j(\omega t + \varphi_0)} e^{\pm k' z} \vec{u_x}$

En notation réelle :

$$\vec{E} = E_0 e^{\pm \frac{z}{\delta}} \cos(\omega t + \varphi_0)\,\vec{u_x} \quad \text{avec} \quad \delta = \frac{1}{k'}$$

↳ Si $\underline{k} = +j k'$ $\Rightarrow$ $E = E_0 e^{\frac{z}{\delta}} \cos(\omega t + \varphi_0)$

C'est une solution qui diverge $\Rightarrow$ solution non acceptable.



↳ Si $\underline{k} = -j k'$ $\Rightarrow$ $E = E_0 e^{-z/\delta} \cos(\omega t + \varphi_0)$

$\Downarrow$

onde stationnaire

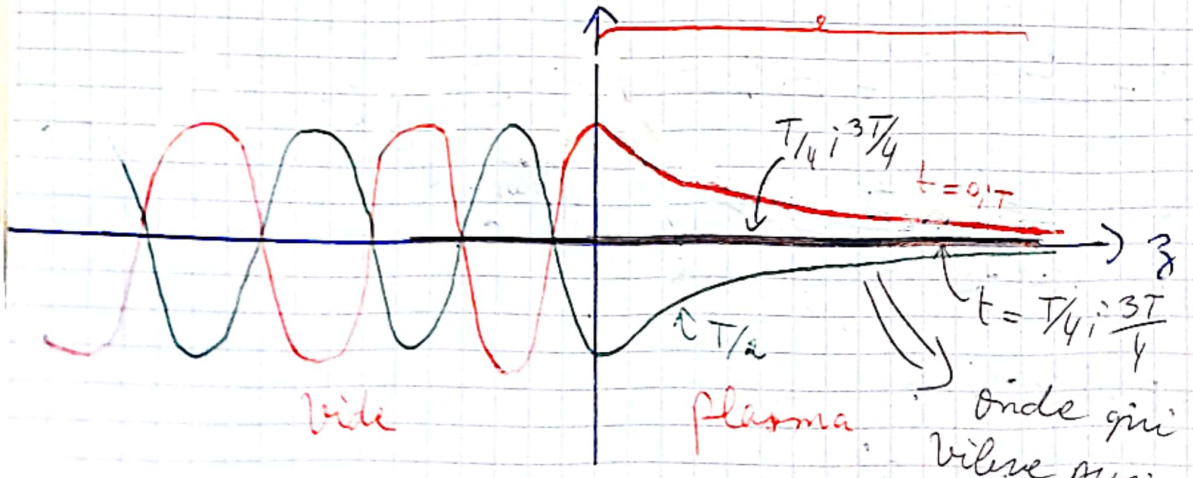
(pas de terme de propagation).

$\Downarrow$

v_φ et v_g ne sont pas définies

$E = E_0 e^{-z/\delta} \cos(\omega t + \varphi_0)$ onde stationnaire atténuatrice dite onde évanescente qui s'atténue au cours du déplacement dans le plasma avec δ est la distance caractéristique d'atténuation. $E(z > 5\delta) = 0$

Soit $\varphi_0 = 0$; Tracez $E(z) = E_0 e^{-z/\delta} \cos(\omega t)$



6) Généralisation et commentaires :

a) Signification de K :

$\underline{K} = K_1 + jK_2$

$\underline{E} = E_0 e^{j(\omega t - \underline{K}z + \varphi_0)}$

$\underline{E} = E_0 e^{j(\omega t - (K_1 + jK_2)z + \varphi_0)}$

$\underline{E} = E_0 e^{j(\omega t - K_1 z + \varphi_0)} \cdot e^{K_2 z}$

En notation réelle :

$E = E_0 \cos(\omega t - (K_1)z + \varphi_0)\, e^{K_2 z}$

$K_1 = \mathrm{Re}(\underline{K})$: terme de propagation

R_q : $v_\varphi = \dfrac{\omega}{\mathrm{Re}(\underline{K})}$

$v_g = \dfrac{d\omega}{d\mathrm{Re}(\underline{K})}$ (à démontrer)

$\underline{K} = \underbrace{K_1}_{\mathrm{Re}(\underline{K})} + j\underbrace{K_2}_{\mathrm{Im}(\underline{K})}$

$\mathrm{Re}(\underline{K})$ ⇓ propagation

$\mathrm{Im}(\underline{K})$ ⇓ atténuation ou amplification

↳ Si $K_1 > 0 \Rightarrow$ propagation dans le sens des z ↗

$\Rightarrow \begin{cases} K_2 > 0 : \text{Amplification} \\ K_2 < 0 : \text{atténuation} \end{cases}$ (pour un plasma fini (une tranche)).

↳ Si $K_1 < 0 \Rightarrow$ propagation dans le sens des z ↘.

$\Rightarrow \begin{cases} K_2 > 0 \Rightarrow \text{Atténuation} \\ K_2 < 0 \Rightarrow \text{Amplification} \end{cases}$ (" " (" ") " ")

CCL : * Si $K_1 \cdot K_2 > 0$ propagation + Amplification

* Si $K_1 \cdot K_2 < 0$ propagation + Atténuation.

b) Relation de dispersion :

↳ Si la relation de dispersion $\underline{K} = f(\omega)$ est linéaire alors : le milieu est non dispersif

$K = f(\omega)$ linéaire

↳ v_φ ne dépend pas de ω (ou de K)

↳ v_g ne dépend pas de ω (ou de K)

↳ $v_g = v_\varphi$

$K = \lambda\omega \longleftrightarrow v_g = \frac{1}{\lambda}$

$v_\varphi = \frac{1}{\lambda}$ ← $v_g = v_\varphi$

Exp. Vide.

↳ Si la relation de dispersion $K = f(\omega)$ est non linéaire ⇒ le milieu est dispersif.

$K = f(\omega)$ non linéaire

↳ v_φ dépend de ω (ou de K)

↳ v_g dépend de ω (ou de K)

↳ $v_g \neq v_\varphi$ (déformation du paquet d'ondes voir après).

(ondes mécaniques)

Exp plasma

$K = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c}$

$v_\varphi = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}}$

$v_g = c\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}$

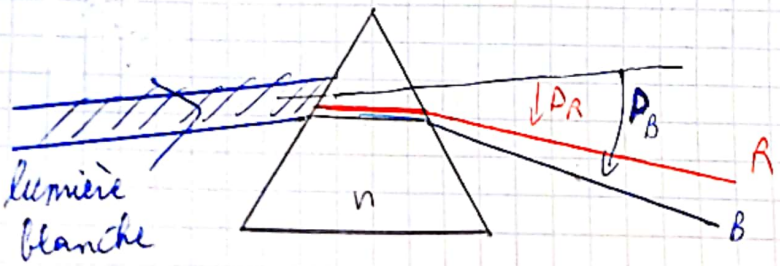
$v_g \neq v_\varphi$

Autres exemples : prisme ; goutte d'eau ; Arc en ciel, fibre optique

On définit l'indice complexe du milieu par :

$$\underline{n} = \frac{\underline{K} \leftarrow \text{milieu}}{K_0 \leftarrow \text{vide}}$$

or $v_\varphi = \frac{\omega}{\mathrm{Re}(\underline{K})} = \frac{\omega}{\mathrm{Re}(\underline{n}) \cdot K_0} \Rightarrow v_\varphi = \frac{c}{n}$ avec $n = \mathrm{Re}(\underline{n})$



$n = \frac{\sin\left(\frac{A + D_m}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)}$

$K = f(\omega)$ non linéaire ⇒ v_φ dépend de ω ⇒ n dépend de ω

⇒ D dépend de ω ⇒ dispersion.

CamScanner

7) Représentation de v_φ et v_g :

$$\begin{cases} v_\varphi = \dfrac{c}{\sqrt{1-\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}} \\ v_g = c\sqrt{1-\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2} \end{cases}$$

Rappel : (*)

$$\Delta\vec{E} - \mu_0\gamma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \leftarrow \begin{cases} \text{Équation de Maxwell} \\ + \\ \text{PFD avec certaines hypothèses} \end{cases}$$

on s'intéresse par la suite à la propagation d'une pseudo-OPPM.

$$\underline{\vec{E}} = E_0 e^{j(\omega t - \underline{K}z + \varphi_0)}\vec{u_x}$$

↓ on remplace dans *.

$$\underline{K}^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$$ Relation de dispersion

$\omega < \omega_p$ | $\omega > \omega_p$

$\underline{K} = jK'$ (Imaginaire)

$$\vec{E} = E_0 e^{-z/\delta}\cos(\omega t + \varphi_0)$$

⇒ onde stationnaire qui s'atténue au cours du déplacement

(~~propagation~~) ⇒ onde évanescente

$\underline{K} = K$ (réel)

$$\vec{E} = E_0\cos(\underbrace{\omega t - Kz + \varphi_0}_{\text{terme de propagation}})$$ OPPM

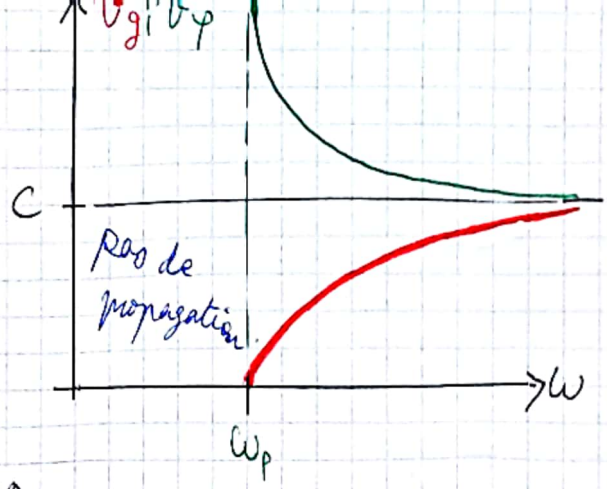
$$\Downarrow$$

$$v_\varphi = \frac{\omega}{Re(\underline{K})} = \frac{\omega}{K}$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dRe(\underline{K})} = \frac{d\omega}{dK}$$

⇒ $v_g \neq v_\varphi$ donc le plasma est dispersif

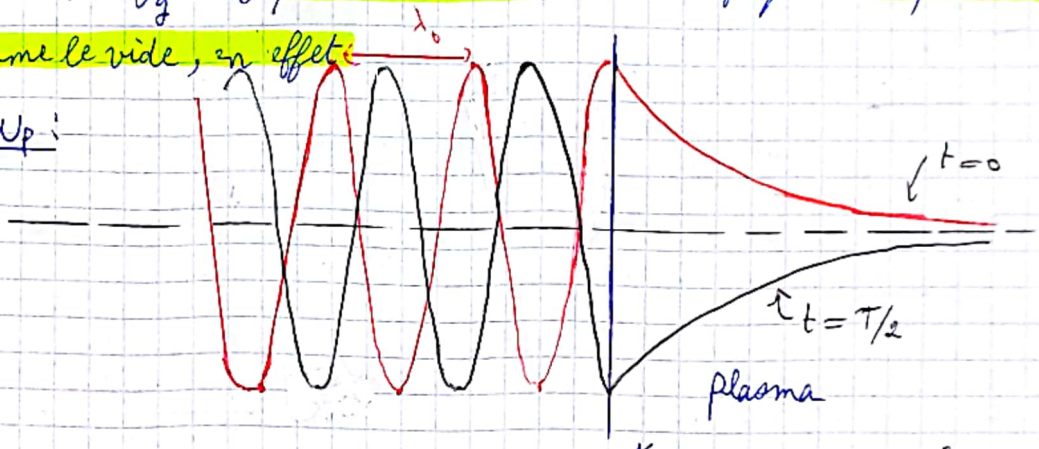
- Si $\omega < \omega_p$ alors v_φ et v_g ne sont pas définies car si $\omega < \omega_p$ alors pas de propagation.
- Si $\omega = \omega_p \Rightarrow \begin{cases} v_\varphi \longrightarrow +\infty \\ v_g = 0 \end{cases}$
- Si $\omega \to +\infty$; $(\omega \gg \omega_p) \Rightarrow v_g \simeq v_\varphi \simeq c$



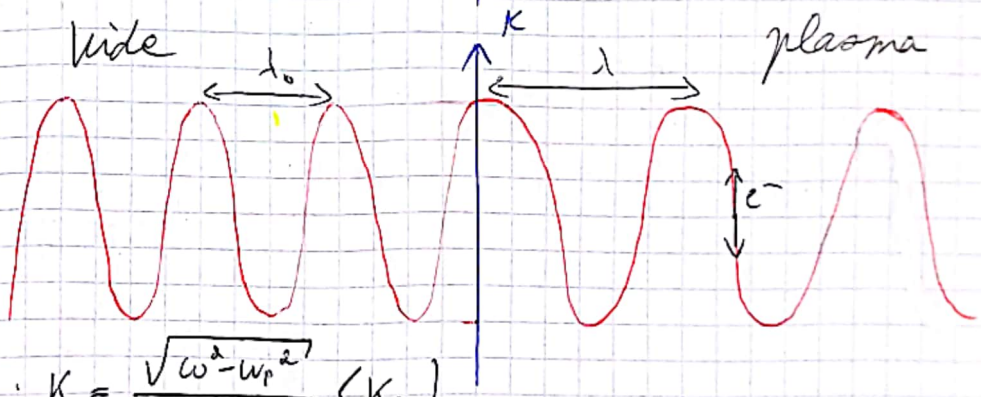
Commentaires :

- Le plasma se comporte comme un filtre passe haut de pulsation de coupure $\omega_c = \omega_p$
- Si $\omega \to +\infty \Rightarrow v_g \simeq v_\varphi \simeq c$ donc à très haute fréquence le plasma se comporte comme le vide, en effet :

Si $\omega < \omega_p$:



Si $\omega > \omega_p$:



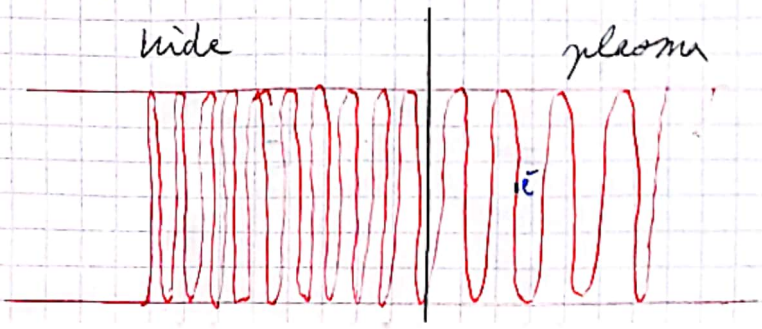
$$K_0 = \frac{\omega}{c} \quad ; \quad K = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c} < K_0$$

$$k_0 = \frac{2\pi}{\lambda} \quad ; \quad K = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$\Rightarrow \lambda > \lambda_0$

$\vec{E} = E\vec{u_x} \Rightarrow \vec{F_e} = F_e \cdot \vec{u_x} \Rightarrow$ oscillations de l'e^- car F_e est sinusoïdale.

Si $\omega \to +\infty$:

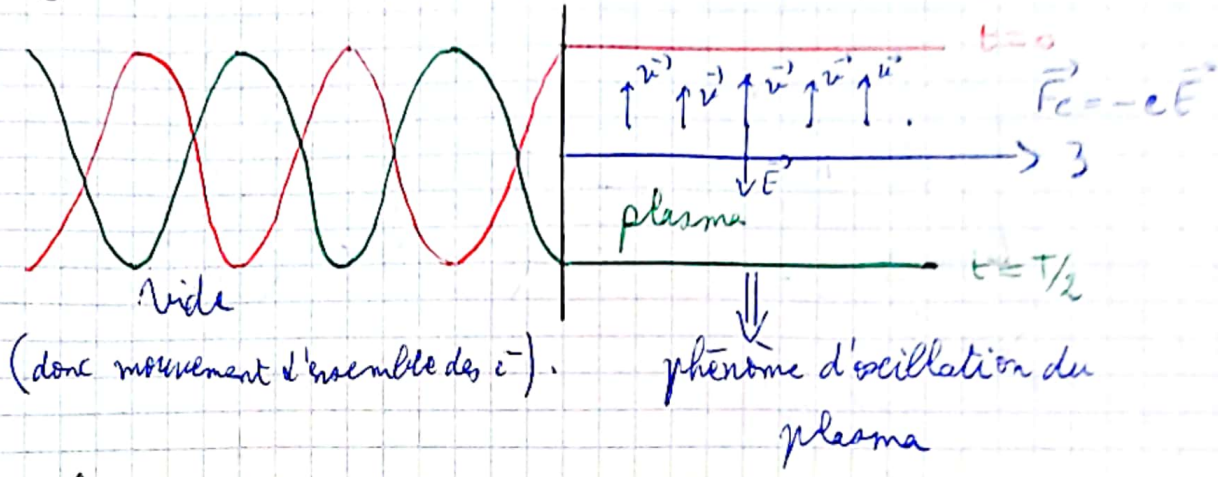


à très haute fréquence, le plasma se comporte comme le vide, en effet, l'électron n'arrive pas à suivre les variations tendales de l'onde.

Cas particulier: Si $\omega = \omega_p \Rightarrow k = 0$ ($\Rightarrow \lambda \to +\infty$).

or $\underline{\vec{E}} = E_0 e^{j(\omega t + \varphi_0)} \vec{u_x}$ n'est pas une onde.

Tracez $\vec{E}$ dans le cas où $\varphi_0 = 0 \Rightarrow E = E_0 \cos(\omega t)$ ne dépend pas de z.



(donc mouvement d'ensemble des e^-). ⇓ phénomène d'oscillation du plasma

8) Champ magnétique:

$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$ valable dans le cas d'une OPPM.

on a $\vec{rot}\,\vec{E} = \frac{-\partial \vec{B}}{\partial t}$ (M.F) ⟩ en notation complexe

$\frac{-\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \wedge \vec{E}$

donc $-j\omega \underline{\vec{B}} = -j \underline{\vec{k}} \wedge \underline{\vec{E}} \Rightarrow$

$\underline{\vec{B}} = \frac{\underline{\vec{k}} \wedge \underline{\vec{E}}}{\omega}$ valable dans le cas d'une onde plane monochromatique

or $\underline{\vec{k}} = \underline{k}\,\vec{u_z}$ et $\underline{\vec{E}} = \underline{E}\,\vec{u_z}$

$\underline{\vec{B}} = \frac{\underline{k} \cdot \underline{E}}{\omega} \vec{u_z} \wedge \vec{u_x} = \frac{\underline{k} \cdot \underline{E}}{\omega} \vec{u_y}$

Les 6 relations de structure qu'on a établi supposent toutes une onde plane

↳ Si $\omega < \omega_p$: $\begin{cases} \underline{k} = j k' \\ \underline{E} = E_0 e^{-z/\delta} e^{j(\omega t + \varphi)} \end{cases}$

$\underline{\vec{B}} = \frac{j k' E_0}{\omega} e^{-z/\delta} e^{j(\omega t + \varphi_0)} \vec{u_y}$

$\underline{\vec{B}} = \frac{E_0}{\delta \omega} e^{-z/\delta} e^{j(\omega t + \varphi_0 + \pi/2)} \vec{u_y}$

$\left(\delta = \frac{1}{k'}\right)$

$$\vec{B} = \frac{E_0}{\delta\omega} e^{-z/\delta} \cos\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right) \vec{u}_y$$

$$= \frac{-E_0}{\delta\omega} e^{-z/\delta} \sin(\omega t + \varphi_0) \vec{u}_y$$

Si $\omega > \omega_p$: $\underline{K} = K$ et $\underline{E} = E_0 e^{j(\omega t - Kz + \varphi_0)}$

$$\vec{B} = \frac{KE_0}{\omega} e^{j(\omega t - Kz + \varphi_0)} \vec{u}_y$$

en notation réelle : $\vec{B} = \frac{KE_0}{\omega} \cos(\omega t - Kz + \varphi_0) \vec{u}_y$

3) Aspects énergétiques : Calcul de $\langle \mu_{em} \rangle$ et $\langle \vec{\Pi} \rangle$.

a) Cas où $\omega < \omega_p$:

$$\vec{E} = E_0 e^{-z/\delta} \cos(\omega t + \varphi_0) \vec{u}_x$$

$$\vec{B} = \frac{-E_0}{\delta\omega} e^{-z/\delta} \sin(\omega t + \varphi_0) \vec{u}_y$$

- $\langle \mu_{em} \rangle = \left\langle \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0} \right\rangle$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2}\langle E^2 \rangle + \frac{1}{2\mu_0}\langle B^2 \rangle$$

$$= \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{4} e^{-2z/\delta} + \frac{E_0^2}{4\mu_0 \delta^2 \omega^2} e^{-2z/\delta}$$

$$= \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{4}\left(1 + \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0 \delta^2 \omega^2}\right) e^{-2z/\delta}$$

$$\langle \mu_{em} \rangle = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{4}\left(1 + \left(\frac{c}{\delta\omega}\right)^2\right) e^{-2z/\delta}$$

- $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E \vec{u}_x \wedge B \vec{u}_y}{\mu_0}$

$$\vec{\Pi} = \frac{EB}{\mu_0} \vec{u}_z = \frac{E_0 e^{-z/\delta} \cos(\omega t + \varphi)}{\mu_0} \times \left(\frac{-E_0}{\delta\omega}\right) e^{-z/\delta} \sin(\omega t + \varphi_0) \vec{u}_z$$

$$\vec{\Pi} = \frac{-E_0^2}{\mu_0 \delta\omega} e^{-2z/\delta} \cos(\omega t + \varphi_0) \sin(\omega t + \varphi_0) \vec{u}_z$$

$$\vec{\Pi} = \frac{-E_0^2}{2\mu_0 \delta\omega} e^{-2z/\delta} \sin\left(2(\omega t + \varphi_0)\right) \vec{u}_z \neq \vec{0}$$

⇒ déplacement de l'énergie E.M

$\langle \vec{\Pi} \rangle = \vec{0}$ car $\langle \sin(2(\omega t + \varphi_0)) \rangle = 0$

⇒ pas de propagation de l'énergie E.M

le plasma se comporte comme un miroir vis à vis des ondes ($\omega < \omega_p$) (réflexion)

en notation réelle :

$$\vec{B} = \frac{E_0}{\delta\omega} e^{-z/\delta} \cos\left(\omega t + \varphi_0 + \pi/2\right) \vec{u_y}$$

$$= \frac{-E_0}{\delta\omega} e^{-z/\delta} \sin\left(\omega t + \varphi_0\right) \vec{u_y}$$

Si $\omega > \omega_p$: $\underline{K} = K$ et $\underline{E} = E_0 e^{j(\omega t - Kz + \varphi_0)}$

$$\vec{B} = \frac{KE_0}{\omega} e^{j(\omega t - Kz + \varphi_0)} \vec{u_y}$$

en notation réelle : $\vec{B} = \frac{KE_0}{\omega} \cos(\omega t - Kz + \varphi_0) \vec{u_y}$

3) Aspects énergétiques : Calcul de $\langle \mu_{em} \rangle$ et $\langle \vec{\Pi} \rangle$.

a) Cas où $\omega < \omega_p$:

$$\vec{E} = E_0 e^{-z/\delta} \cos(\omega t + \varphi_0) \vec{u_x}$$

$$\vec{B} = \frac{-E_0}{\delta\omega} e^{-z/\delta} \sin(\omega t + \varphi_0) \vec{u_y}$$

- $\langle \mu_{em} \rangle = \left\langle \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0} \right\rangle$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2}\langle E^2 \rangle + \frac{1}{2\mu_0}\langle B^2 \rangle$$

$$= \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{4} e^{-2z/\delta} + \frac{E_0^2}{4\mu_0 \delta^2 \omega^2} e^{-2z/\delta}$$

$$= \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{4}\left(1 + \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0 \delta^2 \omega^2}\right) e^{-2z/\delta}$$

$$\langle \mu_{em} \rangle = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{4}\left(1 + \left(\frac{c}{\delta\omega}\right)^2\right) e^{-2z/\delta}$$

- $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E \vec{u_x} \wedge B \vec{u_y}}{\mu_0}$

$$\vec{\Pi} = \frac{EB}{\mu_0} \vec{u_z} = \frac{E_0 e^{-z/\delta} \cos(\omega t + \varphi)}{\mu_0} \times \left(\frac{-E_0}{\delta\omega}\right) e^{-z/\delta} \sin(\omega t + \varphi_0) \vec{u_z}$$

$$\vec{\Pi} = \frac{-E_0^2}{\mu_0 \delta\omega} e^{-2z/\delta} \cos(\omega t + \varphi_0) \sin(\omega t + \varphi_0) \vec{u_z}$$

$$\vec{\Pi} = \frac{-E_0^2}{2\mu_0 \delta\omega} e^{-2z/\delta} \sin\left(2(\omega t + \varphi_0)\right) \vec{u_z} \neq \vec{0}$$

⇒ déplacement de l'énergie E.M

$\langle \vec{\Pi} \rangle = \vec{0}$ car $\langle \sin(2(\omega t + \varphi_0)) \rangle = 0$

⇒ pas de propagation de l'énergie E.M

Le plasma se comporte comme un miroir vis à vis des ondes ($\omega < \omega_p$) (réflexion)

b) Cas où $\omega > \omega_p$:

$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kz + \varphi_0)\,\vec{e_x}$

$\vec{B} = \frac{kE_0}{\omega} \cos(\omega t - kz + \varphi_0)\,\vec{e_y}$

- $\langle \mu_{em} \rangle = \left\langle \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0} \right\rangle = \frac{\varepsilon_0}{2}\langle E^2 \rangle + \frac{1}{2\mu_0}\langle B^2 \rangle$

$\langle \mu_{em} \rangle = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{4} + \frac{k^2 E_0^2}{4\mu_0 \omega^2}$

$\langle \mu_{em} \rangle = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{4}\left[1 + \left(\frac{kc}{\omega}\right)^2\right] = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{4}\left[2 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2\right]$

↳ $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E\vec{e_x} \wedge B\,\vec{e_y}}{\mu_0}$

$\vec{\Pi} = \frac{EB}{\mu_0}\vec{u_z} = \frac{E_0}{\mu_0}\frac{kE_0}{\omega}\cos^2(\omega t - kz + \varphi_0)\,\vec{u_z}$

$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{kE_0^2}{2\mu_0\omega}\vec{u_z} \neq \vec{0} \Rightarrow$ propagation de l'énergie électromagnétique

III) propagation de l'onde électromagnétique dans un conducteur

1) Equation de propagation :

Les équations de Maxwell dans un conducteur s'écrivent

$\begin{cases} \operatorname{div}\vec{E} = 0 & (\rho = 0) \\ \operatorname{div}\vec{B} = 0 & \\ \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \text{M.F.} \\ \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\left(\vec{j} + \varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) & \text{M.A.} \end{cases}$

↳ $\overrightarrow{\operatorname{rot}}$ (M.F) : $\Delta\vec{E} - \mu_0\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$

↳ $\overrightarrow{\operatorname{rot}}$ (M.A) : $\Delta\vec{B} + \mu_0 \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{j} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$

$\vec{j} = ?$

on applique le PFD sur l'e⁻.

$m\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -e\vec{E} - \underbrace{\alpha \vec{v}}_{\text{modélise les chocs.}}$

e⁻ libre = distance libre moyenne mais peut y avoir des chocs

Rq : $\vec{F_r} = -K\vec{r} \simeq \vec{0}$ car l'électron est libre dans un conducteur $\Rightarrow$ pas d'intéractions mais tout de même le choc existe car le conducteur est un milieu condensé.

en notation complexe : $jm\omega\,\underline{\vec{v}} = -e\underline{\vec{E}} - \alpha\,\underline{\vec{v}}$

$\Rightarrow \underline{\vec{v}} = \frac{-e}{\alpha + jm\omega}\underline{\vec{E}} = \frac{-e/\alpha}{1 + j\omega\tau}\underline{\vec{E}}$ avec $\tau = \frac{m}{\alpha}$

or $\underline{j} = n^* q \underline{v} = n^*(-e)\underline{v}$

$$\Rightarrow \underline{\vec{j}} = \frac{\frac{n^* e^2}{\alpha}}{1+j\tau\omega}\underline{\vec{E}} = \frac{\frac{n^* e^2 \tau}{m}}{1+j\tau\omega}\underline{\vec{E}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{\vec{j}} = \underline{\gamma}\cdot\underline{\vec{E}}} \quad \text{avec} \quad \left| \begin{array}{l} \underline{\gamma} = \dfrac{\gamma_0}{1+j\tau\omega} \\ \text{tq} \quad \gamma_0 = \dfrac{n^* e^2 \tau}{m} \end{array} \right.$$

⚠ $\underline{\gamma}$ est la conductivité complexe.

Les équations de propagation s'écrivent :

$$\begin{cases} \Delta\underline{\vec{E}} - \mu_0 \underline{\gamma} \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \\ \Delta\underline{\vec{B}} - \mu_0 \underline{\gamma} \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0} \end{cases}$$

Rq :

↳ En régime statique : $\omega = 0 \Rightarrow \underline{\gamma} = \gamma_0$ c'est la conductivité statique $\gamma_0 = \underline{\gamma}(\omega=0)$

↳ $\langle \mathcal{P}_v \rangle = \langle \underline{\vec{j}} \cdot \underline{\vec{E}} \rangle = \frac{1}{2} \mathrm{Re}(\underline{\vec{j}} \cdot \underline{\vec{E}}^*)$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\underline{\gamma}\cdot\underline{\vec{E}}\cdot\underline{\vec{E}}^*)$$

$$= \frac{\mathrm{Re}(\underline{\gamma})}{2}\|\underline{\vec{E}}\|^2 \neq 0 \quad \text{car } \mathrm{Re}(\underline{\gamma}) \neq 0$$

$\Rightarrow$ dissipation de l'énergie dans le conducteur ($\mathrm{Re}(\underline{\gamma}) \neq 0$ car $\alpha \neq 0$, donc car $\exists$ chocs).

↳ $\tau\omega \gg 1 \Leftrightarrow \frac{m\omega}{\alpha} \gg 1 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{m} \ll \omega$

$$\underline{\gamma} \simeq \frac{\gamma_0}{j\tau\omega} = \frac{n^* e^2 \frac{\tau}{m}}{j\tau\omega} = -j\frac{n^* e^2}{m\omega}$$

$\underline{\gamma}$ est purement complexe $\Rightarrow$ le conducteur se comporte comme un isolant.

physiquement : car on a négligé les chocs $\alpha \ll m\omega$.

↳ Si $\tau\omega \ll 1 \Leftrightarrow \alpha \gg m\omega$

$\underline{\gamma} \simeq \gamma_0$ réel $\Rightarrow \underline{\vec{j}} = \gamma_0 \underline{\vec{E}}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta\vec{E} - \mu_0\gamma_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \\ \Delta\vec{B} - \mu_0\gamma_0\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0} \end{cases} \quad (**)$$

2) Solution de l'équation de propagation : (Relation de dispersion)

On s'intéresse par la suite à la propagation d'une onde OPPM.

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}_0}\, e^{j(\omega t - \underline{k}z)} \quad \text{avec} \quad \underline{\gamma} = \gamma_0 \qquad \left(\omega \ll \frac{1}{\tau_e} \sim 10^{14}\,s^{-1}\right)$$

$$(**) \Rightarrow (-j\underline{k})^2 - \mu_0\gamma_0 j\omega - \frac{1}{c^2}(j\omega)^2 = 0$$

$$\Rightarrow -\underline{k}^2 - j\mu_0\gamma_0\omega + \frac{\omega^2}{c^2} = 0$$

$$\Rightarrow \underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - j\mu_0\gamma_0\omega \Rightarrow \underline{k} = ?$$

Rq : $\underline{k} = k_1 + jk_2$ et $\underline{k}^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2} - j\gamma_0\mu_0\omega$

$$\Rightarrow \begin{cases} k_1^2 - k_2^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2} \\ 2k_1k_2 = -\mu_0\gamma_0\omega \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = ? \\ k_2 = ? \end{cases}$$

dans l'ARQS : $\overrightarrow{rot}\,\vec{B} = \mu_0\left[\vec{j} + \vec{0}\right]$ on néglige le courant de déplacement

Après calcul : $\Delta\vec{E} - \mu_0\gamma_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$

si $\vec{j}_d = \vec{0}$

$$\Rightarrow \Delta\vec{E} - \mu_0\gamma_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \vec{0}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0\, e^{j(\omega t - \underline{k}z)}$$

$$\Rightarrow (-j\underline{k})^2 - \mu_0\gamma_0 j\omega = 0$$

$$\Rightarrow \underline{k}^2 = -j\mu_0\gamma_0\omega \qquad \left(\text{or } \underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - j\mu_0\gamma_0\omega\right)$$

donc dans l'ARQS : $\dfrac{\omega^2}{c^2} \ll \mu_0\gamma_0\omega \Rightarrow \omega \ll \mu_0 c^2\gamma_0 = \dfrac{\gamma_0}{\varepsilon_0}$

AN pour le cuivre : $\gamma_0 = 5{,}88\times10^7\ S.m^{-1}$, $\varepsilon_0 = 8{,}85\times10^{-12}\ F.m^{-1}$ $\Rightarrow \omega \ll 10^{19}\ rad/s$

Ceci est déjà vérifié car on a supposé $\tau\omega \ll 1$ $(\underline{\gamma} = \gamma_0)$

$\Rightarrow \omega \ll \frac{1}{\tau} = 10^{16}$ rad/s.

$\underline{k}^2 = -j\mu_0\gamma_0\omega$.

1) $\vec{\underline{E}} = ?$ 3) $v_\varphi = ?$ $v_g = ?$

2) Tracez $E(z)$

Réponse:

1) $\underline{k}^2 = -j\mu_0\gamma_0\omega = e^{-j\frac{\pi}{2}}\mu_0\gamma_0\omega$

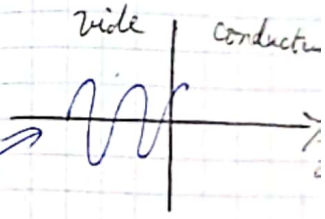
$\underline{k} = \pm e^{-j\pi/4}\sqrt{\mu_0\gamma_0\omega} = \pm\frac{1-j}{\sqrt{2}}\sqrt{\mu_0\gamma_0\omega}$

donc $\underline{k} = \pm\frac{1-j}{\delta}$ tq $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\gamma_0\omega}}$

- Si $\underline{k} = -\frac{1-j}{\delta} \Rightarrow \underline{E} = E_0 e^{j(\omega t + \frac{1-j}{\delta}z + \varphi_0)}$

$\Rightarrow \underline{E} = E_0 e^{z/\delta} e^{j(\omega t + z/\delta + \varphi_0)}$

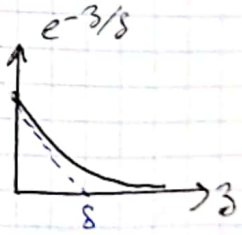
$\Rightarrow E = \underbrace{E_0 e^{z/\delta}}_{\text{atténuation}} \underbrace{\cos(\omega t + \frac{z}{\delta} + \varphi_0)}_{\text{propagation dans le sens des } z\downarrow}$



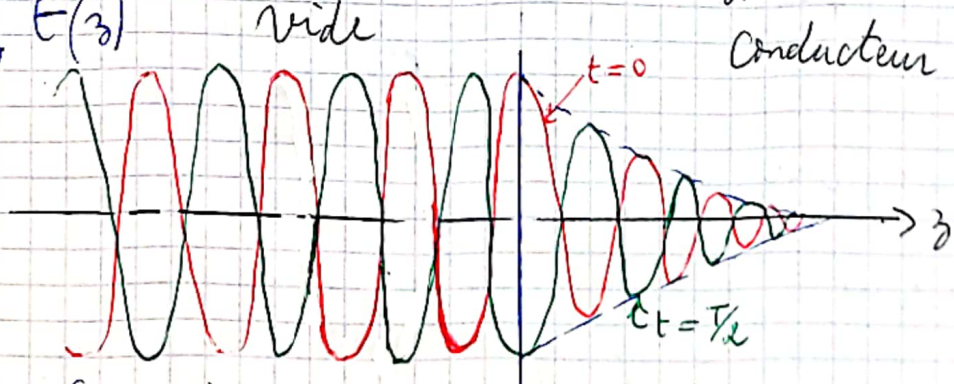
Solution non acceptable car

- Si $\underline{k} = \frac{1-j}{\delta} \Rightarrow E = E_0 e^{-z/\delta}\cos(\omega t - \frac{z}{\delta} + \varphi_0)$

atténuation; propagation dans le sens des $z\nearrow$.



3) Tracez $E(z)$



Rq (1): $E(z > \delta) = 0$. $\Rightarrow \delta$ est la profondeur de pénétration = épaisseur de peau

Rq (2): Si $\omega\nearrow \Rightarrow \delta\downarrow$

Rq (3): $\mathrm{Re}(\underline{k}) = \frac{1}{\delta} = \sqrt{\frac{\mu_0\gamma_0\omega}{2}}$ $\Rightarrow$ la relation de dispersion est non linéaire donc le conducteur est un milieu dispersif

3) v_φ et v_g :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{Re(\underline{k})} = \omega \cdot \delta = \omega \sqrt{\frac{\mu_0 \gamma_0 \omega}{2}}$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dRe(\underline{k})} \quad \text{on a} \quad Re(\underline{k}) = \sqrt{\frac{\mu_0 \gamma_0 \omega}{2}} \Rightarrow dRe(\underline{k}) = \frac{\frac{\mu_0 \gamma_0}{2} d\omega}{2Re(\underline{k})}$$

$$\Rightarrow \frac{dRe(\underline{k})}{d\omega} = \frac{1}{4} \frac{\mu_0 \gamma_0}{Re(\underline{k})}$$

$$v_g = 2\delta\omega$$

$$= \frac{1}{4} \frac{\mu_0 \gamma_0}{\omega} v_\varphi$$

donc $v_g = 2 v_\varphi \neq v_\varphi \Rightarrow$ Dispersion.

3) effet de peau :

l'effet de peau est un phénomène électromagnétique qui fait que à fréquence élevée, le champ à tendance à ne se propager que en surface du conducteur. $\omega \to +\infty \Rightarrow \delta \simeq 0$.

ODG : cuivre $\gamma_0 = 5{,}9 \cdot 10^7 \, S \cdot m^{-2}$

↳ onde Hertzienne : $f \sim 500 \, Hz \Rightarrow \delta = 23 \, mm$

↳ micro-onde : $f \sim 1 \, GHz \Rightarrow \delta = 2 \, \mu m$

↳ Domaine visible : $f = 600 \, THz \Rightarrow \delta = 63 \, nm \Rightarrow 5\delta = 0{,}3 \, \mu m$ (réflexion miroir)

4) Vitesse de phase - vitesse de groupe :

$$\begin{cases} v_\varphi = \delta \cdot \omega \\ v_g = 2\delta \cdot \omega \end{cases} \Rightarrow v_g = 2 v_\varphi \neq v_\varphi \Rightarrow \text{dispersion.}$$

5) model d'un conducteur parfait : (Exp : miroir).

a) Déf : un conducteur parfait est un conducteur de conductivité $\to \infty$ ou $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma_0 \omega}} \Rightarrow \delta \simeq 0$ c'à d que l'onde ne pénètre pas dans le conducteur parfait.

b) conséquences :

↳ l'onde ne pénètre pas dans le conducteur : $\vec{E}(M,t) = \vec{0}$ $\xrightarrow{M.G}$ $\rho(M,t) = 0$ (on l'avait déjà)

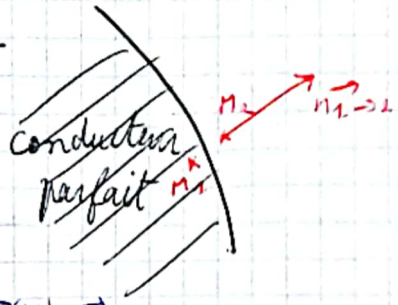
$\downarrow M.F$

$\vec{B}(M,t) = \vec{0}$ (= $d\Phi/dt$ ce n'est pas une onde $\Rightarrow \vec{B} = \vec{0}$)

$\downarrow M.A$

$\vec{\Gamma}(M,t) = \vec{0}$

→ Relations de passage:



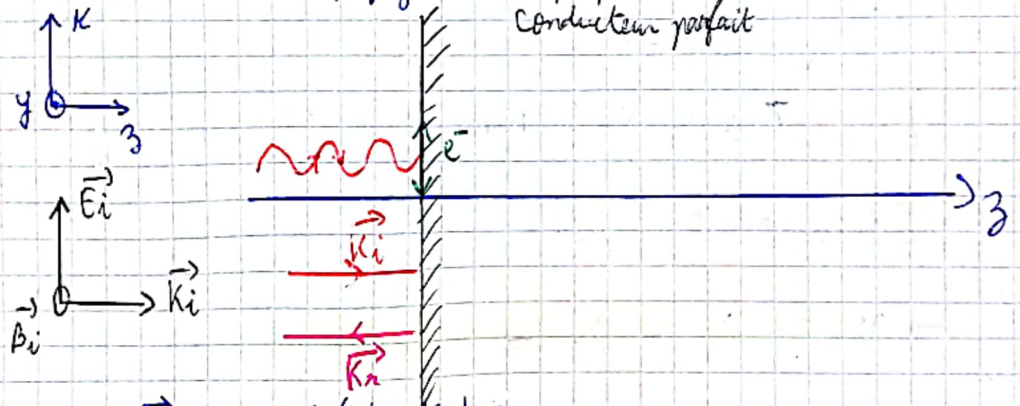
$$\begin{cases} \vec{E}(M_2) - \cancel{\vec{E}(M_2)}^{\vec{0}} = \dfrac{\Gamma(M)}{\varepsilon_0}\vec{n}_{1\to 2} \\ \vec{B}(M_2) - \cancel{\vec{B}(M_2)}^{\vec{0}} = \mu_0 \vec{J}_S(M) \wedge \vec{n}_{1\to 2} \end{cases}$$

Car M1 ∈ Conducteur parfait

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{E}(M_2) = \dfrac{\Gamma(M)}{\varepsilon_0}\vec{n}_{1\to 2} \\ \vec{B}(M_2) = \mu_0 \vec{J}_S(M) \wedge \vec{n}_{1\to 2} \end{cases}$$

IV) Réflexion d'une OPPM en incidence normale sur un conducteur parfait:

1) origine de la réflexion: considérons une OPPM en incidence normale c'est à dire la direction de propagation est perpendiculaire à la surface réfléchissante.



Soit $\vec{E}_i = E_0 e^{j(\omega t - K_3)} \vec{u}_x$

$$\rightarrow \vec{B}_i = \frac{\vec{K}_i \wedge \vec{E}_i}{\omega} = \frac{\frac{\omega}{c}\vec{u}_3 \wedge E_i \vec{u}_x}{\omega} = \frac{E_i}{c}\vec{u}_y = \frac{E_0}{c} e^{j(\omega t - K_3)} \vec{u}_y$$

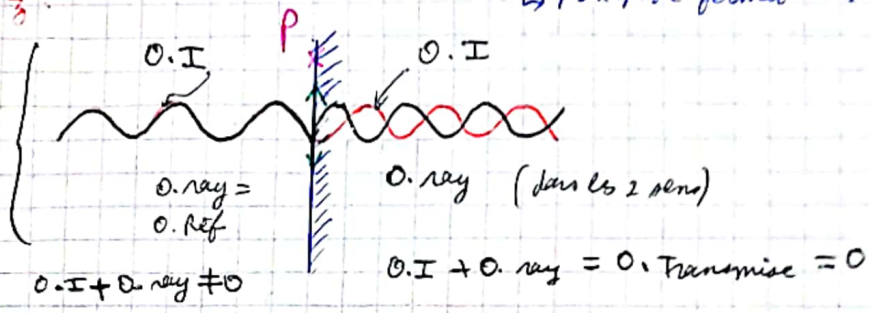
Onde incidente sinusoïdale de pulsation ω ⇒ mouvement sinusoïdal de l'électron de pulsation ω
⇒ courant surfacique sinusoïdale de pulsation ω
⇒ champ magnétique $\vec{B}_r$ ⇒ onde réfléchie
⇒ champ magnétique $\vec{E}_r$ ⇒ onde réfléchie

Lorsque l'onde incidente de pulsation ω arrive sur le conducteur parfait, elle peut mettre les électrons de la surface du conducteur en mouvement ce qui induit un courant surfacique sinusoïdal de pulsation ω. (même ω que l'onde incidente). Le courant est à l'origine d'un champ magnétique et son couplage

ce champ donne naissance à un champ électrique ce qui constitue une onde réfléchie qui se propage dans la direction $-\vec{u_z}$. (1ère loi de Descartes)
↳ construction de Hugels
↳ principe de fermat
) méthodes de démonstration.

$K_r = -K\vec{u_z}$.

Rq :



2) Expression de l'onde réfléchie : l'onde résultante dans le vide est la superposition de l'onde incidente et de l'onde réfléchie

$$\begin{cases} \vec{E_r} = E_{0r_x} e^{j(\omega t + Kz - \varphi_x)} \vec{u_x} + E_{0r_y} e^{j(\omega t + Kz - \varphi_y)} \vec{u_y} \\ \vec{B_r} = \dfrac{\vec{K_r} \wedge \vec{E_r}}{\omega} = \dfrac{-\frac{\omega}{c} \vec{u_z} \wedge \vec{E_r}}{\omega} = -\dfrac{\vec{u_z}}{c} \wedge \vec{E_r} \end{cases}$$

car transversale ↳ $\perp \vec{K_r}$

[Les relations de passage sont très utilisées dans ce cours pour trouver les inconnues]

$$\vec{E}(\cancel{p^+};t) - \vec{E}(p^-;t) = \frac{\sigma(p)}{\varepsilon_0} \vec{n}_{p^- \to p^+}$$

$\vec{0}$ car $p^+ \in$ conducteur parfait

⚠!!

$$-\left(\vec{E_i}(p^-;t) + \vec{E_r}(p^-;t)\right) = \frac{\sigma(p)}{\varepsilon_0} \vec{u_z} \xrightarrow[\Downarrow \; z(p)=0]{p \in (S)}$$

donc $-\left[E_0 e^{j\omega t} \vec{u_x} + E_{0r_x} e^{j(\omega t - \varphi_x)} \vec{u_x} + E_{0r_y} e^{j(\omega t - \varphi_y)} \vec{u_y}\right] = \dfrac{\sigma(p)}{\varepsilon_0} \vec{u_z}$

$$\begin{cases} \text{proj}/\vec{ox} : & E_0 e^{j\omega t} + E_{0r_x} e^{j(\omega t - \varphi_x)} = 0 \Rightarrow E_0 + E_{0r_x} e^{-j\varphi_x} = 0 \\ \text{proj}/\vec{oy} & E_{0r_y} e^{j(\omega t - \varphi_y)} = 0 \\ \text{proj}/\vec{oz} & \sigma(p) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} E_0 + E_{0r_x} \cos(\varphi_x) = 0 \\ E_{0r_x} \sin(\varphi_x) = 0 \Rightarrow \end{cases} \begin{cases} E_{0r_x} = E_0 \\ \varphi_x = \pi \quad \cancel{0} \end{cases}$$

(car sinon l'amplitude < 0 !!)

d'où $\vec{E_r} = E_0 e^{j(\omega t + Kz - \pi)} \vec{u_x} \Rightarrow \vec{E_r} = -E_0 e^{j(\omega t + Kz)} \vec{u_x}$

or $\vec{B_r} = \frac{-\vec{u_z}}{c} \wedge \vec{E_r} = \frac{-\vec{u_z}}{c} \wedge -E_0 e^{j(\omega t + kz)} \vec{u_x}$

$\vec{B_r} = \frac{E_0}{c} e^{j(\omega t + kz)} \vec{u_y}$.

3) Les coefficients de réflexion et de transmission :

- on définit le coefficient de réflexion par $\underline{r} = \frac{\underline{E_r}(P,t)}{\underline{E_i}(P,t)}$ avec P est le point de changement de milieu.
- le coefficient de transmission en amplitude : $\underline{t} = \frac{\underline{E_t}(P,t)}{\underline{E_i}(P,t)}$ avec $\underline{E_t}(P,t)$ est le champ transmis.
- le coefficient de réflexion en énergie : $R = \frac{\| \langle \vec{\Pi_r}(P,t) \rangle \|}{\| \langle \vec{\Pi_i}(P,t) \rangle \|}$
- le coefficient de transmission en énergie : $T = \frac{\| \langle \vec{\Pi_t}(P,t) \rangle \|}{\| \langle \vec{\Pi_i}(P,t) \rangle \|}$

Dans notre cas : $\vec{E_i} = E_0 e^{j(\omega t - kz)} \vec{u_x}$; $\vec{E_r} = -E_0 e^{j(\omega t + kz)} \vec{u_x}$

$\vec{B_i} = \frac{E_0}{c} e^{j(\omega t - kz)} \vec{u_y}$; $\vec{B_r} = \frac{E_0}{c} e^{j(\omega t + kz)} \vec{u_y}$

⚠ au pt P : $z = 0$.

↳ $\underline{r} = \frac{-E_0 e^{j\omega t}}{E_0 e^{j\omega t}} = -1$

↳ $\underline{t} = 0$ car $\underline{E_t} = 0$ (donc pas de transmission).

↳ $\langle \vec{\Pi_i} \rangle = \left\langle \frac{\vec{E_i} \wedge \vec{B_i}}{\mu_0} \right\rangle = \frac{1}{2\mu_0} \mathrm{Re}\left(\vec{E_i} \wedge \vec{B_i}^*\right) = \frac{-E_0^2}{2\mu_0 c} \vec{u_z}$

↳ $\langle \vec{\Pi_t} \rangle = \vec{0}$ d'où $R = \frac{\| \langle \vec{\Pi_r} \rangle \|}{\| \langle \vec{\Pi_i} \rangle \|} = 1$ et $T = 0$.

$R = 1$ / réflexion totale

1. Propagation d'ondes longitudinales dans un plasma

On s'intéresse à la propagation du champ électromagnétique suivant :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E(x, t)\,\mathbf{u}_x = E_0 \cos(\omega t - kx)\,\mathbf{u}_x .$$

a) Caractériser cette onde. Que vaut le champ magnétique ?

b) Appliquer la relation fondamentale de la dynamique aux électrons.

c) En déduire une relation entre la dérivée temporelle de la densité volumique de courant $\frac{\partial j}{\partial t}$ et E.

d) À l'aide des équations de Maxwell, trouver une autre relation entre j et E.

e) En déduire l'équation vérifiée par E. Quelle est la relation de dispersion ? Quelle est sa particularité ? Donner la vitesse de groupe.

f) Calculer le vecteur de Poynting. Évaluer l'énergie électromagnétique volumique. Pourquoi n'est-elle pas constante ? Que devient-elle donc ?

CamScanner

2. Réflexion-transmission à l'interface vide-plasma (d'après Centrale)

Un plasma occupe le demi-espace $z \geq 0$ (le demi-espace $z \leq 0$ est vide). Une onde plane progressive monochromatique, polarisée rectilignement, arrive en incidence normale sur ce plasma :

$$\underline{E}_i = E_0 \exp i(\omega t - k_0 z)\, u_x, \quad \text{avec} \quad k_0 = \frac{\omega}{c}.$$

On rappelle que, dans le plasma, l'équation de propagation est $k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$. On appelle $\underline{r}$ et $\underline{t}$ les coefficients de réflexion et transmission en amplitude pour le champ électrique, c'est-à-dire par exemple que l'amplitude du champ électrique réfléchi en $z = 0$ est $\underline{r} E_0 \exp(i\omega t)$.

a) Écrire la forme des champs électriques et magnétiques, réfléchis et transmis.

b) En utilisant des relations de passage, calculer $\underline{r}$ et $\underline{t}$ en fonction de $\underline{n} = k/k_0$. Comme on a une description volumique des courants, on prendra les courants surfaciques nuls.

c) En déduire les coefficients de réflexion R (transmission T) en énergie, définis comme le rapport des normes des vecteurs de Poynting moyens réfléchi (transmis) et incidents à l'interface. On les exprimera en fonction de $\underline{r}$ et $\underline{t}$.

d) Calculer explicitement $\underline{n}$, puis R et T dans le cas où $\omega < \omega_p$. Qu'en concluez-vous ?

e) Dans le cas où $\omega > \omega_p$, calculer R et T en fonction de $\underline{n}$, dont on donnera aussi l'expression. Commenter le cas $\omega_p = 0$.

f) Quelle relation existe entre R et T ? Quelle est son interprétation physique ?

1) propagation d'ondes longitudinales dans un plasma :

$$\vec{E}(r,t) = \vec{E}(x,t)\,\vec{u_x} = E_0 \cos(\omega t - Kx)\,\vec{u_x}$$

a) onde plane progressive monochromatique longitudinale se propageant suivant les x ↗ et elle est polarisée rectilignement (la direction du champ est fixe).

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{k\vec{u_x} \wedge \vec{E}}{\omega} = \vec{0}.$$

b) PFD appliqué à e^-.

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E}$$

c) $\Rightarrow m\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -e\vec{E} \overset{n^* q}{\Rightarrow} m\frac{\partial}{\partial t}(-ne\vec{v}) = +ne^2\vec{E}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = \frac{n^* q^2}{m}\vec{E}} \quad (1)$$

d) on a $\vec{rot}\,\vec{B} = \mu_0\left[\vec{j} + \varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right] = \vec{0}$

d'où $\vec{j} = -\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = -\varepsilon_0\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}}$ (2)

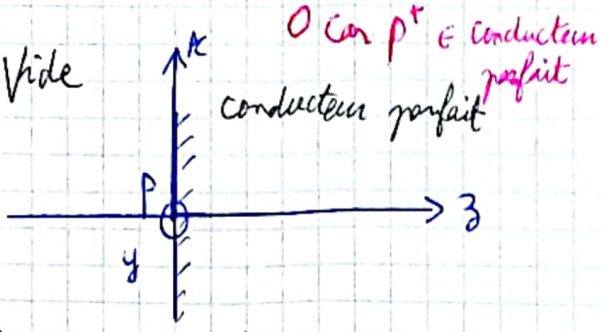
e) de (1) et (2) : $-\varepsilon_0\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{ne^2}{m}\vec{E} \Rightarrow \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \frac{ne^2}{m\varepsilon_0}\vec{E} = \vec{0}$

$\Rightarrow -\omega^2\vec{E} + \frac{ne^2}{m\varepsilon_0}\vec{E} = 0 \Rightarrow \omega^2 = \frac{ne^2}{m\varepsilon_0} = \omega_p^2 \Rightarrow \omega = \omega_p$

CamScanner

4) Expression du courant surfacique :

d'après la relation de passage : $\vec{B}(P^+;t) - \vec{B}(P^-;t) = \mu_0 \vec{J}_S(P) \wedge \vec{n}_{P^- \to P^+}$



donc $-\vec{B}(P^-;t) = \mu_0 \vec{J}_S(P) \wedge \vec{u}_z$

⚠ $\vec{B}(P^-;t) = \vec{B}_i(P^-;t) + \vec{B}_r(P^-;t)$

d'où $-\left[\vec{B}_i(z=0^-;t) + \vec{B}_r(z=0^-;t)\right] = \mu_0 \vec{J}_S(P) \wedge \vec{u}_z$

$$\Rightarrow -\left[\frac{E_0}{c} e^{j\omega t} \vec{u}_y + \frac{E_0}{c} e^{j\omega t} \vec{u}_y\right] = \mu_0 \vec{J}_S(P) \wedge \vec{u}_z$$

or $\vec{J}_S \in (0xy)$ car $\vec{J}_S$ est un courant surfacique.

$$\Rightarrow \vec{J}_S = J_{Sx} \vec{u}_x + J_{Sy} \vec{u}_y \quad \text{d'où :}$$

$$-\frac{2E_0}{c} e^{j\omega t} \vec{u}_y = \mu_0 \left[\underline{J}_{Sx} \vec{u}_x + \underline{J}_{Sy} \vec{u}_y\right] \wedge \vec{u}_z$$

$$\Rightarrow \frac{-2E_0}{\mu_0 c} e^{j\omega t} \vec{u}_y = \left[\underline{J}_{Sx}(-\vec{u}_y) + \underline{J}_{Sy} \vec{u}_x\right]$$

$\Rightarrow$ par identification : $\begin{cases} \underline{J}_{Sx} = \dfrac{2E_0}{\mu_0 c} e^{j\omega t} \\ \underline{J}_{Sy} = 0 \quad \text{d'où} \end{cases}$

C'est le courant surfacique qui engendre l'onde réfléchie

$$\boxed{\vec{J}_S = \frac{2E_0}{\mu_0 c} \cos(\omega t) \vec{u}_x}$$

5) Expression de l'onde résultante :

l'onde résultante est la superposition de l'onde réfléchie et de l'onde incidente

$\vec{E}_i = E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{u}_x$; $\vec{E}_r = -E_0 \cos(\omega t + kz) \vec{u}_x$

$\vec{B}_i = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kz) \vec{u}_y$; $\vec{B}_r = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t + kz) \vec{u}_y$

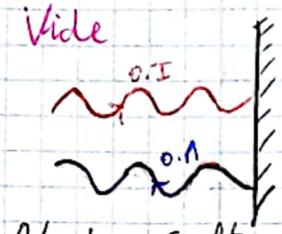
↳ $\vec{E}(M;t) = \vec{E}_i(M;t) + \vec{E}_r(M;t) = E_0 \left[\cos(\omega t - kz) - \cos(\omega t + kz)\right] \vec{u}_x$

$$\vec{E}(M;t) = 2E_0 \sin(\omega t) \sin(kz) \vec{u}_x$$

CamScanner

↳ $\vec{B}(M,t) = \vec{B_i}(M,t) + \vec{B_r}(M,t) = \frac{E_0}{c}\left[\cos(\omega t - kz) + \cos(\omega t + kz)\right]\vec{u_y}$

$= \frac{2E_0}{c}\cos(\omega t)\cos(kz)\,\vec{u_y}$



CCL : l'onde résultante est une onde stationnaire qui vibre sur place car les variables d'espace et de temps sont découplées.

- On définit les ventres de vibration par les lieux des pts de l'espace où l'amplitude de vibration est maximale.
- on définit les noeuds de vibration par les lieux des points de l'espace où l'amplitude est nulle (matière de vibrations).

↳ Les ventres de E :

$2E_0 \sin(kz) = \pm 2E_0$

$\Rightarrow \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} z\right) = \pm 1$

$\Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} z_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$

$\Rightarrow z_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2}$

↳ Les ventres de B :

$\frac{2E_0}{c}\cos(kz) = \pm\frac{2E_0}{c}$

$\Rightarrow \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} z\right) = \pm 1$

$\Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} z_n = n\pi \Rightarrow z_n = n\frac{\lambda}{2}$

↳ les Noeuds de E :

$2E_0 \sin(kz) = 0$

$\Rightarrow \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} z\right) = 0$

$\Rightarrow z_n = \frac{n\lambda}{2}$

↳ les Noeuds de B :

$\frac{2E_0}{c}\cos(kz) = 0 \Rightarrow$

$\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} z\right) = 0 \Rightarrow$

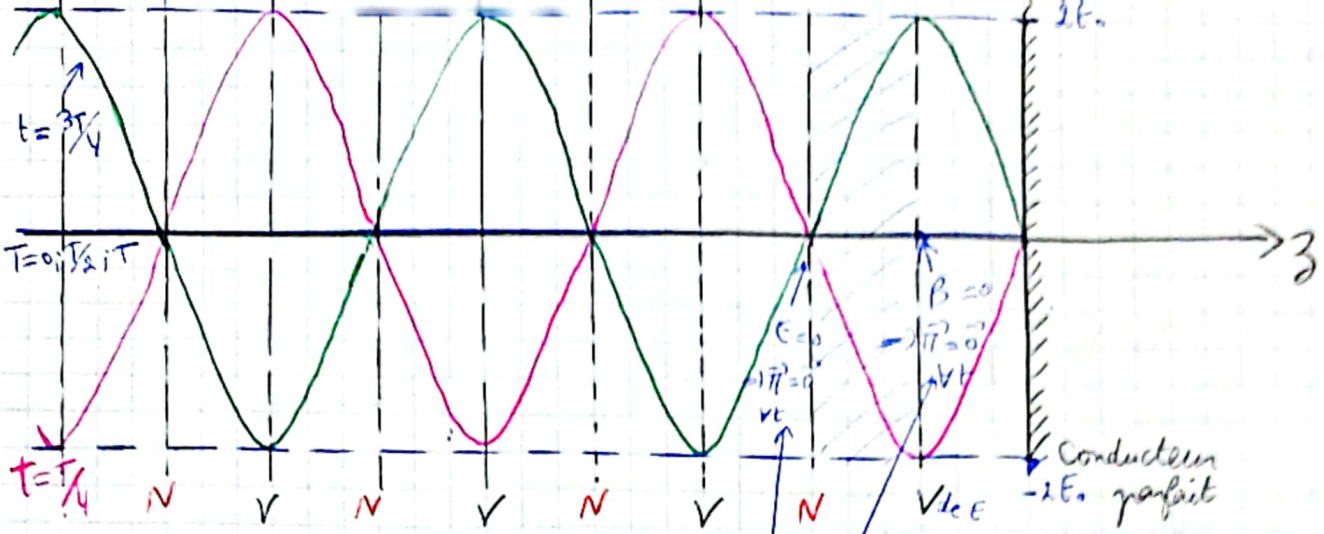
$z_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2}$

CCL : Les ventres de E = les noeuds de B.
Les noeuds de E = les ventres de B.

$E = 2E_0 \sin(kz)\cdot\sin(\omega t) = 2E_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} z\right)\sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right)$

$B = \frac{2E_0}{c}\cos(kz)\cos(\omega t) = \frac{2E_0}{c}\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} z\right)\cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right)$

CamScanner



$$E = 2E_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} z\right) \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right)$$

les 2 vecteurs de poynting sont nuls $\forall t$ donc pas de déplacement au delà de ces 2 pts (instantanés non pas la moyenne)

$t = 0 ; T/2 ; T \Rightarrow E = 0 \ \forall z$

$t = T/4 \Rightarrow E = 2E_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} z\right)$

$t = 3T/4 \Rightarrow E = -2E_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} z\right)$

* Vecteur de poynting à un instant caractérise le déplacement (temporelle)
* Moyenne du vecteur de poynting caractérise la propagation.

6) Aspect énergétique :

↳ $\langle u_{em} \rangle = ?$

$$u_{em} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0}$$

$$u_{em} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2 \sin^2(kz) \sin^2(\omega t) + \frac{2E_0^2}{\mu_0 c^2} \cos^2(kz) \cos^2(\omega t)$$

$$\langle u_{em} \rangle = 2\varepsilon_0 E_0^2 \sin^2(kz) \underbrace{\langle \sin^2(\omega t) \rangle}_{=1/2} + 2\varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(kz) \underbrace{\langle \cos^2(\omega t) \rangle}_{=1/2}$$

$$\langle u_{em} \rangle = \varepsilon_0 E_0^2 \sin^2(kz) + \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(kz) \Rightarrow \langle u_{em} \rangle = \varepsilon_0 E_0^2$$

↳ $\langle \vec{\Pi} \rangle$; $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E\vec{u_x} \wedge B\vec{u_y}}{\mu_0} = \frac{EB}{\mu_0} \vec{u_z} \neq \vec{0}$. uniforme dans l'espace

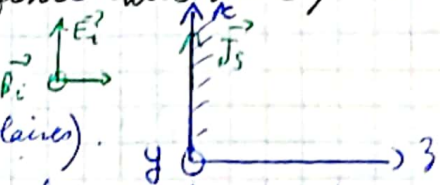
$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \left\langle \frac{EB}{\mu_0} \right\rangle \vec{u_z}$$

or $E.B = 2E_0 \sin(kz) \sin(\omega t) \times \frac{2E_0}{c} \cos(kz) \cos(\omega t)$

$$= \frac{E_0^2}{c} \sin(2kz) \sin(2\omega t)$$

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \sin(2kz) \underbrace{\langle \sin(2\omega t) \rangle}_{\vec{0}} \vec{u_z}$$

$\Rightarrow \langle \vec{\Pi} \rangle = \vec{0}$ pas de propagation de l'énergie électromagnétique car l'onde est stationnaire, l'énergie E.M reste confinée entre deux plans nodaux successifs de $\vec{E}$ et $\vec{B}$ en effet.



7) Pression de radiation: (Mines 2009 vents solaires).

a) Théorie ondulatoire: l'onde incidente exerce une force sur le plan du conducteur parfait dite force de Laplace induite $d\vec{F_L} = \vec{J_s}\, dS \wedge \vec{B_{(i)}}$ ($z=0$)

($\vec{B_{(i)}}$: incident)

$$d\vec{F_L} = \frac{2E_0}{\mu_0 c}\cos(\omega t)\,\vec{u_x}\, dS \wedge \frac{E_0}{c}\cos(\omega t)\,\vec{u_y} = \frac{2E_0^2}{\mu_0 c^2}\cos^2(\omega t)\, dS\, \vec{u_z}$$

avec $\vec{B_i}$ est le champ magnétique incident qui engendre $\vec{J_s}$ et $\vec{J_s}$ n'est pas soumise à $\vec{B_R}$.

La pression de radiation est définie par: $p = \frac{\|d\vec{F_L}\|}{dS} = 2\varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t)$

En moyenne: $\langle p \rangle = \varepsilon_0 E_0^2$

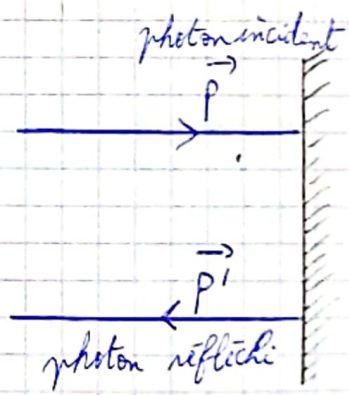
Rq: $\langle p \rangle = \langle u_{em} \rangle$ (mêmes unités) de plus cela montre que la cause de p est u_{em}; $u_{em} \nearrow \Rightarrow p \nearrow$

App: Lévitation par un faisceau laser:

b) Théorie corpusculaire: Chaque photon incident qui subit une réflexion sur le conducteur, sa quantité de mouvement varie de $\Delta\vec{p} = \vec{p'} - \vec{p}$

avec $p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c}$ et $E' = E \Rightarrow p' = p$

(car $\omega_R = \omega_i \Rightarrow \nu' = \nu$; ω_R est valable tant qu'on est loin du domaine des rayons X, γ, ... (voir mécanique quantique).



En mécanique quantique: $E^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4$ ($m_0 = 0$ (photon))

$$\Delta\vec{p} = -2p\,\vec{u_z} = -\frac{2h\nu}{c}\vec{u_z}$$

(variation de la quantité de mouvt.)

obj: pression de radiation = ? $\Leftarrow \delta\vec{F}_{ph \to cond} = ? \Leftarrow \delta\vec{F}_{cond \to ph} = ?$ (action réaction)

$\Leftarrow \Delta\vec{p}_{ph\,total} = ?$

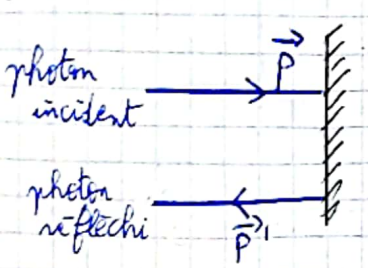
$\Leftarrow \Delta\vec{p} = ?$ (un seul photon.)

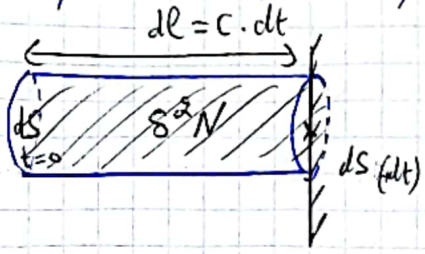
La variation de la quantité de mouvement est:

$$\Delta\vec{p}_{total} = \delta^2 N \cdot \Delta\vec{p} = \delta^2 N\left(-\frac{2h\nu}{c}\vec{u_z}\right) \text{ avec } \delta^2 N = n\,\delta^2\mathcal{C} = n \cdot dS \cdot dl$$

tq $n = \frac{\delta^2 N}{\delta^2 \mathcal{C}}$ est la densité volumique des photons.

$\delta^2 N$ est le nombre des photons qui arrive sur δS pendant dt,





donc $\Delta\vec{p}_T = n \cdot dS \cdot \cancel{c} \cdot dt \left(-\frac{2h\nu}{\cancel{c}} \vec{u}_z\right) = -2nh\nu \, dS \, \vec{u}_z \, dt$

$\Rightarrow \frac{\Delta\vec{p}_T}{dt} = -2nh\nu \, dS \, \vec{u}_z$

Le P.F.D appliqué sur $\delta^2 N$ photons s'écrit : $\delta\vec{F}_{cond \to ph} = \frac{\Delta\vec{p}_T}{dt}$

$\Rightarrow$ puisque $\delta\vec{F}_{cond \to ph} = -\delta\vec{F}_{ph \to cond} \Rightarrow \delta F_{ph \to cond} = -\frac{\Delta\vec{p}_T}{dt}$ $\left(\vec{F}_{1\to 2} = \frac{d\vec{p}_2}{dt}\right)$

or $\delta\vec{F}_{ph \to cond} = \underbrace{P}_{\text{pression}} \cdot dS \cdot \vec{u}_z$ d'où $P \cdot \cancel{dS} \vec{u}_z = -(-2nh\nu \cancel{dS} \vec{u}_z)$

$\Rightarrow$ $\boxed{P = 2nh\nu}$

Complément de cours : Effet Doppler :

VI – phénomènes de propagation et changement de référentiel : Effet Doppler.

1) Définition :

L'effet Doppler est le décalage de fréquence d'une onde entre la mesure par rapport à l'émetteur et la mesure par rapport au récepteur en mouvement relatif.

supposons que : S_1 le premier signal émet par l'émetteur à l'instant t_1

, S_2 le deuxième , , , , t_2

- la période du signal dans le réf de l'émetteur est $T_E = t_2 - t_1$

, , , du récepteur est $T_R = t'_2 - t'_1$

avec t'_1 et t'_2 désignent respectivement les instants de réception des S_1 et S_2

pour déterminer la relation entre T_R et T_E, écrivons les équations horaires pour les mvts de E, R, S_1 et S_2.

↳ Emetteur : $x_E(t_2) = x_E(t_1) + v_E(t_2 - t_1)$

↳ Récepteur : $x_R(t'_2) = x_R(t'_1) + v_R(t'_2 - t'_1)$

↳ premier signal : $x_{S_1}(t'_1) = x_E(t_1) + c(t'_1 - t_1)$

↳ deuxième signal : $x_{S_2}(t'_2) = x_E(t_2) + c(t'_2 - t_2)$ c'est la célérité de l'onde.

or $x_{S_1}(t'_1) = x_R(t'_1)$ (1) et $x_{S_2}(t'_2) = x_R(t'_2)$ (2)

$$\begin{cases} (1') : x_E(t_1) + c(t'_1 - t_1) = x_R(t'_1) \\ (2') : x_E(t_2) + c(t'_2 - t_2) = x_R(t'_2) \end{cases} \Rightarrow$$

(2') − (1') : $x_E(t_2) - x_E(t_1) + c[(t'_2 - t_2) - (t'_1 - t_1)] = x_R(t'_2) - x_R(t'_1)$

$\Rightarrow$ $v_E(t_2 - t_1) + c[(t'_2 - t'_1) - (t_2 - t_1)] = v_R(t'_2 - t'_1)$

$\Rightarrow$ $v_E T_E + c(T_R - T_E) = v_R T_R$

$\Rightarrow$ $(v_E - c) T_E = (v_R - c) T_R \Rightarrow T_R = \frac{c - v_E}{c - v_R} T_E$

or $\begin{cases} T_R = 1/\nu_R \\ T_E = 1/\nu_E \end{cases} \Rightarrow$ $\boxed{\nu_R = \frac{c - v_R}{c - v_E} \nu_E}$

$\nu_R \simeq \left(1 - \frac{v_R}{c}\right)\left(1 + \frac{v_E}{c}\right)\nu_E \simeq \left(1 + \frac{v_E - v_R}{c}\right)\nu_E$

$$\boxed{\nu_R = \left(1 + \frac{v}{c}\right)\nu_E}$$ avec $v = v_E - v_R$ est la vitesse relative de l'E/R

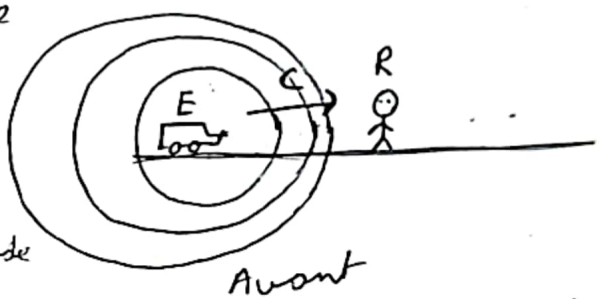
3) Application : Mesure de la vitesse d'un véhicule (camion de pompier)

Considérons un récepteur immobile ($v_R = 0$) (~~Observateur~~) (~~Radar~~) et un véhicule de vitesse v_E qui émet un son de fréquence ν_E (ds le réf du véhicule)

#Avant de croiser le véhicule, la fréquence détectée par le récepteur est :

$$\nu_R = \frac{c}{c - v_E}\nu_E > \nu_E \overset{(1)}{\Rightarrow} \lambda_R < \lambda_E$$

↓ son aigu. Fronts d'onde resserrés



Exple : $c = 340\,m/s$, $v_E = 90\,km/h = 25\,m/s$, $\nu_E = 400\,Hz$ (fréquence de la sirène)

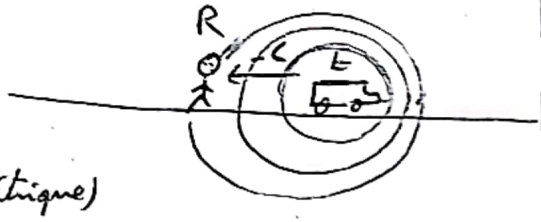
$\Rightarrow \nu_0 \simeq 439\,Hz$

+ Après croisement la fréquence détectée par le récepteur est :

$$\nu'_R = \frac{-c}{-c - v_E}\nu_E = \frac{c}{c + v_E}\nu_E \overset{(2)}{<} \nu_E$$

↓ son grave

$\Rightarrow \lambda_R > \lambda_E$ Fronts d'onde plus écartés



Exple précédent : $\nu'_R \simeq 373\,Hz$ (l'écart n'est pas symétrique)

d'après (1) et (2) on déduit

$$\begin{cases} v_E = \left(1 - \frac{v_E}{\nu_R}\right)c \\ v_E = \left(-1 + \frac{v_E}{\nu'_R}\right)c \end{cases} \Rightarrow 2v_E = c\nu_E\left(\frac{1}{\nu'_R} - \frac{1}{\nu_R}\right) = \frac{c\,\nu_E}{\nu_R \cdot \nu'_R}(\nu_R - \nu'_R)$$

en général $\nu_R \simeq \nu'_R \simeq \nu_E$

$$2v_E \simeq \frac{c}{\nu_E}\Delta\nu \text{ avec } \Delta\nu = \nu_R - \nu'_R \Rightarrow \boxed{v_E = \frac{c}{2}\frac{\Delta\nu}{\nu_E}}$$

c'est la vitesse de déplacement du véhicule.

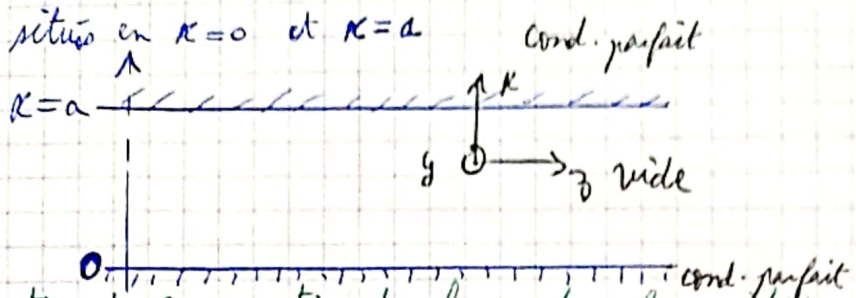
RADAR : RAdio Détect- And Ranging = Détect- et estimation de la distance par ondes radio.

Guide D'onde

(CAPES 2000 calculatrice)

I) propagation guidée entre 2 plans métalliques parallèles.

On s'intéresse à une onde guidée dans un espace limité par 2 plans conducteurs parfaits situés en $x=0$ et $x=a$



1) Équation de propagation du champ dans le guide:

Les équations de Maxwell dans le guide s'écrivent:

$$\begin{cases} \operatorname{div}\vec{E}=0 \\ \operatorname{div}\vec{B}=0 \\ \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B}=\mu_0\left(0+\varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta\vec{E}-\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=\vec{0} \\ \Delta\vec{B}-\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}=\vec{0} \end{cases}$$

2) Solution de l'équation de propagation:

on s'intéresse par la suite à la propagation d'une onde sous la forme

$$\vec{E}=\underbrace{E_0}_{\text{cte}}\,e^{j(\omega t-Kz)}\,\vec{u_y} \quad (*) \text{ (par exemple).}$$

Si on remplace (*) dans l'équation de propagation:

$$(-jK)^2-\frac{1}{c^2}(j\omega)^2=0 \Rightarrow K=\frac{\omega}{c} \quad !!$$

⚠ mais K doit aussi vérifier les conditions aux limites ie "Relations de passage"

↳ Relation de passage en $x=0$:

$$\vec{E}(x=0^+)-\underbrace{\vec{E}(x=0^-)}_{\vec{0}\text{ car }0^-\in\text{ cond. parfait}}=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u_x}$$

$$\Rightarrow E_0\,e^{j(\omega t-Kz)}\vec{u_z}=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u_x}$$

proj/Oy: $E_0(x=0)=0$

↳ Relation de passage en $x=a$:

$$\vec{E}(x=a^+)-\vec{E}(x=a^-)=\frac{\sigma(x=a)}{\varepsilon_0}\vec{u_x}$$

$\vec{0}$ car $a^+\in$ Conducteur parfait

$$\Rightarrow -E_0\,e^{j(\omega t-Kz)}\vec{u_y}=\frac{\sigma(x=a)}{\varepsilon_0}\vec{u_x}$$

proj/Oy: $E_0(x=a)=0$.

⇓ Si $E_0=$ cte alors $E_0=0$!

pour que l'onde se propage dans le guide il faut que E_0 dépende de x $\Rightarrow \vec{E}=E_0(x)\,e^{j(\omega t-Kz)}\vec{u_y}$

Ce champ doit vérifier l'équation de propagation :

$$\frac{\partial^2 \underline{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \underline{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \underline{E}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \underline{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{d^2 E_0(x)}{dx^2} e^{j(\omega t - kz)} + E_0(x) \times (-jk)^2 e^{j(\omega t - kz)} - \frac{1}{c^2}(j\omega)^2 E_0(x) e^{j(\omega t - kz)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2 E_0(x)}{dx^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right) E_0(x) = 0}$$

$E_0(x)$ doit vérifier les relations de passage $\begin{cases} E_0(x=0) = 0 \\ E_0(x=a) = 0. \end{cases}$

↳ Si $k > \frac{\omega}{c}$ on pose $\alpha^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}$

$$\Rightarrow E_0''(x) - \alpha^2 E_0(x) = 0 \Rightarrow E_0(x) = A e^{\alpha x} + B e^{-\alpha x}$$

$$\begin{cases} E_0(x=0) = 0 \\ E_0(x=a) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ A e^{\alpha a} + B e^{-\alpha a} = 0 \end{cases} \Rightarrow A\left(e^{\alpha a} - e^{-\alpha a}\right) = 0$$

$$\Rightarrow A = 0 \Rightarrow B = 0 \Rightarrow E_0(x) = 0$$

↳ Si $k = \frac{\omega}{c}$ alors $E_0''(x) = 0 \Rightarrow E_0(x) = Ax + B \Rightarrow \vec{E} = 0$

$$\text{or} \begin{cases} E_0(x=0) = 0 \\ E_0(x=a) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = 0 \\ A = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{E} = \vec{0}$$

↳ Si $k < \frac{\omega}{c}$ alors on pose $\mu^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \Rightarrow E_0''(x) + \mu^2 E_0(x) = 0$

$$\Rightarrow E_0(x) = A\cos(\mu x) + B\sin(\mu x)$$

$$\text{or} \begin{cases} E_0(x=0) = 0 \\ E_0(x=a) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B\sin(\mu a) = 0 \end{cases} \xrightarrow[B \neq 0]{\text{pour que}} \sin(\mu a) = 0 \Rightarrow \mu a = n\pi$$

$\mu_n = \frac{n\pi}{a}$ Quantification de μ or $E_0(x) = B\sin(\mu x)$

$$\Rightarrow E_{0n}(x) = E_{0,n}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \text{ avec } E_{0n} = B$$

or $\vec{E} = E_0 e^{j(\omega t - kz)} \vec{u_y}$ donc finalement :

$$\vec{E} = E_0(x)\cos(\omega t - kz)\vec{u_y}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}_n(M,t) = E_{0,n}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\cos(\omega t - kz)\vec{u_y}}$$

Mode propre de rang n.

$\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$: stationnaire suivant x.

$\cos(\omega t - kz)$: progressive suivant z.

C'est la solution générale. $\vec{E} = \sum_{n=1}^{+\infty} \vec{E}_n$

C'est une onde progressive suivant z, stationnaire suivant x, non plane (plan ⊥ direction de propagation) car le champ $\vec{E}$ dépend de x.

monochromatique et transversale

3) Relation de dispersion :

on a $\mu_n = \frac{n\pi}{a}$ or $\mu^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2$

$$\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{k_n^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}$$

Quantification de k.

pour les ondes E.M ω est une grandeur intrinsèque pour les ondes E.M mais pas pour les ondes mécaniques.

La relation de dispersion est non linéaire $\Rightarrow$ le guide d'onde est un milieu dispersif. La condition de propagation est : k est réel.

(propagation $\in k$ possède une partie réelle non nulle mais puisque le milieu est infini alors si il y'a atténuation il n'aura plus de propagation. donc on impose $\mathrm{Im}(k) = 0$ pour qu'il n'ait pas d'atténuation).

k réel $\Rightarrow \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 > \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \Rightarrow$

$$\boxed{\omega > \frac{n\pi c}{a} = \omega_{c,n}}$$

Condition de propagation

$\Rightarrow$ le guide d'onde est un filtre passe haut de pulsation de coupure $\omega_{c,n}$.

$\omega < \omega_{c,1} \Rightarrow \vec{E} = \vec{0}$.

$\omega_{c,1} < \omega < \omega_{c,2} \Rightarrow \vec{E} = \vec{E}_1$.

$\omega_{c,2} < \omega < \omega_{c,3} \Rightarrow \vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$.

$\omega_{c,9} < \omega < \omega_{c,10} \Rightarrow \vec{E} = \vec{E}_1 + \dots + \vec{E}_9$.

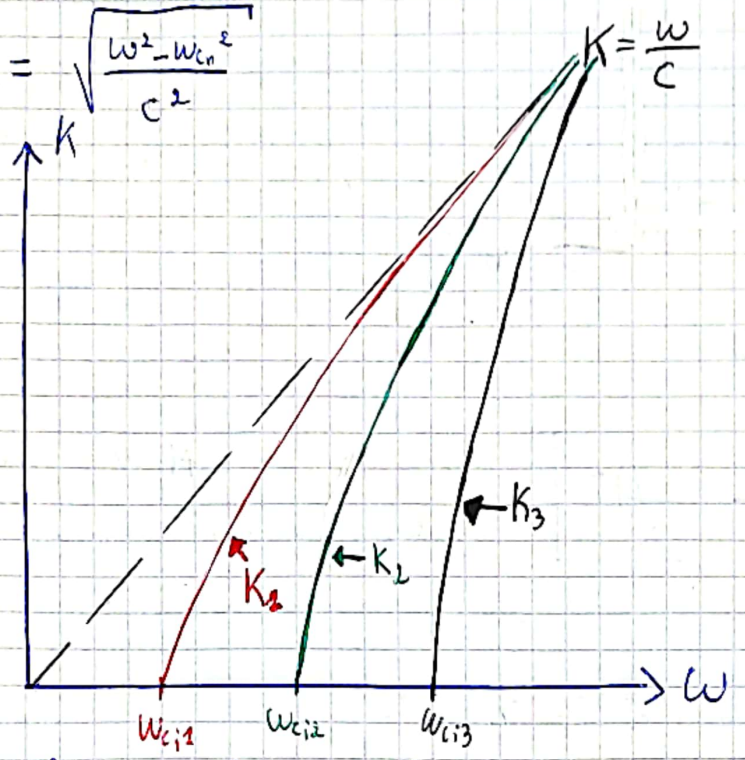
4) Représentation de la relation de dispersion:

$$K_n^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{n\pi c}{a \cdot c}\right)^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{\omega_{cn}}{c}\right)^2 = \frac{\omega^2 - \omega_{cn}^2}{c^2}$$

↳ Si $\omega = \omega_{cn} \Rightarrow K_n = 0$

↳ Si $\omega \gg \omega_{cin} \Rightarrow K_n \simeq \frac{\omega}{c}$

$$K_n = \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_{cn}^2}{c^2}}$$



$$\omega_{ci2} = \frac{\pi c}{a} \Rightarrow \omega_{cin} = n \cdot \omega_{ci1}$$

$$\omega_{cin} = \frac{n\pi c}{a}$$

Si $\omega \gg \omega_{cn} \Rightarrow K \simeq \frac{\omega}{c}$

$\omega \gg \frac{n\pi c}{a}$

$\Rightarrow a \gg \frac{n\pi c}{\omega}$

vide illimité

* pour chaque valeur de n la propagation n'est possible que si $\omega \gg \omega_{ci}$
* la condition pour avoir un seul mode de propagation est $\omega_{c1} < \omega < \omega_{c2}$
* Si $\omega \gg \omega_{cin} \Rightarrow K \simeq \frac{\omega}{c}$ donc le guide d'onde se comporte comme un vide illimité en effet $\omega \gg \frac{n\pi c}{a} \Rightarrow a \gg \frac{n\pi c}{\omega}$

avec a est la distance entre les 2 plans conducteurs parfaits

5) autre forme de la relation de dispersion:

* on définit la longueur d'onde dans le guide par $\lambda_g = \frac{2\pi}{K}$
* on définit la longueur d'onde dans le vide par $\lambda_0 = \frac{2\pi}{K_0} = \frac{2\pi}{\omega} c$
* on définit la longueur d'onde de coupure par $\lambda_{cin} = \frac{2\pi}{\omega_{cin}} \cdot c$

or $K^2 = \frac{\omega^2 - \omega_{cin}^2}{c^2} \Rightarrow \left(\frac{2\pi}{\lambda_g}\right)^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\right)^2 - \left(\frac{2\pi}{\lambda_{cin}}\right)^2$

donc $$\boxed{\frac{1}{\lambda_g^2} = \frac{1}{\lambda_0^2} - \frac{1}{\lambda_{cin}^2}}$$

Condition de propagation: $K^2 > 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{\lambda_g}\right)^2 > 0 \Rightarrow \frac{1}{\lambda_n^2} > \frac{1}{\lambda_{cn}^2}$

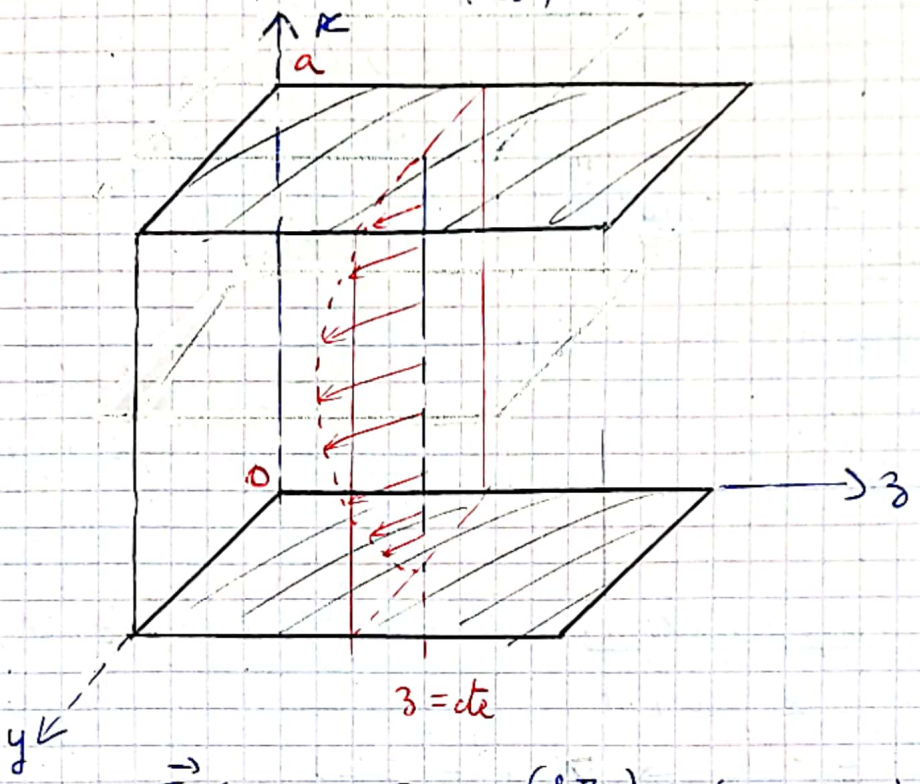
$\Rightarrow$ $\{\lambda_{c,n} > \lambda_0\}$ avec $\lambda_{c,n} = \frac{2\pi}{\omega_{c,n}} \cdot c$

donc $\lambda_{c,n} = \frac{2\pi}{\frac{n\pi c}{a}} \cdot c = \frac{2a}{n}$

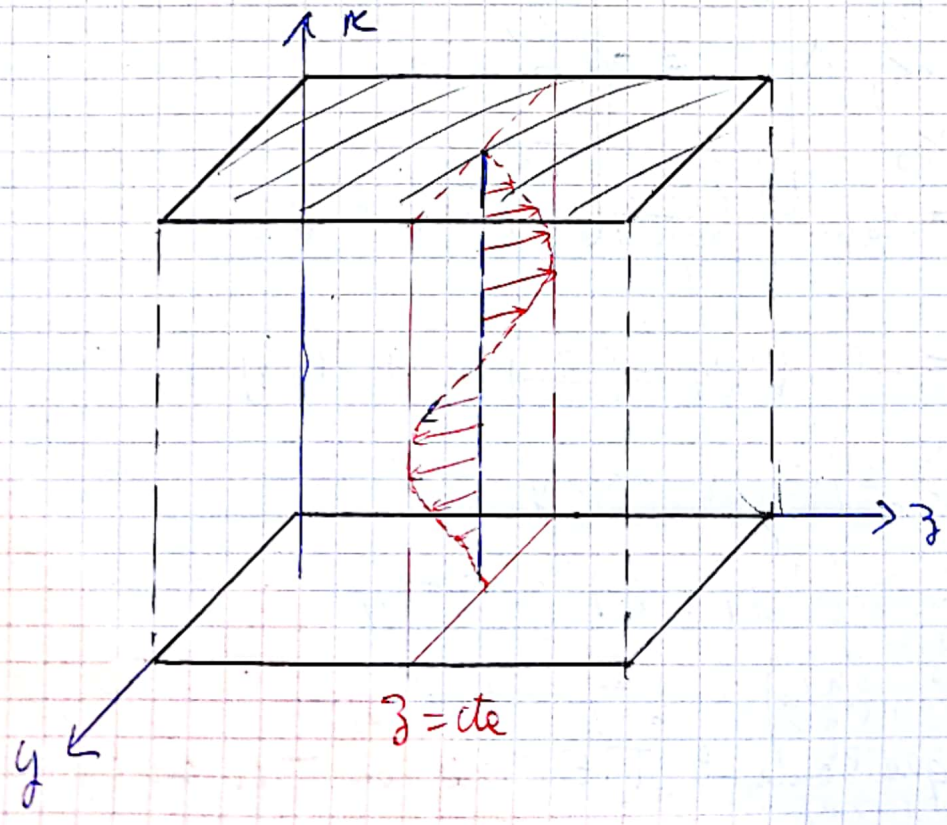
$\{\lambda_{c,n} = \frac{2a}{n}\}$

6) représentation de quelques modes :

Mode n = 1 : $\vec{E}_1(M,t) = E_{0,1} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos(\omega t - k_1 z)\, \vec{u_y}$



Mode n = 2 : $\vec{E}_2(M,t) = E_{0,2} \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \cos(\omega t - k_2 z)\, \vec{u_y}$



7) Vitesse de phase - Vitesse de groupe:

$$K_n^2 = \frac{\omega^2 - \omega_{cn}^2}{c^2} \quad \text{avec} \quad \omega_{cn} = \frac{n\pi c}{a}$$

↳ $$v_\varphi = \frac{\omega}{Re(K)} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_{cn}^2}{c^2}}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{cn}}{\omega}\right)^2}}$$

↳ $$v_g = \frac{d\omega}{dRe(K)} = ?$$

$$K^2 = \frac{\omega^2 - \omega_{cn}^2}{c^2} \xrightarrow{d} 2K\,dK = \frac{2\omega\,d\omega}{c^2} \Rightarrow v_g \cdot v_\varphi = c^2$$

$$\Rightarrow v_g = c\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{cn}}{\omega}\right)^2}$$

On remarque que:

- la relation de dispersion est non linéaire.
- v_φ dépend de ω.
- v_g dépend de ω.
- $v_g \neq v_\varphi$

$\Rightarrow$ Le guide d'onde est un milieu dispersif.

8) Expression du champ magnétique:

$\vec{B} \neq \frac{\vec{K} \wedge \vec{E}}{\omega}$ car l'onde n'est pas plane (les relations de structure précédentes nécessitaient que l'onde soit plane).

Solution: $\vec{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\begin{vmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ E \\ 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -\frac{\partial E}{\partial z} \\ 0 \\ \frac{\partial E}{\partial x} \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \begin{vmatrix} \frac{\partial E}{\partial z} = E_{0n} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)(+K)\sin(\omega t - Kz) \\ 0 \\ \frac{-\partial E}{x} = -E_{0n}\left(\frac{n\pi}{a}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\cos(\omega t - K_z z) \end{vmatrix}$$

$$\vec{E}_n = E_{0n} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\cos(\omega t - Kz)\,\vec{u}_y$$

$$\vec{B}_n = \begin{vmatrix} B_x = E_{0n} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\left(-\frac{K}{\omega}\right)\cos(\omega t - kz) \\ B_y = 0 \\ B_z = E_{0n}\left(\frac{n\pi}{a\omega}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin(\omega t - Kz) \end{vmatrix}$$

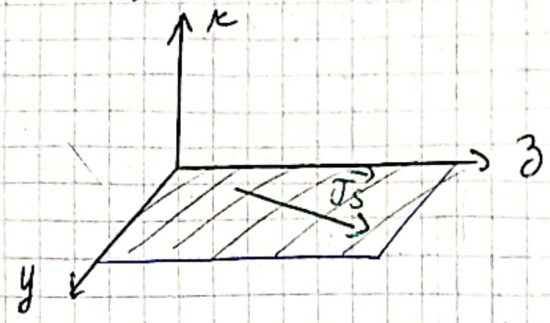
On remarque que l'onde est T.E mais non T.M car $B_z \neq 0$.
↑ transversale

9) Expressions des courants surfaciques :

↳ $\vec{B}(x=0^+) - \vec{B}(x=0^-) = \mu_0 \vec{j}_s(x=0) \wedge \vec{u}_x$

$\vec{0}$ car $x=0^-$ ∈ cond. parfait

$\Rightarrow \vec{B}(x=0^+) = \mu_0 (j_{sy}\vec{u}_y + j_{sz}\vec{u}_z) \wedge \vec{u}_x$ car $\vec{j}_s \in (Oyz)$.



$\Rightarrow \left[B_x(x=0^+)\vec{u}_x + B_z(x=0^+)\vec{u}_z\right] = \mu_0\left[j_{sy}(-\vec{u}_z) + j_{sz}\vec{u}_y\right]$

$0 \quad E_{0n}\left(\frac{n\pi}{a\omega}\right)\sin(\omega t - kz)\vec{u}_z = \mu_0\left[-j_{sy}\vec{u}_z + j_{sz}\vec{u}_y\right]$

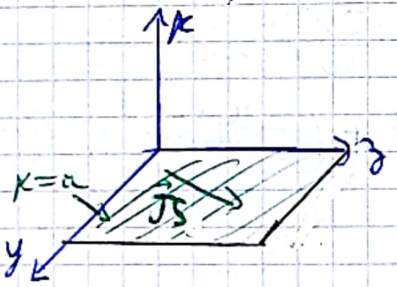
d'où $j_{sz} = 0$ et $j_{sy} = \frac{-E_{0n}}{\mu_0}\left(\frac{n\pi}{a\omega}\right)\sin(\omega t - kz)$

Ccl : $\vec{j}_s(x=0, z, t) = \frac{-E_{0n}}{\mu_0}\left(\frac{n\pi}{a\omega}\right)\sin(\omega t - kz)\vec{u}_y$

↳ $\vec{B}(x=a^+) - \vec{B}(x=a^-) = \mu_0 \vec{j}_s(x=a) \wedge \vec{u}_x$

$\vec{0}$ car $x=a^+$ ∈ cond. parfait.

donc $-\vec{B}(x=a^-) = \mu_0 (j_{sy}\vec{u}_y + j_{sz}\vec{u}_z) \wedge \vec{u}_x$ car $\vec{j}_s \in (Oyz)$



$-\left[B_x(x=a^-)\vec{u}_x + B_z(x=a^-)\vec{u}_z\right] = \mu_0\left[j_{sy}(-\vec{u}_z) + j_{sz}\vec{u}_y\right]$

$-E_{0n}\left(\frac{n\pi}{a\omega}\right)(-1)^n \sin(\omega t - kz)\vec{u}_z = \mu_0\left[-j_{sy}\vec{u}_z + j_{sz}\vec{u}_y\right]$

d'où $j_{sz} = 0$ et $j_{sy} = \frac{E_{0n}}{\mu_0}\left(\frac{n\pi}{a\omega}\right)\sin(\omega t - kz)(-1)^n$

Ccl : $\vec{j}_s(x=a, z, t) = (-1)^n \frac{E_{0n}}{\mu_0}\left(\frac{n\pi}{a\omega}\right)\sin(\omega t - kz)\vec{u}_y$

1°) Aspect Energetique :

$$\rightarrow \langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B}$$

$$= \frac{1}{\mu_0} \left[E_{0n} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos(\omega t - kz)\, \vec{u_y} \wedge \left(B_x \vec{u_x} + B_z \vec{u_z} \right) \right]$$

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{\mu_0} \left[E_{0n} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos(\omega t - kz) \cdot \left(-B_x \vec{u_z} + B_z \vec{u_x} \right) \right]$$

$$= +\frac{1}{\mu_0} E_{0n}^2 \sin^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos^2(\omega t - kz) \frac{k}{\omega} \vec{u_z} + \frac{1}{\mu_0} E_{0n}^2 \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos\left(\omega t - kz\right) \left(\frac{n\pi}{a\omega}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin(\omega t - kz) \vec{u_x}$$

$$\boxed{\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} E_{0n}^2 \sin^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \vec{u_z}}$$

L'énergie électromagnétique se propage suivant $\vec{u_z}$ avec $\langle \vec{\Pi} \rangle = \vec{0}$ sur les bords $\begin{cases} en\ x=0 \\ et\ x=a \end{cases}$

$$\rightarrow \langle u_{em} \rangle = \left\langle \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 \right\rangle$$

$$u_{em} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_{0n}^2 \sin^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos^2(\omega t - kz) + \frac{1}{2\mu_0} E_{0n}^2 \left[\left(\frac{k}{\omega}\right)^2 \sin^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos^2(\omega t - kz) + \left(\frac{n\pi}{a\omega}\right)^2 \cos^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin^2(\omega t - kz) \right]$$

$$\langle u_{em} \rangle = \frac{1}{4} \varepsilon_0 E_{0n}^2 \sin^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right) + \frac{1}{4\mu_0} E_{0n}^2 \left(\frac{k}{\omega}\right)^2 \sin^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right) + \frac{1}{4\mu_0} E_{0n}^2 \left(\frac{n\pi}{a\omega}\right)^2 \cos^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

$$= \frac{1}{4} \varepsilon_0 E_{0n}^2 \sin^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right) + \frac{1}{4\mu_0} E_{0n}^2 \left[\left(\frac{k}{\omega}\right)^2 \sin^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right) + \left(\frac{n\pi}{a\omega}\right)^2 \cos^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \right]$$

$$= \frac{1}{4} \varepsilon_0 E_{0n}^2 \sin^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right) + \frac{1}{4} \varepsilon_0 E_{0n}^2 \left[\left(\frac{ck}{\omega}\right)^2 \sin^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right) + \left(\frac{n\pi c}{a\omega}\right)^2 \cos^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \right]$$

$$= \frac{1}{4} \varepsilon_0 E_{0n}^2 \left[\left(1 + \left(\frac{ck}{\omega}\right)^2\right) \sin^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right) + \left(\frac{n\pi c}{a\omega}\right)^2 \cos^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \right]$$

or $k^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$ donc :

$$\left(\frac{kc}{\omega}\right)^2 = \left(\frac{c}{c}\right)^2 - \left(\frac{n\pi c}{a\omega}\right)^2 = 1 - \left(\frac{n\pi c}{a\omega}\right)^2$$

d'où $\frac{1}{4} \varepsilon_0 E_{0n}^2 \left[\left(1 + \left(\frac{ck}{\omega}\right)^2\right) \sin^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right) + \left(1 - \left(\frac{kc}{\omega}\right)^2\right) \cos^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \right]$

et donc $\langle u_{em} \rangle = \frac{1}{4} \varepsilon_0 E_{0n}^2 \left[\left(\frac{kc}{\omega}\right)^2 \left(\sin^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right) - \cos^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \right) + 1 \right]$

$$\langle u_{em} \rangle = \frac{\varepsilon_0 E_{0n}^2}{4} \left[1 + \left(\frac{kc}{\omega}\right)^2 \left(\sin^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right) - \cos^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \right) \right]$$

CamScanner

la répartition de l'E.M est non uniforme dans le guide.

11) Décomposition de l'onde guidée :

Montrer que l'onde guidée est la superposition de 2 OPPM de vecteurs d'ondes respectifs $\vec{K_1}$ et $\vec{K_2}$ tq la réflexion de $\vec{K_2}$ sur le plan $x=0$ donne $\vec{K_2}$ et la réflexion de $\vec{K_1}$ sur le plan $x=a$ donne $\vec{K_1}$.

$$\vec{E_n} = E_{0n} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos(\omega t - K_3)\vec{u_y}$$

or $\sin a \cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b)+\sin(a-b)\right]$

$$\vec{E_n} = \frac{E_{0n}}{2}\left[\sin\left(\frac{n\pi x}{a}+\omega t-K_3\right)+\sin\left(\frac{n\pi x}{a}-\omega t+K_3\right)\right]\vec{u_y}$$

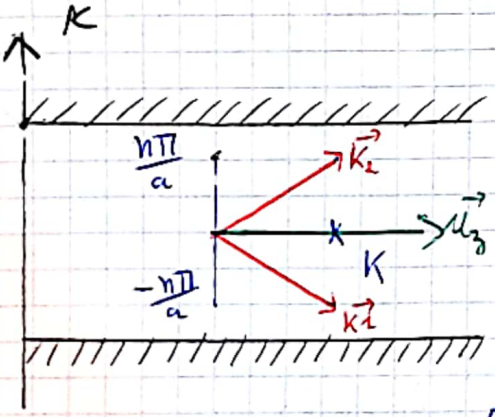
$$\vec{E_n} = \frac{E_{0n}}{2}\sin\left(\omega t-\left(-\frac{n\pi x}{a}+K_3\right)\right)\vec{u_y} - \frac{E_{0n}}{2}\sin\left(\omega t-\left(\frac{n\pi x}{a}+K_3\right)\right)\vec{u_y}$$

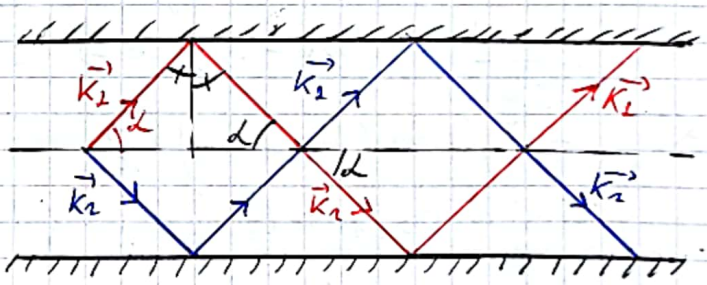
$$= \underbrace{\frac{E_{0n}}{2}\sin\left(\omega t-\vec{K_1}\cdot\vec{OM}\right)\vec{u_y}}_{\vec{E_1}} - \underbrace{\frac{E_{0n}}{2}\sin\left(\omega t-\vec{K_2}\cdot\vec{OM}\right)\vec{u_y}}_{\vec{E_2}} \text{ avec}$$

$$\vec{K_1} = \frac{-n\pi}{a}\vec{u_x} + K\vec{u_z} \quad \text{et} \quad \vec{K_2} = \frac{n\pi}{a}\vec{u_x} + K\vec{u_z}$$

$$\Rightarrow \|\vec{K_1}\| = \|\vec{K_2}\| = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2+K^2} = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2+\left(\left(\frac{\omega}{c}\right)^2-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2\right)} = \frac{\omega}{c}$$

$$K^2 = \frac{\omega^2 - \omega_{cn}^2}{c^2} = \frac{\omega^2-\left(\frac{n\pi c}{a}\right)^2}{c^2}$$





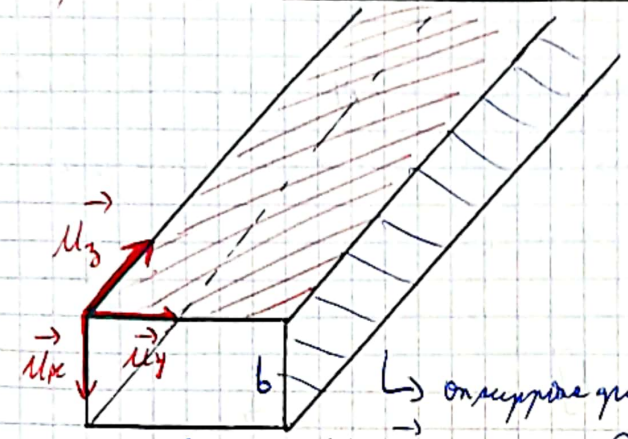
Rq : $\cos\alpha = \frac{K}{\|\vec{K_2}\|} = \frac{\sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}}{\frac{\omega}{c}} = \sqrt{1-\left(\frac{n\pi c}{a\omega}\right)^2}$

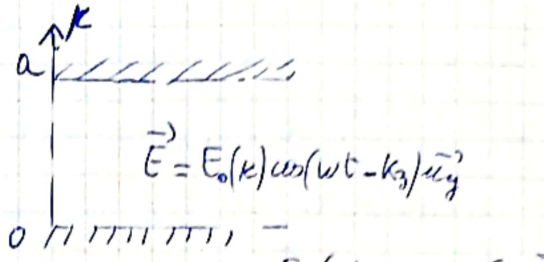
or $v_g = c\sqrt{1-\left(\frac{\omega_{cn}}{\omega}\right)^2} = c\sqrt{1-\left(\frac{n\pi c}{a\omega}\right)^2}$ d'où

$$\boxed{v_g = c\cos\alpha} \text{ et } \boxed{v_\varphi = \frac{c}{\cos\alpha}}$$

Ccl : l'onde guidée résulte des réflexions multiples des OPPM sur les 2 plans conducteurs parfaits. (CNC 2000)

II) Guide d'onde à section rectangulaire : (CNC 2000)





↳ on suppose que : $\vec{E} = E_0(x,y)\cos(\omega t - k_z)\vec{u}_y$

or div $\vec{E} = 0 \Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x}^{0} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}^{0} = 0$

$\Rightarrow \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial E_0(x,y)}{\partial y}\cos(\omega t - k_z) = 0$

$\Rightarrow E_0(x,y) = E_0(x) \Rightarrow \vec{E} = E_0(x)\cos(\omega t - k_z)\vec{u}_y$

Après calcul : (Eq de D'Alembert + relations de passage) :

$E_0(x) = E_{0n}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$

d'où $\vec{E} = E_{0n}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\cos(\omega t - k_z)\vec{u}_y$ Mode $T.E_{0,n}$

avec $k^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \longrightarrow \omega_{c\,0n} = \frac{n\pi c}{a}$

↳ on suppose que : $\vec{E} = E_0(x,y)\cos(\omega t - k_z)\vec{u}_x$

or div $\vec{E} = 0 \Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y}^{0} + \frac{\partial E_z}{\partial z}^{0} = 0$

$\frac{\partial E_0(x,y)}{\partial x}\cos(\omega t - k_z) = 0 \Rightarrow E_0(x,y) = E_0(y)$

$\Rightarrow \vec{E} = E_0(y)\cos(\omega t - k_z)\vec{u}_x$

Après calcul : $E_0(y) = E_{0n}\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)$

d'où $\vec{E} = E_{0m}\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)\cos(\omega t - k_z)\vec{u}_x$ Mode $T.E_{0m}$

avec $k^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 \longrightarrow \omega_{c\,m0} = \frac{m\pi c}{b}$

↳ Si $\vec{E} = E_x\vec{u}_x + E_y\vec{u}_y$ Mode TE_{mn} (calc)

avec $k^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left[\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2\right]$

donc $\omega_{c\,m,n} = \pi c\sqrt{\left(\frac{n}{a}\right)^2 + \left(\frac{m}{b}\right)^2}$

CamScanner

Rq : Si les modes de propagation dans le guide sont les transverses électriques TE_{mn} alors le champ magnétique n'est pas transverse de même il existe des modes transverses magnétiques TM_{mn} et le champ électrique n'est pas transverse donc il n'existe pas dans un guide constitué d'un conducteur unique creux des modes transverses électromagnétiques T.E.M.
↳ s'il y en avait ces modes TEM s'il y a 2 conducteurs...
Il existe d'autres types de guides d'ondes constitués de 2 conducteurs comme le câble coaxial et la ligne bifilaire qui ont un mode T.E.M.

TP-cours n°7 : Câble coaxial

Matériel disponible :

- Câble coaxial enroulé de 100m, GBF Centrad, adaptateurs BNC-banane, boite à décade de résistances.

I Équation de propagation dans le câble coaxial

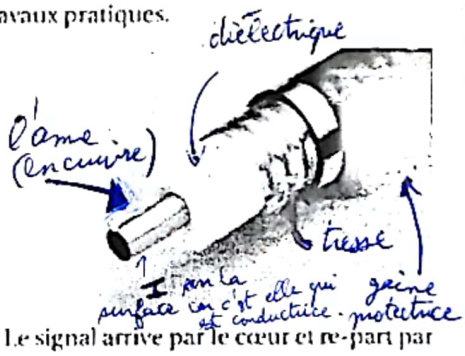
I.1 Introduction

ce n'est pas la même chose.

Les câbles coaxiaux (ou ligne bifiliaire) sont couramment utilisés dans la vie de tous les jours (câble d'antenne de télévision, internet par le câble, liaison borne Wi-Fi/antenne ...) et en travaux pratiques.

La structure particulière du câble coaxial est représentée ci-contre :

- le conducteur central, appelé "l'âme" est un cylindre conducteur en cuivre ;
- le conducteur extérieur est constitué d'un tresse de fils en cuivre très fins où d'une feuille de métal enroulée ;
- l'espace entre les deux conducteurs est comblé par un matériau diélectrique isolant de permittivité relative ε_r et de perméabilité relative μ_r ;
- la gaine extérieur protectrice est également en matériau isolant.



Les deux parties conductrices permettent l'aller et le retour du courant. Le signal arrive par le cœur et re-part par la tresse.

L'intérêt de ce type de câble par rapport à deux simples fils mis en parallèles est double :

- le champ magnétique généré par les courants à l'extérieur du câble est nul et
- la tresse externe agit comme une cage de Faraday pour le cœur ce qui atténue fortement les perturbations par d'éventuels champs extérieurs.

Lorsque du courant alternatif circule dans les conducteur, il est à l'origine d'un champ magnétique dans l'espace intersticiel isolant. Ce champ magnétique possède, à priori, un flux non nul à travers le circuit : un câble coaxial va posséder une **inductance propre linéique** λ non nulle.

De façon similaire, la structure géométrique particulière constitué de deux conducteur en vis-à-vis correspond à une structure de type condensateur : un câble coaxial va posséder une **capacité linéique** γ non nulle.

On peut montrer que $\lambda = \dfrac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} \ln\left(\dfrac{D}{d}\right)$ et $\gamma = \dfrac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}{\ln\left(\dfrac{D}{d}\right)}$ où d est le diamètre de l'âme et D le diamètre de la tresse.

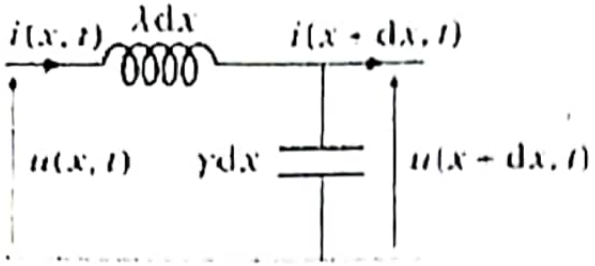
Les câbles coaxiaux de longueur $L = 100$ m
dont on dispose possèdent une inductance linéique $\lambda = 3{,}3.10^{-7}$ H.m^{-1} et une capacité linéique $\gamma = 5{,}3.10^{-11}$ F.m^{-1}.

CamScanner

Pour décrire le comportement du câble, on utilise un modèle dit "à constantes réparties". On considère un élément de câble compris entre les abscisses x et $x + dx$. Ce tronçon de câble possède :

- une inductance $dL = \lambda dx$ proportionnelle à sa longueur,
- une capacité $dC = \gamma dx$

On représente le circuit équivalent à ce tronçon de câble par le schéma électrique suivant :



où la branche du haut correspond à la tresse, la branche du bas correspond à l'âme, l'inductance propre est le long de la tresse et la capacité est entre les deux conducteurs.

Remarque : le fait de considérer que le courant peut ne pas être le même en des points d'abscisse x et $x + dx$ semble entrer en contradiction avec l'ARQS, nous verrons qu'il n'en est rien.

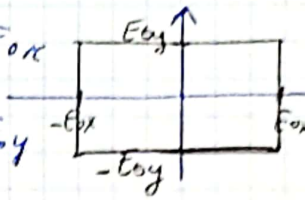
POLARISATION DE LA LUMIÈRE

I) Définition : Soit $\vec{E}(M;t)$ une opp M de direction de propagation $\vec{e_z}$.

$$\vec{E}(M;t) = \begin{cases} E_x = E_{ox}\cos(\omega t - kz + \varphi_x) \\ E_y = E_{oy}\cos(\omega t - kz + \varphi_y) \\ E_z = 0 \quad \text{T.E} \end{cases}$$

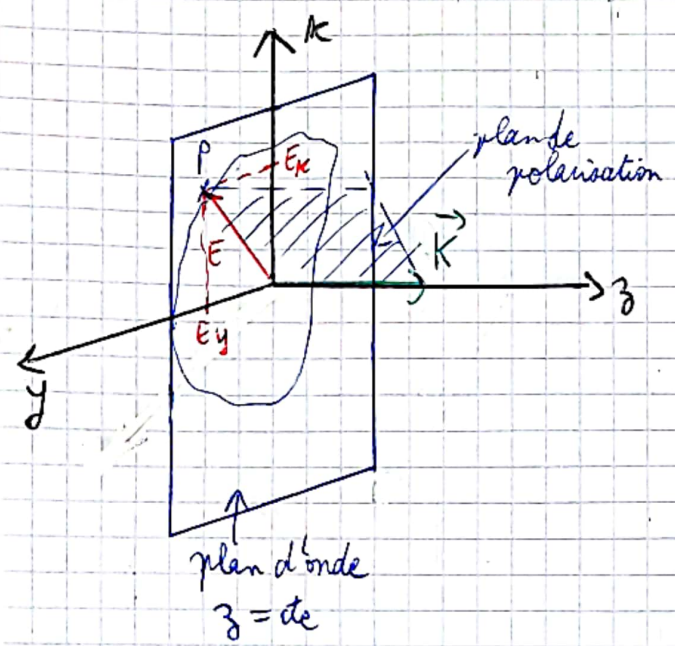
$-E_{ox} \leq E_x \leq E_{ox}$

$-E_{oy} \leq E_y \leq E_{oy}$

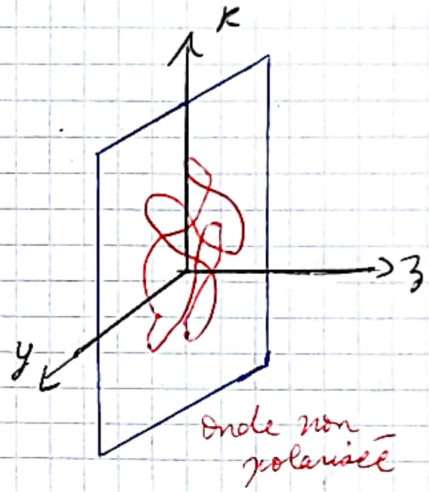


donc le champ $\vec{E}$ est dans un rectangle de côtés $2E_{ox}$ et $2E_{oy}$.

Si l'extrémité du champ $\vec{E}$ décrit une courbe fermée on dit que l'onde est polarisée telle que la direction du champ est dite direction de polarisation et le plan $(\vec{E};\vec{k})$ est appelé plan de polarisation.



Onde polarisée



II) État de polarisation d'une OPPM :

L'état de polarisation prend le nom de la forme géométrique de la courbe décrite par l'extrémité du champ $\vec{E}$. cherchons alors l'équation de cette courbe.

$$\vec{E}(M;t) = \begin{cases} E_x = E_{ox}\cos(\omega t - kz + \varphi_x) \\ E_y = E_{oy}\cos(\omega t - kz + \varphi_y) \end{cases}$$

on pose $\begin{cases} \alpha = \omega t - kz + \varphi_x \\ \varphi = \varphi_y - \varphi_x \end{cases} \Rightarrow \vec{E} = \begin{cases} E_x = E_{ox}\cos(\alpha) \\ E_y = E_{oy}\cos(\alpha + \varphi) \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{E_x}{E_{0x}} = \cos\alpha \\ \frac{E_y}{E_{0y}} = \cos\alpha\cos\varphi - \sin\alpha\cdot\sin\varphi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{E_y}{E_{0y}} = \frac{E_x}{E_{0x}}\cos\alpha \pm \sqrt{1-\cos^2\alpha}\,\sin\varphi$$

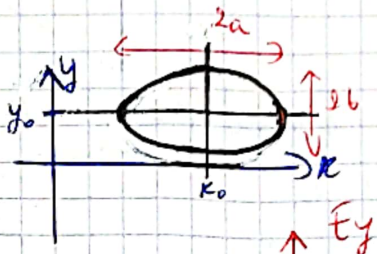
$$\Rightarrow \left(\frac{E_y}{E_{0y}} - \frac{E_x}{E_{0x}}\cos\varphi\right)^2 = \left(1-\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2\right)\sin^2\varphi$$

$$\Rightarrow \boxed{\left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 + \left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2 - 2\,\frac{E_y}{E_{0y}}\,\frac{E_x}{E_{0x}}\cos\varphi = \sin^2\varphi}$$

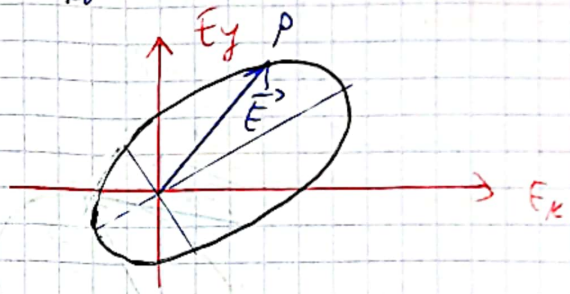
Equation d'une Ellipse

$$Y^2 + X^2 - 2YX\cos\varphi = \sin^2\varphi$$

$$\left(\frac{y-y_0}{b}\right)^2 + \left(\frac{x-x_0}{a}\right)^2 = 1 \Rightarrow$$

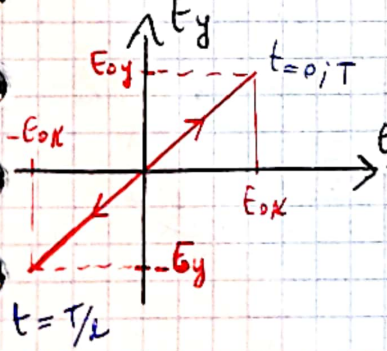


$$Y^2 + X^2 - 2XY\cos\varphi = \sin^2(\varphi) \Rightarrow$$

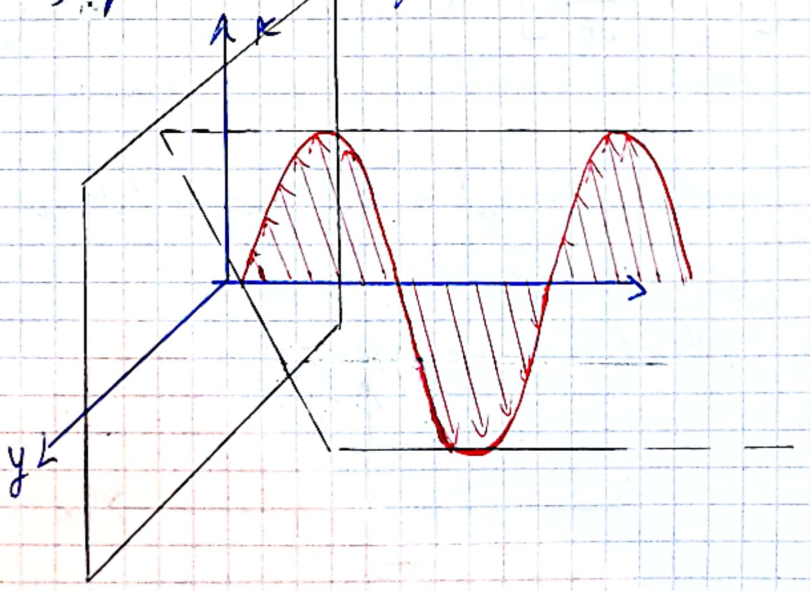


Cas particuliers :

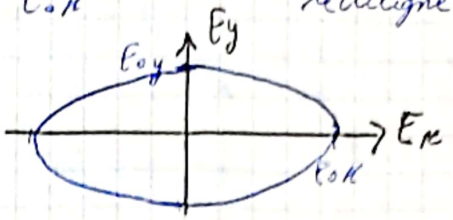
↳ $\varphi = 0$: $\left(\frac{E_y}{E_{0y}} - \frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2 = 0 \Rightarrow E_y = \frac{E_{0y}}{E_{0x}}E_x$ Equation d'un segment



$\Rightarrow$ polarisation rectiligne



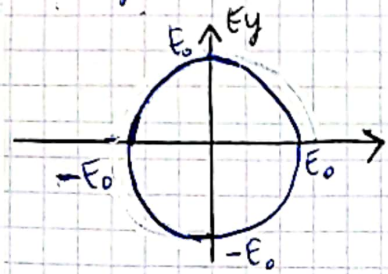
↳ $\varphi = \pi$ $\left(\frac{E_y}{E_{0y}} + \frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2 = 0 \Rightarrow E_y = \frac{-E_{0y}}{E_{0x}} E_x$ ⇒ polarisation rectiligne

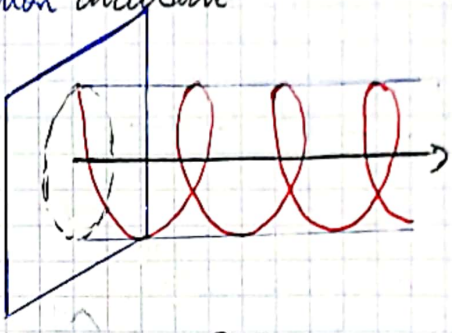


↳ $\varphi = \frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2}$

$\left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 + \left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2 = 1$ polarisation elliptique.

Si $E_{0y} = E_{0x} = E_0$, polarisation circulaire

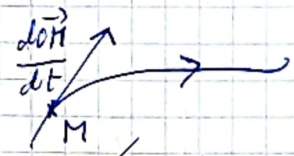




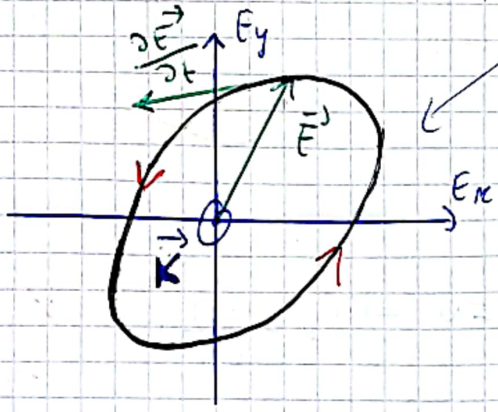
Quelle est la différence entre $\varphi = \pi/2$ et $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ ⇒ sens de l'état de polarisation.

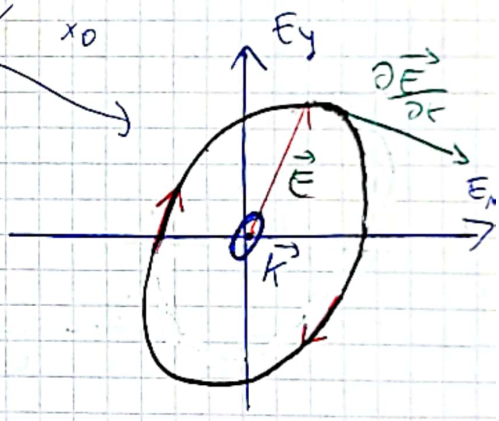
Méthode 1 : $E(t=0) = ?$

$E(t = T/4) = ?$



Méthode 2 :



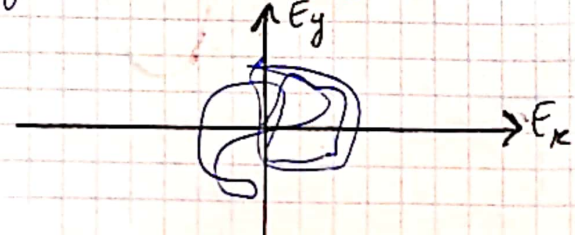


polarisation Gauche ⟲ polarisation droite

$\left[\vec{E} \wedge \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right] \cdot \vec{K} \geqslant 0$ $\left[\vec{E} \wedge \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right] \cdot \vec{K} < 0$ $t=0$

↳ la polarisation ne dépend ni de l'espace ni du temps ; pour simplifier les calculs on peut alors calculer en $t=0$ et $z=0$, sens de

Rq : Si $\varphi = f(t)$ aléatoire ⇒ lumière non polarisée



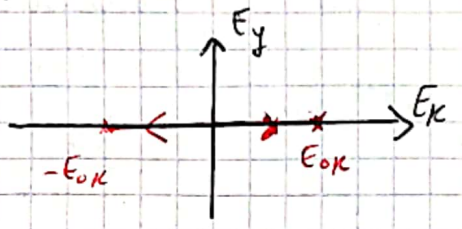
EX : Lien entre les états de polarisation :

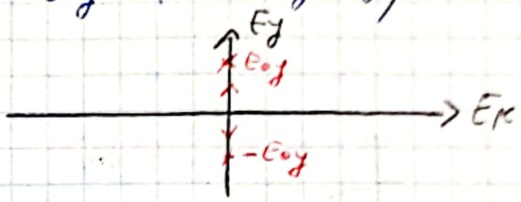
1) Mq une onde polarisée elliptiquement est la superposition de 2 ondes p. Rect

2) Mq l'onde p. Rect $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kz)\vec{u_x}$ est la superposition de 2 ondes polarisées circulairement l'une droite et l'autre gauche.

Réponse : 1) $\vec{E} = \begin{cases} E_x = E_{0x}\cos(\omega t - kz + \varphi_x) \\ E_y = E_{0y}\cos(\omega t - kz + \varphi_y) \end{cases}$

$= \begin{cases} E_x = E_{0x}\cos(\omega t - kz + \varphi_x) \\ E_y = 0 \end{cases} + \begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = E_{0y}\cos(\omega t - kz + \varphi_y) \end{cases}$





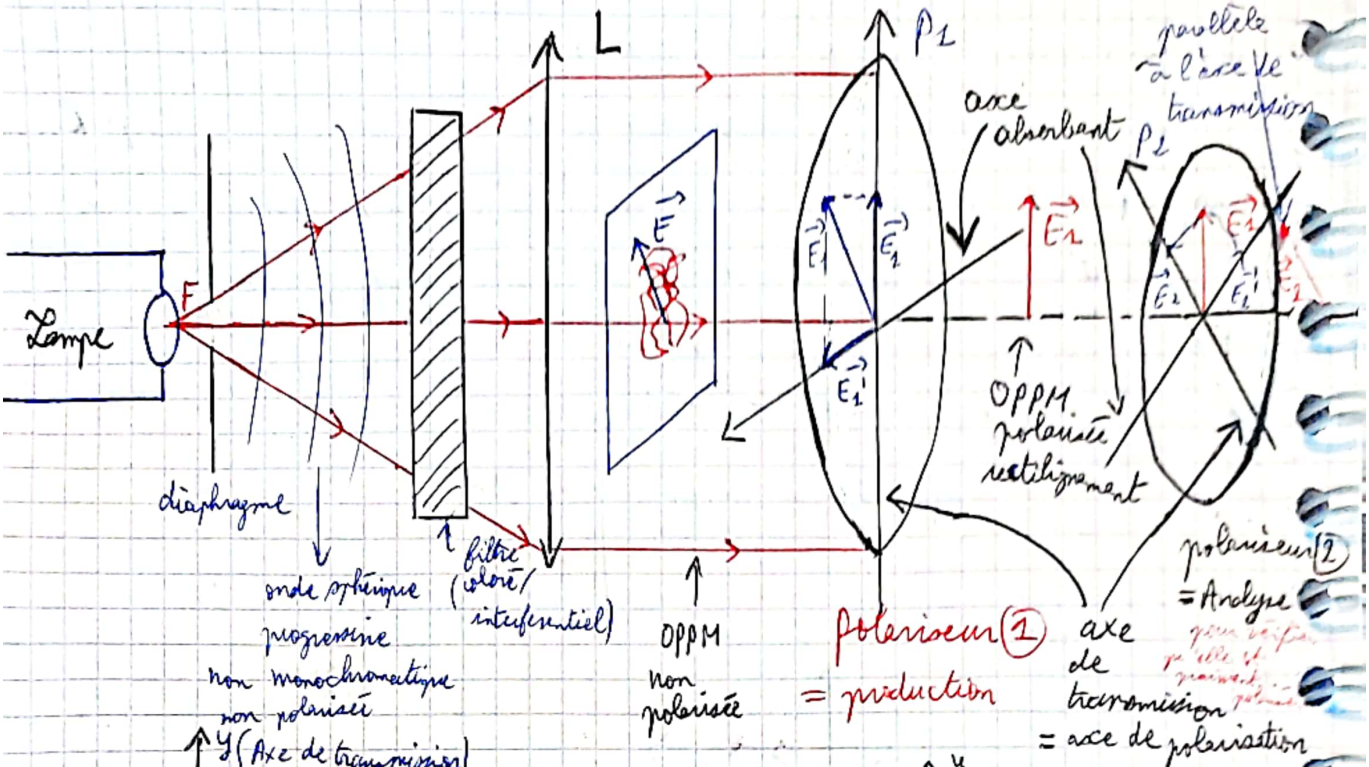
2) $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kz)\vec{u_x}$

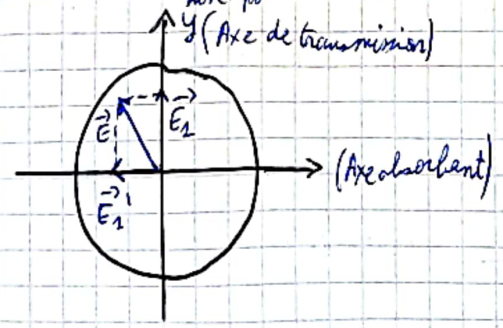
$= \begin{cases} E_x = \frac{E_0}{2}\cos(\omega t - kz) \\ E_y = \frac{E_0}{2}\sin(\omega t - kz) \end{cases} + \begin{cases} E_x = \frac{E_0}{2}\cos(\omega t - kz) \\ E_y = \frac{-E_0}{2}\sin(\omega t - kz) \end{cases}$ $\varphi = \pi/2$

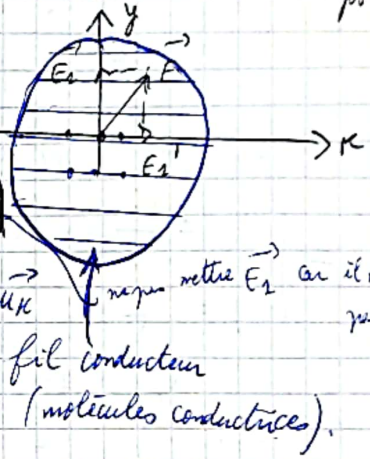
$\varphi = \frac{3\pi}{2}$

III) Production et analyse d'une lumière polarisée rectilignement

L'obtention d'une lumière polarisée rectilignement à partir de la lumière non polarisée se fait par l'intermédiaire d'une lame anisotrope (non isotrope) appelée polariseur possédant un axe de transmission (de polarisation) et un axe absorbant telle que l'onde sortante du polariseur est parallèle à l'axe de transmission. Pour analyser la lumière polarisée rectilignement, on place après le polariseur (1) un polariseur (2) appelé analyseur.

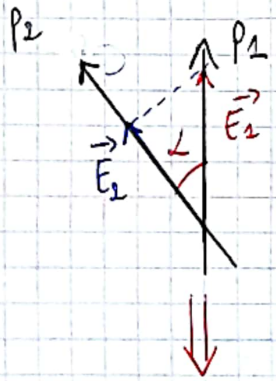






$$m\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -q(\vec{E_1'} + \dots)$$

or $\vec{v} \parallel \vec{u_x} \Rightarrow \vec{E_1'} \parallel \vec{u_x}$ ne peut mettre $\vec{E_1}$ car il n'intéragit pas



$$E_2 = E_1 \cos\alpha$$

on définit l'intensité lumineuse par : $I = \langle E^2 \rangle$ (candela) (cd)

$$I_2 = \langle E_1^2 \rangle = \langle E_2^2 \cos^2(\alpha) \rangle$$

$$\boxed{I_2 = I_1 \cos^2(\alpha)}$$

Loi de Malus

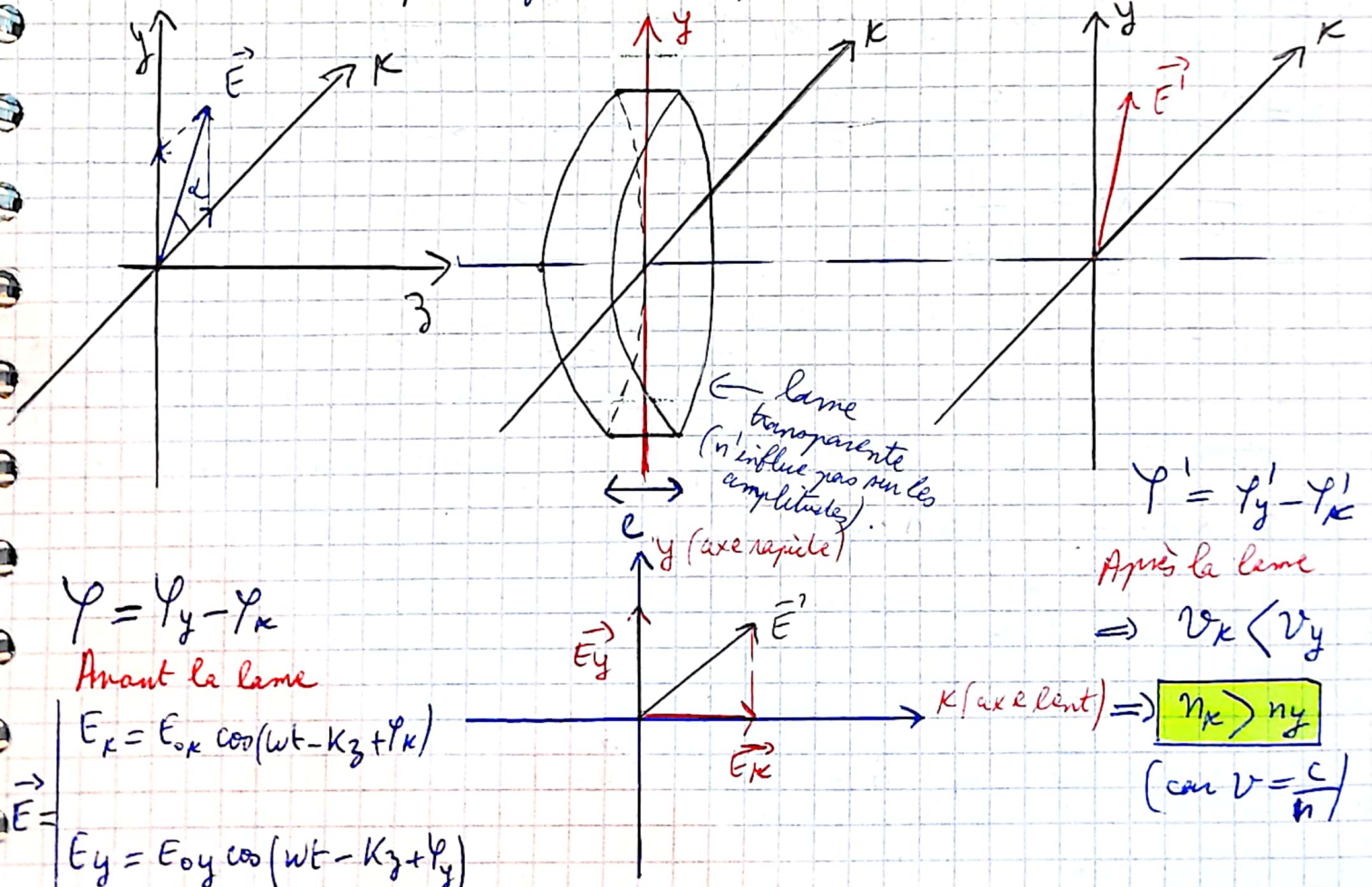
Si $\alpha = 0 \Rightarrow I_2 = I_1$

Si $\alpha = \pi/2 \Rightarrow I_2 = 0$

IV) Lame à retard : (CNC 2012)

contient l'optique ondulatoire

1) Définition : C'est une lame transparente possédant 2 axes perpendiculaires : axe lent et axe rapide dit axes de la lame. Cette lame introduit un déphasage supplémentaire (retard de phase) entre les composantes du champ suivant ces 2 axes ce qui modifie l'état de polarisation de l'onde incidente



$\varphi = \varphi_y - \varphi_x$

Avant la lame

$$\vec{E} \begin{cases} E_x = E_{0x}\cos(\omega t - kz + \varphi_x) \\ E_y = E_{0y}\cos(\omega t - kz + \varphi_y) \end{cases}$$

$\varphi' = \varphi'_y - \varphi'_x$

Après la lame

$\Rightarrow v_x < v_y$

$\Rightarrow$ **$n_x > n_y$**

(car $v = \frac{c}{n}$)

$$\vec{E}' = \begin{cases} E_x' = E_{0x}\cos(\omega t - kz + \varphi_x') \\ E_y' = E_{0y}\cos(\omega t - kz + \varphi_y') \end{cases}$$

$\Delta\varphi = \varphi' - \varphi$: retard de phase
= déphasage supplémentaire

$\Delta\varphi$ lié à $\Longleftrightarrow$ $n_y \neq n_x$

2) Calcul de $\Delta\varphi$:

Après la lame :

$$\vec{E}' = \begin{cases} E_x' = E_{0x}\cos(\omega t_x - kz + \varphi_x) \\ E_y' = E_{0y}\cos(\omega t_y - kz + \varphi_y) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} t_x = t + \Delta t_x \\ t_y = t + \Delta t_y \end{cases} \quad \text{d'où}$$

$$\vec{E}' = \begin{cases} E_x' = E_{0x}\cos\left(\omega t - kz + (\varphi_x + \omega\Delta t_x)\right) \\ E_y' = E_{0y}\cos\left(\omega t - kz + (\varphi_y + \omega\Delta t_y)\right) \end{cases}$$

$$\vec{E}' = \begin{cases} E_x' = E_{0x}\cos(\omega t - kz + \varphi_x') \\ E_y' = E_{0y}\cos(\omega t - kz + \varphi_y') \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \varphi_x' = \varphi_x + \omega\Delta t_x \\ \varphi_y' = \varphi_y + \omega\Delta t_y \end{cases}$$

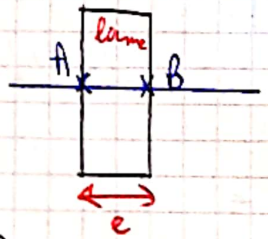
$$\Rightarrow \varphi' = \varphi_y' - \varphi_x' = (\varphi_y + \omega\Delta t_y) - (\varphi_x + \omega\Delta t_x)$$

$$\varphi' = (\varphi_y - \varphi_x) + \omega(\Delta t_y - \Delta t_x) = \varphi + \omega\left(\frac{e}{v_y} - \frac{e}{v_x}\right)$$

$$\Delta\varphi = \varphi' - \varphi = \omega\left(\frac{e}{c}n_y - \frac{e}{c}n_x\right) = \frac{\omega}{c}(e n_y - e n_x)$$

or $\frac{\omega}{c} = k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$ (λ_0 longueur d'onde dans le vide)

$$\boxed{\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0}\delta} \quad \text{avec} \quad \delta = \underbrace{n_y e}_{\substack{\text{chemin optique} \\ \text{suivant} \\ \text{l'axe (y)}}} - \underbrace{n_x e}_{\substack{\text{chemin} \\ \text{optique} \\ \text{suivant} \\ \text{l'axe (x)}}} \quad \begin{matrix} \text{différence de marche optique} \\ \text{(ou différence de chemin optique)} \\ \text{entre les 2 composantes} \end{matrix}$$



$(AB) = n \cdot e$ (chemin optique = n × chemin optique)

Cas particuliers :

↳ Si $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \delta = \frac{\lambda_0}{4}$ **Lame quart d'onde**

↳ Si $\Delta\varphi = \pi \Rightarrow \delta = \frac{\lambda_0}{2}$ **Lame demi-onde**

CamScanner

Rq: la lame à retard n'a pas d'effet sur une lumière non polarisée.
En effet $\varphi = f(t) \Rightarrow \varphi' = \varphi + \Delta\varphi = f(t) + \Delta\varphi \Rightarrow \varphi'$ dépend du temps aléatoirement. (dépend du temps aléatoirement)
donc la lumière après la lame reste non polarisée.

3) Influence de la lame à retard sur une lumière polarisée rectilignement:

$$\vec{E} = \begin{cases} E_x = (E_0 \cos\alpha)\cos(\omega t - kz + \varphi_0) \\ E_y = (E_0 \sin\alpha)\cos(\omega t - kz + \varphi_0) \end{cases}$$

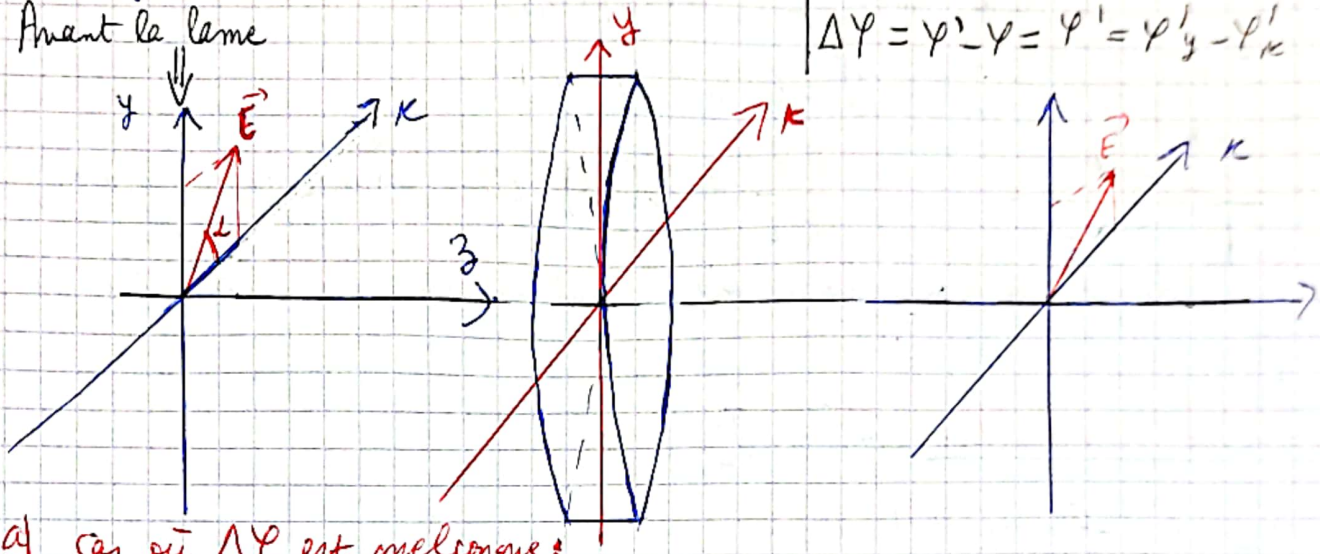
$$\vec{E}' = \begin{cases} E_x' = (E_0\cos\alpha)\cos(\omega t - kz + \varphi_x') \\ E_y' = (E_0\sin\alpha)\cos(\omega t - kz + \varphi_y') \end{cases}$$

$\varphi = \varphi_y - \varphi_x = \varphi_0 - \varphi_0 = 0$.

$\varphi' = \varphi_y' - \varphi_x'$

$\Delta\varphi = \varphi' - \varphi = \varphi' = \varphi_y' - \varphi_x'$

Avant la lame

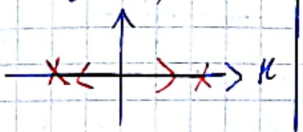


a) cas où $\Delta\varphi$ est quelconque:

(i) et $\alpha = 0$:

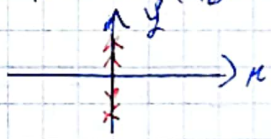
$$\vec{E} = \begin{cases} E_x = E_0\cos(\omega t - kz + \varphi_0) \\ E_y = 0 \end{cases}$$

$$\vec{E}' = \begin{cases} E_x' = E_0\cos(\omega t - kz + \varphi_x) \\ E_y' = 0 \end{cases}$$

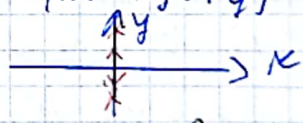


(ii) et $\alpha = \pi/2$

$$\vec{E} = \begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = E_0\cos(\omega t - kz + \varphi_0) \end{cases}$$



$$\vec{E}' = \begin{cases} E_x' = 0 \\ E_y' = E_0\cos(\omega t - kz + \varphi_y') \end{cases}$$



CCL: l'onde reste polarisée rectilignement suivant la même direction. C'est à dire que la lame à retard conserve l'état de polarisation d'une onde polarisée rectilignement suivant l'axe lent ou l'axe rapide. On dit que les axes (Ox) et (Oy) sont des axes **neutres** pour une lumière polarisée rectilignement.

b) cas où α est quelconque $\neq 0$ et $\pi/2$:

C'est l'épaisseur qui change α

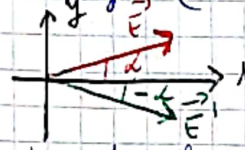
$$\vec{E}' = \begin{cases} E_x' = (E_0 \cos\alpha)\cos(\omega t - kz + \varphi_x') \\ E_y' = (E_0 \sin\alpha)\cos(\omega t - kz + \varphi_x' + \Delta\varphi) \end{cases}$$

on pose $\theta = \omega t - kz + \varphi_x'$

d'où $\vec{E} = \begin{cases} E_x' = (E_0 \cos\alpha)\cos(\theta) \\ E_y' = (E_0 \sin\alpha)\cos(\theta + \Delta\varphi) \end{cases}$

i) Lame demi-onde :

$$\vec{E}' = \begin{cases} E_x' = (E_0 \cos\alpha)\cos(\theta) = E_0 \cos(-\alpha)\cos(\theta) \\ E_y' = (E_0 \sin\alpha)\cos(\theta + \pi) = E_0 \sin(-\alpha)\cos(\theta) \end{cases}$$



$\frac{E_y'}{E_x'} = \tan(-\alpha) = cte \Rightarrow$ onde polarisée rectiligne

l'onde reste polarisée rectilignement mais suivant une direction symétrique à l'axe (Ox)

ii) Lame quart d'onde : $\Delta\varphi = \pi/2$

$$\vec{E}' = \begin{cases} E_x' = E_0 \cos\alpha \cos(\theta) \\ E_y' = (E_0 \sin\alpha)\cos(\theta + \frac{\pi}{2}) = (E_0 \sin\alpha)(-\sin\theta) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{E_x'}{E_0 \cos\alpha}\right)^2 + \left(\frac{E_y'}{E_0 \sin\alpha}\right)^2 = 1 \Rightarrow \text{l'onde est polarisée elliptiquement.}$$

Rq :

$\alpha = \frac{\pi}{4} \Rightarrow E_x'^2 + E_y'^2 = \frac{E_0^2}{2} \Rightarrow$ onde polarisée circulairement.

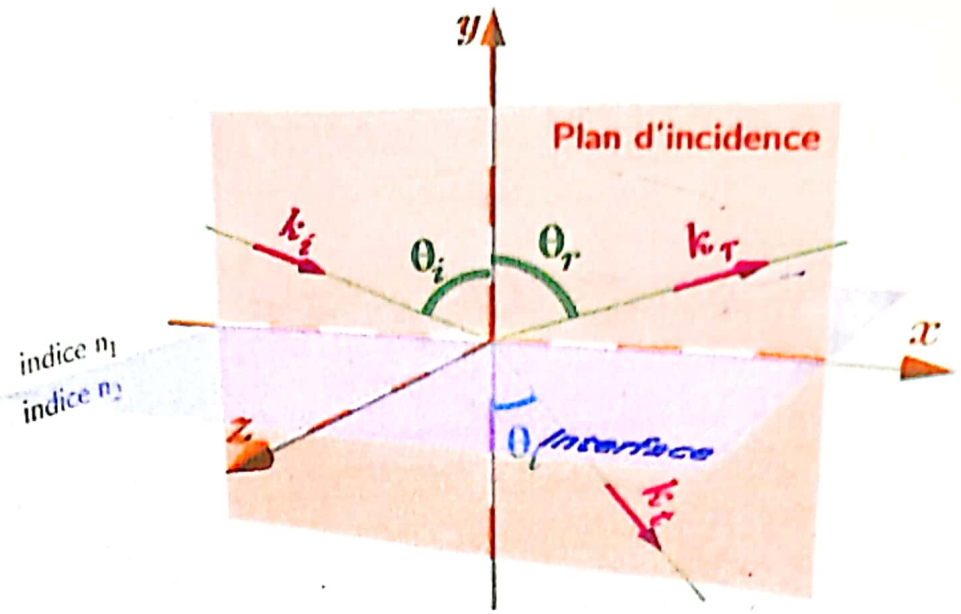
V) Polarisation par réflexion vitreuse $n_2 > n_1$:

On considère dans ces milieux que les relations de structures restent valides

1) Réflexion et transmission par un dioptre :

Rq : toute onde non polarisée est décomposable en 2 onde polarisées rectilignement. C'est pour cela qu'on utilise une onde polarisée $\perp$ au plan d'incidence puis une onde polarisée $//$ au plan d'incidente.

Les Formules de Fresnel se démontent à partir des relations de passage.



$$\begin{cases} \vec{E}(x,y<0,z,t) = \vec{E}_{0i}\, e^{j(\omega t - \vec{k_i}\cdot\vec{r})} + \vec{E}_{0r}\, e^{j(\omega t - \vec{k_r}\cdot\vec{r})} \\ \vec{E}(x,y<0,z,t) = \vec{E}_{0t}\, e^{j(\omega t - \vec{k_t}\cdot\vec{r})} \end{cases} \qquad \vec{r} = \vec{OM}$$

$$\vec{B_\alpha} = \frac{\vec{k_\alpha}\wedge\vec{E_\alpha}}{\omega} = \frac{k_\alpha}{\omega}\,\vec{u_\alpha}\wedge\vec{E_\alpha} \quad \text{avec} \quad \alpha = i, r, t$$

or $v_\varphi = \dfrac{\omega}{K} \Rightarrow \dfrac{K}{\omega} = \dfrac{1}{v_\varphi} = \dfrac{n}{c}$ d'où

$$\vec{B_\alpha} = \frac{n}{c}\,\vec{u_\alpha}\wedge\vec{E_\alpha}$$

Les relations de passage en $y=0$: $(\sigma = 0 \; ; \; \vec{j_s} = \vec{0})$

avec $\vec{r_0} = \vec{OH_0} = x\vec{u_x} + z\vec{u_z}$

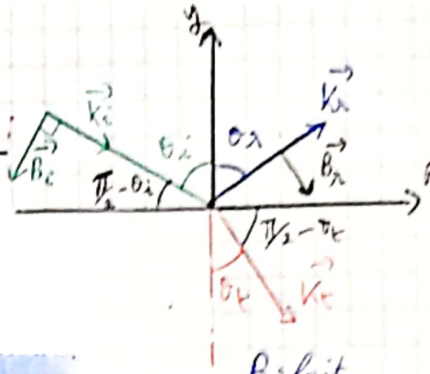
$$\begin{cases} \vec{E_{0i}}\, e^{j(\omega t - \vec{k_i}\cdot\vec{r_0})} + \vec{E_{0r}}\, e^{j(\omega t - \vec{k_r}\cdot\vec{r_0})} = \vec{E_{0t}}\, e^{j(\omega t - \vec{k_t}\cdot\vec{r_0})} & (1) \\ \vec{B_{0i}}\, e^{j(\omega t - \vec{k_i}\cdot\vec{r_0})} + \vec{B_{0r}}\, e^{j(\omega t - \vec{k_r}\cdot\vec{r_0})} = \vec{B_{0t}}\, e^{j(\omega t - \vec{k_t}\cdot\vec{r_0})} & (2) \end{cases}$$

↳ Les lois de Descartes $\begin{cases} \theta_i = \theta_r \\ n_1 \sin\theta_i = n_2 \sin\theta_r \end{cases}$

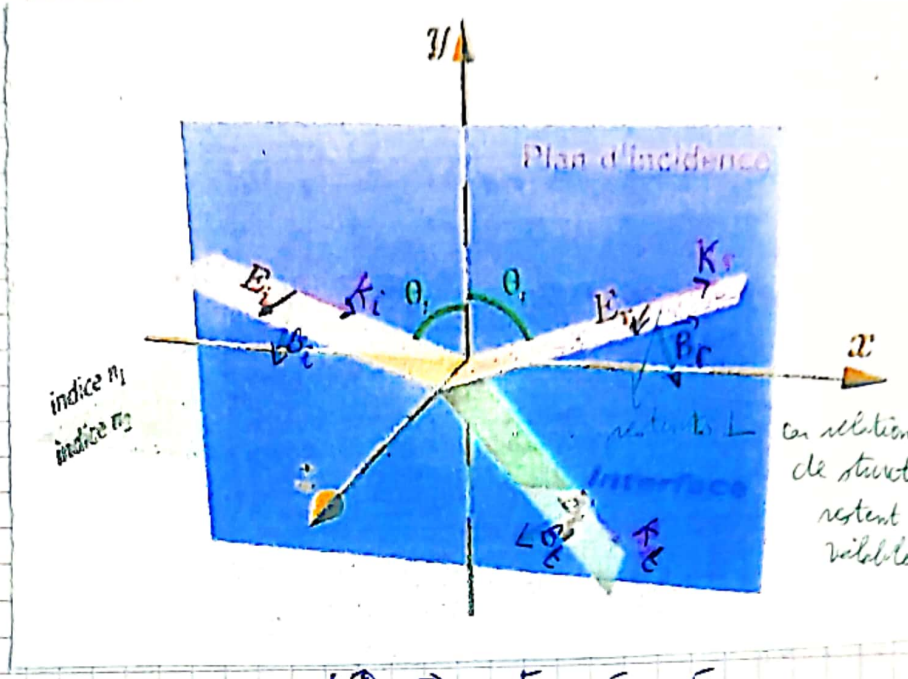
↳ Les formules de FRESNEL !!

2) les formules de Fresnel : (CCP 2009)

a) onde incidente perpendiculaire au plan d'incidence : polarisée



B_r fait l'angle θ_r avec (Ox)



Les relations de passage en O : $\begin{cases} (1)\cdot\vec{u_x} : & E_i + E_r = E_t \\ (2)\cdot\vec{u_z} : & -n_1\cos\theta_i E_i + n_1\cos\theta_r E_r = -n_2\cos\theta_t E_t \end{cases}$

$\theta_r = \theta_i$ ⟶ $n_1\cos(\theta_i)(E_i - E_r) = n_2\cos(\theta_t) E_t$.

on définit les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude par :

$r_\perp = \dfrac{E_r}{E_i}$ et $t_\perp = \dfrac{E_t}{E_i}$ → polarisée perpendiculairement

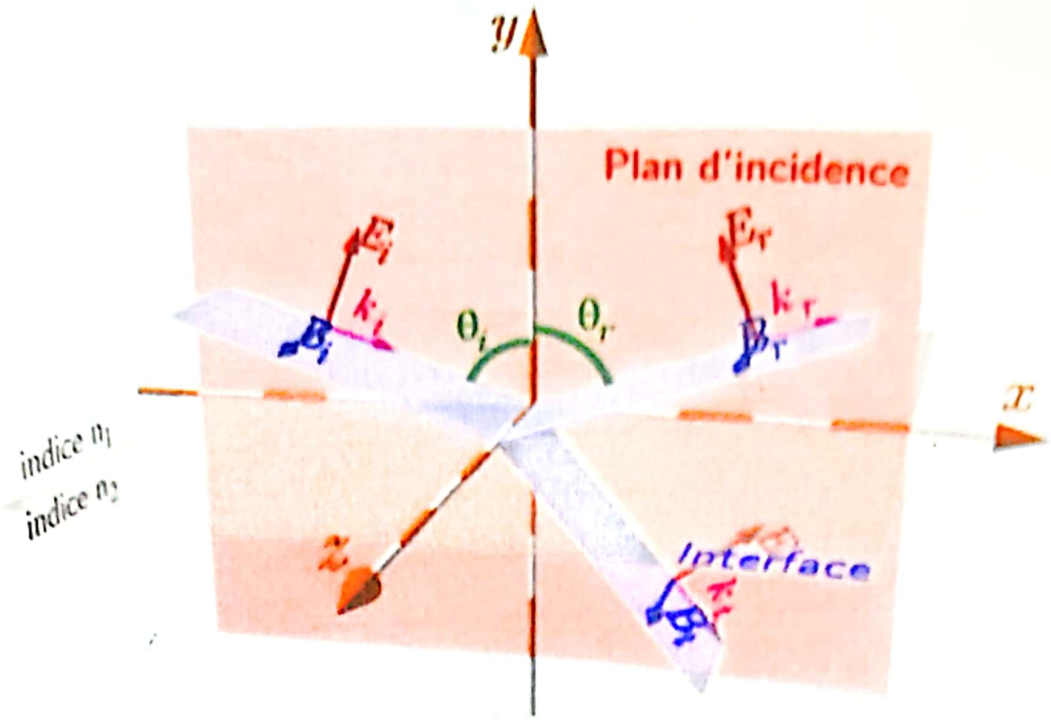
ou $\begin{cases} E_i + E_r = E_t \\ n_1\cos(\theta_i)(E_i - E_r) = n_2\cos(\theta_t)\cdot E_t \end{cases}$ $\times \dfrac{1}{E_i}$

$R_\perp$ les champs transmis et réfléchis sont tjrs $\perp$ au plan d'incidence (voir cours de réflexion)

$\begin{cases} 1 + r_\perp = t_\perp \\ 1 - r_\perp = \dfrac{n_2\cos(\theta_t)}{n_1\cos(\theta_i)} t_\perp \end{cases}$ $\xrightarrow{(+)}$ $2 = \left(\dfrac{n_2\cos(\theta_t)}{n_1\cos(\theta_i)} + 1\right) t_\perp$

$$\Rightarrow \boxed{t_\perp = \frac{2n_1\cos(\theta_i)}{n_2\cos(\theta_t) + n_1\cos(\theta_i)}} \neq 0$$

et $r_\perp = t_\perp - 1$ $\Rightarrow$ $$\boxed{r_\perp = \frac{n_1\cos\theta_i - n_2\cos\theta_t}{n_1\cos\theta_i + n_2\cos\theta_t}} \neq 0$$



① . $\vec{u_x}$: $E_i \cos(\theta_i) - E_r \cos(\theta_r) = E_t \cos(\theta_t) \xrightarrow[\theta_i = \theta_r]{\theta_r} \cos(\theta_i)(E_i - E_r) = E_t \cos(\theta_t)$

② . $\vec{u_z}$: $B_i + B_r = B_t \Rightarrow n_1(E_i + E_r) = n_2 E_t$

$$\begin{cases} E_i - E_r = \dfrac{\cos(\theta_t)}{\cos(\theta_i)} E_t \\ E_i + E_r = \dfrac{n_2}{n_1} E_t \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 1 - r_{//} = \dfrac{\cos\theta_t}{\cos\theta_i} t_{//} \\ 1 + r_{//} = \dfrac{n_2}{n_1} t_{//} \end{cases} \xrightarrow{(+)} 2 = \left(\frac{\cos(\theta_t)}{\cos(\theta_i)} + \frac{n_2}{n_1} \right) t_{//}$$

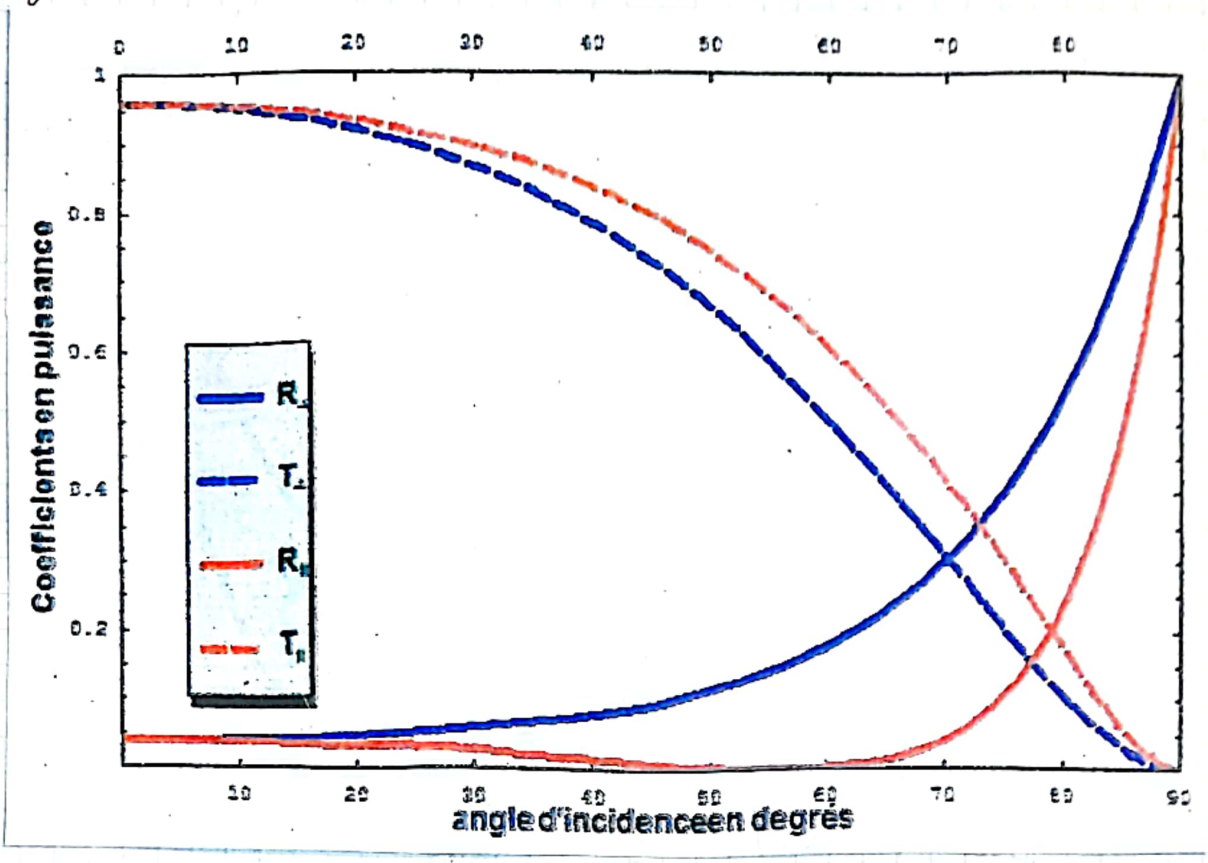
donc $\boxed{t_{//} = \dfrac{2 n_1 \cos(\theta_i)}{n_1 \cos(\theta_t) + n_2 \cos(\theta_i)}} \neq 0$

et $\boxed{r_{//} = \dfrac{n_2}{n_1} t_{//} - 1 = \left(\dfrac{2 n_2 \cos\theta_i}{n_1 \cos\theta_t + n_2 \cos\theta_i} - 1 \right)}$

$\hookrightarrow \boxed{r_{//} = \dfrac{n_2 \cos\theta_i - n_1 \cos\theta_t}{n_1 \cos\theta_t + n_2 \cos\theta_i}}$

peut s'annuler (quand $\theta_i = \theta_B$ angle de Brewster voir après)

3) Angle de Brewster :



$r_\perp = 0 \Rightarrow n_1 \cos(\theta_i) = n_2 \cos(\theta_t)$

$\Rightarrow n_1^2 (1 - \sin^2(\theta_i)) = n_2 (1 - \sin^2(\theta_t))$

or $n_1 \sin(\theta_i) = n_2 \sin(\theta_t)$ d'où $n_1^2 = n_2^2 \Rightarrow n_1 = n_2$ ABS car disjointe $(n_1 \neq n_2)$.

$r_{//} = 0 \Rightarrow n_2 \cos(\theta_i) = n_1 \cos(\theta_t)$

$\sin(\theta_t)$ ↳ $n_2 \sin(\theta_t)\cos(\theta_i) = n_1 \sin(\theta_t)\cos(\theta_t)$

$\sin(\theta_i) = n_2 \sin(\theta_t)$ $n_1 \sin(\theta_i)\cos(\theta_i) = n_1 \sin(\theta_t)\cos(\theta_t)$

↳ $\sin(2\theta_i) = \sin(2\theta_t)$

$\Rightarrow \begin{cases} 2\theta_i = 2\theta_t & \text{ABS car } n_1 \neq n_2 \Rightarrow \theta_1 \neq \theta_2 \\ \pi - 2\theta_i = 2\theta_t \Rightarrow \theta_i + \theta_t = \pi/2 \end{cases}$

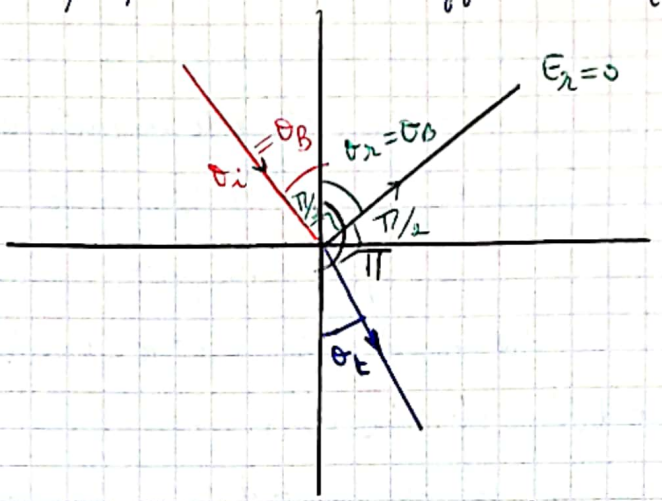
or $n_1 \sin(\theta_i) = n_2 \sin(\theta_t) \Rightarrow \sin(\theta_i) = \frac{n_2}{n_1} \sin(\pi/2 - \theta_i)$

$\Rightarrow \sin(\theta_i) = \frac{n_2}{n_1} \cos(\theta_i)$

$\Rightarrow \boxed{\tan(\theta_B) = \frac{n_2}{n_1}}$ $\theta_B = \theta_i (r_{//} = 0)$ est dit angle de Brewster.

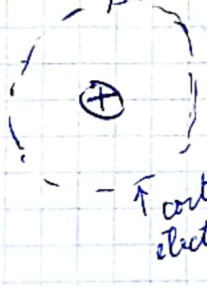
donc quand l'onde incidente est non polarisée sous une incidence θ_i en faisant varier ce dernier ; l'onde réfléchie et l'onde transmise sont non polarisées. quand $\theta_i = \theta_B$ $r_{//} = 0 \Rightarrow$ l'onde réfléchie n'a plus de composante parallèle, seule la composante $\perp$ est présente $\Rightarrow$ l'onde réfléchie est polarisée. (l'onde transmise reste toujours non polarisée)

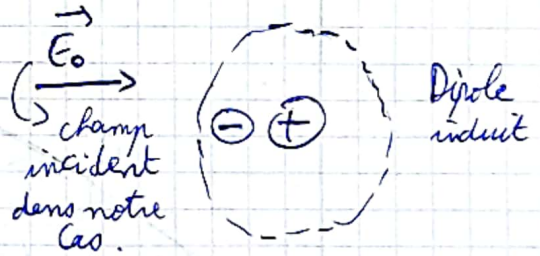
Remarque: θ_B est l'angle qui correspond à la situation où l'onde réfléchie et transmise sont perpendiculaires. en effet $\theta_i + \theta_t = \pi/2 \xrightarrow{\theta_i = \theta_r} \theta_r + \theta_t = \pi/2$.



$r_{//} = 0 \Rightarrow$ pas de réflexion $\Rightarrow$ les dipôles induits dans le milieu 2 sont alignés avec la direction de l'onde réfléchie donc la puissance réfléchie est nulle par contre $r_\perp \neq 0 \Rightarrow$ polarisation rectiligne

$\vec{E}_0 = 0$





Ondes mécaniques :

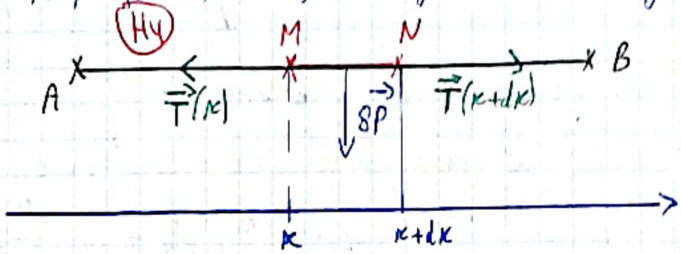
I) Équation de D'Alembert :

Sans raideur $\Rightarrow \vec{T} \parallel$ fil

1) Corde vibrante : onde transversale

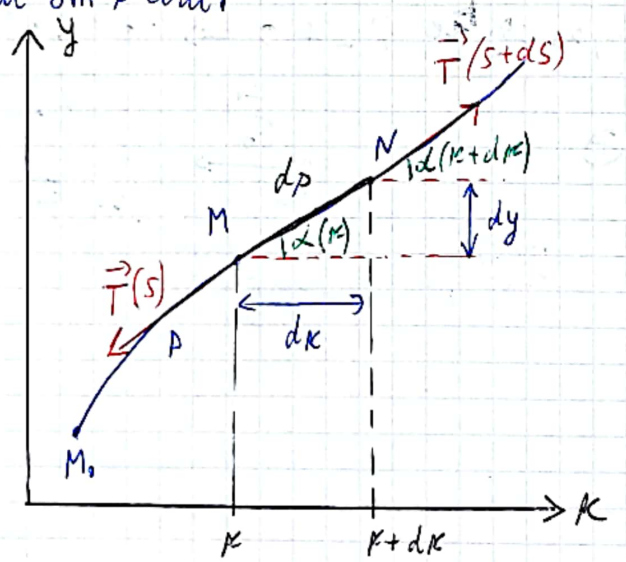
considérons une corde souple (sans raideur) et homogène tendue le long d'un axe (Ox) horizontal.

(CCP 2022
Mines 2022)
Centrale PSI 2013



avec lequel elle coïncide lorsqu'elle est au repos (le poids de la corde est négligeable devant sa tension). lorsque la corde est excitée à l'une de ses extrémités) nous constatons que la déformation se propage perpendiculairement à la direction de propagation (Ox), l'onde est dite transversale. pour la mise en équation des petits mouvements (H1) (α faible), on considère un élément de la corde MN compris entre x et $x+dx$ de masse $\delta m = \mu dS$ tq μ est la masse linéique et dS est l'abscisse curviligne élémentaire. Cette masse élémentaire δm reste pendant le mouvement à la même abscisse. La masse δm est soumise de la part du reste de la corde aux forces $\vec{T}(S)$ et $\vec{T}(S+dS)$. (H3)

Le PFD appliqué sur δm s'écrit :



$p(t) = \widehat{M_0M}(t)$

$dp = \widehat{MN}$

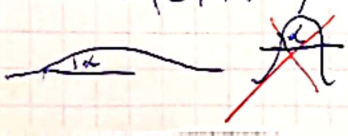
PFD à l'échelle mésoscopique car la corde est un milieu déformable

$$\cancel{\vec{\delta P}} + \vec{T}(p) + \vec{T}(p+dp) = \delta m . \vec{a}$$

(H1)

$$\Rightarrow \vec{T}(p) + \vec{T}(p+dp) = \mu dp \, \vec{a}$$

$$dp = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{1/2} = dx\left(1 + \tan^2\alpha\right)^{1/2}$$ or α est faible (H2) donc $dS \simeq dx$



d'où $\vec{T}(x) + \vec{T}(x+dx) = \mu dx \vec{a}$ avec

$\vec{a} = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\vec{u_x} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\vec{u_y} \simeq \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\vec{u_y}$ (1)

$\vec{T}(x) + \vec{T}(x+dx) = \mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\vec{u_y}$

proj/ox : $-T(x)\cos\alpha(x) + T(x+dx)\cos\alpha(x+dx) = 0$

proj/oy : $-T(x)\sin\alpha(x) + T(x+dx)\sin(x+dx) = \mu \cdot dx \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$

or α est très faible :

$$\begin{cases} -T(x) + T(x+dx) = 0 \\ T(x+dx)\sin(x+dx) - T(x)\sin\alpha(x) = \mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} T(x+dx) = T(x) = T \\ T\left[\tan\alpha(x+dx) - \tan\alpha(x)\right] = \mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \end{cases}$$

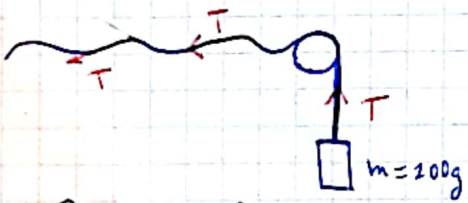
$\Rightarrow T \frac{\partial \tan\alpha}{\partial x} dx = \mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ (*) or $\tan\alpha = \frac{\partial y}{\partial x}$

d'où $T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\mu}{T}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0}$$ avec $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$

$\Rightarrow$ solution : onde sinusoïdale.

AN : corde de Melde.

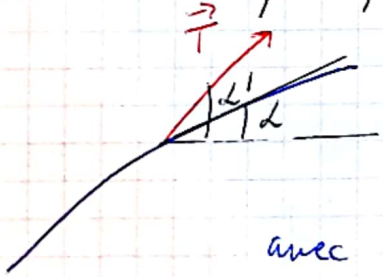


$T = mg = 0{,}1 \cdot 10 = 1\,N$

$\mu = 10^{-3}\,Kg/m$ (Nylon)

$v = 31{,}6\,m/s$.

Rq (1) : Si la corde n'est pas souple.



(*) s'écrit :

$T \frac{\partial \tan\alpha'}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$

avec $\tan\alpha' \neq \tan\alpha = \frac{\partial y}{\partial x}$

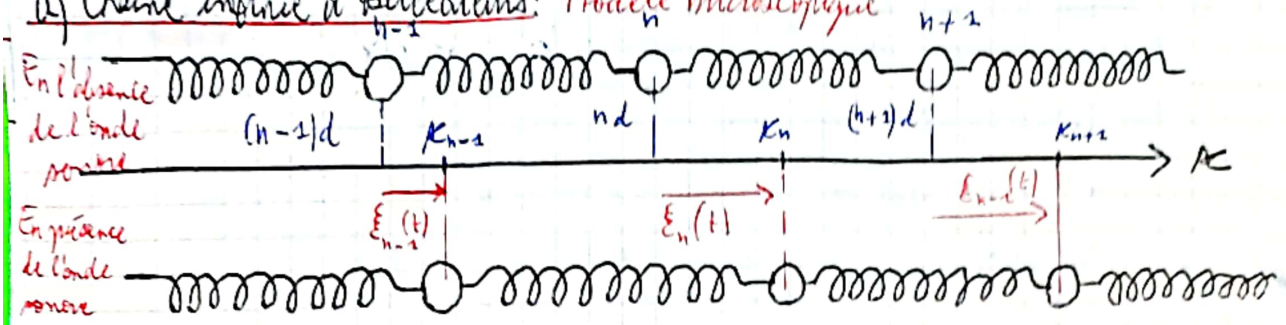
Rq (2) : Si le poids est non négligeable.

$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{g}{v^2} \Rightarrow$ parabole

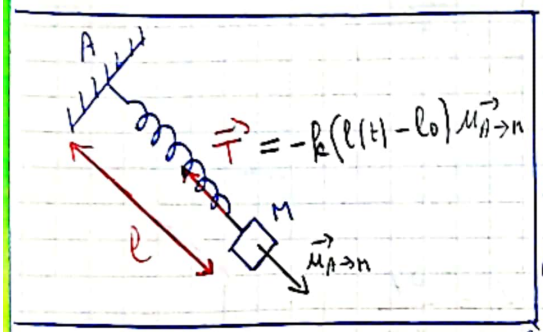
CamScanner

2) onde longitudinale :

a) Chaîne infinie d'oscillateurs : Modèle microscopique



$$x_n(t) = nd + \xi_n(t)$$



$\vec{T} = -k(\ell(t) - \ell_0)\vec{u}_{A\to M}$

– Afin d'étudier la propagation d'onde sonore dans un solide, on modélise le solide constitué d'une infinité d'atomes par une chaîne comportant des points matériels de même masse m reliés à vide d
par des ressorts identiques de longueur et de raideur k. On repère la position d'un atome de numéro n par $x_n(t) = nd + \xi_n(t)$ avec nd est la position d'équilibre et $\xi_n(t)$ son déplacement supposé très faible devant d.

Le PFD appliqué sur l'atome de numéro n s'écrit :

$m\vec{a}_n = \vec{T}_{n-1} + \vec{T}_{n+1}$ avec

* $\vec{T}_{n+1} = -K\left[(x_{n+1} - x_n) - d\right](-\vec{u}_x)$

$\vec{T}_{n+1} = K\left(\left((n+1)d + \xi_{n+1}(t)\right) - \left(nd + \xi_n(t)\right) - d\right]\vec{u}_x$

$\vec{T}_{n+1} = K\left[\xi_{n+1}(t) - \xi_n(t)\right]\vec{u}_x$

$\vec{T}_{n-1} = -K\left[(x_n - x_{n-1}) - d\right]\vec{u}_x$

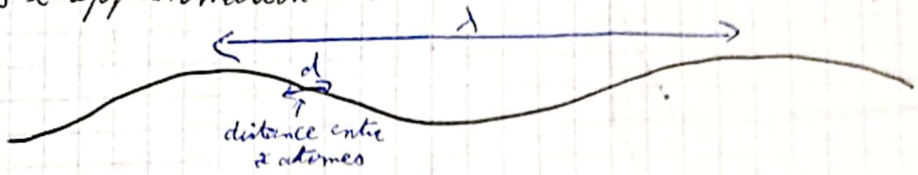
$= -K\left[\left(nd + \xi_n(t)\right) - \left((n-1)d + \xi_{n-1}(t)\right) - d\right]\vec{u}_x$

$\vec{T}_{n-1} = -K\left[\xi_n(t) - \xi_{n-1}(t)\right]\vec{u}_x$

d'où $m\ddot{x}_n(t) = +K\left[-\xi_n(t) + \xi_{n-1}(t) + \xi_{n+1}(t) - \xi_n(t)\right]$

$\Rightarrow \ddot{\xi}_n(t) + \frac{K}{m}\left[2\xi_n(t) - \left(\xi_{n+1}(t) + \xi_{n-1}(t)\right)\right] = 0$

or dans l'approximation des milieux continus $\lambda \gg d$.



$$\xi_n(t) = \xi(x;t)$$

$$\xi_{n+1}(t) = \xi(x+d;t) = \xi(x;t) + d\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{d^2}{2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

$\rightarrow d \ll x_{cms}$

$$\xi_{n-1}(t) = \xi(x-d;t) = \xi(x;t) - d\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{d^2}{2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

d'où $$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - \frac{K}{m}\left[d^2\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\right] = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{m}{Kd^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0.$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0 \qquad \text{avec } v = \sqrt{\frac{K}{m}}\cdot d$$

ODG: $K = 10\ N/m$, $d = 10^{-10}\ m = 1\ \text{Å}$, $m = 10^{-26}\ Kg$ $\Rightarrow v = 3.10^3\ m.s^{-1}$.

Rq: les ondes mécaniques se propagent d'autant plus vite que le milieu est plus raide ($k\uparrow$) et moins inerte ($m\downarrow$)

b) Module mésoscopique et Module d'Young E: (Mines ponts 2016 MP partie 3).

on considère une barre homogène d'axe (Ox), de section S et de masse volumique ℓ. une onde de déformation (compression / dilatation) élastique se propageant à l'intérieur du cylindre et caractérisée par un déplacement $u(x;t)$. On définit la traction F permettant à un solide de longueur L de s'allonger (force de traction) de ΔL par

échelle méso ← $d\vec{F} = E\,dS\,\frac{\Delta L}{L}$

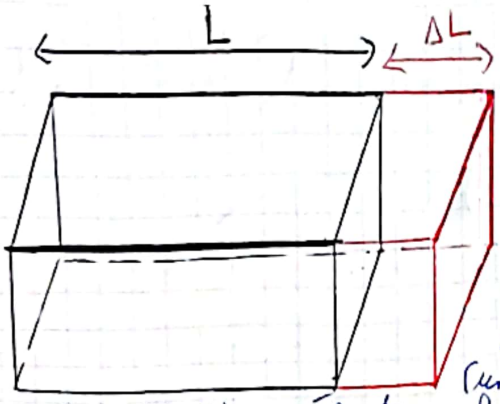
$$\boxed{F = E.S.\frac{\Delta L}{L}}$$ ← échelle macro

Loi de Hooke avec E est une constante appelée Module d'Young du matériaux

$\sim \vec{T} = -k(\ell(t) - \ell_0)\vec{u}_{PM}$ dans l'échelle micro.

équivalente à une pression qui caractérise la rigidité du matériau est la section transversale. càd $$E = \frac{\text{Contrainte}}{\text{déformation}} = \frac{F/S}{\frac{\Delta L}{L}}$$

ODG: $E = 10^{11} \sim 10^{12}\ Pa$



liquide ; gaz ⟷ Solide
⇓
pression module

K caractérise la raideur du ressort de Young
E " " la raideur du matériaux
(un matériau contient "plusieurs ressort" donc $E \sim K$)

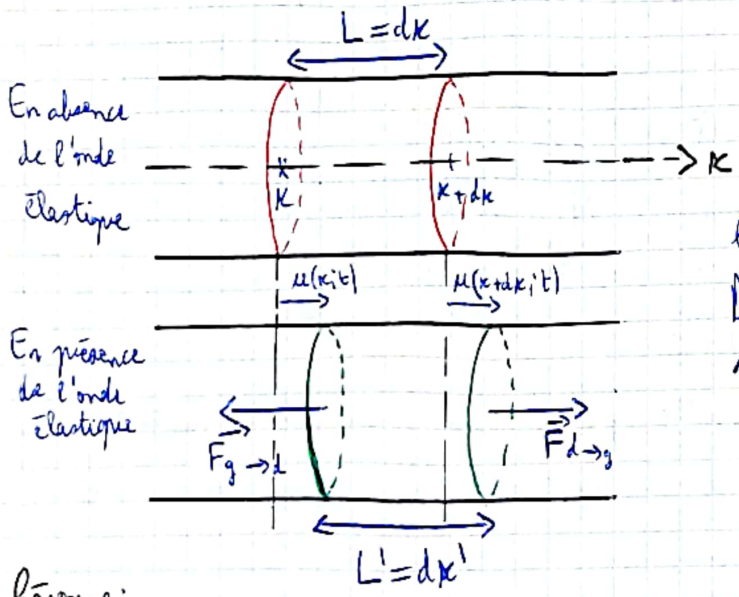
En absence de l'onde élastique, la longueur de la barre est L

En présence de l'onde élastique, la longueur de la barre est $L + \Delta L$

$$F = P \cdot S \qquad \left\{ K = \frac{T}{\Delta l} \right. \qquad \Delta l \simeq 0 \Rightarrow K \to \infty$$

$$F = E \cdot S \cdot \frac{\Delta L}{L}$$

obj : Equation de propagation vérifiée par $u(x;t)$:



1) Mq $\frac{\Delta L}{L} = \frac{\partial u}{\partial x}$

2) En appliquant le P.F.D sur la tranche, établir l'équation de D'alembert vérifiée par u.

$v = ?$

Réponse :

1) Mq $\frac{\Delta L}{L} = \frac{\partial u}{\partial x}$

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{L' - L}{L} = \frac{dx' - dx}{dx} = \frac{dx}{dx'} - 1$$

or $u(x;t) + dx' = dx + u(x + dx;t)$

$$\Rightarrow dx' = dx + u(x + dx;t) - u(x;t)$$

$$\Rightarrow dx' = dx + \cancel{u(x;t)} + \frac{\partial u}{\partial x} dx - \cancel{u(x;t)}$$

$$\Rightarrow \frac{dx'}{dx} = 1 + \frac{\partial u}{\partial x} \Rightarrow \frac{\Delta L}{L} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

CamScanner

2) Le P.F.D appliqué sur la tranche de longueur dx s'écrit :

$\vec{F}_{g\to d} + \vec{F}_{d\to g} = \delta m.\vec{a}\,(M/R)$ or $F = E.S.\frac{\Delta L}{L}$

$-E.S.\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_x \vec{u_x} + E.S.\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x+dx} \vec{u_x} = \rho.S.dx.\vec{a}\,(M/R)$

$E.S.\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x+dx} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_x\right]\vec{u_x} = \rho.S.dx.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\vec{u_x}$

$E\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right).dx = \rho\, dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\vec{u_x}$

$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\rho}{E}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$

avec $v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ $(m.s^{-1})$

ODG : $\rho_{Cu} = 8{,}96 \times 10^3\ Kg.m^{-3}$ $\Rightarrow v = 3{,}78 \times 10^3\ m.s^{-1}$

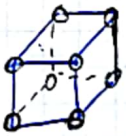
$E = 1{,}24 \times 10^{11}\ Pa$

c) module d'Young et liaison interatomique : (échelle microscopique)

les 2 approches microscopique et mésoscopique sont totalement identiques car elles représentent la même réalité physique (propagation de l'onde sonore)

d'où : $\begin{cases} v = \sqrt{\frac{K}{m}}.d \\ v = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \end{cases} \Rightarrow \frac{K}{m}d^2 = \frac{E}{\rho} \Rightarrow E = \frac{K}{m}.d^2.\rho$

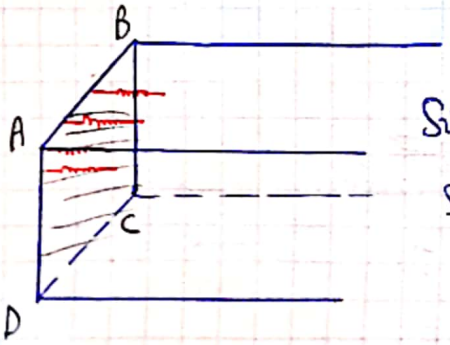
Si le Système est un cubique simple ; $V = d^3$ contient un seul atome $Z = 1$



$\longrightarrow Z = 8.\frac{1}{8} = 1$

donc $\rho_{cristal} = \rho_{maille} = \frac{Z \times m_{atome}}{V} = \frac{1 \times m}{d^3}$

d'où $E = \frac{K}{m}.d^2.\frac{m}{d^3} \Rightarrow \boxed{E = \frac{K}{d}}$

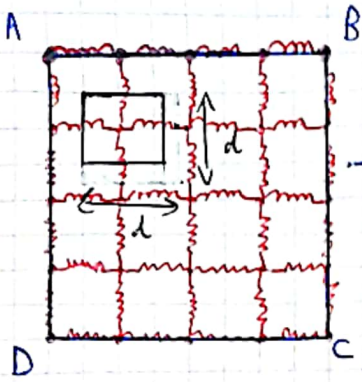


Si $K \nearrow \Rightarrow E \nearrow$

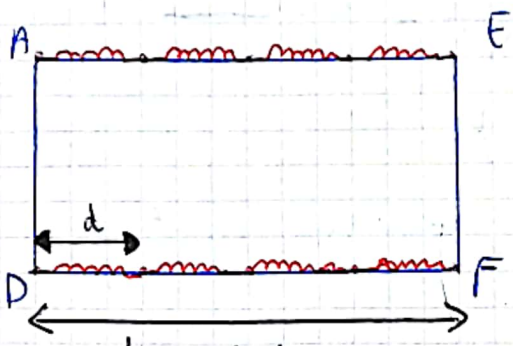
Si $d \nearrow \Rightarrow E \searrow$

CamScanner

autre atome :



→ $S = nd^2$ avec n est le nombre d'atomes dans S et d^2 est la surface moyenne occupée par un atome.



$L = N \cdot d$ avec N est le nombre d'atomes de L

$$f = K \cdot \Delta\ell = K \cdot \frac{\Delta L}{N}$$

($\Delta\ell$: élongation d'un ressort ; ΔL : élongation de toute la chaîne)

$$F = E \cdot S \cdot \frac{\Delta L}{L} \quad \text{avec } S = ABCD$$

$$\text{et } F = nf$$

d'où $$E \cdot S \cdot \frac{\Delta L}{L} = n \cdot K \cdot \frac{\Delta L}{N}$$

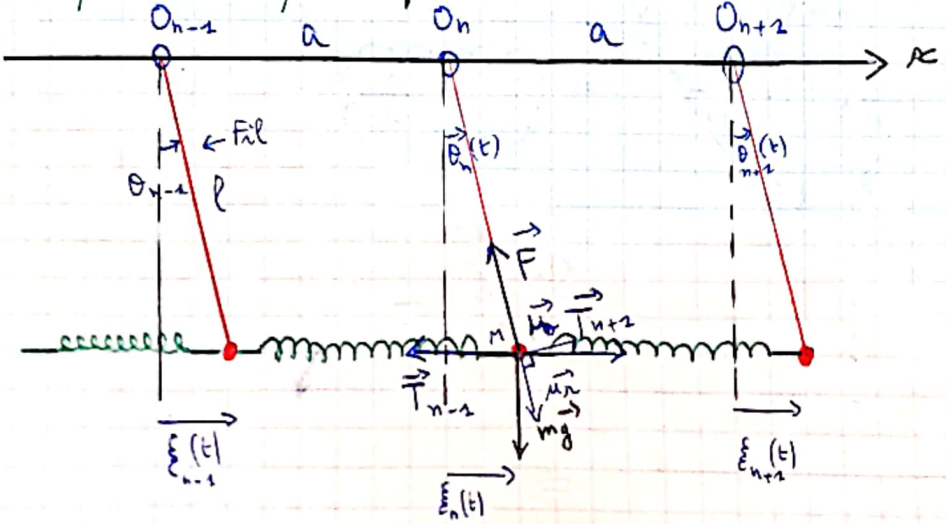
$$E \cdot \pi \cdot d^2 \cdot \frac{1}{L} = \pi \cdot \frac{K}{N}$$

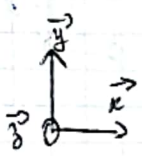
$$E d^2 \frac{1}{NL} = \frac{K}{N}$$

d'où $$E = \frac{K}{d}$$ Valable pour cubique simple (sinon on aura juste un coeff x ... $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$ etc ...).

II) Équation de propagation de Klein – Gordon : (X2015)

1) Chaîne des pendules simples couplés :





on s'intéresse à la propagation d'ondes le long d'une chaîne [illegible] de masse m ; de longueur ℓ et couplés par des ressorts de raideur K avec θ faible.

1) En appliquant le TMC sur le n-ième pendule situé au point O_n, déduire l'équation vérifiée par θ_n ; θ_{n+1} et θ_{n-1}.

Réponse :

$$\left.\frac{d\vec{L_o}}{dt}\right)_R = \sum_k \vec{\mathcal{M}_o}(\vec{F_k}) \quad \text{avec } O \equiv O_n.$$

↳ $\vec{L_o} = \vec{OM} \wedge m\vec{v}(M/R) = \ell\vec{u_r} \wedge m\ell\dot{\theta}_n \vec{u_\theta} = m\ell^2\dot{\theta}_n^2 \vec{u_z}$

$$\left.\frac{d\vec{L_o}}{dt}\right)_R = m\ell^2\ddot{\theta}_n \vec{u_z}$$

↳ $\sum_k \vec{\mathcal{M}_o}(\vec{F_k}) = \vec{\mathcal{M}_o}(\vec{F}) + \vec{\mathcal{M}_o}(m\vec{g}) + \vec{\mathcal{M}_o}(\vec{T_{n+1}}) + \vec{\mathcal{M}_o}(\vec{T_{n-1}})$

⊕ $\vec{\mathcal{M}_o}(\vec{F}) = \vec{OM} \wedge \vec{F} = \ell\vec{u_r} \wedge F(-\vec{u_r}) = \vec{0}$

⊖ $\vec{\mathcal{M}_o}(\vec{P}) = \vec{OM} \wedge m\vec{g} = \ell\vec{u_r} \wedge m\vec{g} = mg\ell\sin(\theta_n)(-\vec{u_z})$

$\vec{\mathcal{M}_o}(\vec{P}) = -mg\ell\theta_n \vec{u_z}$ car θ est faible.

⊕ $\vec{\mathcal{M}_o}(\vec{T_{n+1}}) = \vec{OM} \wedge \vec{T}_{n+1}$

$\vec{T}_{n+1} = -K\left[(a + \xi_{n+1}(t) - \xi_n(t)) - a\right](-\vec{u_x})$

$\vec{T}_{n+1} = K\left[\xi_{n+1}(t) - \xi_n(t)\right]\vec{u_x}$

$\vec{\mathcal{M}_o}(\vec{T}_{n+1}) = \ell\vec{u_r} \wedge K\left[\xi_{n+1}(t) - \xi_n(t)\right]\vec{u_x}$

$= K\ell\left[\xi_{n+1}(t) - \xi_n(t)\right]\cos(\theta_n)\vec{u_z}$ → θ_n faible ($\cos(\theta_n) \simeq 1$)

$\vec{\mathcal{M}_o}(\vec{T_{n+1}}) = K\ell^2\left[\theta_{n+1}(t) - \theta_n(t)\right]\vec{u_z}$

⊕ $M_o(\vec{T_{n-1}}) = \vec{OM} \wedge \vec{T}_{n-1}$ avec

$\vec{T}_{n-1} = -K\left[\left(a + \xi_n(t) - \xi_{n+1}(t)\right) - a\right](+\vec{u_r})$

$= K\left[\xi_{n-1}(t) - \xi_n(t)\right]\vec{u_x}$

$\vec{\mathcal{M}_o}(\vec{T_{n-1}}) = \ell\vec{u_r} \wedge K\left[\xi_{n-1}(t) - \xi_n(t)\right]\vec{u_x}$

$= K\ell\left[\xi_{n-1}(t) - \xi_n(t)\right]\cos(\theta_n)\vec{u_z}$

θ_n faible $\Rightarrow$ $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{T}_{n-1}) = K\ell^2\left[\theta_{n-1}(t) - \theta_n(t)\right]\vec{u}_z$

d'où $m\ell^2\ddot{\theta}_n = -mg\ell\theta_n + K\ell^2\left[\theta_{n+1} + \theta_{n-1} - 2\theta_n\right]$

$\ddot{\theta}_n + \frac{g}{\ell}\theta_n = \frac{K}{m}\left[\theta_{n+1} + \theta_{n-1} - 2\theta_n\right]$

on pose $\Omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$ et $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$ d'où :

$\ddot{\theta}_n + \Omega^2\theta_n = \omega_0^2\left[\theta_{n+1} + \theta_{n-1} - 2\theta_n\right]$.

2) On pose $\theta_n(t) = Ae^{j(\omega t - Kna)}$

(on a supposé que A ne dépend pas de n càd qu'il n'y a ni atténuation ni amplification). Établir la relation de dispersion et tracer $\omega = f(K)$.

Commentez en calculant la vitesse de groupe.

on a $\theta_n(t) = Ae^{j(\omega t - Kna)} \rightarrow \ddot{\theta}_n(t) = (j\omega)^2\theta_n$

$\theta_{n+1}(t) = Ae^{j(\omega t - K(n+1)a)} = \theta_n(t)e^{-jKa}$

$\theta_{n-1}(t) = Ae^{j(\omega t - K(n-1)a)} = \theta_n(t)e^{jKa}$

$-\omega^2\theta_n + \Omega^2\theta_n = \omega_0^2\left(e^{-jKa} + e^{jKa} - 2\right)\theta_n$

donc $\left(\Omega^2 - \omega^2\right)\theta_n = \omega_0^2\left(\frac{e^{-jKa} + e^{jKa}}{2} - 1\right) \times 2\theta_n$

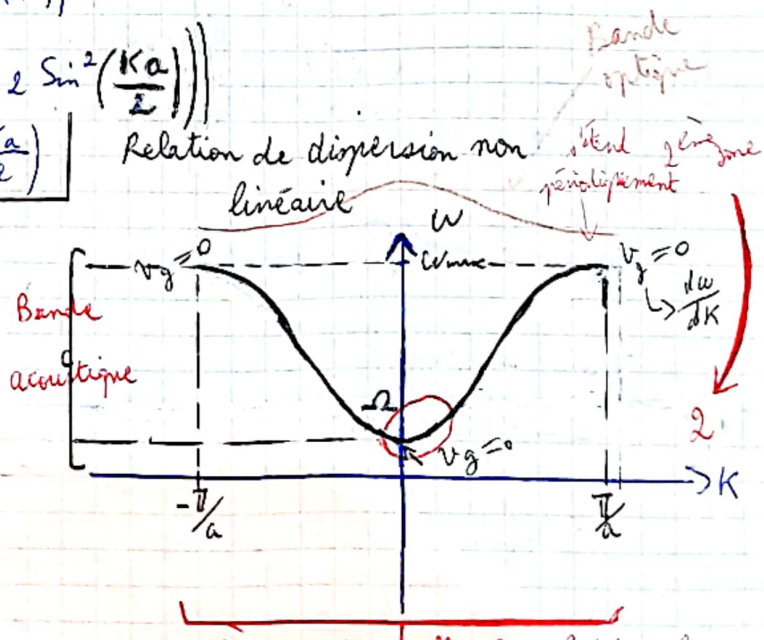
$\Rightarrow \Omega^2 - \omega^2 = 2\omega_0^2\left(\cos(Ka) - 1\right)$

$\Rightarrow \omega^2 = \Omega^2 + 2\omega_0^2(1 - \cos(Ka))$

$\Rightarrow \omega^2 = \Omega^2 + 2\omega_0^2\left(1 - \left(1 - 2\sin^2\left(\frac{Ka}{2}\right)\right)\right)$

$\Rightarrow \boxed{\omega^2 = \Omega^2 + 4\omega_0^2\sin^2\left(\frac{Ka}{2}\right)}$ Relation de dispersion non linéaire

$\rightarrow \begin{cases} \omega_{max} = \sqrt{\Omega^2 + 4\omega_0^2} \\ \omega_{min} = \Omega \end{cases} \Rightarrow$



$v_g = \frac{d\omega}{dK} = ?$

$\omega^2 = \Omega^2 + 4\omega_0^2\sin^2\left(\frac{Ka}{2}\right)$

Si on excite le système avec une onde de pulsation $\notin$ 1ère zone alors elle ne se propagera pas dans le milieu. $\Leftarrow$

1ère zone de Brillouin : C'est la bande de pulsations permises. $\left|\Omega < \omega < \omega_{max}\right|$

par différentiation : $2\omega\, d\omega = 4\omega_0^2 \frac{a}{2} \sin\left(\frac{Ka}{2}\right) dK \cos\left(\frac{Ka}{2}\right)$

donc $\frac{d\omega}{dK} = \frac{2\omega_0^2}{\omega} a \sin\left(\frac{Ka}{2}\right)\cos\left(\frac{Ka}{2}\right) = \frac{a\omega_0^2}{\omega}\sin(Ka)$

$v_g = a\omega_0^2 \frac{\sin(Ka)}{\sqrt{\Omega^2 + 4\omega_0^2 \sin^2\left(\frac{Ka}{2}\right)}}$ $\Rightarrow$ $v_g\left(K = \pm \pi/a\right) = 0$ l'onde ne peut plus se propager

Question 3 : Établir l'équation de Klein-Gordon dans l'approximation des milieux continus : $\lambda \gg a$.

$\Rightarrow Ka \ll 1 \Rightarrow \theta_n(t) \simeq \theta(K;t)$ $\left(Ka \ll 1 \Rightarrow K \ll \frac{1}{a} \sim \frac{\pi}{a}\right.$

or on a : $\ddot{\theta}_n + \Omega^2\theta_n = \omega_0^2(\theta_{n+1} + \theta_{n-1} - 2\theta_n)$

$\begin{cases} \theta_{n+1}(t) = \theta(K+a;t) = \theta(K;t) + a\frac{\partial\theta}{\partial K} + \frac{a^2}{2}\frac{\partial^2\theta}{\partial K^2} \\ \theta_{n-1}(t) = \theta(K-a;t) = \theta(K;t) - a\frac{\partial\theta}{\partial K} + \frac{a^2}{2}\frac{\partial^2\theta}{\partial K^2} \end{cases}$ (DL ordre le plus bas non nul).

on trouve que : $\frac{\partial^2\theta}{\partial K^2} - \frac{1}{C^2}\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = \frac{\Omega^2}{C^2}\theta$

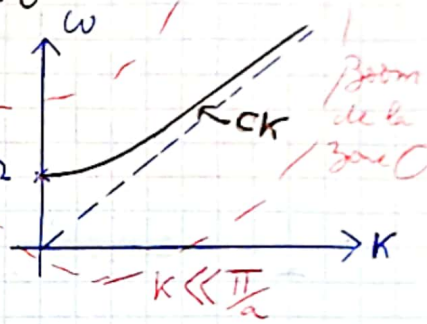
Signification physique du second membre $\frac{\Omega^2}{C^2}\theta$: c'est le régime forcé ; à cause du poids $\Omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$

effet du régime forcé $\Rightarrow$ K dépend de Ω quand on aurait $K = \frac{\omega}{C}$

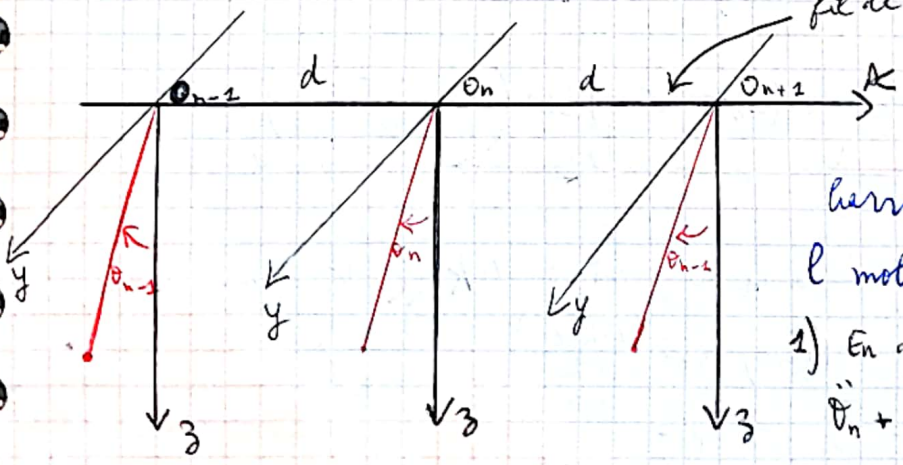
$\Downarrow$

$K^2 = \frac{\omega^2 - \Omega^2}{C^2}$ (C vitesse de l'onde sonore)

$\hookrightarrow \omega^2 = C^2K^2 + \Omega^2 > C^2K^2$



2) Chaîne de pendules pesants couplés



Chaque pendule est une barre de masse m ; de longueur l mobile dans le plan (O, y, z)

1) En appliquant le TMC ; Mg :

$\ddot{\theta}_n + \frac{3g}{2\ell}\sin(\theta_n) = \frac{3C}{m\ell^2}(\theta_{n+1} + \theta_{n-1} - 2\theta_n)$

2) Mq dans l'approximation des milieux continus :

$\frac{\partial^2\theta}{\partial K^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = \frac{\sin\theta}{\delta^2}$ avec

$v = \frac{d}{\ell}\sqrt{\frac{3C}{m}}$ et $\delta = \sqrt{\frac{2C}{mg\ell}}\cdot d$

CamScanner

III) Paquet d'onde (train d'onde):

L'OPPM n'a aucune réalité physique car elle est illimitée transversalement (plane) et longitudinalement (monochromatique), mais la théorie de Fourier montre que toute onde réelle est la combinaison linéaire d'OPPM (c'est le paquet d'onde)

1) Superposition de 2 OPPM:

On considère les 2 OPPM suivantes:

$$\underline{f_1} = f_0 e^{j(\omega_1 t - k_1 x)}$$
$$\underline{f_2} = f_0 e^{j(\omega_2 t - k_2 x)}$$

avec $\begin{cases} \omega_1 = \omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2} \quad ; \quad k_1 = k_0 - \frac{\Delta k}{2} \\ \omega_2 = \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2} \quad ; \quad k_2 = k_0 + \frac{\Delta k}{2} \end{cases}$

donc $\begin{cases} \Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 \\ \Delta k = k_2 - k_1 \end{cases}$

l'onde résultante est: $\underline{f} = \underline{f_1} + \underline{f_2}$

$$= f_0 e^{j\left[\left(\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}\right)t - \left(k_0 - \frac{\Delta k}{2}\right)x\right]} + f_0 e^{j\left[\left(\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}\right)t - \left(k_0 + \frac{\Delta k}{2}\right)x\right]}$$

donc $\underline{f} = f_0 e^{j(\omega_0 t - k_0 x)} \left[\frac{e^{-j\left(\frac{\Delta\omega - \Delta k x}{2}\right)} + e^{j\left(\frac{\Delta\omega - \Delta k x}{2}\right)}}{2}\right] \times 2$

$$\underline{f} = 2 f_0 e^{j(\omega_0 t - k_0 x)} \cos\left(\frac{\Delta\omega t - \Delta k x}{2}\right).$$

En notation réelle:

$$f(x;t) = 2 f_0 \underbrace{\cos(\omega_0 t - k_0 x)}_{\text{porteuse}} \underbrace{\cos\left(\frac{\Delta\omega t - \Delta k x}{2}\right)}_{\text{Enveloppe}}$$

Tracez l'onde résultante dans le cas où: $\Delta k \ll k_0$ $(\Delta\omega \ll \omega_0)$

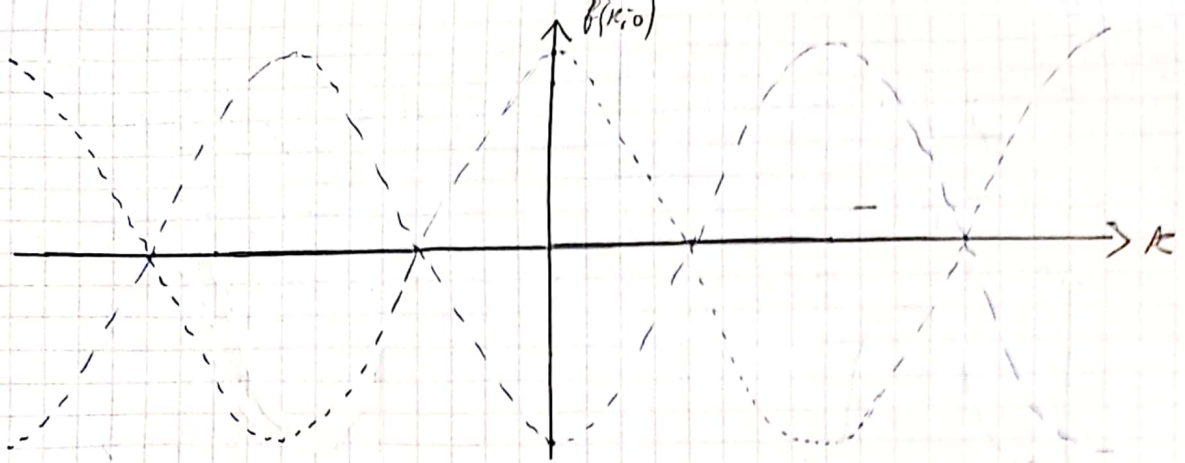
À $t=0$: $f(x;0) = 2 f_0 \cos(k_0 x) \cos\left(\frac{\Delta k x}{2}\right)$

⊕ $\cos(k_0 x) = 0 \Rightarrow k_0 x_p = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x_p = \frac{\pi}{2k_0}$

⊕ $\cos\left(\frac{\Delta k \cdot x}{2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\Delta k \cdot x_E}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x_E = \frac{\pi}{\Delta k}$

or $\Delta k \ll k_0 \Rightarrow x_E \gg x_p \Rightarrow \begin{cases} \cos(k_0 x) \text{ est la porteuse} \\ \cos\left(\frac{\Delta k x}{2}\right) \text{ est l'enveloppe} \end{cases}$

Il n'existe pas d'onde réelle plane mais seulement localement plane la superposition d'une infinité d'OPPM ne permet pas de limiter l'onde transversalement mais juste longitudinalement



Ccl : la superposition de 2 OPPMs n'apporte pas de solution au problème.

2) paquet d'onde unidimentionnel : (paquet d'onde en Thermo ENTPE 1995)

la superposition d'un nombre fini d'OPPM ne permet pas de limiter $f(x,t)$ dans l'espace

l'analyse de Fourrier affirme que la décomposition d'une onde non périodique s'écrit sous la forme :

Rappel : $S(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$

$$\boxed{S(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \underline{C_n} e^{jn\omega t}}$$

Rep. spatiale ⟶ Rep. temporelle.

avec $\underline{C_n} = \frac{a_n - j b_n}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} S(t)\cos(n\omega t)\,dt - j\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} S(t)\sin(n\omega t)\,dt \right)$

$$\underline{C_n} = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} S(t)\left(\cos(n\omega t) - j\sin(n\omega t)\right)dt$$

$$\boxed{\underline{C_n} = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} S(t)\, e^{-jn\omega t}\,dt}$$

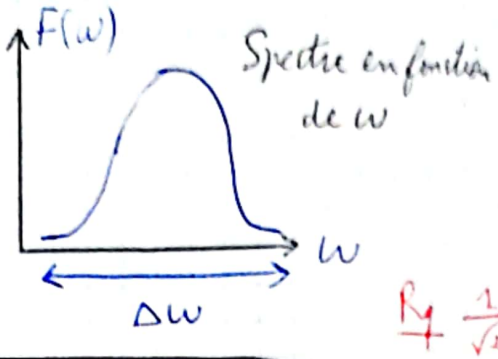
Rep temp ⟶ Rep. spectrale

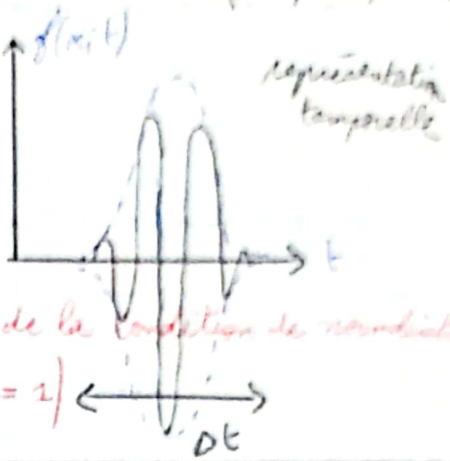
$$\boxed{\underline{f}(x;t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{+j(\omega t - Kx)} d\omega}$$

T.F (Spectrale → temp)

$$\boxed{F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{f}(x;t) e^{-j(\omega t - Kx)} dt}$$

T.F.I (Temp → Spectrale)

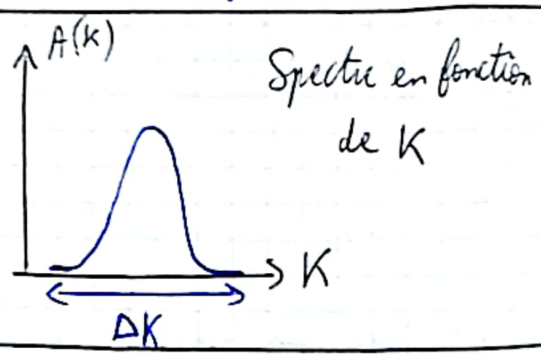




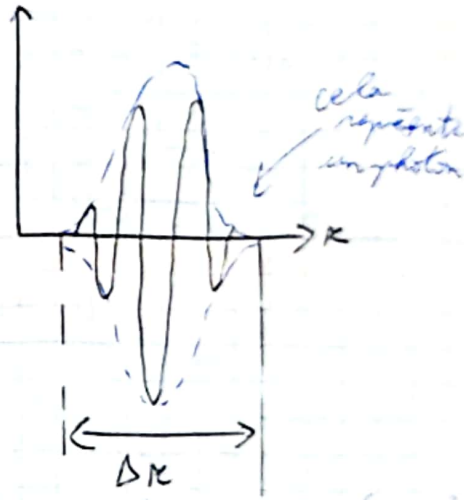
Rq $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ provient de la condition de normalisation (Σ probas = 1)

$$\boxed{\underline{f}(x;t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{A}(k) e^{j(\omega t - Kx)} dK}$$

$$\boxed{\underline{A}(K) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{f}(x;t) e^{-j(\omega t - Kx)} dx}$$



représentation spatiale

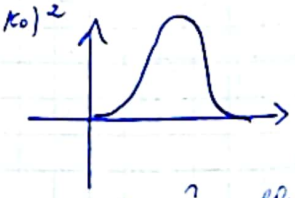


↳ pour le laser (un photon $\Delta x \simeq 400m$)

Rq : 2 types d'enveloppes (dépendent de la source)

Gaussienne :

$e^{-(x-x_0)^2}$



Lorentzienne : $\frac{1}{1+(x-x_0)^2}$ ← de même allure que la gaussienne

* $f(x;t)$ est une somme continue d'une infinité de composantes $e^{j(\omega t - Kx)}$
* $e^{+j(\omega t - Kx)} d\omega$ est la contribution à f des OPPM de pulsations comprise entre ω et $\omega + d\omega$.
* $F(\omega)$ est une fonction de distribution qui caractérise le poids relatif de chaque pulsation dans la somme

$$\boxed{\Delta\omega \cdot \Delta t \simeq 2\pi}$$

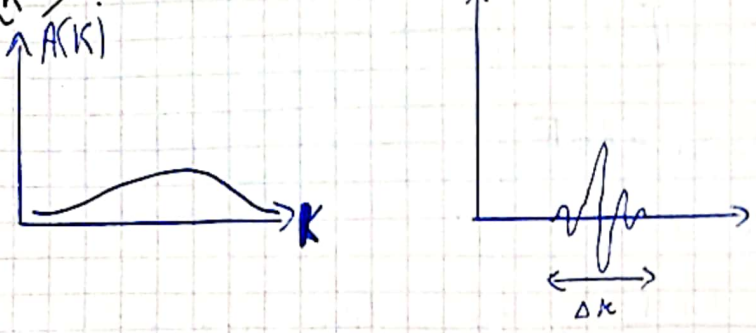
Relation de limitation

Dém : voir chap ③ mécanique quantique

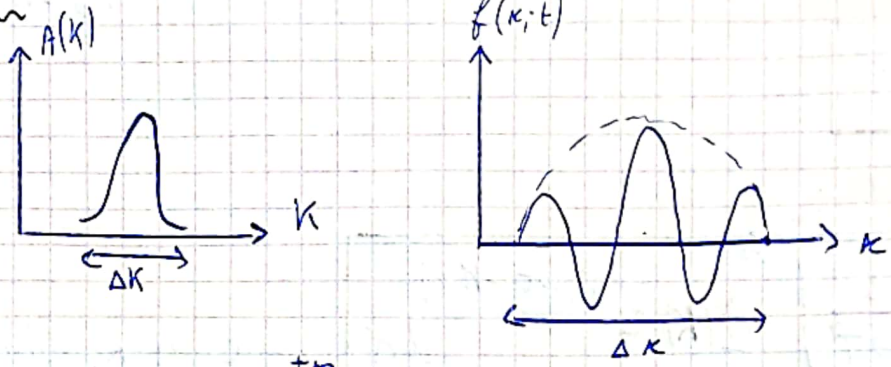
$\Delta K \cdot \Delta x \simeq 2\pi$ Relation de limitation.

La relation de limitation montre que "plus une onde f est courte $\Delta x \downarrow$ plus son spectre est large"

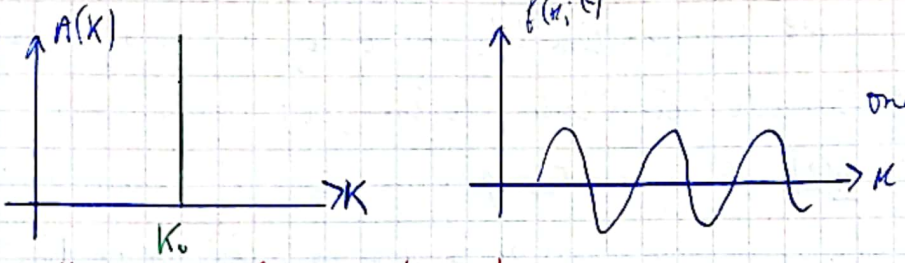
Si $\Delta K \nearrow$:



Si $\Delta K \downarrow$:



Si $\Delta K = 0$: $\Delta x \nearrow +\infty$



onde monochromatique !!

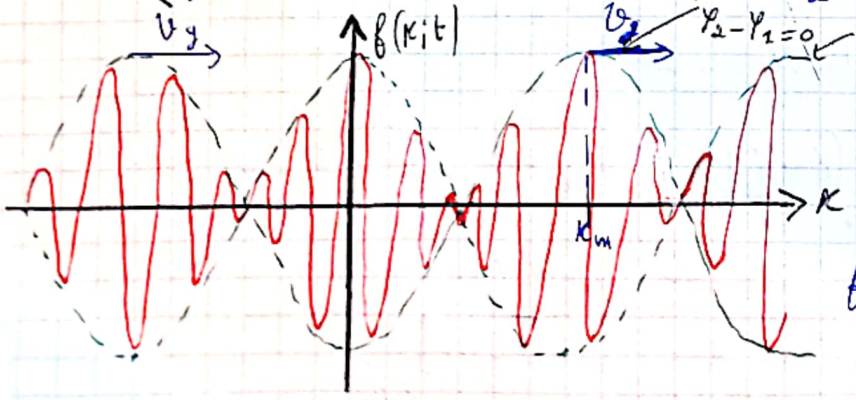
IV) Vitesse de phase, vitesse de groupe:

1) Cas de 2 OPPM:

$f_1 = f_0 \cos(\omega_1 t - K_1 x) \longrightarrow v_{\varphi_1} = \frac{\omega_1}{K_1} = \frac{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}{K_0 - \frac{\Delta K}{2}} = \frac{2\omega_0 - \Delta\omega}{2K_0 - \Delta K}$

$f_2 = f_0 \cos(\omega_2 t - K_2 x) \longrightarrow v_{\varphi_2} = \frac{\omega_2}{K_2} = \frac{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}}{K_0 + \frac{\Delta K}{2}} = \frac{2\omega_0 + \Delta\omega}{2K_0 + \Delta K}$

si $\Delta\omega \ll \omega_0$ et $\Delta K \ll K_0 \Rightarrow v_{\varphi_1} \simeq v_{\varphi_2} \simeq \frac{\omega_0}{K_0} \Rightarrow \boxed{v_\varphi = \frac{\omega_0}{K_0}}$



v_g est la vitesse de la grotesse

$f(x;t) = 2 f_0 \cos(\omega_0 t - K_0 x) \cos\left(\frac{\Delta\omega t - \Delta K x}{2}\right)$

$v_\varphi = \frac{\omega_0}{K_0}$ $\quad v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta K}$

Les extremums de l'enveloppe qui se propagent à la vitesse dite vitesse de groupe sont les points de l'espace où les 2 ondes sont en phase.

$$\varphi_1(x_M;t) = \varphi_2(x_M;t) + 2n\pi \quad \text{(voir schéma dernier)}.$$

$$\Rightarrow \omega_1 t - k_1 x_M = \omega_2 t - k_2 x_M + 2n\pi$$

$$\Rightarrow (k_2 - k_1)\, x_M = (\omega_2 - \omega_1)\, t + 2n\pi$$

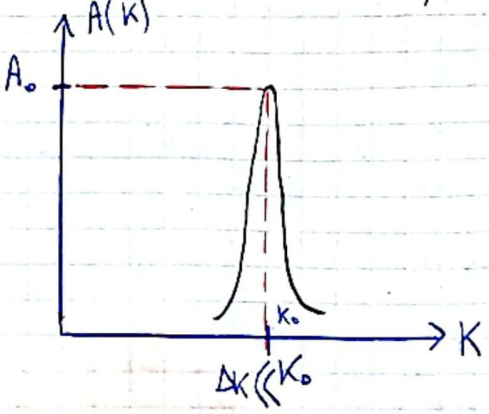
$$\Rightarrow x_M = \frac{\omega_2 - \omega_1}{k_2 - k_1} t + \frac{2n\pi}{k_2 - k_1} \quad \text{or} \quad v_g = \frac{dx_M}{dt} \Rightarrow v_g = \frac{\omega_2 - \omega_1}{k_2 - k_1}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}}$$

2) Cas d'un train d'ondes :

l'onde $\boxed{\underline{s}(x;t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{A}(k)\, e^{-j(\omega t - kx)}\, dk}$ avec $\underline{A}(k) = A(k) e^{-j\varphi}$

est caractérisée par une vitesse de propagation dite vitesse de groupe alors que la vitesse de phase ne peut être attribuée à cette onde. en effet; Considérons le cas où la fct de distribution $A(k)$ est représentée par un pic étroit centré autour de k_0. donc $A(k)$ ne prend des valeurs appréciables que au voisinage de k_0.



D.L à l'ordre 1 de la relation de dispersion :

$$\omega(k) \simeq \omega(k_0) + \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k_0} (k - k_0) \quad \text{on pose} \quad v = \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k_0}$$

$$\omega \simeq \omega_0 + v(k - k_0) \quad \text{on remplace dans } \underline{s}(x;t)$$

$$\underline{s}(x;t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} A(k)\, e^{j[(\omega_0 + (k-k_0)v)t - kx - \varphi)]}\, dk$$

$$\underline{f}(x;t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} A(k)\, e^{j(\omega t - k_0 x)}\, e^{j[(k-k_0)(vt-x)-\Psi]}\, dk$$

$$\underline{f}(x;t) = \underbrace{\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} A(k)\, e^{j[(k-k_0)(vt-x)-\Psi]}\, dk\right]}_{\text{enveloppe } \underline{f_0}(x;t)} \times \underbrace{e^{j(\omega t - k_0 x)}}_{\text{porteuse}}$$

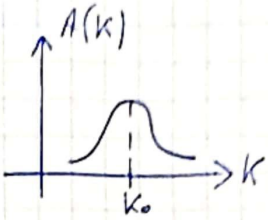
car

$x_p = \frac{\pi}{2k_0}$; $x_E = \frac{\pi}{\Delta k}$

$x_E \sim \frac{1}{k-k_0} > \frac{1}{\Delta k} \gg \left(\frac{1}{k_0}\right)_{x_p}$

$k - k_0 < \Delta k << k_0$

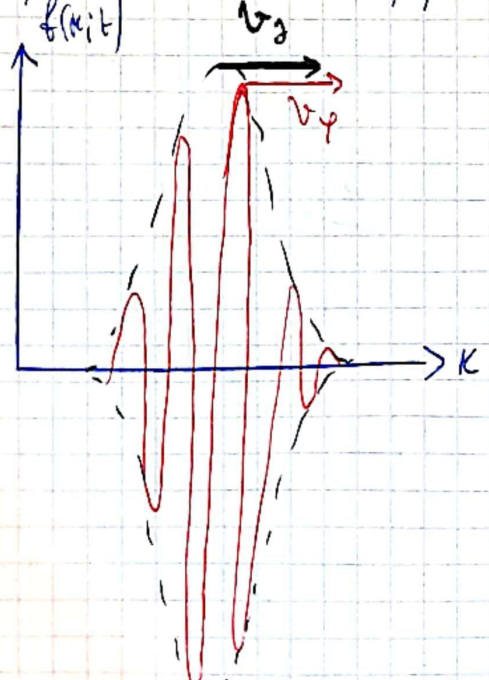
$x_E \gg x_p$



$v_g = \left.\frac{d\omega}{dk}\right)_{k_0} = ?$

donc $\underline{f}(x;t)$ apparaît comme une OPPM $e^{j(\omega t - k_0 x)}$ dont l'amplitude est modulée par $\underline{f_0}(x;t)$ ce qui permet sa limitation spatio-temporelle.

La position du maximum du paquet d'onde est telle que $f_0(x;t)$ est maximale.



$$(k-k_0)(vt - x_M) - \Psi = 0$$

$$\Rightarrow vt - x_M = \frac{\Psi}{k-k_0}$$

$$\Rightarrow x_M = vt - \frac{\Psi}{k-k_0}$$

or $v_g = \frac{dx_M}{dt} \Rightarrow v_g = v$

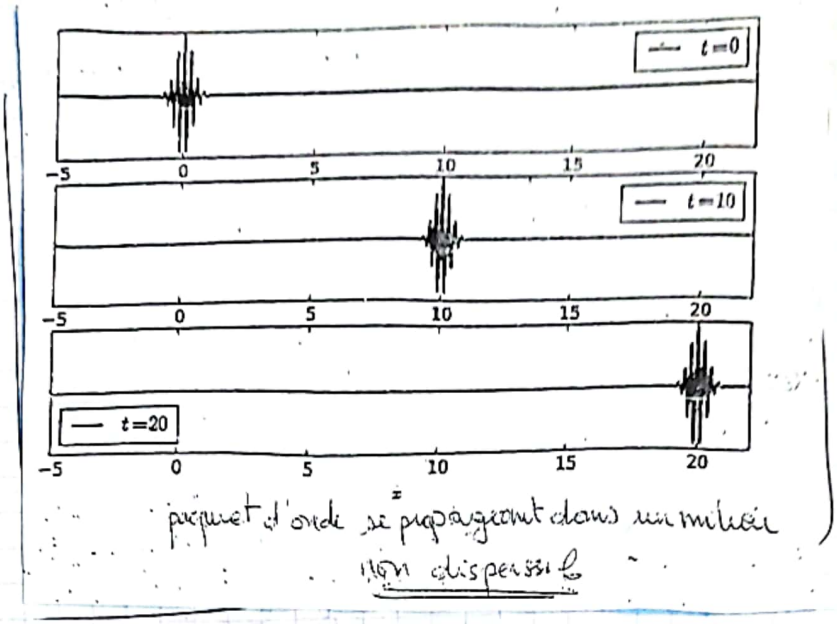
or $v = \left.\frac{d\omega}{dk}\right)_{k_0} \Rightarrow \boxed{v_g = \left.\frac{d\omega}{dk}\right)_{k_0}}$

donc quand $v_g = v_\varphi$ la porteuse n'apparaît pas en mvmt par rapport à l'enveloppe si $v_\varphi > v_g$ elle avance ; si $v_\varphi < v_g$ elle recule or dans un milieu dispersif $v_\varphi \neq v_g$ donc le paquet d'onde est déformé dans ce milieu. (voir animation).

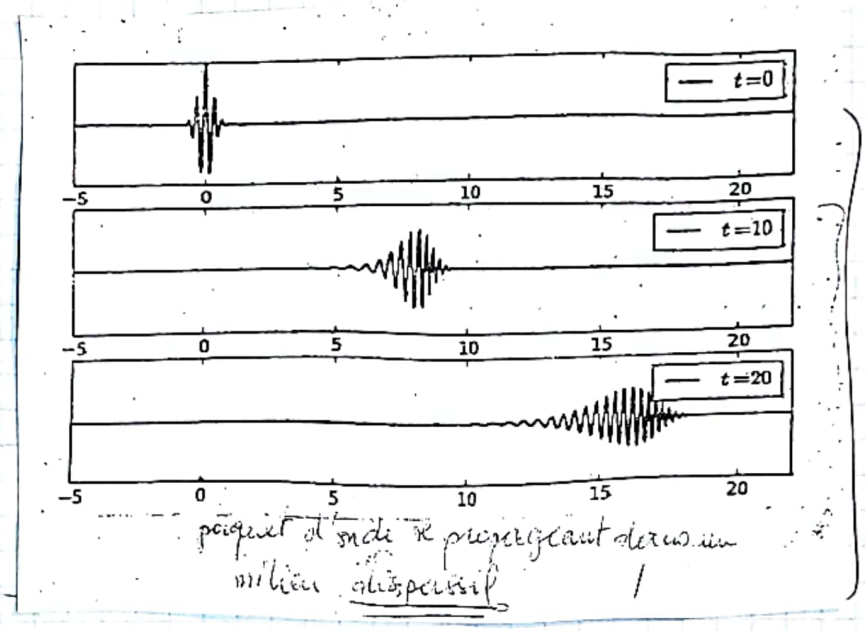
3) Relation de dispersion:

- Si $v_g = v_\varphi$; on dit que le milieu est non dispersif : aucun déplacement de la porteuse / à l'enveloppe.

- Si $v_g \neq v_\varphi$ on dit que le milieu est dispersif : la perturbation se déplace à l'enveloppe ce qui est traduit par une déformation du système d'onde.



paquet d'onde se propageant dans un milieu non dispersif



paquet d'onde se propageant dans un milieu dispersif

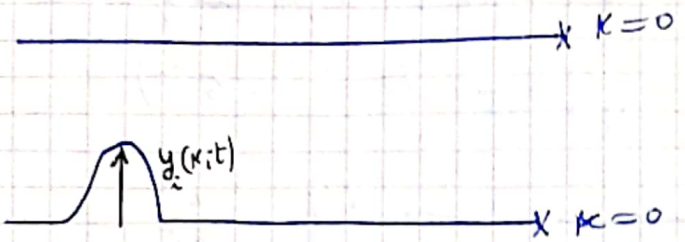
V) Ondes stationnaires :

1) Formation d'ondes stationnaires : considérons une onde fixée à une extrémité. $x=0$ est siège de la propagation d'une onde incidente : $y(x,t) = y_0 \cos(\omega t - kx)$

Mais cette expression ne vérifie pas la condition aux limites

$$\boxed{y(0,t) = 0} \quad \forall t$$

pour lever cette contradiction, on admet l'existence d'une onde réfléchie $y_2(x,t)$ se superposant à l'onde incidente avec $y_2(x,t) = y_{0,2} \cos(\omega t + k'x + \gamma)$



1) Déterminer l'onde résultante $y(x;t)$.

2) Tracez $y(x;t)$ en identifiant les ventres et les noeuds.

Si $y_i(x=0;t) = 0 \ \forall t$ (càd vérifie la C.L) alors $y_0 \cos(\omega t) = 0 \Rightarrow y_0 = 0$ donc l'onde ne se propage pas.

$\underline{y}(x;t) = \underline{y_i}(x;t) + \underline{y_r}(x;t) = y_0 e^{j(\omega t - kx)} + y_{0r} e^{j(\omega' t + k'x + \varphi)}$

or $\underline{y}(x=0;t) = 0 \ \forall t \Rightarrow y_0 e^{j\omega t} + y_{0r} e^{j(\omega' t + \varphi)} = 0 \ \forall t$

$\Rightarrow \boxed{\omega = \omega'}$.

or $\begin{cases} v = \dfrac{\omega}{k} \\ v' = \dfrac{\omega'}{k'} \end{cases}$ et $v = v'$ car v ne dépend que des caractéristiques de la corde $\left(v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}\right)$

donc $\boxed{k = k'}$ donc $y_0 + y_{0r} e^{j\varphi} = 0 \Rightarrow \boxed{y_{0r} e^{j\varphi} = -y_0}$

d'où $\underline{y_r}(x;t) = y_{0r} e^{j(\omega' t + k'x + \varphi)} = (y_{0r} e^{j\varphi}) e^{j(\omega' t + k'x)}$

$= -y_0 e^{j(\omega t + kx)}$

$\Rightarrow y(x;t) = y_0 \cos(\omega t - kx) - y_0 \cos(\omega t + kx) \Rightarrow \boxed{y(x;t) = 2y_0 \sin(\omega t)\sin(kx)}$

$\Downarrow$

onde stationnaire

2) Déjà fait

3) Généralisation: une onde est dite stationnaire si:

$y(x;t) = f(x) \times g(t)$

Si $y(x;t)$ vérifie l'équation de D'Alembert

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0}$$ déterminer $y(x;t)$

$$g(t)\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} f(x) \frac{\partial^2 g(t)}{\partial t^2} = 0$$

$\left(\times \dfrac{v^2}{f(x) \times g(t)}\right)$ "Méthode de séparation des variables".

$$\frac{v^2}{f(x)}\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \frac{1}{g(t)}\frac{d^2 g(t)}{dt^2}$$

or le 1er terme ne dépend que de l'espace et le second que du temps.

donc $\frac{v^2}{f(x)} \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \frac{1}{g(t)} \frac{d^2 g(t)}{dt^2} = cte$ (en s^{-2})

↳ Si $cte > 0 \Rightarrow cte = \frac{1}{\tau^2} \Rightarrow \frac{1}{g(t)} \frac{d^2 g}{dt^2} = \frac{1}{\tau^2}$

$\Rightarrow g''(t) - \frac{1}{\tau^2} = 0$

$\Rightarrow g(t) = A e^{-t/\tau} + B e^{t/\tau}$

Solution acceptable car elle diverge (Si $B = 0$ oui mais on veut cela vérifier les C.I et les C.L)

↳ Si $cte = 0 \Rightarrow g(t) = At + B$ diverge.

↳ Si $cte < 0 \Rightarrow cte = -\omega^2$ d'où :

$\frac{1}{g(t)} \frac{d^2 g}{dt^2} = -\omega^2 \Rightarrow g''(t) + \omega^2 g(t) = 0$

$\Rightarrow \boxed{g(t) = g_0 \cos(\omega t + \varphi)}$

or $\frac{v^2}{f(x)} \frac{d^2 f}{dx^2} = -\omega^2 \Rightarrow f''(x) = -\left(\frac{\omega}{v}\right)^2 f(x)$

or $v = \frac{\omega}{k} \Rightarrow f''(x) + k^2 f(x) = 0 \Rightarrow f(x) = f_0 \cos(kx + \psi)$

CCl : $y(x;t) = y_0 \cos(kx + \psi) \cos(\omega t + \varphi)$

$y_0 = f_0 \times g_0$

3) Modes propres :

Considérons une corde vibrante de longueur L fixée en ses 2 extrémités. L'élongation $y(x;t)$ de la corde doit satisfaire au C.I

$y(0;t) = 0$ $\forall t$

$y(L;t) = 0$

↳ $y(x=L;t) = 0 \ \forall t \Rightarrow \sin(kL) = 0 \Rightarrow k_n L = n\pi$

$$\boxed{k_n = \frac{n\pi}{L}} \longrightarrow \frac{2\pi}{\lambda_n} = \frac{n\pi}{L} \Rightarrow \boxed{\lambda_n = \frac{2L}{n}}$$

Contrôle 2013 PSI (piano)

$\downarrow k = \frac{\omega}{v}$ ← caractéristique intrinsèque de la corde (non quantifiée) $\Rightarrow \omega$ forcément quantifiée

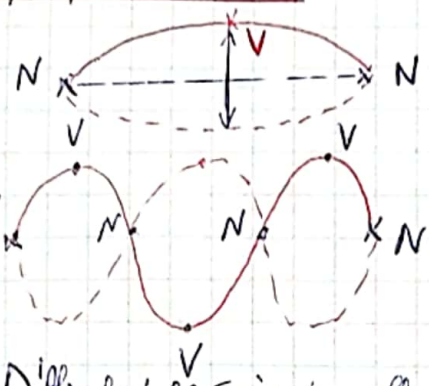
$$\boxed{\omega_n = \frac{n\pi v}{L}} \quad \text{donc} \quad \boxed{y_n(x;t) = y_{0,n}\cos\left(\frac{n\pi v}{L}t + \varphi_n\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}$$

Mode propre de rang n.

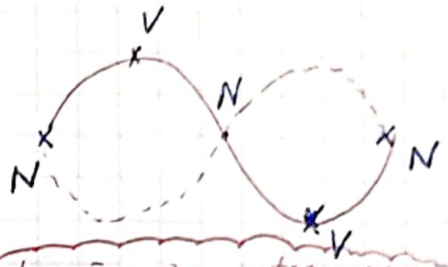
ω_n sont les pulsations propres de la corde càd les seules pulsations qui peuvent exister dans la corde fixée en ses 2 extrémités.

Représentation graphique des modes :

↳ $n = 1$, $\lambda = 2L$



↳ $n = 2$, $\lambda = L$



↳ $n = 3$, $\lambda = \frac{2L}{3}$

2 Conditions aux limites ⟹

Ondes mécaniques ⟹ quantification de ω (car n'est pas une grandeur intrinsèque)

Onde E.M ⟹ pas de quantification de ω

L'équation de D'Alembert est linéaire donc elle admet le principe de superposition càd toute combinaison linéaire de solutions de cette équation est une solution.

$$y(x;t) = \sum_{n=1}^{+\infty} y_n(x;t) = \sum_{n=1}^{+\infty} y_{0,n}\cos(\omega_n t + \varphi_n)\sin(k_n x)$$

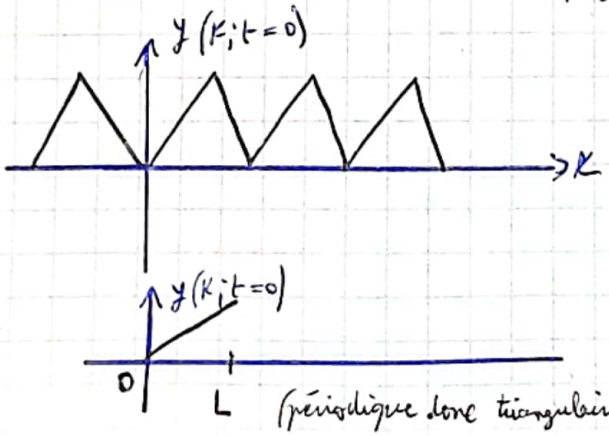
C.I : $y(x;t=0)$; $\left.\frac{\partial y}{\partial t}(x;t)\right|_{t=0}$

- la détermination de $y_{0,n}$ et φ_n nécessite la connaissance des conditions initiales.

(voir cours thermo)

$$s(t) = \sum C_n \cos(n\omega t + \varphi_n) \quad ; \quad C_n = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} s(t)\, e^{-jn\omega t}\, dt.$$

ex : à $t=0$



$$\int y(x;t=0)\, e^{jk_n x}\, dx.$$

Normalement (périodique donc triangulaire).

OPTIQUE ONDULATOIRE

Chapitre I : Modèle scalaire de la lumière :

onde lumineuse ⟺ visible + infrarouge + ultraviolet

I) Emission et réception de la lumière :

1) Types de sources lumineuses :

a) lampe à filament : (ou à incandescence).

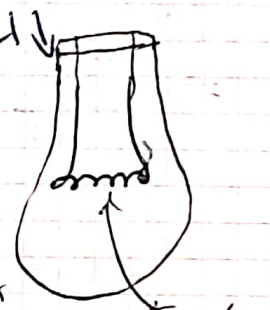
le principe de cette lampe est de porter le filament à haute température (environ 2500 K) par effet Joule d'où une agitation thermique importante des électrons qui émettent un rayonnement électromagnétique. Le spectre est continu et couvre le domaine visible.

Loi de Wien : $\underbrace{\lambda_m}_{\text{longueur d'onde maximale}} \cdot T = 2{,}898 \times 10^{-3}\ K.m$

Démo voir cours rayonnement thermo

⚠ ce n'est pas la majoritaire

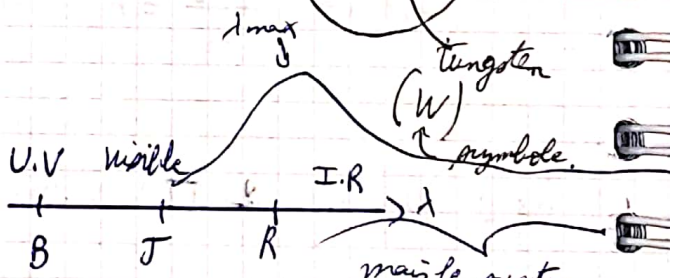
$T \nearrow \rightarrow \lambda \searrow$



- $T = 37\,°C = 310\ K \longrightarrow \lambda_m = 9{,}5\ \mu m$

$\lambda_m = \underbrace{0{,}5\ \mu m}_{\text{Jaune}} \xrightarrow[\text{nous permet de mesurer}]{} T_{soleil} = 5800\ K$

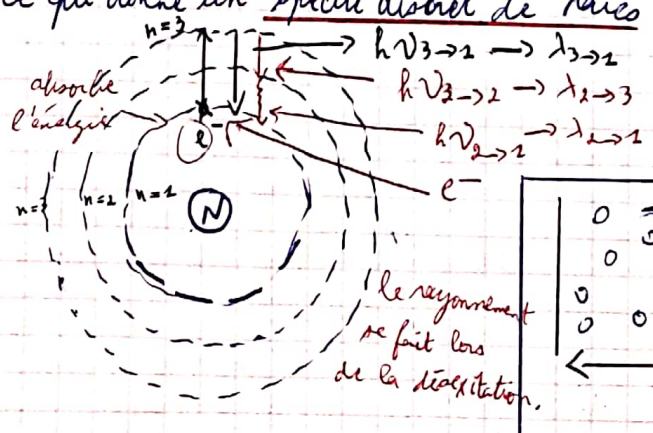
$\lambda_m = 1{,}15\ \mu m \longrightarrow T = 2500\ K$



mais le spectre est plus large ici (soleil).

b) Lampe spectrale :

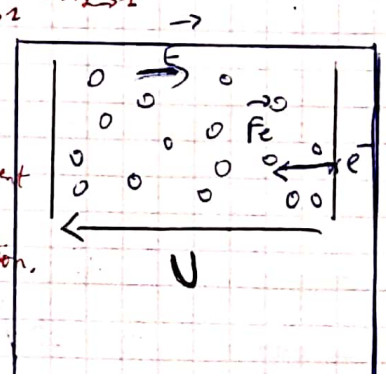
Cette lampe contient une vapeur atomique (mercure ou sodium) qui entrent en collision avec le flux d'électrons accéléré par les électrodes contenues dans l'ampoule. Les atomes de la vapeur sont alors excités. La désexitation provoque l'émission des photons ce qui donne un spectre discret de raies qui caractérise l'atome



$E_p = qV$

$\Delta E_p = qU$

$U \nearrow V_{ext}$, $U \searrow U_0$



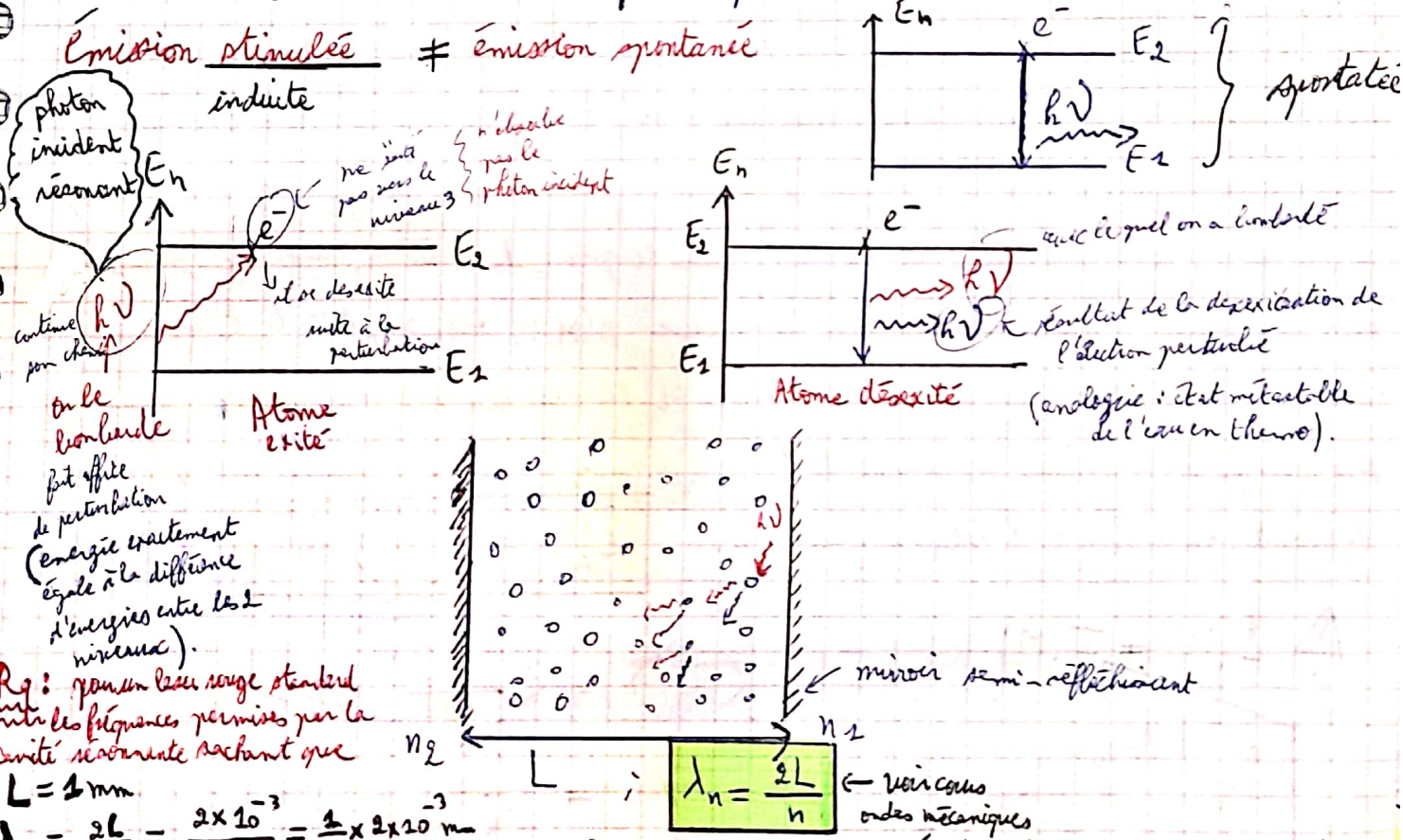
c) Laser : lumière amplifiée par émission stimulée de radiation. (X 2014)

La lumière laser présente une raie spectrale unique quasi-monochromatique, le plus connu est le laser He–Ne qui émet une radiation rouge de longueur d'onde $\lambda = 632{,}8$ nm.

le principe du laser se base sur l'émission induite (stimulée) d'un photon par désexcitation d'un atome. par opposition à l'émission spontanée où l'atome se désexcite seul, l'émission induite est déclenchée par un photon incident de fréquence ν tel que $h\nu = E_2 - E_1$.

Le photon émis est cohérent avec le photon incident, càd de même fréquence et en phase avec lui. Le milieu contenant les atomes est placé dans une cavité résonnante (espace entre 2 miroirs) : l'onde électromagnétique dans la cavité est réfléchie un très grand nombre de fois entre les 2 miroirs et seuls certaines fréquences sont permises. Si l'une des fréquences propres de la cavité correspond à l'écart entre les niveaux électroniques lors des multiples aller – retours, les photons provoquent des émissions stimulées dans le milieu et l'onde laser est de plus en plus intense.

Émission stimulée induite ≠ émission spontanée



Rq : pour un laser rouge standard trouver les fréquences permises par la cavité résonnante sachant que $L = 1$ mm

$\lambda_n = \frac{2L}{n} = \frac{2\times10^{-3}}{n} = \frac{1}{n}\times 2\times10^{-3}$ m

$\lambda_n = \frac{1}{n}\times 2\times10^{3}$ mm $= \frac{2000}{n}$ mm

donc pour $\lambda = 666$ nm : $n = 3{,}003$

on garantit la désexcitation des électrons par une technique dite pompage optique ou pompage électrique. (se fait aussi par des photons)

{ donc la différence entre le vert et le rouge c'est la longueur entre les 2 plaques

2) Réception de la lumière :

La détection de la lumière au niveau microscopique consiste à son absorption par les atomes et les molécules. les récepteurs sont sensibles à la valeur moyenne temporelle de la puissance lumineuse

reçue.

Rappel cohérence = même fréquence + en phase

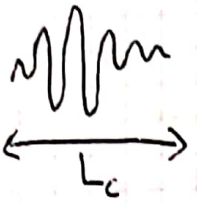
ODG de temps de détection :

$\tau_d \sim 0{,}1\,s$ pour l'œil

$10^{-4}\,s < \tau_d < 10^{-2}\,s$ pour la pellicule photographique

$\tau_d < 10^{-2}\,s$ Capteur CDD.

Rq : $\tau_c \neq \tau_d$ (temps de cohérence ; temps de détection du récepteur)



$L_c = c.\tau_c$

L_c est la longueur de cohérence, τ_c est la durée moyenne d'un train d'ondes.

ODG :

↳ lumière blanche : $\tau_c = 3 \times 10^{-15}\,s \Rightarrow L_c = 0{,}9\,\mu m$

↳ lampe spectrale (au mercure) : $\tau_c = 10^{-12}\,s \Rightarrow L_c = 0{,}3\,mm$

↳ laser : $\tau_c = 1{,}3 \times 10^{-6}\,s \Rightarrow L_c = 400\,m$

plus la lumière est monochromatique plus τ_c est grand (train d'onde de durée infinie) et donc L_c grand

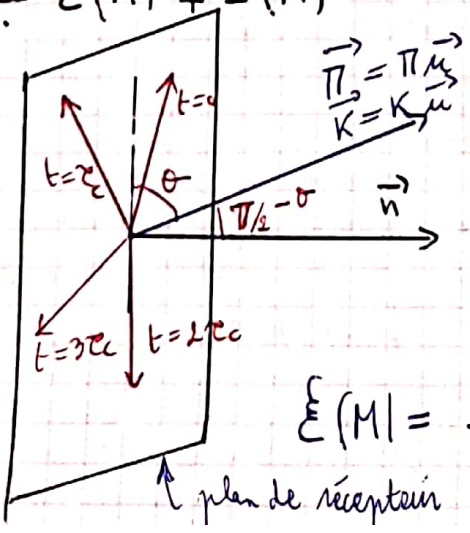
II) Approximation de la grandeur scalaire :

Pour le cas de la lumière naturelle (non polarisée) la direction du champ $\vec{E}$ change aléatoirement au cours du temps, le temps moyen entre 2 changements est le temps de cohérence, les composantes du champ $\vec{E}$ dans le plan $\perp$ à la direction de propagation sont identiques. On appelle vibration lumineuse $s(M;t)$ ou amplitude lumineuse $a(M;t)$ l'une des composantes du champ. Or les détecteurs (capteurs) ne sont sensibles qu'à la valeur moyenne de la puissance lumineuse surfacique qu'ils reçoivent, on définit l'éclairement par :

$$\mathcal{E}(M) = \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot \vec{n}$$

($\mathcal{E}$ en W/m^2)

⚠ $\mathcal{E}(M) \neq I(M)$



$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \left\langle \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right\rangle \quad (\vec{E} \perp \vec{B})$$

$$= \left\langle \frac{E \cdot B}{\mu_0} \right\rangle \vec{\mu}$$

or $\vec{B} = \dfrac{\vec{K} \wedge \vec{E}}{\omega} = \dfrac{\vec{\mu} \wedge \vec{E}}{v_\varphi}$ donc $B = \dfrac{E}{c} \cdot n$ ($v_\varphi = c/n$)

$$\mathcal{E}(M) = \frac{\langle E^2 \rangle}{\mu_0 c} n \cdot \vec{\mu} \cdot \vec{n} \underset{S = E}{=} \frac{n}{\mu_0 c} \langle s^2 \rangle \cos(\pi/2 - \theta)$$

$$\mathcal{E}(M) = \frac{n}{\mu_0 c}\sin(\theta)\langle p^2\rangle \Rightarrow \boxed{\mathcal{E}(M) = K\cdot\langle p^2(M,t)\rangle}$$

en $W\cdot m^{-2}$; $\langle\ \rangle$: moyenne temporelle

avec K est une constante $\left(K = \frac{n}{\mu_0 c}\sin(\theta)\right)$

Ce qui nous pousse à définir l'intensité lumineuse (intensité vibratoire) par :

$$\boxed{I(M) = \langle p^2(M,t)\rangle}\ (Cd) \Leftarrow \in S.I$$

À propos de l'approximation de la grandeur scalaire : cette approximation n'est valable que pour la lumière non polarisée, en effet le champ $\vec{E}$ change aléatoirement de direction de façon équiprobable et très rapidement (temps entre 2 changement successifs égal à τ_c très bref devant τ_d des récepteurs (œil, CDD ... etc)). donc il n'y a pas de direction privilégiée donc on omet le caractère vectoriel du champ $\vec{E}$ et on l'approxime donc par une grandeur scalaire (cours des interférences c'est l'œil qui voit le phénomène avec $\tau_d = 0{,}1\,s \gg \tau_c \approx 10^{-14}/10^{-15}\,s$).

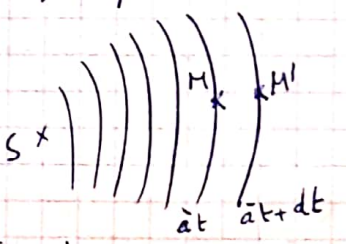
avec la lumière polarisée on a pas le droit de travailler avec cette approximation. Il y'a des cas on elle n'est pas valable même avec lumière non polarisée (voir plus tard ces cas particuliers).

III) Chemin optique :

1) Retard de phase d'une onde :

L'onde sphérique issue d'une source ponctuelle est $s(M;t) = \left(\frac{s_0}{SM}\right)\cos(\omega t - K\cdot SM)$

↑ position de la source ; ↳ Rappel : onde sphérique $f(r) = \left(\frac{1}{r}\right)h(r-ct) + \frac{1}{r}g(r+ct)$. $\frac{1}{SM}$



Cette onde se reproduit au point M' proche de M avec un retard dt et une atténuation. en effet $\omega t - K\cancel{SM} = \omega(t+dt) - K\cdot SM'$

$$= \omega t + \omega dt - K(SM + MM')$$

$$\Rightarrow \omega dt - KMM' = 0$$

on définit la différence de phase élémentaire par : on utilise plutôt $d\varphi = K\cdot MM'$ au lieu de $\omega\cdot dt$ car l'œil voit l'espace et pas le temps

$$d\varphi = \varphi(M') - \varphi(M) = \omega\cdot dt = K\cdot MM' = \frac{2\pi}{\lambda}MM' = \frac{2\pi}{\lambda_0}\cdot n\cdot MM' = \frac{2\pi}{\lambda_0}\cdot n\cdot dl(M)$$

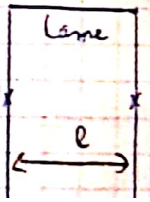
La différence de phase du point N au point P est : $\Delta\varphi = \varphi(P) - \varphi(N)$

$$\boxed{\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0}\int_N^P n(M)\cdot dl(M)}$$

cté si le milieu est homogène

2) Chemin optique :

Exp : $(AB)_L = n\cdot AB$; $(AB)_V = 1\cdot AB = AB$



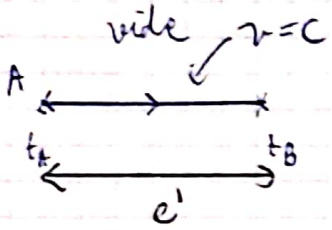
A ✕ ✕ B

on définit le chemin optique par la distance parcourue par la lumière dans le vide pendant la durée qu'elle met à effectuer dans le milieu donné : $\boxed{(NP) = \int_N^P n(M).dl(M)}$ (Exp appliquer la formule pour un lieu homogène)

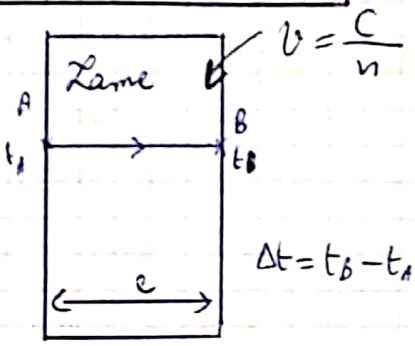
la différence de phase est : $\boxed{\varphi(P) - \varphi(N) = \frac{2\pi}{\lambda_0}(NP)}$ $\Rightarrow \varphi(P) = \varphi(N) + \frac{2\pi}{\lambda_0}(NP)$

λ_0 : longueur d'onde dans le vide

pour comprendre la def : $(AB)_L = n.AB$



$(AB)_v = AB$



$\Delta t = t_B - t_A$

$(AB)_L = e' = n.e$

Rq : $(AB) = n\,AB = n\,\vec{u}.\vec{AB}$ ($\vec{u}$: orienté dans le sens de parcours de la lumière)

3) Surface d'onde : (considérons une source ponctuelle lumineuse S)

C'est l'ensemble des pts M tq $s(M;t) = cte$ à t donné

or $s(M;t) = \frac{s_0}{SM}\cos(\underbrace{\omega t - K.SM + \varphi_0}_{\varphi(M;t)})$

$\Rightarrow \varphi(M;t) = cte$ à t donné

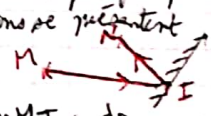
donc la surface d'onde est une surface équiphase.

Rq : une surface d'onde relative au point source S est une surface formée des points M tq $(SM) = cte$ $\Leftrightarrow$ $\varphi(M) = \varphi(S) + \frac{2\pi}{\lambda_0}(SM) = cte$

en plus du déphasage lié à la propagation, la lumière subit un déphasage supplémentaire de π dans les situations suivantes :
- réflexion sur une surface métallique ou sur un milieu plus réfringent
- lorsque le rayon passe par un pt de convergence.

donc dans $\varphi(P) = \varphi(N) + \frac{2\pi}{\lambda_0}(NP)$ on ajoute $\frac{\lambda_0}{2}$ au chemin optique à chaque fois que ces situations se présentent

Ex

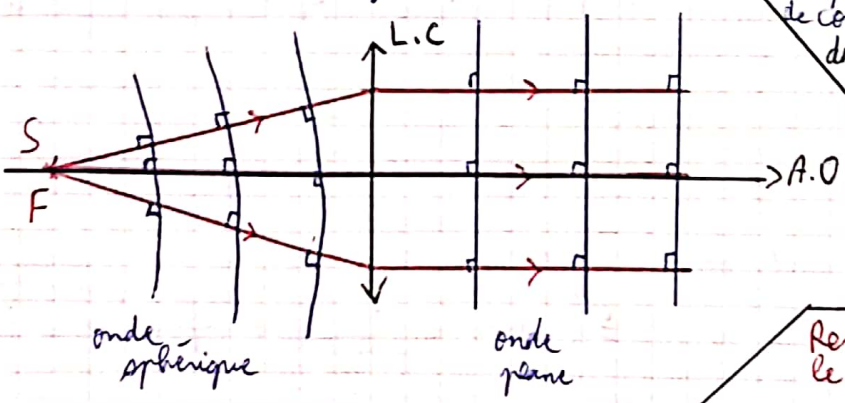


$(MN) = nMI + \frac{\lambda_0}{2} + nIN$

4) Théorème de Malus : ✱✱✱

les rayons lumineux sont $\perp$ aux surfaces d'onde.

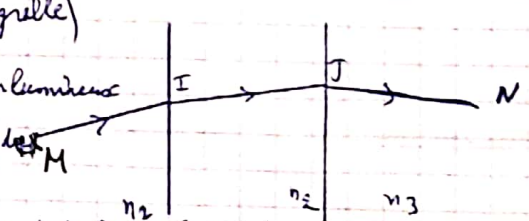
Exp S



Remarques concernant le chemin optique

$(MN) = (MP) + (PN)$ (relation de Chasles dans l'intégrale)

Méthode pratique : le chemin optique le long d'un rayon lumineux est égal à la longueur de ce rayon multipliée par l'indice du milieu transparent (homogène) qu'il traverse.



$(AB) = n.\vec{u}.\vec{AB}$ avec $\vec{u}$ orienté dans le sens de parcours de la lumière

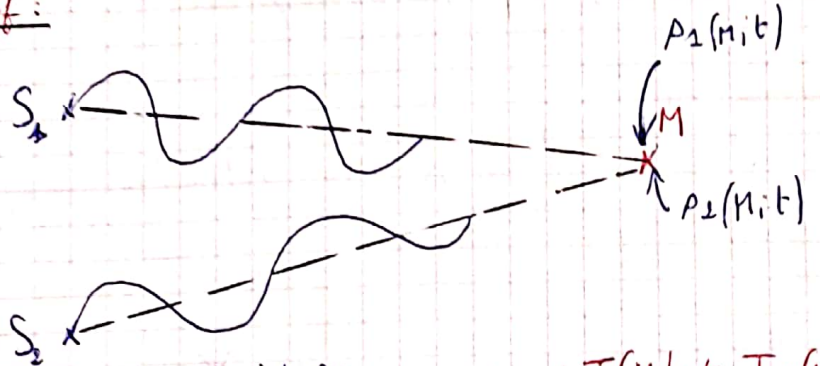
Ex : $(MN) = MI\,n_1 + IJ.n_2 + JN.n_3$

⚠ lorsque 2 pts A et A' sont conjugués par un système optique, le chemin optique (AA') est le même le long de tous les rayons allant de A à A'.

Chapitre II: Interférence de la lumière:

I) Phénomène d'interférence:

1) Def:



on dit qu'il y'a interférence si: $I(M) \neq I_1(M) + I_2(M)$

2) Conditions d'interférence:

$$p_1(M;t) = \frac{p_{01}}{S_1M}\cos(\omega_1 t - K_1 S_1 M - \varphi_{01})$$

$$p_2(M;t) = \frac{p_{02}}{S_2M}\cos(\omega_2 t - K_2 S_2 M - \varphi_{02})$$

$I(M) = \langle p^2(M;t)\rangle$ avec $p(M;t) = p_1(M;t) + p_2(M;t)$

$$I(M) = \underbrace{\langle p_1^2(M;t)\rangle}_{I_1(M)} + \underbrace{\langle p_2^2(M;t)\rangle}_{I_2(M)} + \underbrace{2\langle p_1(M;t)\cdot p_2(M;t)\rangle}_{\text{terme d'interférence.}}$$

Avec:

$$\begin{cases} I_1(M) = \langle p_1^2(M;t)\rangle = \frac{1}{2}\left(\frac{p_{01}}{S_1M}\right)^2 \\ I_2(M) = \langle p_2^2(M;t)\rangle = \frac{1}{2}\left(\frac{p_{02}}{S_2M}\right)^2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \frac{p_{01}}{S_1M} = \sqrt{2I_1(M)} \\ \frac{p_{02}}{S_2M} = \sqrt{2I_2(M)} \end{cases}$$

$$I(M) = I_1(M) + I_2(M) + 2\,\frac{p_{01}}{S_1M}\times\frac{p_{02}}{S_2M}\langle\cos(\omega_1 t - K_1S_1M - \varphi_{01})\cdot\cos(\omega_2 t - K_2S_2M - \varphi_{02})\rangle$$

$$= I_1(M) + I_2(M) + 2\sqrt{2I_1(M)}\sqrt{2I_2(M)}\times\frac{1}{2}\Big[\langle\cos((\omega_1+\omega_2)t - (K_1S_1M + K_2S_2M) - \varphi_{01} - \varphi_{02})\rangle + \langle\cos((\omega_1-\omega_2)t - (K_1S_1M - K_2S_2M) + (\varphi_{02} - \varphi_{01})\rangle$$

$$I(M) = I_1(M) + I_2(M) + 2\sqrt{I_1(M)\cdot I_2(M)}\,\underbrace{\langle\cos((\omega_1-\omega_2)t + (K_2S_2M - K_1S_1M) + (\varphi_{02} - \varphi_{01}))\rangle}_{\text{terme d'interférence.}}$$

* Si $\omega_1 \neq \omega_2 \Longrightarrow I(M) = I_1(M) + I_2(M)$ (pas d'interférence)
(le cos dépendra du temps)

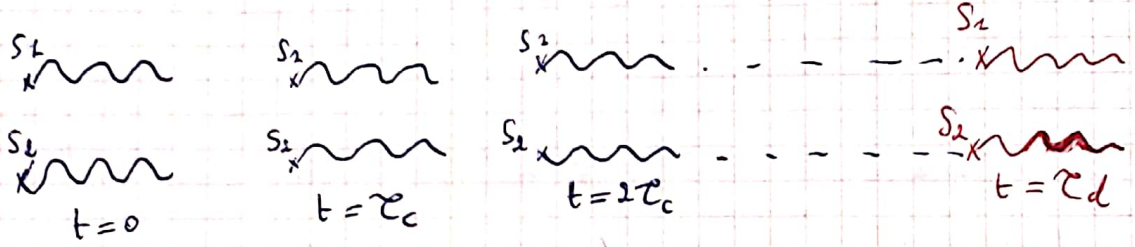
* Si $\omega_1 = \omega_2 \Rightarrow K_1 = K_2$

d'où $I(M) = I_1(M) + I_2(M) + 2\sqrt{I_1(M) I_2(M)} \left\langle \cos\left(K(S_2M - S_1M) + (\varphi_{02} - \varphi_{01})\right) \right\rangle$

• Si $\varphi_{02} - \varphi_{01} = f(t) \Rightarrow I(M) = I_1(M) + I_2(M)$ pas d'interférence.

• Si $\varphi_{02} - \varphi_{01} = cte$ (ne dépend pas du temps).

$\Rightarrow I(M) = I_1(M) + I_2(M) + 2\sqrt{I_1(M) I_2(M)} \cos\left(K(S_2M - S_1M) + (\varphi_{02} - \varphi_{01})\right)$



$\varphi_{02} - \varphi_{01} \neq \varphi_{01}' - \varphi_{02}' \neq \varphi_{01}'' - \varphi_{02}'' \neq \varphi_{02}^{(n)} - \varphi_{01}^{(n)}$

Conclusion: Les conditions d'interférence:

↳ $\omega_1 = \omega_2$; Sources synchrones.

↳ $\varphi_{02} - \varphi_{01} = cte$: Sources en relation de phase (sources cohérentes mutuellement).

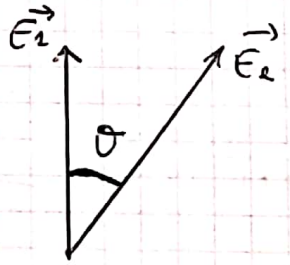
Rq ①: Si la lumière est polarisée: (le model d'approx scalaire n'est plus valable donc $\vec{E}$ vecteur).

$I(M) = \langle \vec{E}^2(M;t) \rangle$

$= \langle (\vec{E}_1(M;t) + \vec{E}_2(M;t))^2 \rangle$

$I(M) = \langle \vec{E}_1^2 \rangle + \langle \vec{E}_2^2 \rangle + 2\langle \vec{E}_1 . \vec{E}_2 \rangle$

$I(M) = I_1(M) + I_2(M) + 2\langle E_1 . E_2 . \cos(\theta) \rangle$



↓ $\omega_1 = \omega_2$, $\varphi_{02} - \varphi_{01} = cte$

$I(M) = I_1(M) + I_2(M) + 2\sqrt{I_1(M) I_2(M)} \langle \cos(\theta) \rangle$

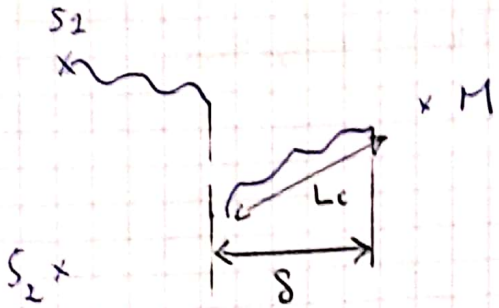
pour qu'il y'ait interférence càd $I(M) \neq I_1(M) + I_2(M)$

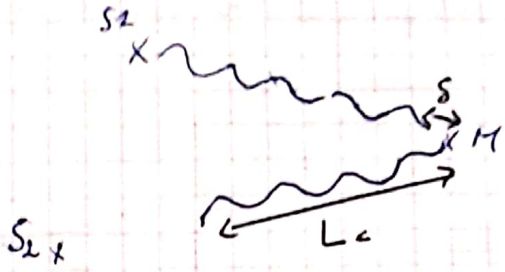
il faut que $\boxed{\theta = cte \neq \frac{\pi}{2}}$ Condition supplémentaire dans le cas d'une lumière polarisée.

Rq ②: Si l'œil observe à chaque instant (pas besoin donc de la moyenne) ($\tau_d < \tau_c$)

$I(M;t) = A^2 = (A_1 + A_2)^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2.$

$I(M;t) = I_1(M;t) + I_2(M;t) + 2\sqrt{I_1(M;t) I_2(M;t)} \neq I_1(M;t) + I_2(M;t)$





pas d'interphérence

∃ d'interférence

différence → $\delta > L_c$
de marche optique (voir plus tard)

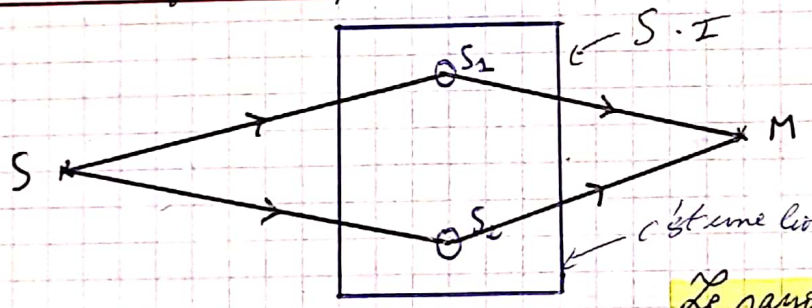
une 4ème condition (en général avec lumière polarisée) $\delta < L_c$
cohérence temporelle (recouvrement) (voir plus tard)

3) Système interférentiel :

pour réaliser expérimentalement les conditions d'interférence, il faut à partir d'une seule source réaliser un dédoublement pour obtenir S_1 et S_2 :
(pour que les 2 sources S_1 et S_2 aient même origine (لا يوجد أي فرق) pour réaliser la condition d'interférence
Tout dispositif qui réalise le dédoublement est dit : Système interférentiel.

on distingue par la suite 2 types de systèmes interférentiels

↳ Système interférentiel par division du front d'onde : (Division géométrique)

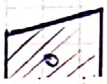


(+) : réflexion
diffraction
transmission

c'est une boîte noire (on ne sait pas qu'est le phénomène (+) à l'origine...)

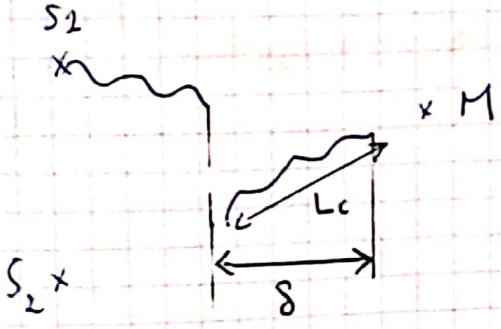
Le rayon n'est pas divisé mais la surface d'onde est divisée

Exo : Trou d'Young

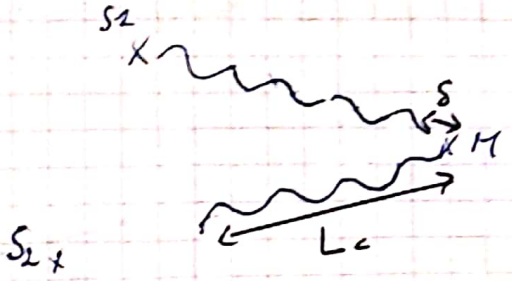


Remarque à propos de la 2ème condition de cohérence :

Sources en relation de phase (cohérentes mutuellement) càd $\varphi_{02} - \varphi_{01} = cte$
(ou varie très lentement de manière à être quasiment constant sur une durée égale au temps de réponse du détecteur utilisé ; pour des ondes parfaitement monochromatiques, les termes s_{01} et s_{02} ainsi que φ_{01} et φ_{02} restent invariants. Mais ces ondes n'ont pas de réalité physique en optique.
Dans une situation plus réelle : où les 2 sources S_1 et S_2 rayonnent des ondes quasi-monochromatiques décrites par le model du train d'ondes. Dans ce model, S_{01} et S_{02} sont cte et les phases à l'émission φ_{01} et φ_{02} varient aléatoirement dans le temps. Si $\varphi_{02} - \varphi_{01}$ prend de très nombreuses valeurs aléatoires pendant la durée sur laquelle la moyenne est calculée (temps de détection du capteur τ_d) alors la moyenne du cos est nulle et il n'y a pas d'interférences !



pas d'interphérence



∃ d'interférence

$\delta < L_c$

différence de marche optique (voir plus tard) → $\delta > L_c$

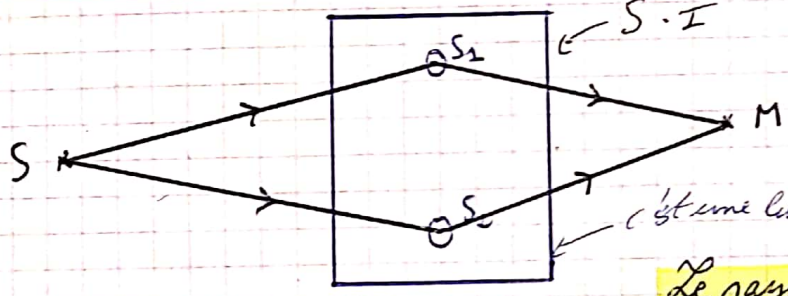
une 4ème condition (en général avec lumière polarisée)
cohérence temporelle (recouvrement) (voir plus tard)

3) Système interférentiel:

pour réaliser expérimentalement les conditions d'interférence, il faut à partir d'une seule source réaliser un dédoublement pour obtenir S_1 et S_2.
(pour que les 2 sources S_1 et S_2 aient même origine (أطعم أطعم أطعم)) pour réaliser la condition d'interférence
Tout dispositif qui réalise le dédoublement est dit: Système interférentiel.

on distingue par la suite 2 types de systèmes interférentiels

↳ Système interférentiel par division du front d'onde: (Division géométrique)

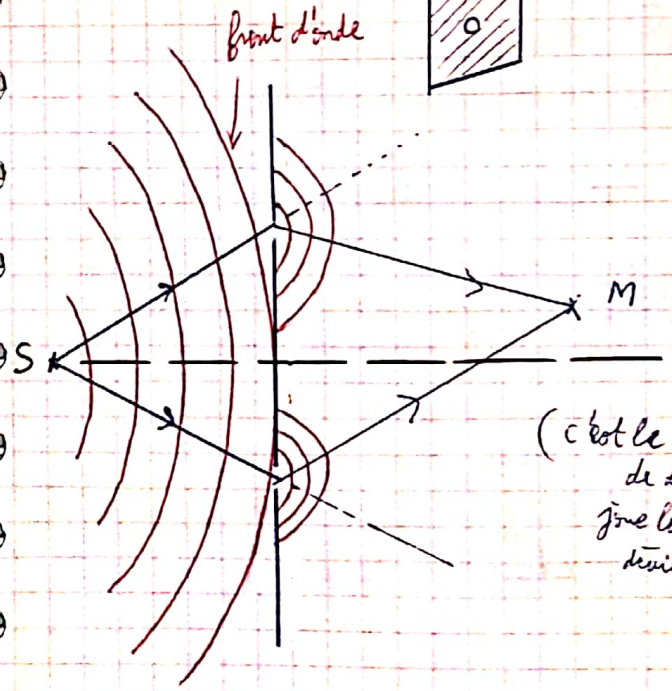


(*): réflexion
diffraction
transmission

c'est une boîte noire (on ne sait pas qu'est le phénomène (*) à l'origine...)

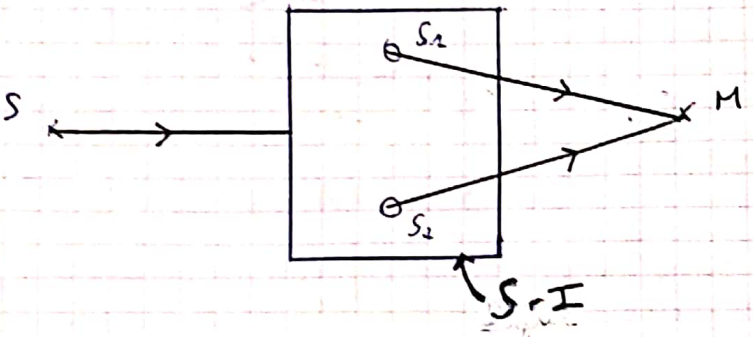
Le rayon n'est pas divisé mais la surface d'onde est divisée

Exp: Trou d'Young.

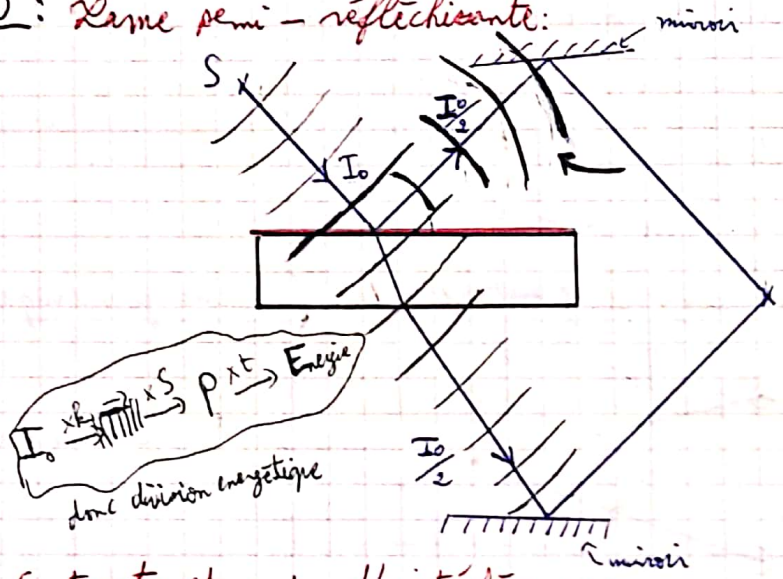


(c'est le phénomène de diffraction qui joue le rôle dans la déviation)

L) Système interférentiel par division d'amplitude = Division énergétique:



Exp: Lame semi-réfléchissante:



c'est le rayon qui est divisé ; la surface d'onde n'est pas divisée (elle est réfléchie ou absorbée)

4) Contraste et onde d'interférence:

Déf (1): on définit la surface d'égale intensité par l'ensemble des points M tels que: $I(M) = cte$ or: $I(M) = cte$ or:

$$I(M) = \underbrace{I_1}_{I_1(M)} + \underbrace{I_2}_{I_2(M)} + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\left(K(S_2M - S_1M) + (\varphi_{02} - \varphi_{01})\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{S_2M - S_1M = cte}$$

Rq: $I_1(M) = \frac{A_{01}^2}{2S_1M^2}$; $I_2(M) = \frac{A_{02}^2}{2S_2M^2}$

on néglige les variations de $I_1(M)$ et $I_2(M)$ devant la variation de $(S_2M - S_1M)$ en effet $(S_2M - S_1M)$ est multiplié par $K = \frac{2\pi}{\lambda}$ et λ est très faible

$S_1M - S_2M \rightarrow S_1M - S_2M + \left(\frac{\lambda}{2}\right)$ très petite variation change le signe du cos.

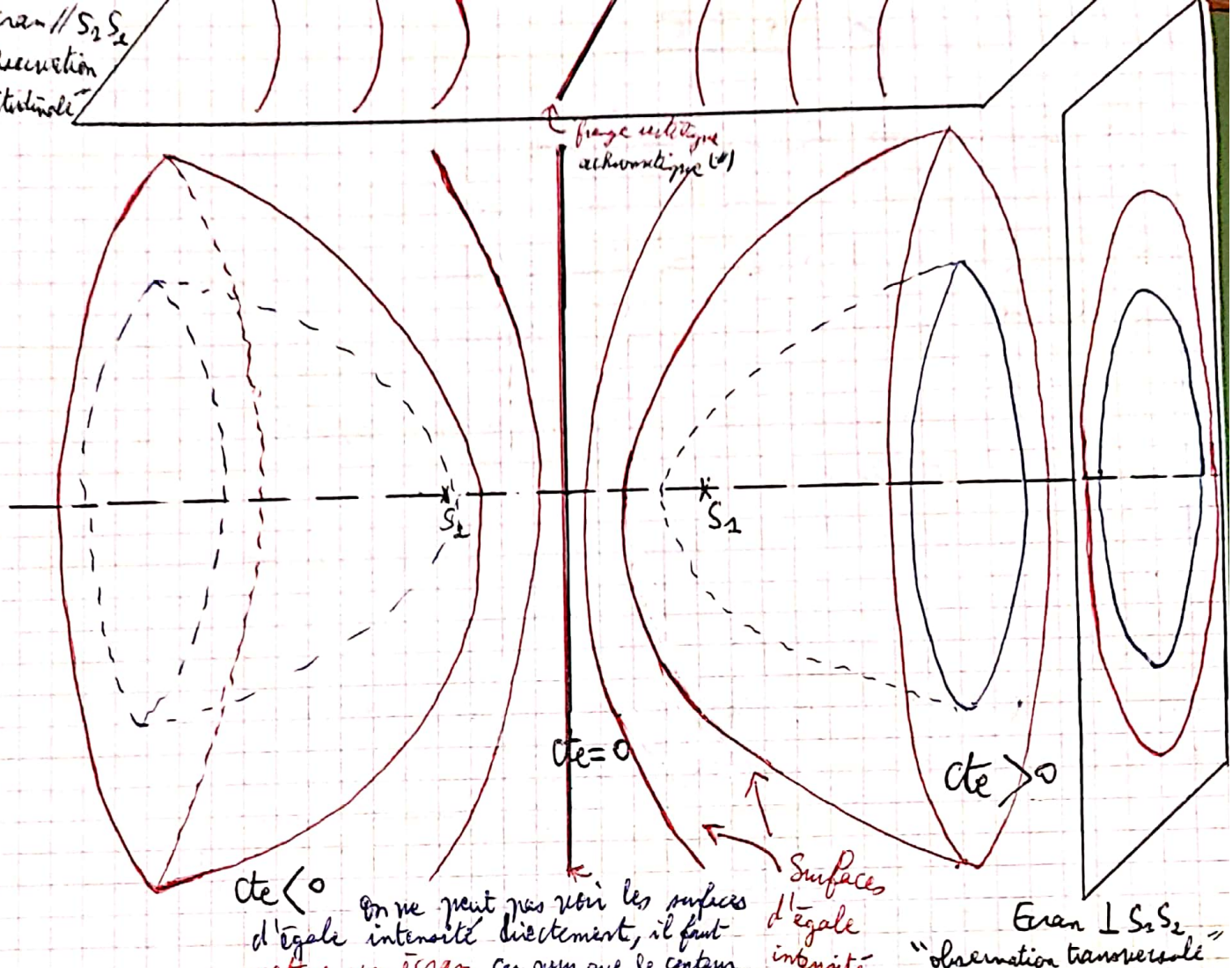
$+\cos \longrightarrow -\cos$

C'est l'équation des hyperboloïdes de foyers S_1 et S_2.

Rq ODG $S_1S_2 = 2$ mm ; distance écran à $S_1 \simeq 1$ m ; taille écran 99 cms.

cela nous donnera des lignes quasi-rectilignes

Voir Schéma verso.



On ne peut pas voir les surfaces d'égale intensité directement, il faut mettre un écran car sans que le capteur (oeil) voit il faut que la lumière subisse une réflexion

Def (2): on définit la frange (ligne) par l'intersection de la surface d'égale intensité avec un plan (écran).

- Si l'observation est transversale alors les franges sont des anneaux
- Si l'observation est longitudinale alors les franges sont des portions d'hyperboles pratiquement des franges rectilignes au voisinage du plan bissecteur de S_1S_2.

On caractérise deux types de franges :

⊕ **Frange brillante :** $I(M) = I_{max} = \left(\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2}\right)^2$

⊕ **Frange sombre :** $I(M) = I_{min} = \left(\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2}\right)^2$

Si $I_1 = I_2 \Rightarrow I_{min} = 0$ la frange sombre est dite noire.

Def (3): * on définit les interférence constructives par $I(M) > I_1(M) + I_2(M)$

* on définit les interférences destructives par $I(M) < I_1(M) + I_2(M)$

Def (4): * on définit le contraste par $0 \leqslant C = \dfrac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} \leqslant 1$

(*) achromatique : la position est indépendante de λ, elle sera blanche si la source est blanche.

Après calcul $C = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2}$

↳ Si $I_1 = I_2 \Rightarrow I_{min} = 0 \Rightarrow C = 1$

la figure d'interférence est bien contrastée

↳ Si $I_1 \ll I_2$ ou $I_2 \gg I_1 \Rightarrow I_{max} \simeq I_{min}$

$\Rightarrow C \simeq 0$ brouillage de la figure d'interférence.

↳ Si $C = 0 \Rightarrow I_{max} = I_{min} \Rightarrow I_1 = 0$ ou $I_2 = 0$

$\Rightarrow$ pas d'interférence.

Ccl: le contraste = ce qui caractérise la figure d'interférence ≠ visibilité = qualité

Def (5): Différence de marche optique.

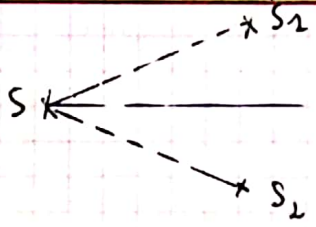
$I(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\left(K(S_2M - S_1M) + (\varphi_{02} - \varphi_{01})\right)$

⊕ $K(S_2M - S_1M) = \frac{2\pi}{\lambda}(S_2M - S_1M) = \frac{2\pi}{\lambda_0} n (S_2M - S_1M)$

$$K(S_2M - S_1M) = \frac{2\pi}{\lambda_0}\left[(S_2M) - (S_1M)\right] \quad (1)$$

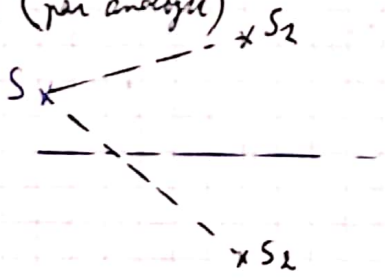
chemin optique

⊕ $\varphi_{02} - \varphi_{01} = \frac{2\pi}{\lambda_0}\left[(SS_2) - (SS_1)\right]$ (2) (par analogie)



$(SS_2) - (SS_1) = 0 \Rightarrow$

$\varphi_{02} - \varphi_{01} = 0$



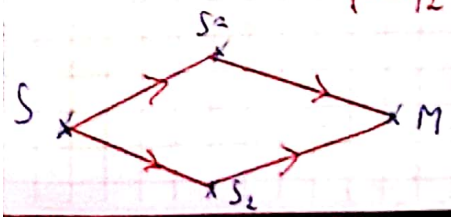
$(SS_2) - (SS_1) \neq 0 \Rightarrow$

$\varphi_{02} - \varphi_{01} \neq 0$

(1) et (2) $\Rightarrow K(S_2M - S_1M) + \varphi_{02} - \varphi_{01} = \Delta\varphi$

$= \frac{2\pi}{\lambda_0}\left[\left((S_2M) - (S_1M)\right) + \frac{2\pi}{\lambda_0}\left((SS_2) - (SS_1)\right)\right]$

$= \frac{2\pi}{\lambda_0}\left[\underbrace{\left((SS_2) + (S_1M)\right)}_{(SM)_2} - \underbrace{\left((SS_1) + (S_1M)\right)}_{(SM)_1}\right] = \frac{2\pi}{\lambda_0}\delta = \Delta\varphi$



avec $\delta = (SM)_2 - (SM)_1$

est la différence de marche optique

Rq: $I(M)$ dépend de $\Delta\varphi$

$I(M) = (I_1 + I_2)(1 + C\cos(\Delta\varphi))$

$$I(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\delta\right)$$

Formule de Fresnel pour 2 ondes monochromatiques de même pulsation et cohérentes.

$\cos(\Delta\varphi)$

Def (6): ordre d'interférence "p"

on définit l'ordre d'interférence par: $p = \frac{\delta}{\lambda_0}$

$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0}\delta$

d'où $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos(2\pi p)$

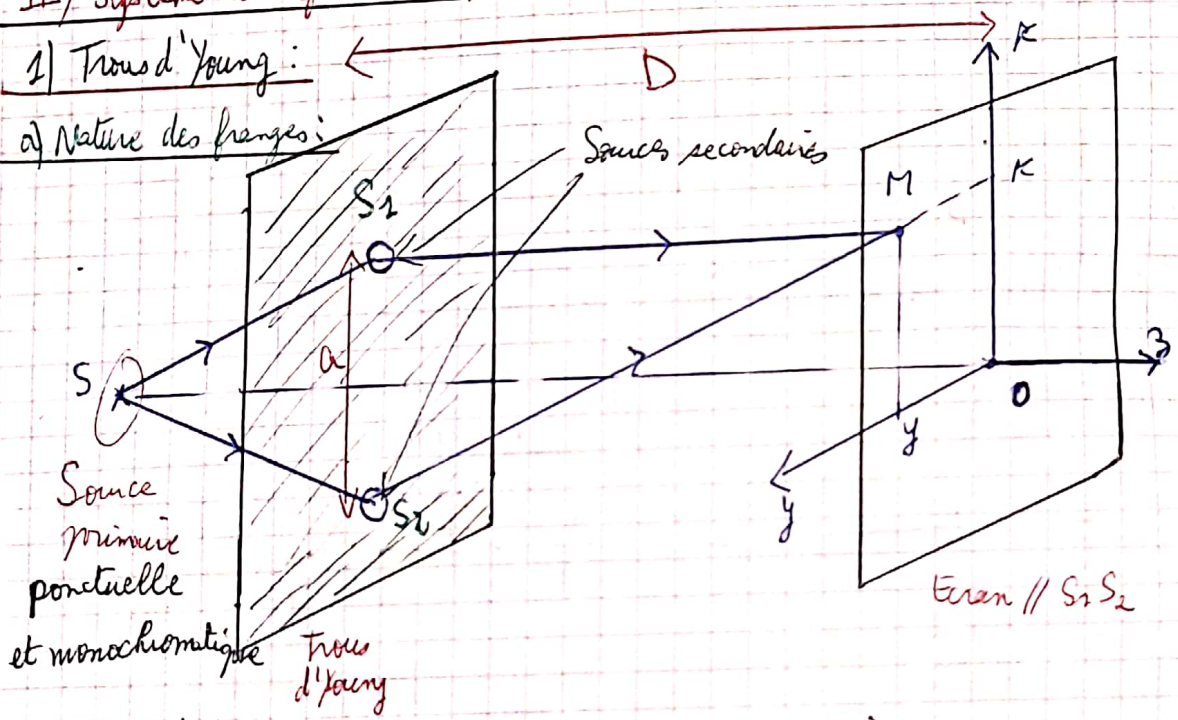
donc $p(M) = \frac{\Delta\varphi(M)}{2\pi} = \frac{\delta(M)}{\lambda_0}$

- Si p est un entier: $p = n$ $\Rightarrow$ $I = I_{max}$ "Frange brillante"
- Si p est un demi-entier: $p = n + \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $I = I_{min}$ "Frange sombre"

II) Système interférentiel par division du front d'onde:

1) Trous d'Young:

a) Nature des franges:



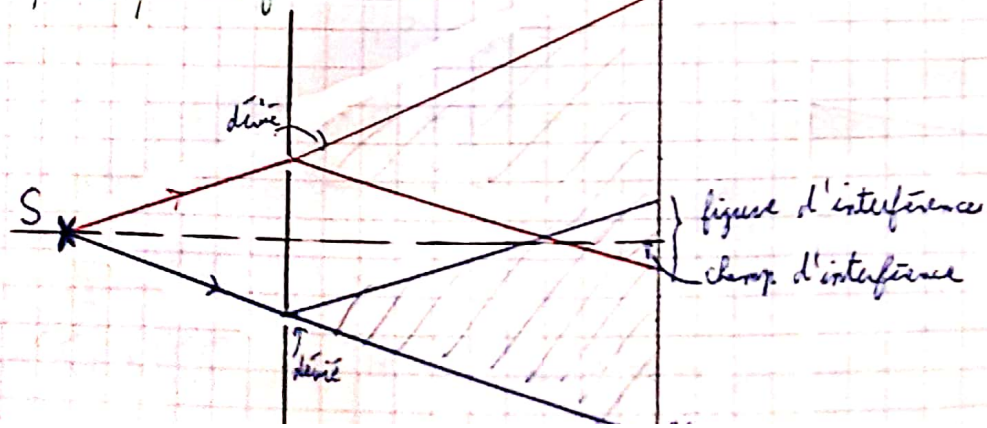
Expérimentalement on a:

$D \gg x, y \gg a$

D: m; x, y: cm; a: mm

$\Rightarrow$ Franges rectilignes (voir partie des hyperboloïdes).

b) Champ d'interférence:



$$I(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\delta\right)$$

Formule de Fresnel pour 2 ondes monochromatiques de même pulsation et cohérentes.

$\cos(\Delta\varphi)$

Def 6: ordre d'interférence "p"

on définit l'ordre d'interférence par: $p = \frac{\delta}{\lambda_0}$

$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0}\delta$

donc $p(M) = \frac{\Delta\varphi(M)}{2\pi} = \frac{\delta(M)}{\lambda_0}$

d'où $I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos(2\pi p)$

- Si p est un entier: $p = n$ $\Rightarrow$ $I = I_{max}$ "Frange brillante"
- Si p est un demi-entier: $p = n + \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $I = I_{min}$ "Frange sombre"

I

1

Rq et rappel:

- interférences constructives: elles sont réalisées en un point où $I(M) > I_1(M) + I_2(M)$

cad si $\cos(\Delta\varphi) > 0$

a) avec si $\cos(\Delta\varphi) = 1$; $I(M) = \left(\sqrt{I_1(M)} + \sqrt{I_2(M)}\right)^2 = I_{max}$, on dit qu'il y a interférences totalement constructives

- interférences destructives: elles sont réalisées en un point où $I(M) < I_1(M) + I_2(M)$

cad si $\cos(\Delta\varphi) < 0$

avec si $\cos(\Delta\varphi) = -1$; $I(M) = \left(\sqrt{I_1(M)} - \sqrt{I_2(M)}\right)^2 = I_{min}$, on dit qu'il y a interférences totalement destructives.

le volum I_{moy} est $I_1(M) + I_2(M)$. Ce résultat est conforme à la conservation de l'énergie. En effet, le phénomène d'interférences ne modifie que la distribution spatiale de l'énergie mais ne change pas l'énergie totale.

et

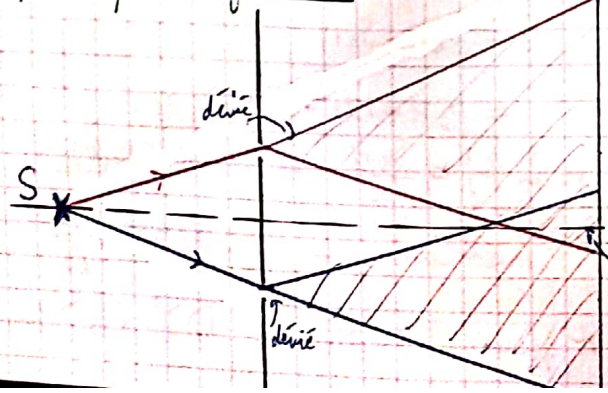
Expérimentalement on a:

$D \gg x, y \gg a$

D: m; x, y: cm; a: mm

$\Rightarrow$ Franges rectilignes (voir partie des hyperboloïdes).

b) Champ d'interférence:



c) différence de marche optique : (n si autre milieu que le vide qu'il y a)

Montrer que $\boxed{\delta = \frac{n \cdot a \cdot x}{D}}$ ⚠

Réponse : $\delta = (SM)_2 - (SM)_1$

$= \left[(SS_2) + (S_2M)\right] - \left[(SS_1) + (S_1M)\right]$

$\simeq 1$

$= n_{air}\left[S_2M - S_1M\right]$

$\delta = S_2M - S_1M$

Méthode 1 :

$S_1 = \begin{pmatrix} a/2 \\ 0 \\ -D \end{pmatrix}$; $S_2 = \begin{pmatrix} -a/2 \\ 0 \\ -D \end{pmatrix}$; $M = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$

$S_2M = \|\vec{S_2M}\| = \|(x + a/2)\vec{u_x} + y\vec{u_y} + D\vec{u_z}\| = \sqrt{(x+\frac{a}{2})^2 + y^2 + D^2}$

$S_1M = \|\vec{S_1M}\| = \|(x - \frac{a}{2})\vec{u_x} + y\vec{u_y} + D\vec{u_z}\| = \sqrt{(x-\frac{a}{2})^2 + y^2 + D^2}$

$$\delta = D\left[\left(1 + \frac{y^2}{D^2} + \frac{(x+\frac{a}{2})^2}{D^2}\right)^{1/2} - \left(1 + \frac{y^2}{D^2} + \frac{(x-a/2)^2}{D^2}\right)^{1/2}\right]$$

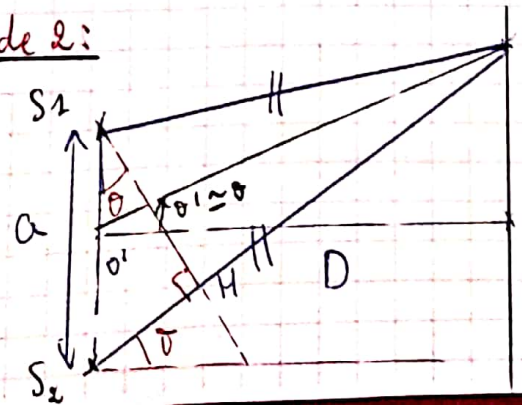
or $D \gg x, y \gg a$ d'où

$$\delta = D\left[\left(1 + \frac{y^2}{2D^2} + \frac{(x+\frac{a}{2})^2}{2D^2}\right) - \left(1 + \frac{y^2}{2D^2} + \frac{(x-a/2)^2}{2D^2}\right)\right]$$

$$= \frac{D}{2D^2}\left[(x+\frac{a}{2})^2 - (x-\frac{a}{2})^2\right]$$

donc $\delta = \frac{ax}{D}$

Méthode 2 :



$\delta = S_2M - S_1M$

$= S_2H + HM - S_2M \simeq S_2H$

or $\sin(\theta) = \frac{S_2H}{a} \Rightarrow \delta = a\sin(\theta)$

or θ faible donc $\delta \simeq a\tan(\theta) \simeq \frac{ax}{D}$

S_2M et quasi // à $O'M$ car $D \gg x, y \gg a$.

d) Intensité lumineuse :

$$I(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{ax}{D}\right)$$

Dans notre cas : $I_1 = I_2 = I_0$ (S_1 et S_2 identiques)

$$I(x) = 2I_0\left[1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{ax}{D}\right)\right]$$

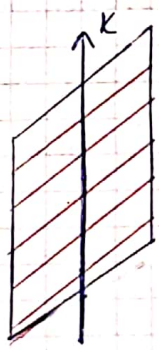
Tracer $I(x)$: Nature des franges.

↙ F.B ↘ F.N

↳ FB $I(x) = I_{max} = 4I_0 \Rightarrow x_n = \dfrac{n\lambda_0 D}{a}$

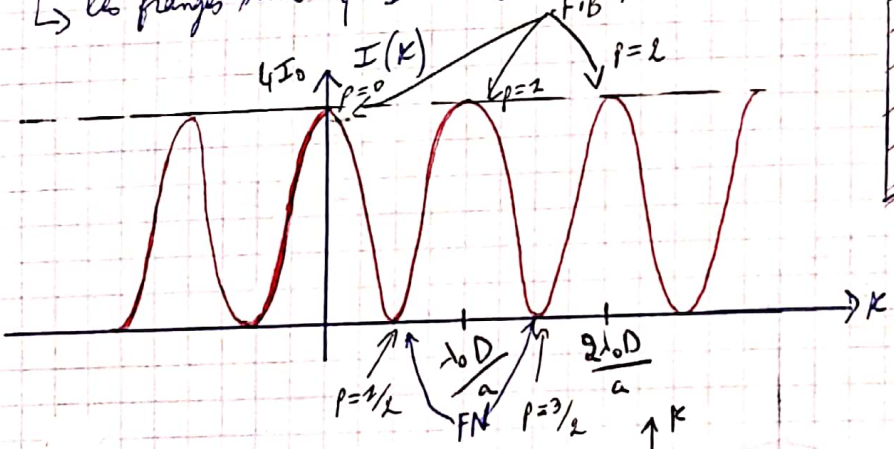
↳ FN : $I(x) = 0 \Rightarrow x_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)\dfrac{\lambda_0 D}{a}$

Rq : Au centre : $x = 0 \Rightarrow \delta = 0 \Rightarrow p = 0$ (↓ F.B) : Frange centrale

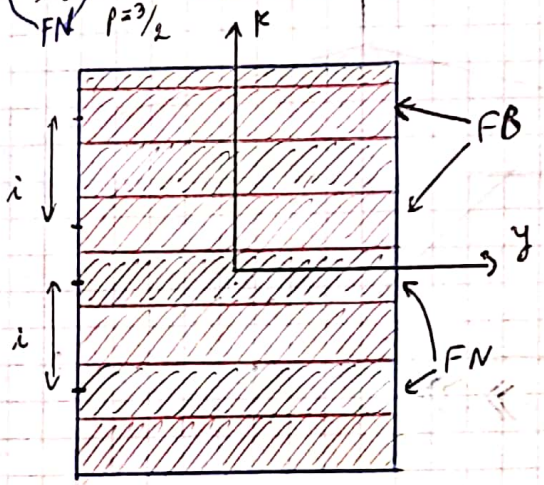


⇒ Franges rectilignes

↳ les franges sont t.q. $I = cte \Rightarrow x = cte$



Aspect de l'écran :



La frange centrale est noire

$I_{min} = 0$

$C = 1$

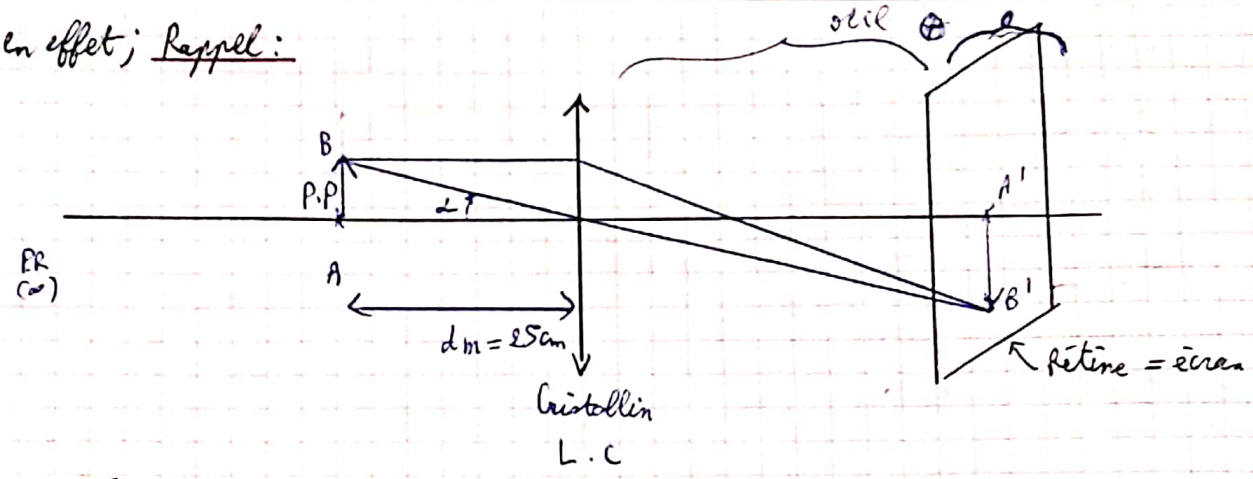
e) interfrange i :

C'est la distance entre deux franges successives de même nature (càd période spatiale des franges d'interférence)

$i = x_{n+1} - x_n \Rightarrow \boxed{i = \dfrac{\lambda_0 \cdot D}{a}}$

ODG : $\lambda_0 = 0{,}6\,\mu m$, $D = 1\,m$, $a = 1\,mm$ ⇒ $i = 0{,}6\,mm$ faible mais observable (ex $i = 0{,}075\,mm$)

en effet ; Rappel :



En général ; $7cm < d_m < 40cm$

Un objet AB est observable si A'B' se forme sur 2 cellules rétiniennes différentes. Ceci est réalisé si $\alpha > \varepsilon = 1' = 3.10^{-4}$ rad

ε est dit : pouvoir séparateur de l'œil.

Si $\alpha < \varepsilon$; AB est non observable car A' et B' se forment sur la même cellule rétinienne donc la taille minimale d'un objet de vision distincte est telle que :

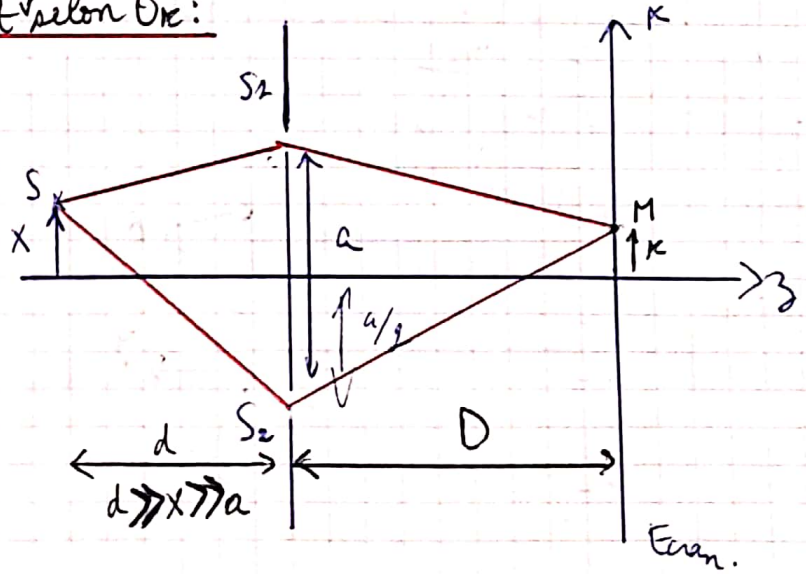
$$\alpha = \varepsilon \Rightarrow \frac{(AB)_{min}}{d_m} = \varepsilon \quad \text{donc} \quad (AB)_{min} = 25cm \times 3 \times 10^{-4}$$

$$= 0,075 \text{ mm}$$

$$\simeq 0,1 \text{ mm}.$$

f/ déplacement de la source :

↳ déplacement de S selon Ox :



$$\delta = (SM)_2 - (SM)_1 = [(SS_2) + (S_2M)] - [(SS_1) + (S_1M)]$$

$$\delta = [(S_2M) - (S_1M)] + [(SS_2) - (SS_1)] = \underbrace{[S_1M - S_2M]}_{\frac{ax}{D}} + \underbrace{[S_2S - S_1S]}_{\frac{aX}{d} \text{ (par analogie)}}$$

$\Rightarrow \delta = \frac{ax}{D} + \frac{aX}{d}$

$\Rightarrow I = 2I_0\left[2 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\left(\frac{ax}{D} + \frac{aX}{d}\right)\right)\right]$

↳ Interfrange : $i = x_{n+1} - x_n$

Soit x_n position d'une frange brillante : $\frac{2\pi}{\lambda_0}\left(\frac{ax_n}{D} + \frac{aX}{d}\right) = 2n\pi$

$x_n = \left(n\lambda_0 - \frac{aX}{d}\right)\cdot\frac{D}{a} \Rightarrow \boxed{i = \frac{\lambda_0 D}{a}}$

↳ la frange centrale est tq $\rho = 0$

* Si $X = 0$ alors $\rho = 0 \Rightarrow x_0 = 0$ ← position de la frange centrale

* Si $X \neq 0$ alors $\rho = 0 \Rightarrow \frac{ax_0}{D} + \frac{aX}{d} = 0$

$\Rightarrow x_0 = \frac{-D}{d}X$

→ Si $X > 0$: " Translation de la source vers le haut "
$\Rightarrow x_0 < 0$: " translation de la figure d'interférence vers le bas "

→ Si $X < 0$: " Translation de la source vers le bas "
$\Rightarrow x_0 > 0$: " translation de la figure d'interférence vers le haut ".

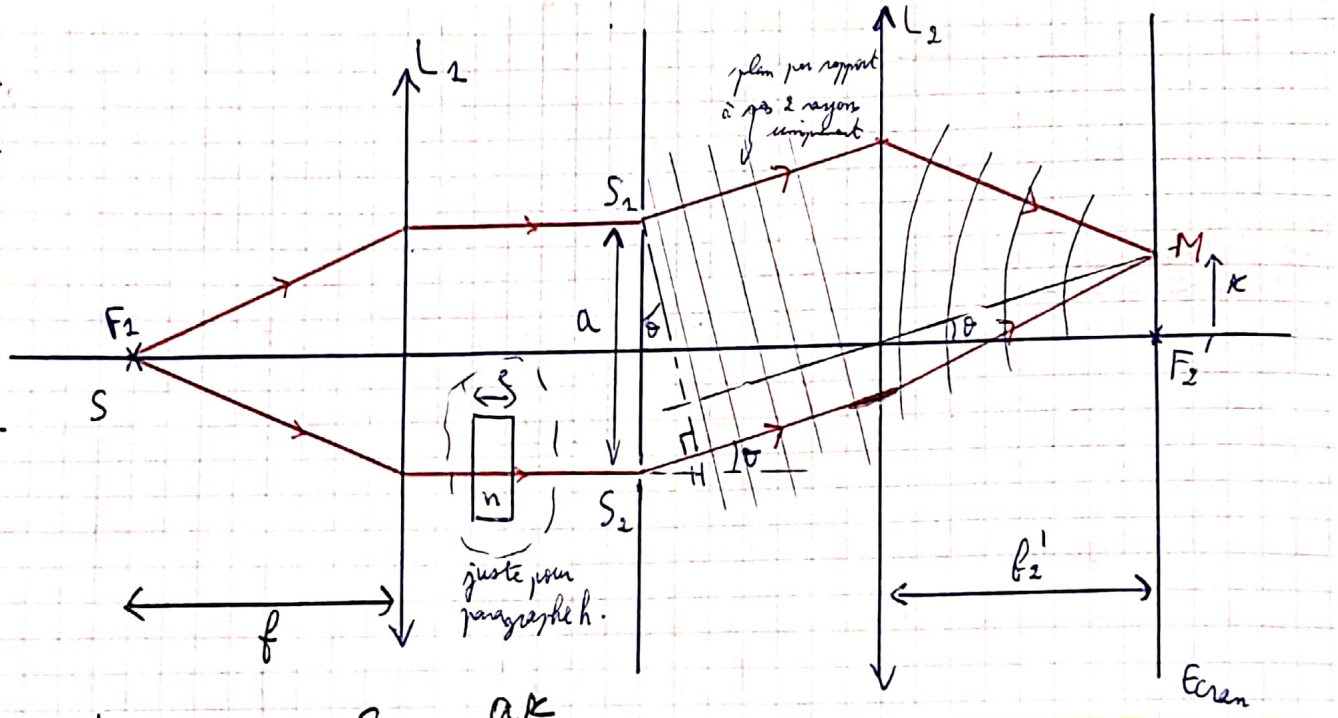
CCL : la figure d'interférence se translate dans le sens inverse de déplacement de la source primaire alors que l'interfrange reste sans modification

↳ déplacement de S suivant Oy :

la différence de marche reste invariante donc la translation de la source suivant l'axe (Oy) n'a pas d'effet sur la figure d'interférence.

↳ déplacement de S suivant Oz : même chose :

g) Montage de Fraunhoffer : la source et l'écran sont situés à l'infini. Pratiquement, la source S est au foyer objet de la lentille L_1 et l'écran au plan focal image de la lentille L_2.



Montrer que $\delta = \dfrac{ax}{f_2'}$

Les rayons qui interfèrent à l'infini sont les rayons émergents parallèles.

$$\delta = (SM)_2 - (SM)_1$$

$$= \left[(S_2M) - (S_1M)\right] + \underbrace{\left[(SS_2) - (SS_1)\right]}_{=0}$$

$$= (S_2H) + (HM) - (S_1M)$$

or $\varphi(S_2) - \varphi(M) = \varphi(H) - \varphi(M)$

car S_1 et H $\in$ à la même surface d'onde = surface équiphase

$$\Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda_0}(S_1M) = \frac{2\pi}{\lambda_0}(HM) \Rightarrow (S_1M) = (HM)$$

(contourner l'indice de la lentille...).

d'où $\delta = (S_1H) = S_2H = a\sin(\theta) \simeq a\tan(\theta)$

($=$ dans le vide)

$$\delta = \frac{a \times x}{f_2'}$$

A) interposition d'une lame de verre d'indice n d'épaisseur e devant l'un des 2 trous :

$$\delta = (SM)_2 - (SM)_1 = \left[(S_2M) - (S_1M)\right] + \underbrace{\left[(SS_2) - (SS_1)\right]}_{(n-1)e} = \frac{ax}{f_2'} + (n-1)e$$

donc l'interfrange reste invariant

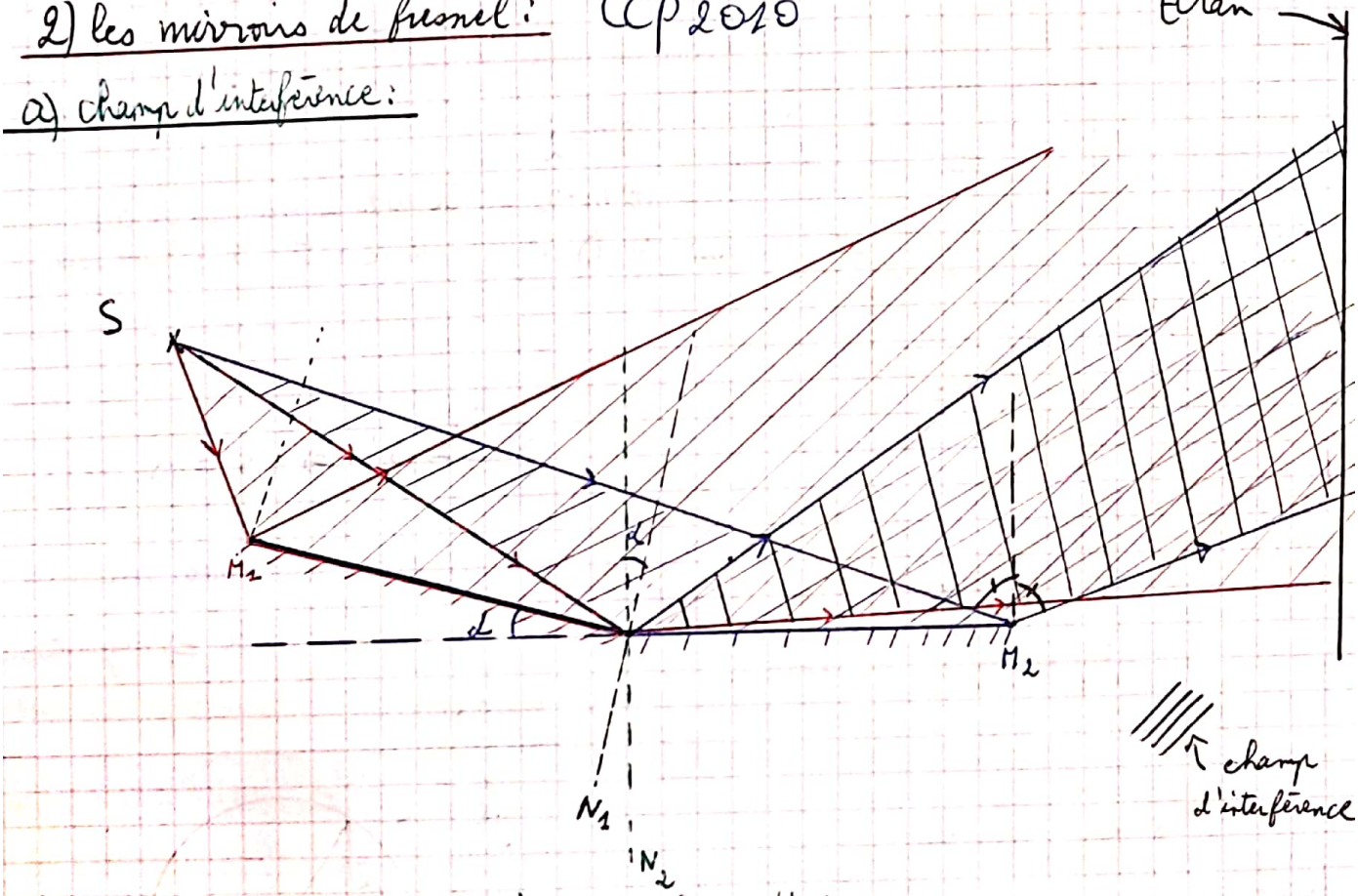
et la frange centrale qui est tq $p=0 \Rightarrow \delta=0 \Rightarrow x_0 = \frac{-(n-1)e}{a} f_2' < 0$

déplacement de la figure d'interférence vers le bas (si la lame en haut elle se déplacera vers le haut).

Conclusion: tout le système des franges se translate dans le sens du trou devant lequel on a placé la lame sans modification de l'interfrange.

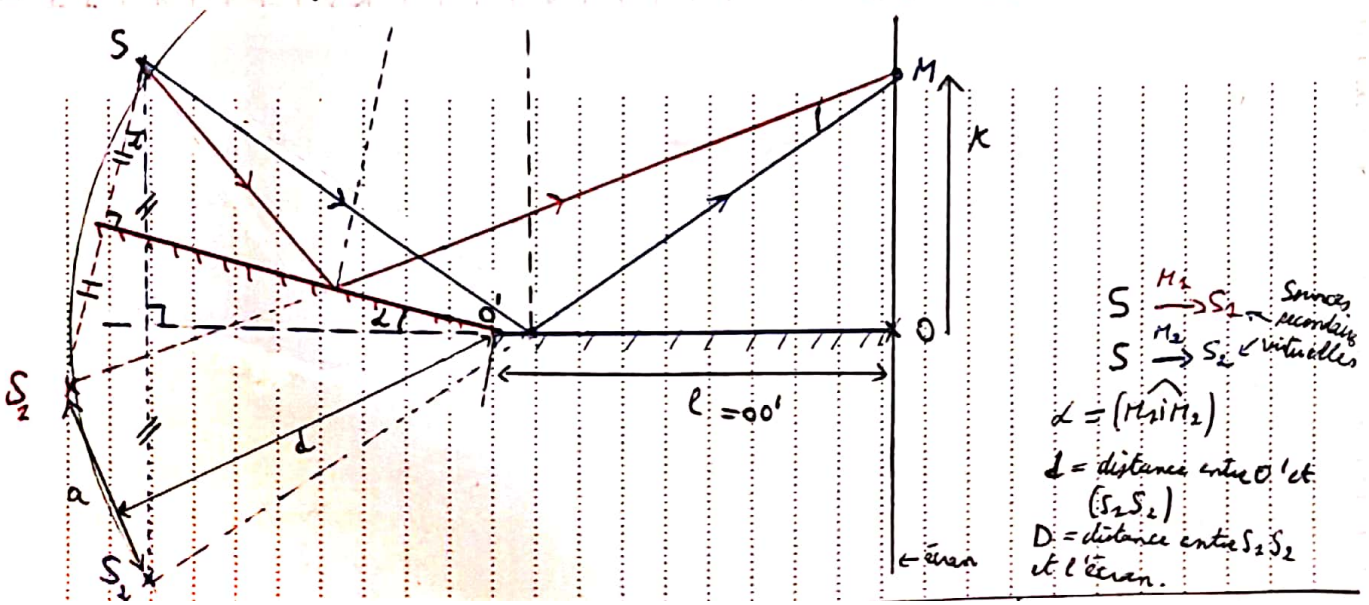
2) les miroirs de Fresnel: CCP 2010

a) champ d'interférence:



b) Système interférentiel par division du front d'onde:

⊕ Sources secondaires (pour calculer la différence de marche optique δ plus facilement).



Expérimentalement:

α est très faible

S est très proche de M_2

c) Nature des franges: (car α très faible de l'ordre de $1' = \left(\frac{1}{60}\right)^\circ = 3.10^{-4}$ rad.)

(S_1S_2) est quasi // Ecran $\Rightarrow$ observation longitudinale $\Rightarrow$ franges rectilignes.

d) Calcul de la différence de marche:

⚠ Si l'observation est longitudinale alors:

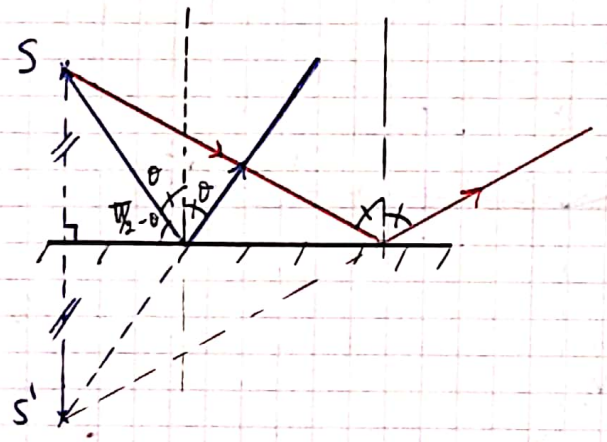
$$\delta = \frac{a \cdot \Delta C}{D}$$

Avec:

- a est la distance entre S_1 et S_2
- D est la distance entre (S_1S_2) et l'écran

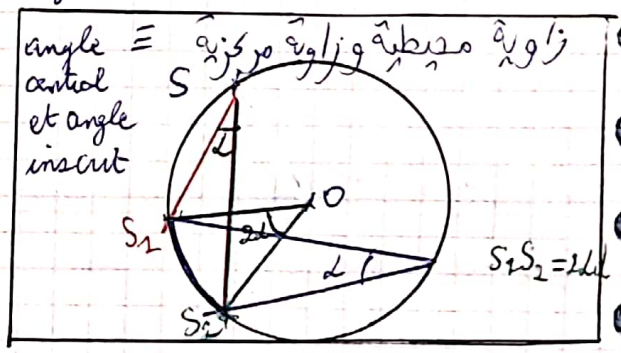
Mq $\delta = \frac{(2\alpha d).x}{d+\ell}$

Rappel:



$S \xrightarrow{\text{M.plan}} S' \Rightarrow HS' = HS$

Si S est une source ponctuelle alors S' est ponctuelle $\Rightarrow$ stigmatisme rigoureux.



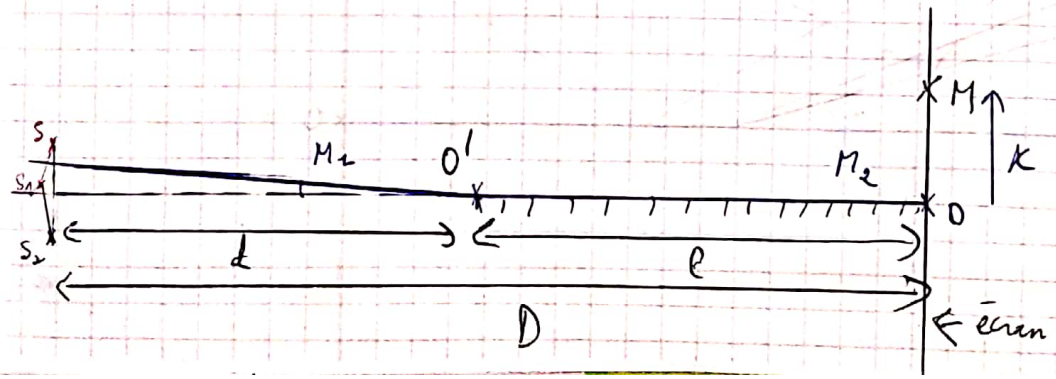
Hypothèses de travail:

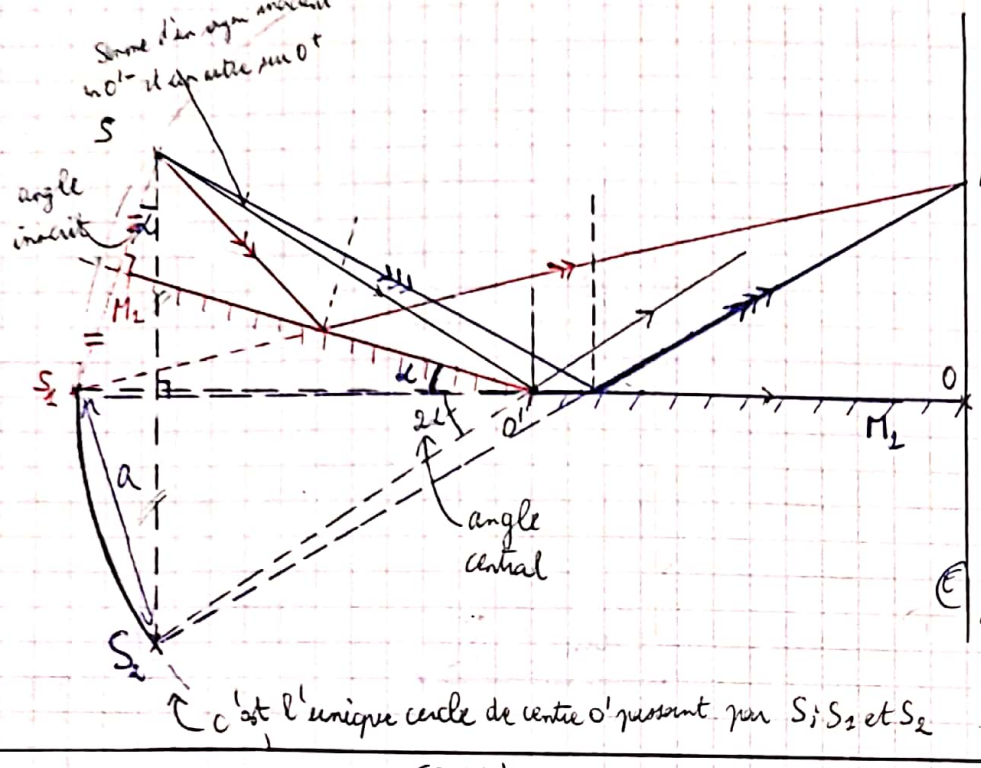
- α très faible $\alpha 1' = \left(\frac{1}{60}\right)^\circ = 3.10^{-4}$ rad.
- S très proche du support de M_2.

donc schéma réel: $\ell = OO'$, $d = O'S$ $\Rightarrow D = d + \ell$

Mq $a = 2\alpha d$

$d = O'S = O'S_1 = O'S_2$





arc associé à toute

$\sin(2\alpha) \simeq 2\alpha = \frac{a}{d}$

$\Rightarrow a = 2\alpha d$.

C'est l'unique cercle de centre O' passant par S, S_1 et S_2

Vrai schéma réel

← écran // S_1S_2 : observation longitudinale ⇒ franges rectilignes ⇒ $a = S_1S_2$

$\Rightarrow \delta = \frac{ax}{D}$ ↳ D entre S_1S_2 et E

d'où $\delta = \frac{ax}{D} = \frac{(2\alpha d) \times x}{d+\ell} \Rightarrow i = \frac{\lambda D}{a} = \frac{\lambda(d+\ell)}{2\alpha d}$

ODG : Si $d = \ell \Rightarrow i = \frac{\lambda}{\alpha}$

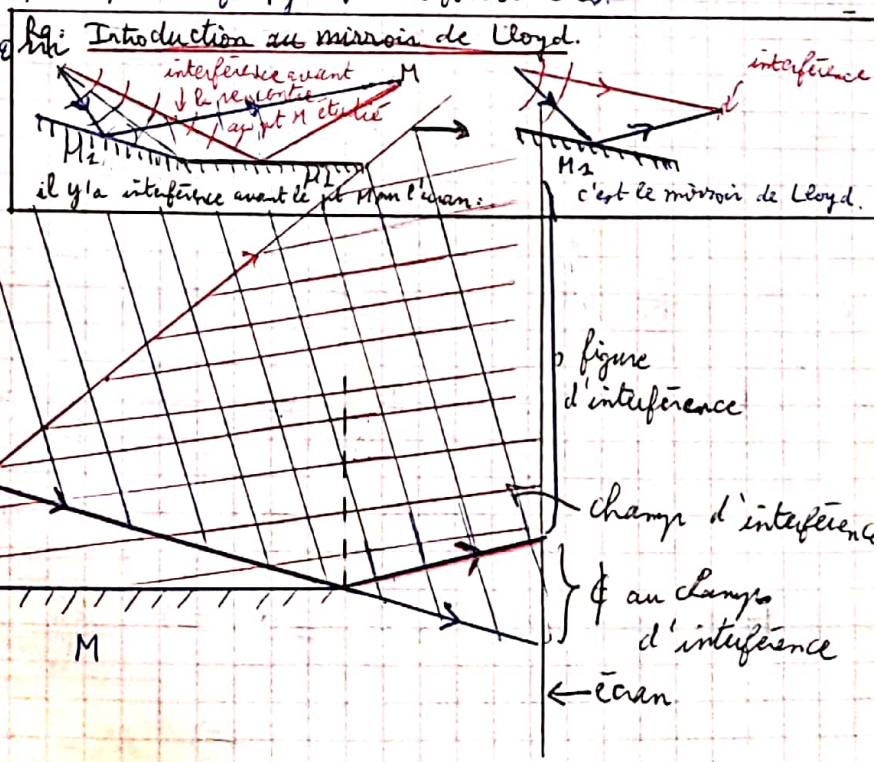
$\lambda = 0{,}6\ \mu m$

$\alpha = 3 \cdot 10^{-4}\ rad \Rightarrow i = 2\ mm$

Donc on prend aussi α très faible pour que les franges soient observables.

3) Miroir de Lloyd : CCP 2020

a) Champ d'interférence.

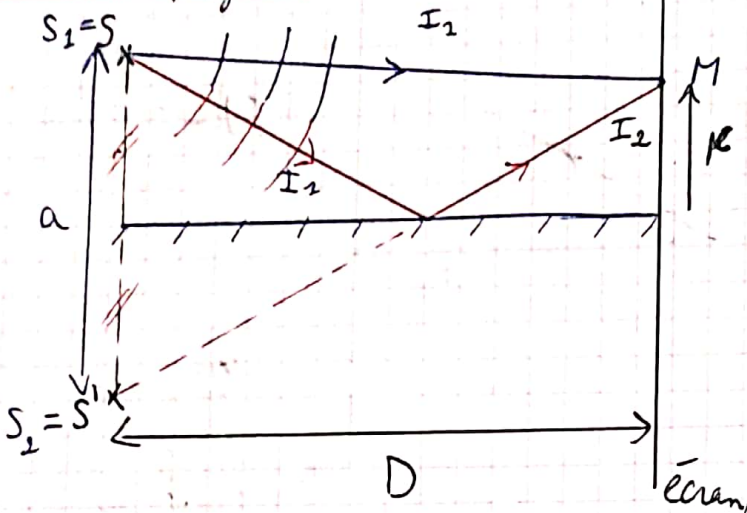


Une source secondaire joue aussi le rôle de source primaire (S)

Les sources S et $S' = S_2$ sont secondaires.

b) Système par division du front d'onde :

+ Nature des franges :



$S \xrightarrow{M} S'$

écran // S_2S_2

observation longitudinale $\Rightarrow \delta = \frac{ax}{D}$

⇓

Franges rectilignes

c) Calcul de la différence de marche :

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\delta\right)$$

or $R = 1 \Rightarrow I_2 = I_1 = I_0$

$\Rightarrow$ or $R = 1 \Rightarrow I_2 = I_1 = I_0$

$$\Rightarrow I = 2I_0\left[1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\delta\right)\right] \begin{cases} \nearrow I_{max} = 4I_0 \\ \searrow I_{min} = 0 \end{cases} \Rightarrow C = 1$$

Rq : Si $I_1 = I_2 \Rightarrow C = 1$.

Si $I_1 \neq I_2 \Rightarrow C < 1$.

or $\delta = \frac{ax}{D} \Rightarrow I = 2I_0\left[1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{ax}{D}\right)\right]$

+ Les F.B sont tq : $I = I_{max} \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{ax_n}{D} = 2n\pi$

$$\Rightarrow \boxed{x_n = n \cdot \frac{\lambda_0 D}{a}} \Rightarrow F.B$$

+ Les F.N sont tq : $I = I_{min} = 0 \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{ax_n}{D} = (2n+1)\pi$

$$\Rightarrow \boxed{x_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda_0 D}{a}} \Rightarrow F.N$$

Expérimentalement ; on trouve $x_n = n\frac{\lambda_0 D}{a}$ correspond à la position d'une F.N

$x_n = \left(n + 1/2\right)\frac{\lambda_0 D}{a}$ correspond à une frange brillante

En effet; on doit tenir en compte de la différence de marche physique

$\delta_{ph} = \frac{\lambda_0}{2}$. $\Rightarrow$ $\delta = \delta_{géo} + \delta_{ph} = \frac{ax}{D} + \frac{\lambda_0}{2} \Rightarrow$ . . . . . .

Rq: Dans les miroirs de Fresnel: $\delta_{phy} = \frac{\lambda_0}{2} - \frac{\lambda_0}{2} = 0$.

... d'où $I = 2I_0\left[1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\left(\frac{ax}{D} + \frac{\lambda_0}{2}\right)\right)\right]$ $\Rightarrow$ les F, B sont tq $I = I_{max}$

$I = 2I_0\left[1 - \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{ax}{D}\right)\right]$ $\Rightarrow$ les F. N sont tq $I = I_{min}$

$\Rightarrow x_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda_0 D}{a}$

$\Rightarrow x_n = n\frac{\lambda_0 D}{a}$.

Généralisation: On doit tenir en compte de δ_{phys} dans les 3 cas suivants:

Cas (1): Réflexion métallique:

$\underline{r} = \frac{\underline{E_r}(P;t)}{\underline{E_i}(P;t)} = \frac{E_{0r}\, e^{j(\omega t + \varphi_r)}}{E_{0i}\, e^{j\omega t}}$ $(z = 0)$

$\underline{r} = \frac{E_{0r} e^{j\varphi_r}}{E_{0i}}$ d'après les relations de passage:

$E_{0r} = E_{0i}$

$\varphi_r = \pi$ $\Rightarrow$ $\underline{r} = -1$

$\hookrightarrow \Delta\varphi = \varphi_r - \varphi_i = \pi$.

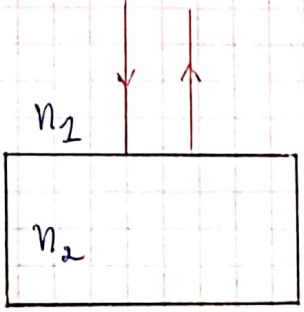
Rq: $\underline{r} = \frac{\underline{E_r}}{\underline{E_i}} = \left|\frac{E_{0r}}{E_{0i}}\right| e^{j(\varphi_r - \varphi_i)}$

$\Rightarrow \underline{r} = |\underline{r}|\, e^{j\Delta\varphi}$ donc si:

$\underline{r} > 0 \Rightarrow \Delta\varphi = 0 \Rightarrow \delta_{phy} = 0$

$\underline{r} < 0 \Rightarrow \Delta\varphi = \pi \Rightarrow \delta_{phy} = \frac{\lambda_0}{2}$

Cas (2): Réflexion vitreuse $n_2 > n_1$:



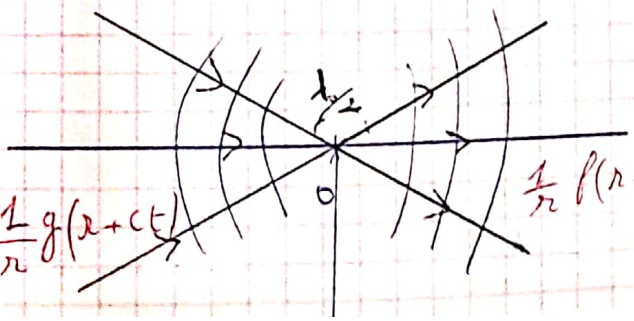
on trouve:

$\underline{r} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} = |\underline{r}|\, e^{j\Delta\varphi}$ $(\Delta\varphi = \varphi_r - \varphi_i)$

Si $n_1 > n_2 \Rightarrow \underline{r} > 0 \Rightarrow \Delta\varphi = 0 \Rightarrow \delta_{phy} = 0$

Si $n_1 < n_2 \Rightarrow \underline{r} < 0 \Rightarrow \Delta\varphi = \pi \Rightarrow \delta_{phy} = \frac{\lambda_0}{2}$

Cas (3): Passage par un point de convergence:



Devoir : CCP 2002

DÉPHASAGE D'UNE ONDE AU PASSAGE PAR UN FOYER

Donnée numérique d'une constante universelle :

$c = 2,99792458 \times 10^8\ \mathrm{m.s^{-1}}$ est la vitesse de la lumière dans le vide (valeur exacte).

On se propose d'étudier le changement de phase, égal à π, qui accompagne le passage d'une onde par un foyer, résultat qui fut découvert par le physicien français L. Gouy en 1890. Dans une première partie, on établit ce résultat à partir du principe d'Huygens-Fresnel. On analyse ensuite le dispositif interférentiel de Meslin qui permet de mettre en évidence expérimentalement ce changement de phase. Enfin, on donne l'exemple d'utilisation de ce résultat dans le cas du coronographe interférentiel achromatique, instrument destiné à détecter des planètes autour d'étoiles lointaines (exoplanètes).

Dans tout le problème, les ondes considérées sont des ondes lumineuses monochromatiques qui se propagent dans l'air, assimilé au vide, ou dans le verre des lentilles utilisées. On exprime, en notation complexe, la variable lumineuse par la grandeur scalaire suivante :

$$\underline{\Psi}(\mathbf{r},t) = \underline{\psi}(\mathbf{r})\exp(-i\omega t)$$

où $\underline{\psi}(\mathbf{r})$ est l'amplitude complexe de l'onde au point défini par le vecteur $\mathbf{r}$ à partir d'une origine arbitraire O, ω la pulsation et $i^2 = -1$.

Partie I – Passage d'une onde sphérique par son centre

On rappelle la relation intégrale suivante issue du principe d'Huygens-Fresnel, entre l'amplitude complexe $\underline{\psi}_0(M)$ en un point M et l'amplitude complexe $\underline{\psi}(P)$ en un autre point P :

$$\underline{\psi}(P) = \frac{\chi}{i}\int_{\mathcal{D}} \underline{\psi}_0(M)\frac{\exp(ikr)}{r}\mathrm{d}S$$

dans laquelle χ est un coefficient, $k = 2\pi/\lambda$, λ étant la longueur d'onde dans le vide, $r = MP$, $\mathrm{d}S$ un élément de surface entourant le point M et $\mathcal{D}$ le domaine d'intégration ; dans cette expression, on suppose que le vecteur $\mathbf{r} = \mathbf{MP}$ est peu incliné par rapport à la normale en tout point de $\mathcal{D}$ (Figure 1).

1. Justifier sommairement (environ 5 lignes) l'expression précédente reliant $\underline{\psi}(P)$ et $\underline{\psi}_0(M)$.
   A l'aide de considérations d'homogénéité, trouver la dimension physique de χ. Quelle est la signification physique du facteur $1/i$?

2. On considère une onde sphérique dont le centre de courbure C est situé sur l'axe Oz, à la distance R de l'origine O (Figure 1). Le point générique M est situé sur la sphère de rayon R ; ses coordonnées sont x, y, z dans le repère $Oxyz$. Le point P, où l'on étudie l'amplitude complexe de l'onde, est placé sur l'axe Oz.

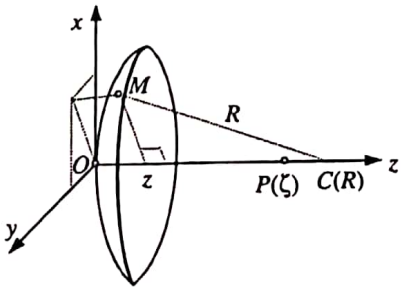


Figure 1

a) On désigne par ζ la coordonnée de P sur l'axe Oz et on suppose que $\zeta < R$. Le point M est voisin de l'axe Oz, avec x et y, d'une part, petits devant R et ζ et, d'autre part, pouvant être grands devant z. Montrer que $r = MP$ s'écrit, de façon approchée :

$$r = \zeta + \alpha\left(x^2 + y^2\right)\left(\frac{1}{\zeta} - \frac{1}{R}\right)$$

α étant un facteur numérique que l'on déterminera.

CamScanner

b) En déduire que $\underline{\psi}(P)$ s'obtient en effectuant l'intégrale suivante :

$$\frac{\chi}{i\zeta}\exp\left(i2\pi\frac{\zeta}{\lambda}\right)\iint\exp\left(i\pi\frac{x^2+y^2}{\beta^2}\right)dx\,dy$$

où β^2 est une quantité dont on donnera la dimension physique et que l'on exprimera en fonction de λ, ζ et R.

c) Sachant que les bornes d'intégration peuvent être prises égales à $-\infty$ et ∞, calculer l'intégrale précédente en utilisant le résultat suivant :

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(i\pi\frac{t^2}{2}\right)dt = 1+i$$

En déduire, à une constante multiplicative près sans intérêt, l'expression suivante de l'amplitude complexe $\underline{\psi}(P)$:

$$\left(\frac{\beta}{b}\right)^2\exp\left(i2\pi\frac{\zeta}{\lambda}\right)$$

dans laquelle b est une longueur que l'on exprimera en fonction de χ et ζ.

3. Que devient l'expression précédente pour $\zeta > R$? Conclure sur le changement de phase à la traversée du centre C.

Déphasage d'une onde au passage par un foyer

Partie I : Passage d'une onde sphérique par son centre

1°) Le principe d'Huygens-Fresnel comporte :
- la contribution d'Huygens (1678) : la lumière se propage de proche en proche, chaque point atteint par elle se comporte comme une source secondaire qui réémet des ondelettes sphériques dont l'amplitude est proportionnelle à l'élément de surface.
- la contribution de Fresnel (1818) : l'amplitude complexe de la vibration lumineuse en un point est la somme des amplitudes complexes des vibrations produites par toutes les sources secondaires ; on dit que toutes ces vibrations interfèrent pour donner la vibration au point considéré.

La vibration lumineuse en P (ψ(P)) est donc la somme des ondelettes émises par chaque point M. Ces ondelettes sont des ondes sphériques $\left(A\frac{\exp(ikMP)}{MP}\right)$ d'amplitude proportionnelle à la vibration incidente en M et à la surface de la source secondaire, donc $A=\psi_0(M)dS$.

$[\psi] = [\chi]\,[\psi]\,[L^2]\,/\,[L] \Rightarrow$ $\boxed{[\chi] = [L^{-1}]}$ χ est homogène à l'inverse d'une longueur.

Le terme $^1/_i$ signifie que l'onde secondaire émise en M est déphasée de $-^{\pi}/_2$ par rapport à l'onde incidente arrivant en M.

2°) a) M(x,y,z) et P(0,0,ζ) donc $MP = \sqrt{x^2+y^2+(\zeta-z)^2} = \sqrt{x^2+y^2+\zeta^2+z^2-2z\zeta}$

Mettons ζ^2 en facteur $MP = \zeta\sqrt{1-\frac{2z}{\zeta}+\frac{x^2+y^2+z^2}{\zeta^2}}$

De plus on a CM=R $\Rightarrow$ $R^2 = x^2+y^2+(R-z)^2 = x^2+y^2+R^2+z^2-2zR$ d'où $z=\frac{x^2+y^2+z^2}{2R}$

On en déduit $MP = \zeta\sqrt{1-\frac{x^2+y^2+z^2}{\zeta R}+\frac{x^2+y^2+z^2}{\zeta^2}}$ or z<<x,y donc $MP \approx \zeta\sqrt{1-\frac{x^2+y^2}{\zeta R}+\frac{x^2+y^2}{\zeta^2}}$

Le développement limité donne (puisque x,y<<R, ζ) $MP \approx \zeta\left(1-\frac{x^2+y^2}{2\zeta R}+\frac{x^2+y^2}{2\zeta^2}\right)$

D'où $MP \approx \zeta-\frac{x^2+y^2}{2R}+\frac{x^2+y^2}{2\zeta}$ $\Rightarrow$ $\boxed{MP \approx \zeta+\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)\left(\frac{1}{\zeta}-\frac{1}{R}\right)}$ donc $\alpha=^1/_2$

CamScanner

b) $\psi(P)=\frac{\chi}{i}\int_D \psi_0(M)\frac{\exp(ikMP)}{MP}dS$ or dans cette intégrale MP apparaît à deux endroits : dans la fonction $\frac{1}{MP}$ on peut se limiter à un développement limité du premier ordre car c'est une fonction qui varie lentement ; en revanche dans l'exponentielle complexe il faut conserver la variation en fonction de x et y, car c'est une fonction dont les valeurs changent radicalement quand MP varie seulement de l'ordre de $\lambda=2\pi/k$.

On obtient donc : $\psi(P)=\frac{\chi}{i\zeta}\exp(ik\zeta)\int_D \psi_0(M)\exp\left(\frac{ik}{2}\left(x^2+y^2\right)\left(\frac{1}{\zeta}-\frac{1}{R}\right)\right)dxdy$

Enfin, puisque le domaine d'intégration D est la sphère qui constitue une surface équiphase on a $\psi_0(M)=C^{te}=\psi_0\ \forall M$. Et avec $k=2\pi/\lambda$ on a donc :

$$\boxed{\psi(P)=\psi_0\frac{\chi}{i\zeta}\exp(ik\zeta)\int_D \exp\left(i\pi\frac{\left(x^2+y^2\right)\left(\frac{1}{\zeta}-\frac{1}{R}\right)}{\lambda}\right)dxdy} \quad \text{et donc} \quad \boxed{\beta^2=\frac{\lambda}{\left(\frac{1}{\zeta}-\frac{1}{R}\right)}}$$

c) On utilise la formule fournie par l'énoncé pour calculer l'intégrale :

$$\int_D \exp\left(i\pi\frac{\left(x^2+y^2\right)}{\beta^2}\right)dxdy=\left(\frac{\beta}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(i\pi\frac{\left(\frac{\sqrt{2}x}{\beta}\right)^2}{2}\right)d\left(\frac{\sqrt{2}x}{\beta}\right)\right)\left(\frac{\beta}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(i\pi\frac{\left(\frac{\sqrt{2}y}{\beta}\right)^2}{2}\right)d\left(\frac{\sqrt{2}y}{\beta}\right)\right)=\frac{\beta^2}{2}(1+i)^2$$

et donc $\psi(P)=\psi_0\frac{\chi}{i\zeta}\frac{\beta^2}{2}(1+i)^2\exp(ik\zeta)=\psi_0\frac{(1+i)^2}{i2}\frac{\chi\beta^2}{\zeta}\exp(ik\zeta)$. On a bien $\psi(P)$ proportionnel à :

$$\boxed{\psi(P)\ \propto\ \frac{\chi\beta^2}{\zeta}\exp(ik\zeta)\ \text{ et donc }\ b=\sqrt{\frac{\zeta}{\chi}}}$$

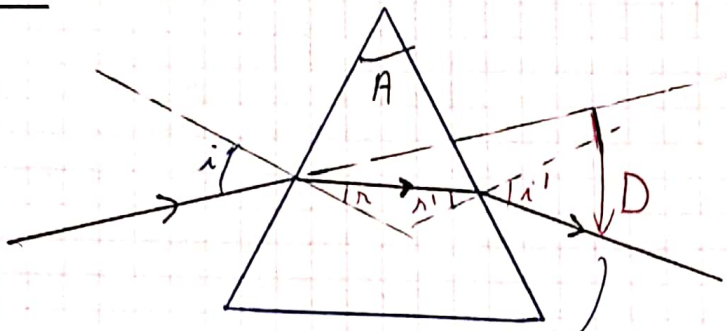
3°) Si $\zeta>R$ alors $\beta^2<0$. Donc pour $\zeta=R^-$ la phase de l'onde en $P(R^-)$ est $\varphi(R^-)=2\pi\frac{R}{\lambda}$, mais dès que $\zeta>R$ le terme en $\beta^2<0$ introduit un déphasage de π supplémentaire : $\varphi(R^+)=2\pi\frac{R}{\lambda}+\pi$

Il y a donc un déphasage de π au passage d'un point de convergence.

CamScanner

4) Biprisme de FRESNEL:

a) Rappel:



il y'a tjrs déviation vers la base

Les 4 Formules du prisme:

$$\begin{cases} \sin i = n \sin(r) \\ \sin i' = n \sin(r') \\ A = r + r' \\ D = i + i' - A. \end{cases}$$

Si i et A sont faibles $\Longrightarrow$ ⚠

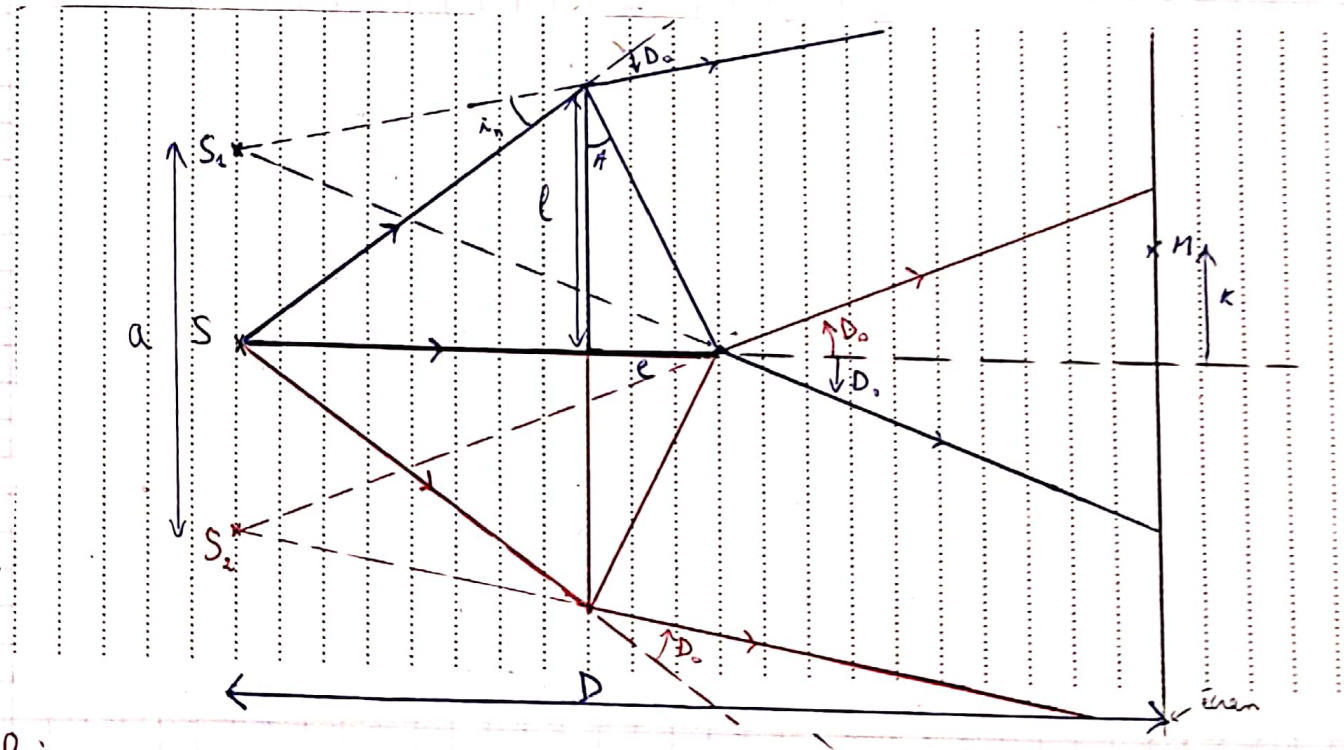
$\Rightarrow$ $D_0 \simeq (n-1)A$ ne dépend pas de i

b) Champ d'interférence: $e = 2\,mm$; $\ell = 2\,cm$; $d = 20\,cm$

Sources secondaires :

$\tan(A) = \frac{e}{\ell} = 0{,}1 \Rightarrow A$ est faible

$\tan i_n = \frac{\ell}{d} = 0{,}1 \Rightarrow i_n$ est faible



Rq:

On n'ajoute jamais de δ_{phys}: il n'existe pas de $t < 0$. !!

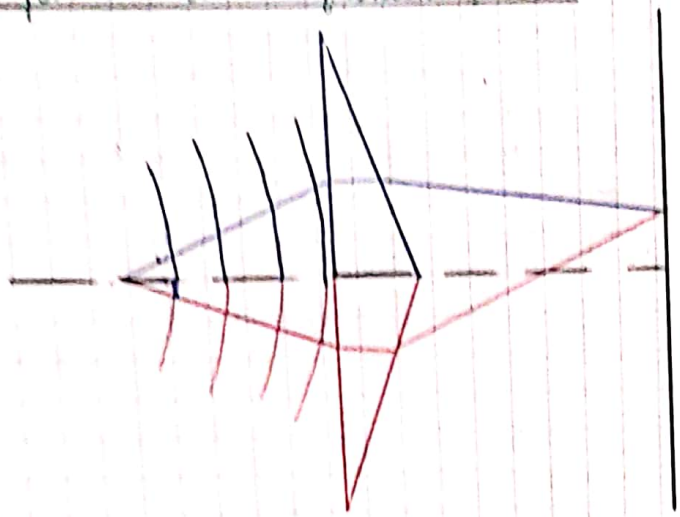
dans la transmission

$S \xrightarrow{P_1} S_1$

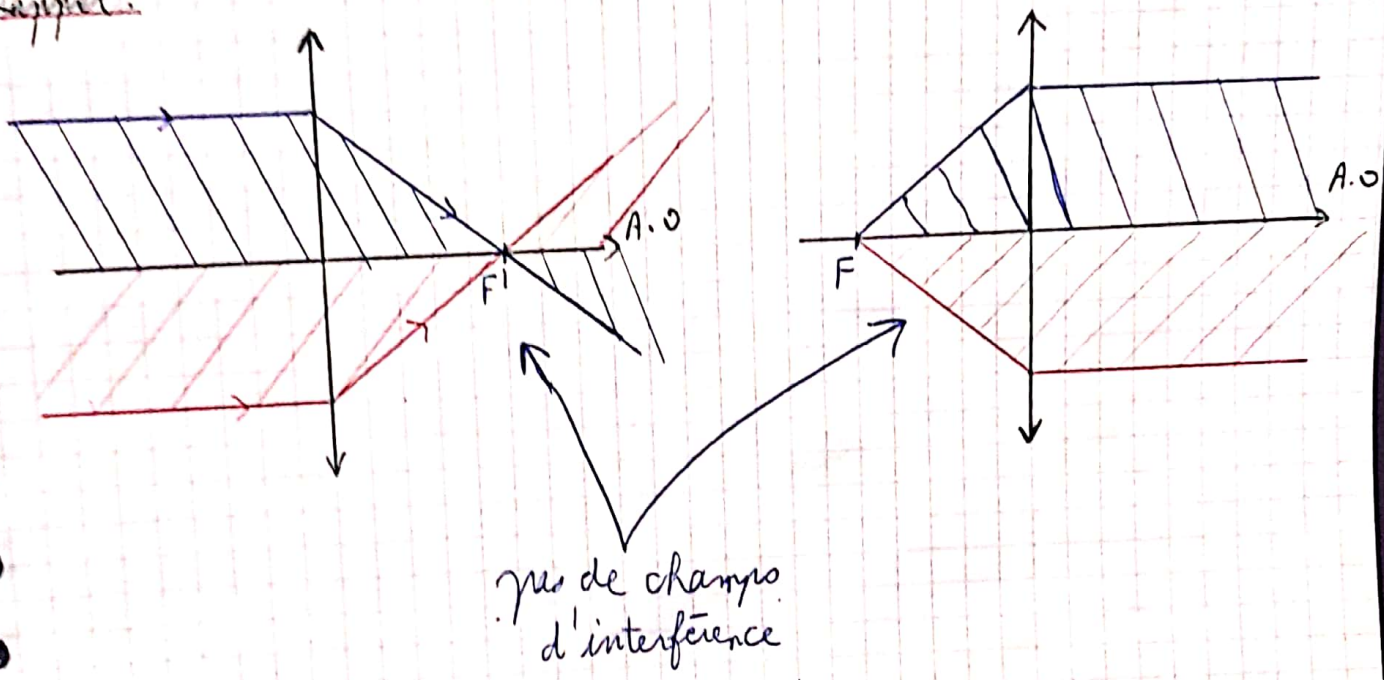
$S \xrightarrow{P_2} S_2$

S_1 et S_2 sont des sources secondaires quasi-ponctuelles dans les conditions de Gauss.

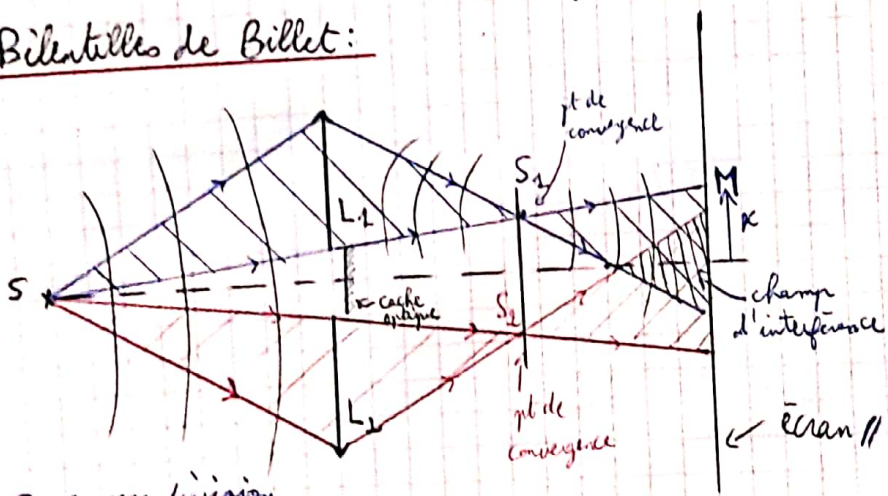
c) S.I par division du front d'onde :



Rappel :



5) Bilentilles de Billet :



S.I par division du front d'onde

$S \xrightarrow{L_1} S_1$

$S \xrightarrow{L_2} S_2$

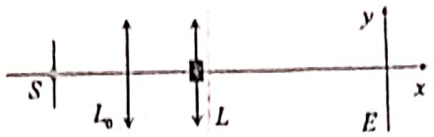
← écran // $(S_1 S_2)$ ⇒ Franges rectilignes

$$\delta = \delta_{géo} + \delta_{phys} = \frac{ax}{D} + \left(\cancel{\frac{\lambda_0}{2}} - \cancel{\frac{\lambda_0}{2}}\right)$$

$$\delta = \frac{ax}{D}$$

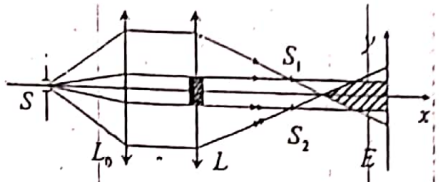
Exercice VII : Demi-lentilles de Billet

Une fente source S fine, monochromatique ($\lambda = 589,3$ nm) est placée dans le plan focal d'une lentille convergente L_0. Un peu plus loin sont placées les deux moitiés d'une lentille convergente L de distance focale $f' = 25$ cm. Cette lentille a été sciée en deux suivant un diamètre ; les deux moitiés sont écartées symétriquement d'une distance $2\varepsilon = 2$ mm. L'intervalle ainsi créé entre les demi-lentilles est obturé par un cache opaque (parallèle à la fente S). On observe dans un plan de front yEz situé à $d = 50$ cm de L.



1. Réaliser une figure claire et l'expliquer. Décrire le système de frange et déterminer la largeur du champ d'interférence sur l'axe Ey. Quelle est l'intensité lumineuse en un point M du champ ? Combien y-a-t-il de franges brillantes visibles ?
2. La source émet en réalité un doublet $\lambda_1 = 589,0$ nm et $\lambda_2 = 589,6$ nm. Au bout de combien de franges les deux systèmes peuvent-elles se brouiller ? Conclusion ?
3. On place entre les deux lentilles, sur la partie droite de l'axe Sx dans le sens de la lumière et perpendiculairement à cet axe, une lame à faces parallèles d'un verre d'indice $n = 1,52$. Déterminer son épaisseur e permettant de visualiser au centre de l'écran la première anticoïncidence de la question 2. Qu'observe-t-on alors sur l'écran ?

Il faut avant tout faire une figure soignée avec deux faisceaux de part et d'autre de l'axe Sx (un rayon passant par le centre, même décalé, d'une lentille, n'est pas dévié !).



a) L'onde plane issue de la lentille L_0 converge après les deux demi-lentilles formées à partir de L aux deux « demi-foyers » notés S_1 et S_2, car ces deux points servent de sources cohérentes au système d'interférence. Ce sont les sources secondaires au sommet chacune d'un faisceau lumineux ; le recouvrement de ces faisceaux délimite la zone d'interférence hachurée sur la figure. L'ensemble est équivalent à deux trous d'Young S_1 et S_2, et les franges sont des segments de droite dans la direction Ez.

La largeur du champ d'interférence sur l'axe Ey donc simplement $2\varepsilon = 2$ mm.

L'analogie avec les trous d'Young évite tout calcul ; la différence de marche en un point M du champ s'obtient par analogie :

$\delta = \dfrac{ax}{D}$, soit avec les notations d'ici : $\delta(M) = S_2M - S_1M = \dfrac{2\varepsilon y}{d-f}$

d'où l'intensité : $I(y) = 2I_0\left(1+\cos\dfrac{2\pi}{\lambda}\dfrac{2\varepsilon y}{d-f}\right)$

L'interfrange est $i = \dfrac{\lambda D}{a} = \dfrac{\lambda(d-f)}{2\varepsilon} \approx 0,074$ mm (les franges ne sont pas visibles à l'œil)

Le nombre de franges est : $N = \dfrac{2\varepsilon}{i} = \dfrac{(2\varepsilon)^2}{\lambda(d-f)} = 27$ (formule homogène)

Rq 1 : en augmentant la taille 2ε du cache, on augmente d'autant la largeur du champ d'interférence en diminuant d'autant l'interfrange (car S_1 et S_2 restent) ; il n'est donc pas étonnant que N soit en $(2\varepsilon)^2$.

Rq 2 : pour évaluer plus correctement N, il conviendrait de rajouter à la frange centrale brillante, le nombre (entier) de franges brillantes de part et d'autre de l'axe soit : $N = 1 + 2\times E\left(\dfrac{\varepsilon}{i}\right) = 1 + 2\times 13 = 27$.

b) Soit y_0 l'ordonnée du point où se produirait la première anticoïncidence et à laquelle correspond δ_0. On a $\delta_0 = p_0\lambda_1 = (p_0 - 1/2)\lambda_2$ où p_0 est l'ordre entier soit :

$$p_0 = \frac{\lambda_2}{2\Delta\lambda} = 491 \text{ franges}$$

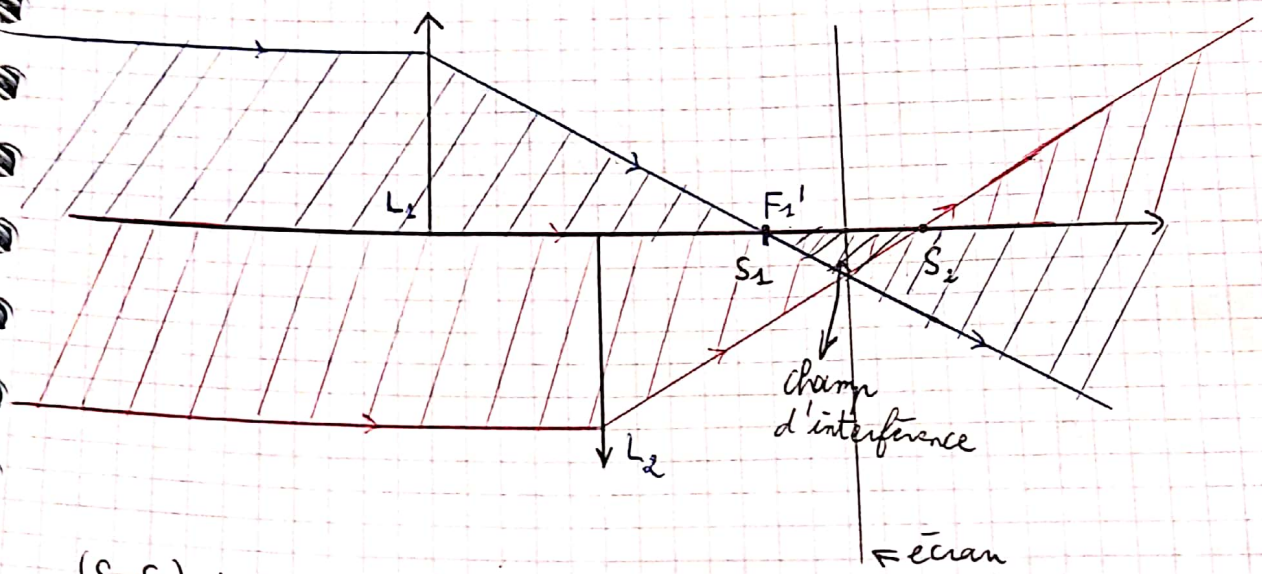
Or il y a seulement 13 franges dans le champ de chaque côté ; ce phénomène n'est donc pas visible (pas de problème d'incohérence temporelle) et le doublet se comporte comme une radiation monochromatique ($\lambda = (\lambda_1 + \lambda_2)/2$).

Placer une lame à faces parallèles sur le trajet 2 revient sur l'écran à translater le système de franges (voir la question 38.) ; il faut que $\delta = (n-1)e = p_0\lambda_1$, soit :

$$e = \frac{p_0\lambda_1}{n-1} \approx 0,56 \text{ mm}$$

L'éclairement de l'écran est alors uniforme puisque le contraste à cet endroit est nul.

6) Bilentilles de Meslin :



$(S_1S_2) \perp$ écran $\Rightarrow$ observation transversale $\Rightarrow$ franges circulaires.

– Franges de Meslin

1. Rappeler sommairement (environ 10 lignes) en quoi consiste l'interférence de deux ondes sphériques, de même amplitude, isochrones et cohérentes, issues de deux sources S_1 et S_2, en tout point P de l'espace. On tiendra compte d'un déphasage éventuel φ_0 de l'onde issue de S_2 par rapport à celle provenant de S_1. On désigne par r_1 et r_2 respectivement les distances S_1P et S_2P. Donner l'expression de l'éclairement en P, dans le cas où $r_1 \approx r_2$. Quelle est l'allure des franges d'interférence dans un plan perpendiculaire à la droite définie par S_1S_2 ?

2. Deux demi-lentilles L_1 et L_2 ont été obtenues à l'aide d'une lentille mince convergente L, de diamètre $D = 5\,\text{cm}$ et de distance focale image $f = 25\,\text{cm}$, que l'on a coupée en deux, selon une direction perpendiculaire à son axe optique Oz. Les deux demi-lentilles sont alors écartées le long de l'axe optique Oz, d'une distance $d = O_1O_2 = 2$ mm (Figure 2).

On éclaire l'ensemble par un faisceau de lumière parallèle, dirigé suivant l'axe optique, issu d'une lampe à vapeur de mercure, de longueur d'onde dans le vide $\lambda = 543{,}5$ nm.

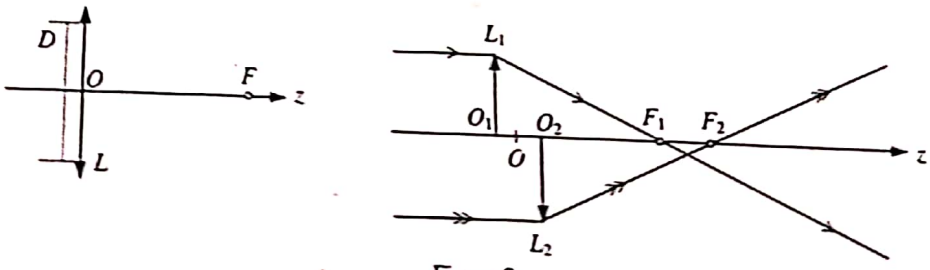


Figure 2

a) Calculer, en unité SI, les valeurs de k, de ω et de la fréquence ν. Quelle est la couleur de la radiation utilisée ?

b) Faire une figure soignée représentant la partie commune des faisceaux sphériques issus de F_1 et de F_2 ; on prendra sur l'axe optique un facteur d'échelle égal à 25. Exprimer, en fonction de d et λ, la différence de phase φ_0 entre les ondes arrivant respectivement en F_2 et en F_1 ?

c) Donner l'expression de la phase φ_1 de l'onde sphérique, issue du foyer F_1 de la demi-lentille L_1, en un point P, situé dans la partie commune des faisceaux coniques issus de F_1 et F_2. On introduira $r_1 = F_1P$ et on prendra comme origine des phases celle de l'onde sphérique provenant de L_1 et convergeant en F_1.

CamScanner

d) Même question pour la phase φ_2, au point P précédent, de l'onde sphérique qui converge au foyer F_2 de la demi-lentille L_2. Comment traduit-on le fait que le point P est atteint par l'onde sphérique, provenant de L_2, avant le foyer F_2 ? On introduira $r_2 = F_2P$ et on prendra la même origine des phases que précédemment.

3. a) Montrer que l'intensité, au point P, de l'onde résultant de la superposition des deux ondes sphériques, issues de F_1 et F_2, fait apparaître la différence de phase suivante :

$$\alpha(r_1 + r_2) + \beta$$

α et β étant deux quantités que l'on calculera en précisant leurs unités respectives. Quelle est la géométrie des franges d'interférence dans un plan perpendiculaire à F_1F_2 ?

b) Calculer la largeur maximale du champ d'interférence dans un plan de front orthogonal à l'axe optique du système.

c) On analyse le phénomène d'interférence dans le plan médian du segment F_1F_2. Déterminer les caractéristiques géométriques des franges noires ainsi que leur nombre dans le plan où le champ d'interférence est maximal.

d) Pour agrandir la figure d'interférence, on utilise un objectif de microscope, de distance focale image $f' = 2\text{cm}$, qui en forme une image sur un écran situé à une distance de son foyer image égale à 1,2 m. Quel est le grandissement transversal ?

Partie II : Franges de Meslin

1°) Les sources S_1 et S_2 sont des sources secondaires issues d'une même source primaire pour assurer leur cohérence et pouvoir ainsi sommer les vibrations :

$$\psi(P) = \psi_1(P) + \psi_2(P) = \psi_0\left(\frac{\exp(ikr_1)}{r_1} + \frac{\exp(ikr_2)}{r_2}\exp(i\varphi_0)\right)\exp(-i\omega t)$$

L'intensité lumineuse en M est la valeur moyennée dans le temps du carré de la vibration résultante de la superposition des deux ondes : $I(P) = \langle\psi^2(P)\rangle = {}^1/_2\,|\psi(P)|^2$ d'où :

$$I(P) = \frac{\psi_0^2}{2}\left|\frac{\exp(ikr_1)}{r_1} + \frac{\exp(ikr_2)}{r_2}\exp(i\varphi_0)\right|^2 = \frac{\psi_0^2}{2}\left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_2 r_1}\left(\exp(ik(r_1 - r_2) - i\varphi_0) + \exp(-ik(r_1 - r_2) + i\varphi_0)\right)\right)$$

Ce qui donne $I(P) = \frac{\psi_0^2}{2}\left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{2}{r_2 r_1}\cos(k(r_1 - r_2) - \varphi_0)\right)$ et puisque $r_1 \approx r_2 \approx r$, $k = {}^{2\pi}/_{\lambda}$, et que $I_0 = \frac{1}{2}\frac{\psi_0^2}{r^2}$ est l'intensité lumineuse issue d'une source arrivant en P :

$$\boxed{I(P) = 2I_0\left(1 + \cos\left(\varphi_0 + 2\pi\frac{(r_2 - r_1)}{\lambda}\right)\right)}$$

Les franges sont définies par $r_2 - r_1 = C^{te}$ ce sont donc des hyperboloïdes de révolution d'axe S_1S_2. Dans un plan perpendiculaire à S_1S_2, <u>les franges sont donc des cercles</u>.

2°) a) $k = {}^{2\pi}/_{\lambda}$ <u>A.N. :</u> $k = 1{,}16\ 10^7\ \text{m}^{-1}$

$\omega = kc$ <u>A.N. :</u> $\omega = 3{,}47\ 10^{15}\ \text{rad.s}^{-1}$

CamScanner

$\nu=\omega/2\pi$ A.N. : $\nu=5{,}52\ 10^{14}$ Hz

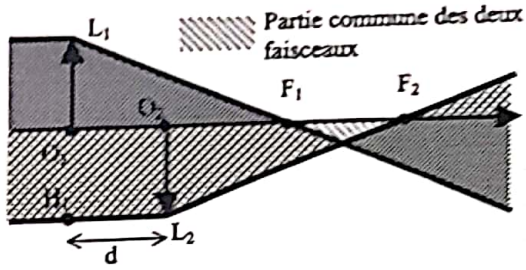
$\lambda=543{,}5$nm correspond à la radiation verte.

b) $\varphi_0=^{2\pi}/_{\lambda}((SF_2)-(SF_1))$

Le théorème de Malus permet d'affirmer que le plan perpendiculaire à l'axe optique contenant L_1 est un plan équiphase.

D'autre part le stigmatisme de la lentille impose que le chemin optique correspondant à la traversée de L_1 et au trajet jusqu'à F_1 est égale à celui de la traversée de L_2 et au trajet jusqu'à F_2.

On en déduit donc que $(SF_2)-(SF_1)=d$ et donc :



$$\boxed{\varphi_0 = \frac{2\pi d}{\lambda}}$$

c) $\varphi_1=^{2\pi}/_{\lambda}(F_1P)+\pi$ le déphasage de π est dû au passage par le point de convergence. On a donc :

$$\boxed{\varphi_1 = \frac{2\pi r_1}{\lambda}+\pi}$$

d) $\varphi_2=\varphi(F_2)-^{2\pi}/_{\lambda}(F_2P)$ or $\varphi_0=\varphi(F_2)-\varphi(F_1)=\varphi(F_2)$ puisque qu'on prend $\varphi(F_1)=0$.

D'où :

$$\boxed{\varphi_2 = \varphi_0 - \frac{2\pi r_2}{\lambda} = \frac{2\pi(d-r_2)}{\lambda}}$$

3°) a) En utilisant le résultat de la question II.1°) on obtient :

$$I(P)=2I_0(1+\cos(\varphi_1-\varphi_2)) \Rightarrow I(P)=2I_0\left(1+\cos\left(\frac{2\pi(r_1+r_2-d)}{\lambda}+\pi\right)\right)$$

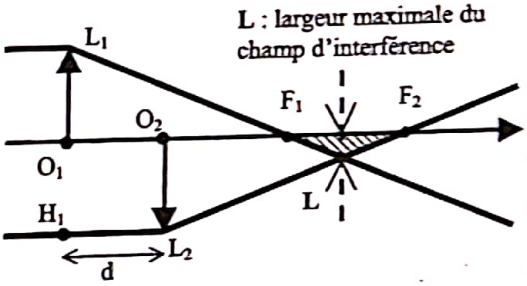
ou encore $\boxed{I(P)=2I_0\left(1+\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(r_1+r_2)+\pi-\frac{2\pi d}{\lambda}\right)\right)}$ et donc $\boxed{\alpha=\frac{2\pi}{\lambda}\ en\ m^{-1}}$ et $\boxed{\beta=\pi-\frac{2\pi d}{\lambda}\ sans\ unité}$

A.N. : $\alpha=1{,}16\ 10^7\ m^{-1}$ $\beta=-2{,}31\ 10^4$

Les franges d'interférences sont définies par $F_1P + F_2P = C^{te}$ ce sont donc des demi ellipsoïdes de révolution. Leur intersection avec un plan perpendiculaire à (F_1F_2) donne des demi-cercles centrés sur l'axe (F_1F_2).

b) Le champ d'interférence est de taille maximale lorsque l'on place le plan d'observation de telle manière à ce qu'il passe par le point qui forme le sommet du triangle que constitue la zone de recouvrement des deux faisceaux.

On a les relations suivantes dans les triangles formés par les lentilles et les foyers (avec x la position du plan d'observation par rapport à F_1).



Dans le triangle 1 : $\frac{L}{D/2}=\frac{x}{f}$, dans le triangle 2 : $\frac{L}{D/2}=\frac{d-x}{f}$ d'où $\boxed{L=\frac{dD}{4f}}$ et $\boxed{x=\frac{d}{2}}$

A.N. : $L=10^{-4}m=0{,}1mm$

c) Dans le plan méridien de F_1F_2 on a $r_1 - r_2 = r$ avec $\frac{d}{2} \leq r \leq \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + L^2}$

Or les franges sombres sont définies par $\varphi_1 - \varphi_2 = p\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda}(r_1 + r_2) + \pi = \frac{2\pi d}{\lambda} = p\pi$ d'où :

$$r = \frac{n\lambda + d}{2} \quad n \in \mathbb{Z}$$

L'encadrement de r donne l'encadrement de n :

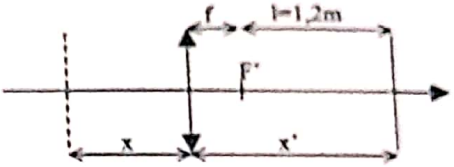
$$0 \leq n \leq \frac{2}{\lambda}\left(\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + L^2} - \frac{d}{2}\right) \quad \text{A.N. : } 0 \leq n \leq 18{,}35$$

Il y a donc 19 franges sombres sur l'écran.

d) Relation de conjugaison : $\frac{1}{x'} - \frac{1}{x} = \frac{1}{f}$

Grandissement : $\gamma = \frac{x'}{x}$

Or $x' = f + l$



D'où : $x = \frac{x'f}{f - x'} = \frac{(f+l)f}{-l} \Rightarrow \boxed{\gamma = -\frac{l}{f}}$ A.N. : $\gamma = -60$

---

on a définit le contraste $C = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}$

or après calcul on trouve $C = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2} \overset{I_1 = I_2}{=} 1$

mais ceci n'est valable que si la source primaire S est ponctuelle monochromatique. En effet si S n'est pas ponctuelle ou non monochromatique, la formule de FRESNEL n'est plus valable :

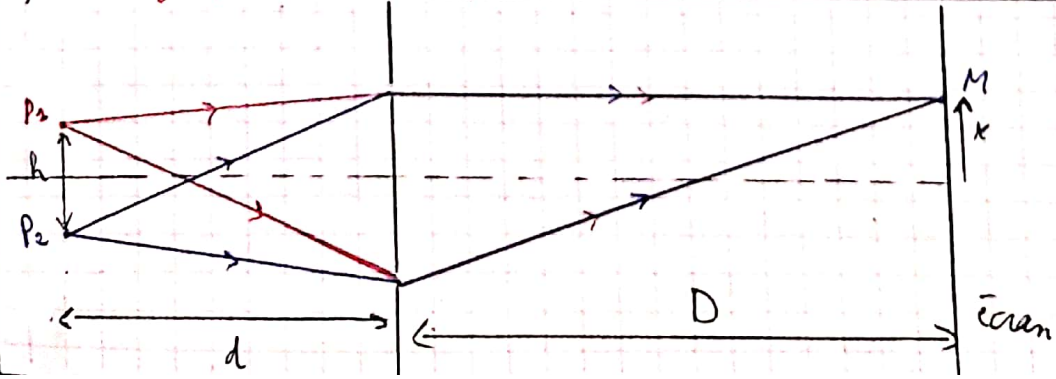
$$I \neq I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\delta\right) \Rightarrow C \neq \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2}$$

Dans la suite du cours on va étudier l'effet de l'élargissement spatial (source élargie) et l'élargissement spectral (Source polychromatique) sur la figure d'interférence (diminution du contraste).

Rq : la source ponctuelle monochromatique n'existe pas, c'est un modèle.

III) Cohérence spatiale :

1) Eclairage par 2 sources primaires ponctuelles et monochromatiques :



P_1 et P_2 deux sources ponctuelles monochromatiques et identiques ($\lambda_2 = \lambda_1 = \lambda_0$ et $I_{0P_2} = I_{0P_1} = I_0$) mais indépendantes (incohérentes) $\Rightarrow$ superposition des 2 figures d'interférence (pas d'interférences entre les 2 figs d'interférence)

$\Rightarrow I(M) = I_{P_2}(M) + I_{P_1}(M)$ avec

$$\begin{cases} I_{P_1}(M) = 2I_0\left[1+\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\delta_1\right)\right] \\ I_{P_2}(M) = 2I_0\left[1+\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\delta_2\right)\right] \end{cases}$$ avec :

$$\begin{cases} \delta_1 = \frac{ax}{D} + \frac{a\left(\frac{h}{2}\right)}{d} \\ \delta_2 = \frac{ax}{D} + \frac{a\left(\frac{-h}{2}\right)}{d} \end{cases}$$ d'où :

$$I(M) = 2I_0\left[1+1+\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\left(\frac{ax}{D}+\frac{ah}{2d}\right)\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\left(\frac{ax}{D}-\frac{ah}{2d}\right)\right)\right]$$

$$I(M) = 2I_0\left[2+\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{ax}{D}+\frac{\pi ah}{\lambda_0 d}\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{ax}{D}-\frac{\pi ah}{\lambda_0 d}\right)\right]$$

$\cos(a+b)+\cos(a-b) = 2\cos(a)\cos(b)$

$$\mathbf{I(M) = 4I_0\left[1+\underbrace{\cos\left(\frac{\pi ah}{\lambda_0 d}\right)}_{\text{Terme de visibilité}}\underbrace{\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{ax}{D}\right)}_{\text{terme d'interférence}}\right]}$$

$$C = \frac{I_{max}-I_{min}}{I_{max}+I_{min}} = \frac{4I_0\left[1+\left|\cos\left(\frac{\pi ah}{\lambda_0 d}\right)\right|\right]-4I_0\left[1-\left|\cos\left(\frac{\pi ah}{\lambda_0 d}\right)\right|\right]}{4I_0\left[1+\left|\cos\left(\frac{\pi ah}{\lambda_0 d}\right)\right|\right]-4I_0\left[1+\left|\cos\left(\frac{\pi ah}{\lambda_0 d}\right)\right|\right]}$$

n_{air} entre milieu.

$$C = \left|\cos\left(\frac{\pi ah}{\lambda_0 d}\right)\right| \Rightarrow \boxed{C = |V|}$$

Dans le cas de l'éclairage par 2 sources ponctuelles, le contraste a diminué car chacune des 2 sources engendre sa propre figure d'interférence. Donc la figure finale est la superposition des 2 figures. Le contraste et la visibilité sont 2 notions très similaires, mais la visibilité négative signifie que les franges brillantes et sombres ont permuté leurs places par rapport au cas où la visibilité est positive.

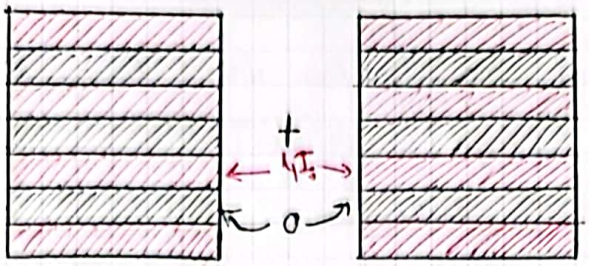
C'est ce qu'on appelle inversion du contraste.

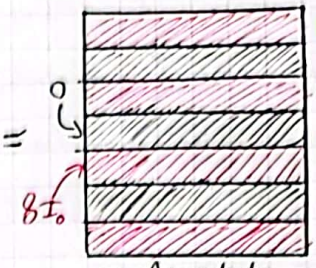
X2002

CamScanner

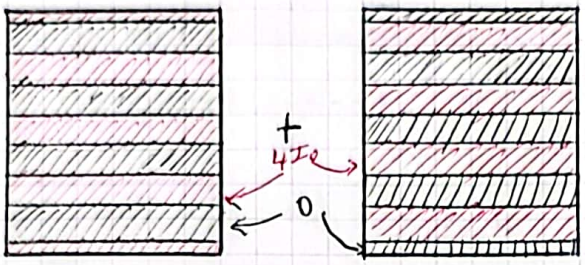
C'est ce qu'on appelle **inversion du contraste**. (X 2002)

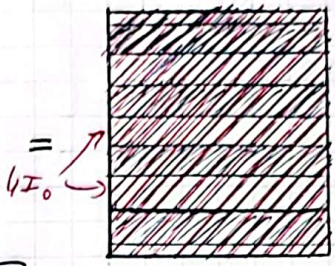
Figures d'interférences relatives à





Aspect de coïncidence des 2 figures d'interférences $C = 1$



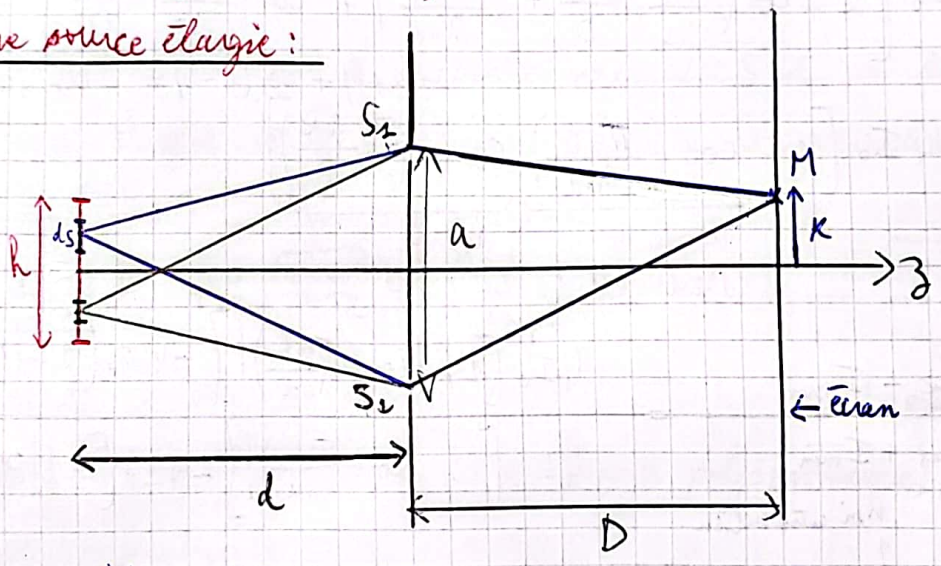


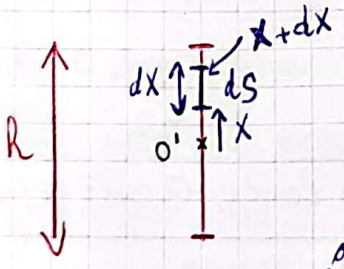
Anticoïncidence des 2 figures d'interférences $C = 0$

$$I = 4I_0 \left[1 + \cos\left(\frac{\pi a h}{\lambda_0 d}\right) \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{a\kappa}{D}\right)\right]$$

V càd (terme de visibilité). — terme d'interférence

2) Cas d'une source élargie :





source élémentaire

$S \longrightarrow$ longueur $h \longrightarrow I_0 \longrightarrow I(M)$

$dS \longrightarrow$ longueur $dX \longrightarrow dI_0 \longrightarrow dI(M)$

- Les différentes sources élémentaires sont indépendantes (donc incohérentes)

$\Rightarrow$ superposition d'une infinité de figures d'interférences

$$\Rightarrow I(M) = \int dI(M) \quad \text{avec} \quad dI(M) = 2dI_0\left[1 + \cos\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda_0}\right)\right]$$

Scanné avec CamScanner

tq $\delta = \frac{aK}{D} + \frac{aX}{d}$ et $\begin{cases} h \to I_0 \\ dX \to dI_0 \end{cases} \longrightarrow dI_0 = \frac{I_0}{h} \cdot dX$

$(dI_0 = A\,dX)$ ↑ de

$$dI(M) = \frac{2I_0}{h}\left[1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\left(\frac{aK}{D} + \frac{aX}{d}\right)\right)\right] dX$$

On a pu appliquer la proportionnalité (règle de 3 car la source est homogène)

$$I(M) = \frac{2I_0}{h}\left[\int_{-h/2}^{h/2} dX + \int_{-h/2}^{h/2} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\left(\frac{aK}{D} + \frac{aX}{d}\right)\right) dX\right]$$

$$= \frac{2I_0}{h}\left[h + \frac{1}{\frac{2\pi}{\lambda}\frac{a}{d}}\left[\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\left(\frac{aK}{D} + \frac{aX}{d}\right)\right)\right]_{-h/2}^{h/2}\right]$$

$$= 2I_0\left[1 + \frac{1}{\frac{2\pi a h}{\lambda_0 d}}\left(\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{aK}{D} + \frac{\pi a h}{\lambda_0 d}\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{aK}{D} - \frac{\pi a h}{\lambda_0 d}\right)\right.\right.$$

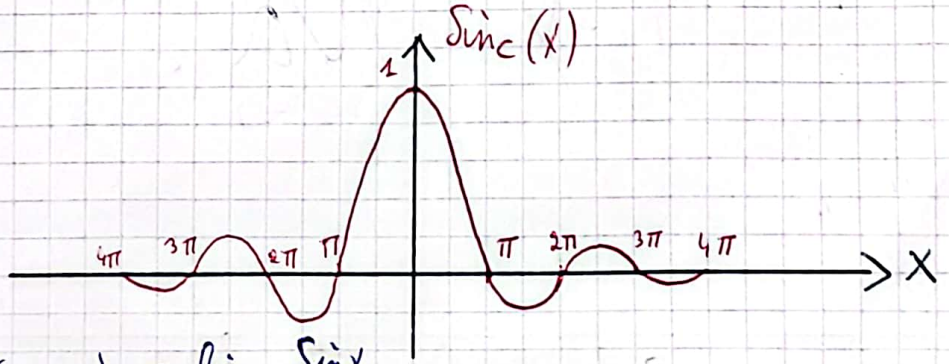
$$I(M) = 2I_0\left[1 + \frac{\sin\left(\frac{\pi a h}{\lambda_0 d}\right)}{\frac{\pi a h}{\lambda_0 d}}\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{aK}{D}\right)\right]$$

Rappel : $\sin(a+b) - \sin(a-b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$

on définit le sinus cardinal par $\mathrm{Sinc}(X) = \frac{\sin(X)}{X}$

$$I(M) = 2I_0\left[1 + \underbrace{\mathrm{Sinc}\left(\frac{\pi a h}{\lambda_0 d}\right)}_{\text{terme de visibilité}}\underbrace{\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{aK}{D}\right)}_{\text{terme d'interférence.}}\right]$$

$$C = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} \Rightarrow C = \left|\mathrm{Sinc}\left(\frac{\pi a h}{\lambda_0 d}\right)\right|$$

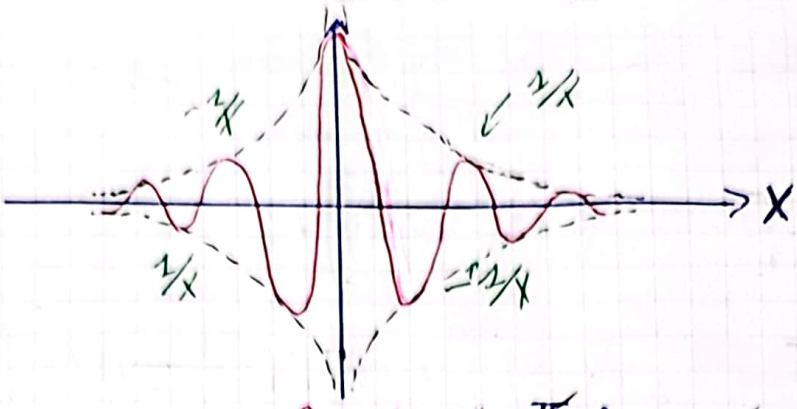


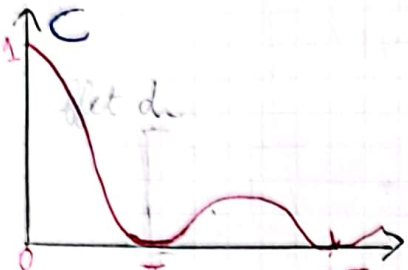
$$\mathrm{Sinc}(X=0) = \lim_{0} \frac{\sin X}{X} = 1$$

$\mathrm{Sinc}(X) = 0 \Rightarrow X = n\pi$ avec $n \neq 0$

Rq : $\mathrm{Sinc}(X) = \frac{1}{X} \times \sin(X)$

Scanné avec CamScanner





CQFD

$C \simeq 1$ si $\frac{\pi a h}{\lambda_0 d} \ll \pi \Rightarrow \frac{h a}{\lambda_0 d} \ll 1$

$\Rightarrow h \ll \frac{\lambda_0 d}{a} = L_s$ longueur de cohérence spatiale

ODG : $\lambda_0 = 0{,}6\ \mu m$, $a = 1\ mm$, $d = 1\ m$ $\Rightarrow L_s = 0{,}6\ mm$ donc $h \ll 0{,}6\ mm$

pour obtenir une fig d'interférence bien contrastée il faut que la source ait une longueur $h \ll L_s = 0{,}6\ mm$ ce qui est irréalisable

Solution : Voir Michelson.

IV) Cohérence temporelle :

par la suite on s'intéresse à l'éclairage d'une source ponctuelle mais non monochromatique.

1) Éclairage par une source bichromatique :

Trous d'Young éclairés par une lampe à vapeur de sodium

On réalise une expérience de trous d'Young, avec une source ponctuelle délivrant deux longueurs d'onde λ_1 et λ_2 très proches, soit $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 \ll \lambda_1, \lambda_2$. Cette modélisation est bien approchée par exemple avec une lampe à vapeur de sodium.

a) Les deux longueurs d'onde sont-elles cohérentes ?

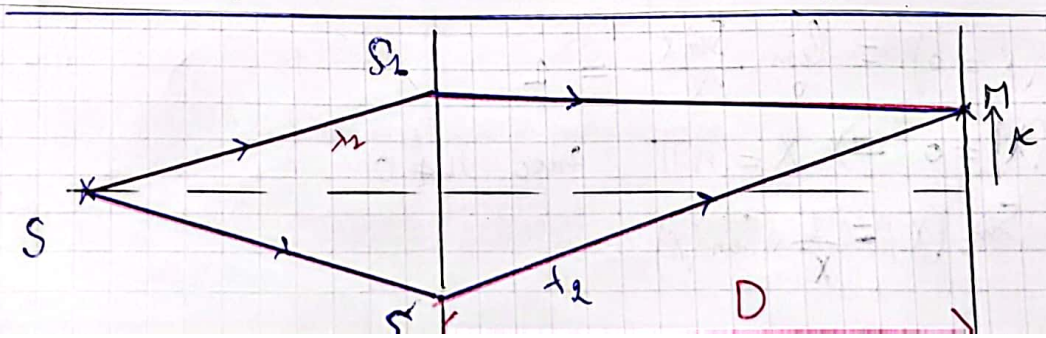
b) En déduire l'intensité observée sur l'écran en supposant que les deux raies ont même intensité. Faire apparaître un terme d'interférences bien connu. Que vaut la visibilité ?

c) Interpréter le résultat. Donner l'expression du contraste C.

d) Tracer l'allure de l'intensité sur l'écran. Quelle est l'enveloppe de l'intensité ? Identifier graphiquement les zones de bas contraste.

e) Faire l'application numérique pour le doublet jaune du sodium ($\lambda_1 = 589{,}0$ nm et $\lambda_2 = 589{,}6$ nm) : au bout de combien de franges le contraste s'annule-t-il la première fois ?

f) Dans ce genre de montage, on observe effectivement une dizaine de franges . Conclusion ?



Scanné avec CamScanner

1) les 2 longueurs d'ondes sont incohérentes $\lambda_1 \neq \lambda_2 \overset{2)}{\Rightarrow}$ superposition des 2 figures d'interférence relatives à λ_1 et λ_2 ; $I(M) = I_{\lambda_1}(M) + I_{\lambda_2}(M)$

on pose $\lambda_0 = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)$; $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$.

$$I(M) = I_{\lambda_1}(M) + I_{\lambda_2}(M)$$

$$I_{\lambda_1}(M) = 2I_{0,1}\left[1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_1}\frac{ax}{D}\right)\right] \quad \text{or } \lambda_1 \simeq \lambda_2 \Rightarrow I_{0,1} \simeq I_{0,2}$$

$$I_{\lambda_2}(M) = 2I_{0,2}\left[1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_2}\frac{ax}{D}\right)\right]$$

$$I(M) = 2I_0\left[2 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_1}\frac{ax}{D}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_2}\frac{ax}{D}\right)\right]$$

or $\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$

$$= 4I_0\left[1 + \cos\left(\pi\left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}\right)\frac{ax}{D}\right)\cos\left(\pi\left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1}\right)\frac{ax}{D}\right)\right]$$

on pose $\begin{cases} \lambda_0 = \frac{\lambda_1+\lambda_2}{2} \\ \Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 \end{cases} \overset{\lambda_1 \simeq \lambda_2}{\Rightarrow} \begin{cases} \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_1} \simeq \frac{2}{\lambda_0} & \text{what ??} \\ \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_2\lambda_1} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2} \end{cases}$

en effet; $\begin{cases} \lambda_1 = \lambda_0 - \frac{\Delta\lambda}{2} \\ \lambda_2 = \lambda_0 + \frac{\Delta\lambda}{2} \end{cases}$

$$\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} = \frac{1}{\lambda_0 - \frac{\Delta\lambda}{2}} + \frac{1}{\lambda_0 + \frac{\Delta\lambda}{2}} = \frac{1}{\lambda_0}\left[\left(1 - \frac{\Delta\lambda}{2\lambda_0}\right)^{-1} + \left(1 + \frac{\Delta\lambda}{2\lambda_0}\right)^{-1}\right]$$

$$\frac{1}{\lambda_1} + \frac{a^2}{\lambda_2} = \frac{2}{\lambda_0}$$

$$\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} = \frac{1}{\lambda_0}\left[\left(1 - \frac{\Delta\lambda}{2\lambda_0}\right)^{-1} - \left(1 + \frac{\Delta\lambda}{2\lambda_0}\right)^{-1}\right] = \frac{1}{\lambda_0}\left[\left(1 + \frac{\Delta\lambda}{2\lambda_0}\right) - \left(1 - \frac{\Delta\lambda}{2\lambda_0}\right)\right]$$

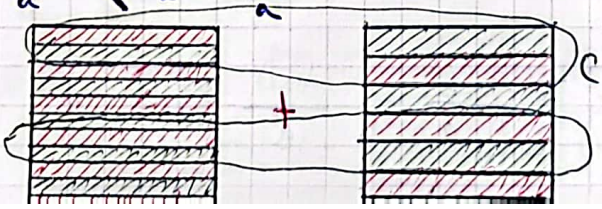
$$\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_2} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2}$$

d'où $I(M) = 4I_0\left[1 + \cos\left(\frac{\pi a x \Delta\lambda}{\lambda_0^2 D}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{ax}{D}\right)\right]$

terme de visibilité (dépend de x) — terme d'interférence

3) $C = |V| \Rightarrow C = \left|\cos\left(\frac{\pi a x \Delta\lambda}{\lambda_0^2 D}\right)\right|$ Cela se produit car les interfranges ne sont pas les mêmes.

$i_1 = \frac{\lambda_1 D}{a} < i_2 = \frac{\lambda_2 D}{a}$



Scanné avec CamScanner

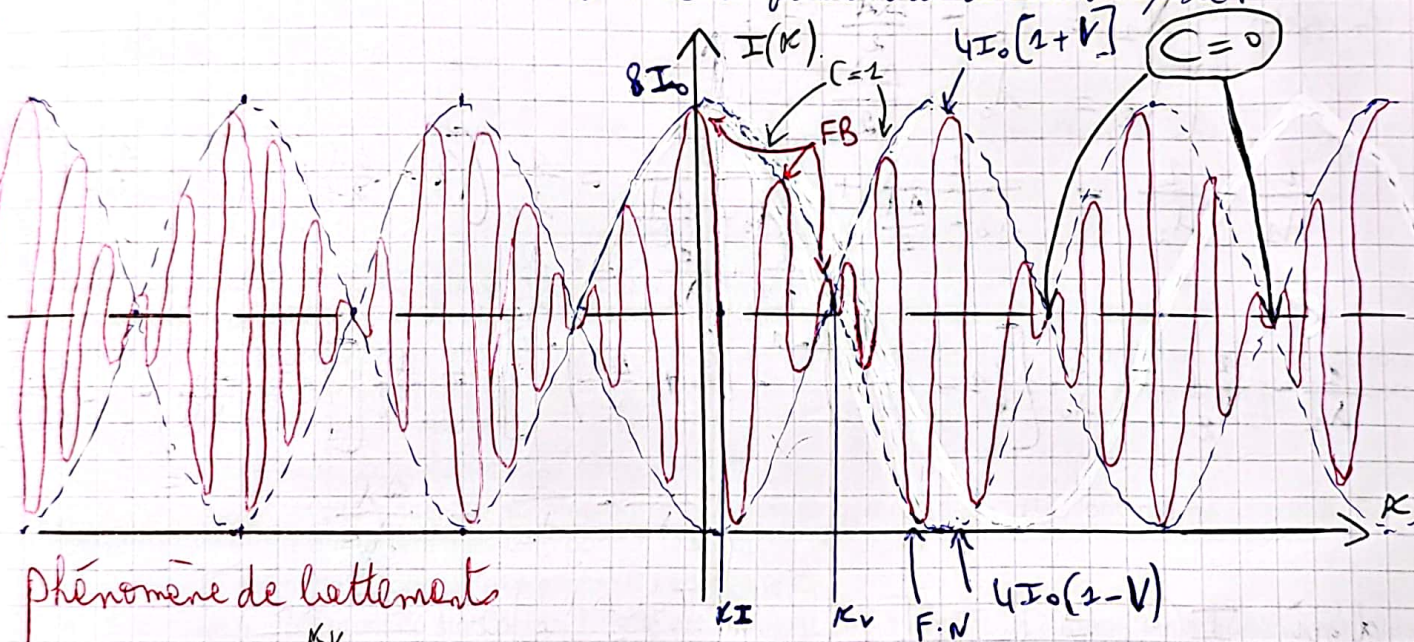
L'effet de la non monochromaticité de la source est la diminution du contraste, les figures d'interférences correspondant aux 2 longueurs d'ondes ont des interfranges différentes. Dans les zones où les figures d'interférences coïncident localement, le contraste est bon par contre dans les régions où les franges brillantes coïncident avec les franges sombres de l'autre longueur d'onde, le contraste est très faible, ce qui explique pourquoi le contraste dépend de x.

d) $\cos\left(\frac{\pi a x_V \Delta\lambda}{\lambda_0^2 D}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\pi a x_V \Delta\lambda}{\lambda_0^2 D} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x_V = \frac{\lambda_0^2 D}{2a\Delta\lambda}$

$\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{a x_I}{D}\right) = 0 \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{a x_I}{D} = \pi/2 \Rightarrow x_I = \frac{\lambda_0 D}{4a}$

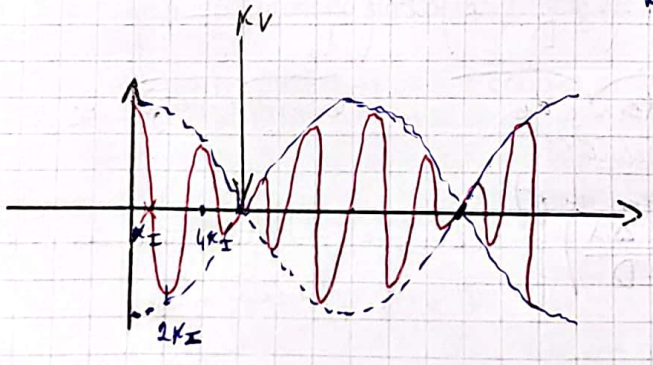
$\hookrightarrow \frac{x_V}{x_I} = \frac{2\lambda_0}{\Delta\lambda}$ or $\lambda_0 \gg \Delta\lambda \Rightarrow x_V \gg x_I$ d'où

$I = 4I_0[1+V]$: l'enveloppe et le terme d'interférence joue le rôle de la fonction de variation rapide.



Phénomène de battement

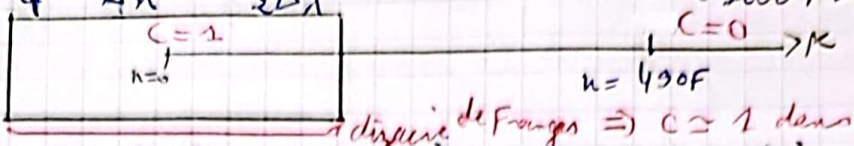
e)



$N = \frac{x_V}{i}$ avec $i = 4x_I = 4\frac{\lambda_0 D}{4a} = \frac{\lambda_0 D}{a}$

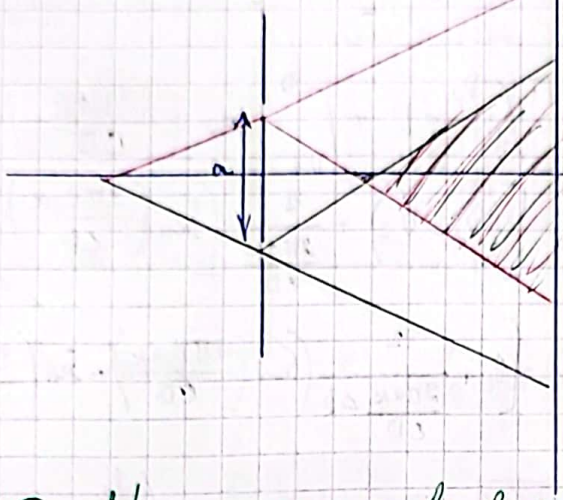
Scanné avec CamScanner

$N = \frac{K\nu}{4K_I} = \frac{1}{4}\frac{2\lambda_0}{\Delta\lambda} = \frac{\lambda_0}{2\Delta\lambda}$; AN : $N = 490$ F.B (ou F.S) donc 1000 Franges a.



dizaine de Franges $\Rightarrow C \simeq 1$ dans l'écran.

La monochromaticité de la source à vapeur de sodium est non détectable par l'expérience des trous de Young, donc il faut utiliser l'interféromètre de Michelson ou un réseau.



dizaine de franges

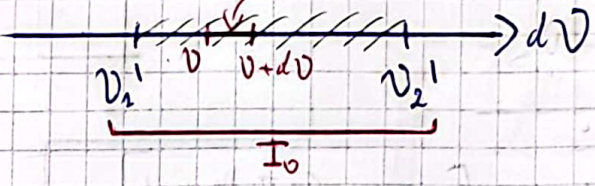
$i = \frac{\lambda_0 D}{a}$ si $a \nearrow$ $i \searrow$

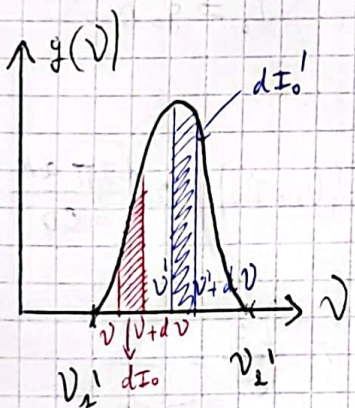
mais le champ d'interférence se réduit

Si $D \nearrow$ $i \nearrow$ donc le nombre de franges n'augmente pas.

2) Cas d'une source polychromatique : dI_0

Source polychromatique :





$[\nu ; \nu + d\nu] \longrightarrow dI_0 \longrightarrow dI(M)$

$[\nu_1' ; \nu_2'] \longrightarrow I_0 \longrightarrow I(M) = ?$

Rappel : $\left.\begin{matrix} dX \longrightarrow dI_0 \\ h \longrightarrow I_0 \end{matrix}\right\} \longrightarrow dI_0 = \frac{I_0}{h} dX = \frac{A}{\Delta x} \cdot dX$

$[\nu_1' ; \nu_2'] \longrightarrow I_0$

$[\nu ; \nu + d\nu] \longrightarrow dI_0$

$\nu_2' - \nu_1' \longrightarrow I_0$

$d\nu \longrightarrow dI_0 \longrightarrow dI_0 \neq \frac{I_0}{\nu_2' - \nu_1'} d\nu$

car le rayonnement n'est pas uniforme

$dI_0 \neq cte \cdot d\nu$

$I(M) = \int dI(M)$ avec $dI(M) = 2\, dI_0 \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\frac{ax}{D}\right)\right]$

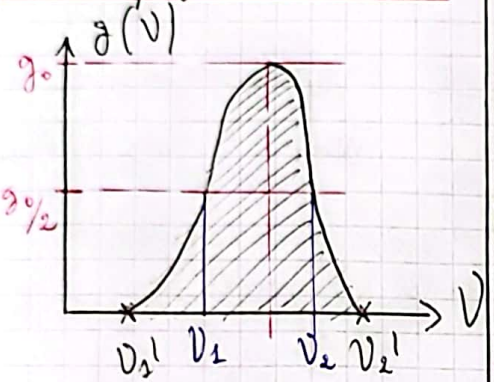
$I(M) = \int_{\nu_1}^{\nu_2} 2\, g(\nu)\, d\nu \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi \nu}{c}\frac{ax}{D}\right)\right]$ $\quad \lambda = \frac{c}{\nu}$

Scanné avec CamScanner

$\Rightarrow \quad dI_0 = g(\nu)\,d\nu \Rightarrow I_0 = \int_{\nu_1'}^{\nu_2'} g(\nu)\,d\nu$

$g(\nu)$ est le profil spectral de la source, sa forme exacte dépend de la nature de la source (voir document). pour le simplifier, (le cad profil) on le modélise par un profil rectangulaire entre ν_1 et ν_2 ; fréquences délimitant la largeur à mi-hauteur. Les différences fréquences de la source sont incohérentes d'où la superposition des intensité sur l'écran.

pour simplifier les calculs :



$\Delta\nu = \nu_2 - \nu_1$

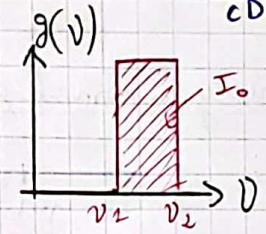
$\nu_0 = \dfrac{\nu_1 + \nu_2}{2}$

$$I(M) = \int_{\nu_1}^{\nu_2} 2 g_0 \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi \nu a K}{CD}\right)\right] d\nu$$

$$I(M) = 2g_0 \left[\int_{\nu_1}^{\nu_2} d\nu + \int_{\nu_1}^{\nu_2} \cos\left(\frac{2\pi \nu a K}{CD}\right) d\nu\right]$$

$$I(M) = 2g_0 \left[(\nu_2 - \nu_1) + \frac{1}{\frac{2\pi a K}{CD}} \left[\sin\left(\frac{2\pi \nu a K}{CD}\right)\right]_{\nu_1}^{\nu_2}\right]$$

$$I(M) = 2g_0 \Delta\nu \left\{1 + \frac{1}{\frac{2\pi a K}{CD}\Delta\nu}\left(\sin\left(\frac{2\pi \nu_2 a K}{CD}\right) - \sin\left(\frac{2\pi \nu_1 a K}{CD}\right)\right)\right\}$$



or $I_0 = \int_{\nu_1}^{\nu_2} g(\nu)\,d\nu$

$= \int_{\nu_1}^{\nu_2} g_0\,d\nu$

$I_0 = g_0 \Delta\nu$

donc $I(M) = 2I_0 \left(1 + \dfrac{1}{\frac{2\pi a K}{CD}\Delta\nu} 2 \sin\left(\frac{\pi a K}{CD}(\nu_2 - \nu_1)\right) \cos\left(\frac{2\pi a K}{CD}\frac{\nu_2+\nu_2}{2}\right)\right)$

$$I(M) = 2I_0 \left[1 + \frac{\sin\left(\frac{\pi a K \Delta\nu}{CD}\right)}{\frac{\pi a K \Delta\nu}{CD}} \cos\left(\frac{2\pi a K}{CD}\nu_0\right)\right] \quad ; \quad \frac{\nu_0}{c} = \frac{1}{\lambda_0}$$

$$I(M) = 2I_0 \left(1 + \underbrace{\sin c\left(\frac{\pi a K \Delta\nu}{CD}\right)}_{\text{terme de visibilité}} \underbrace{\cos\left(\frac{2\pi\nu_0}{c}\frac{a K}{D}\right)}_{\text{terme d'interférence}}\right)$$

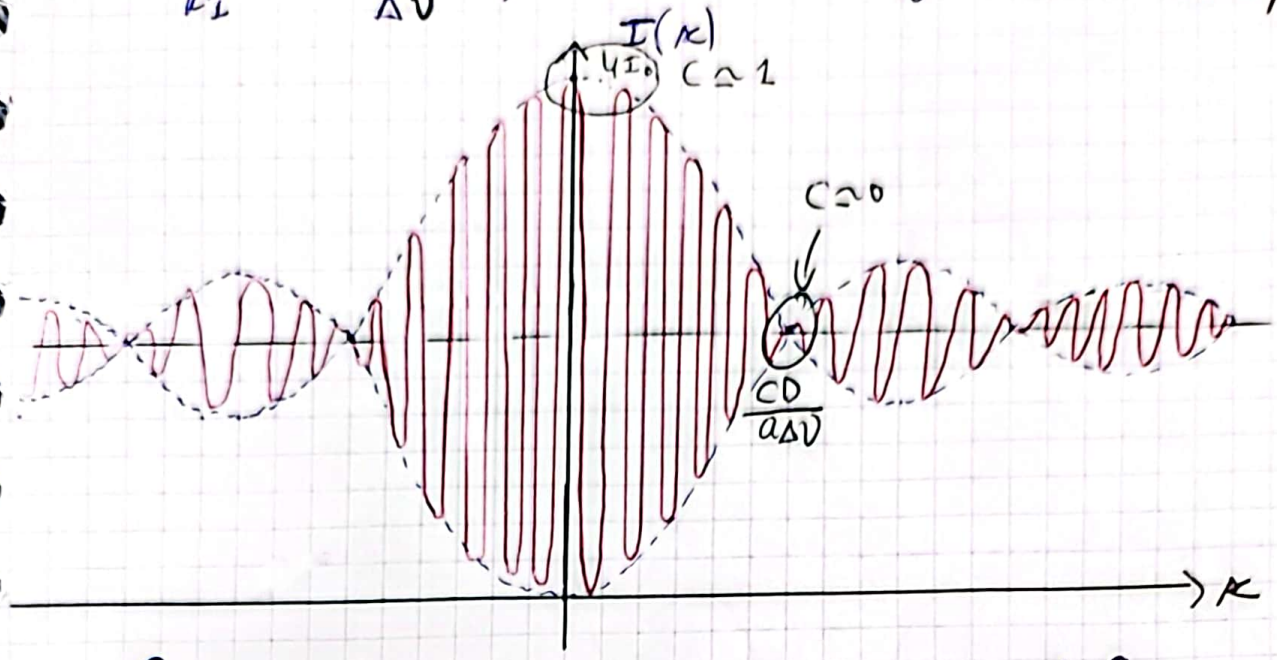
$$\sin\left(\frac{\pi a K \Delta\nu}{CD}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\pi a K_V \Delta\nu}{CD} = \pi \Rightarrow K_V = \frac{CD}{a\Delta\nu}$$

$$\cos\left(\frac{2\pi\nu_0}{c}\frac{a K}{D}\right) = 0 \Rightarrow \frac{2\pi\nu_0}{c}\frac{a K_I}{D} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow K_I = \frac{CD}{4a\nu_0}$$

Scanné avec CamScanner

joue le rôle de l'enveloppe

donc $\frac{\kappa V}{\kappa_I} = \frac{4 V_0}{\Delta V} > 1 \Rightarrow I = 2 I_0 [1 + V]$



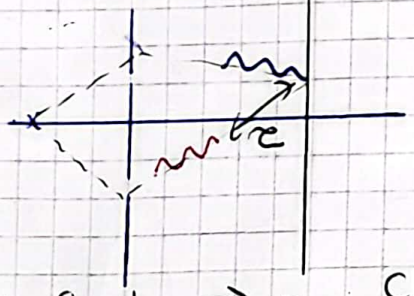
$C \simeq 1 \Rightarrow \kappa \ll \frac{CD}{a\Delta V} \Rightarrow \frac{a\kappa}{D} \ll \frac{C}{\Delta V}$

or $\Delta V \cdot \tau_c \simeq 1$ (relation de limitation)

↖ dépend du type de distribution qui dépend de la source

$\Rightarrow \delta \ll C \cdot \tau_c$ or $C\tau_c = L_c$ ↑ longueur de cohérence

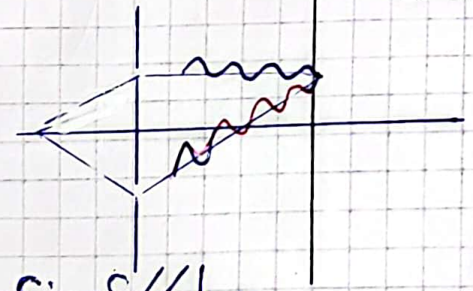
(1)



$\delta \ll L_c$

si $\delta = L_c \Rightarrow \kappa = \frac{CD}{a\Delta V} \Rightarrow C = 0$ (voir cours)

(2)



Exp Source monochromatique

$L_c \to \infty \Rightarrow \delta \ll L_c$

$\Rightarrow C = 1$.

si $\delta \ll L_c$

$g(\nu_{1,2}) = g_0/2$

$\Delta V \cdot \tau_c = \frac{1}{\pi} \leftarrow g(\nu) = \frac{g_0}{1 + 4\pi^2 \tau_c^2 (\nu - \nu_0)^2}$

$\Delta V \cdot \tau_c = 2(2\ln 2)^{1/2} \leftarrow g(\nu) = g_0 e^{-\frac{(\nu - \nu_0)^2}{2\sigma^2}}$

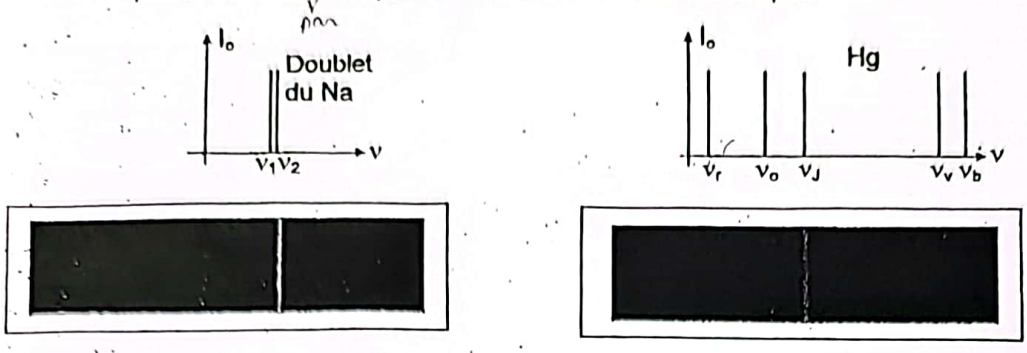
Scanné avec CamScanner

Interférences avec une source de spectre élargie

1. Spectres des sources :

a) Spectre discret :

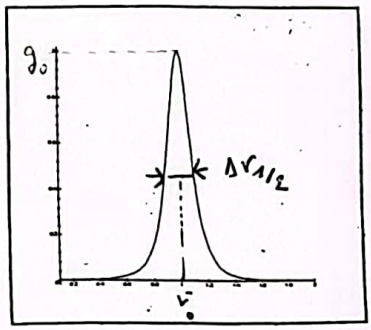
Les lampes spectrales utilisées au laboratoire, comme celle au sodium, cadmium, vapeur de mercure, présentent des spectres discontinus ou discrets que l'on peut représenter ainsi avec en ordonnées l'intensité $I_o(\nu_i)$ correspondant aux différentes fréquences ν_i.
On peut les obtenir la dispersion du prisme. Voici des exemples.



b) Spectre continu :

Lorsque l'on observe ces raies, elles ne sont pas infiniment minces et possèdent une largeur spectrale....Et l'interféromètre de Michelson détecte cette propriété.
On caractérise cet étalement en fréquence du spectre, autour d'une valeur centrale ν_o, par des distributions d'intensité, notée $g(\nu) = (dI_o/d\nu)$.

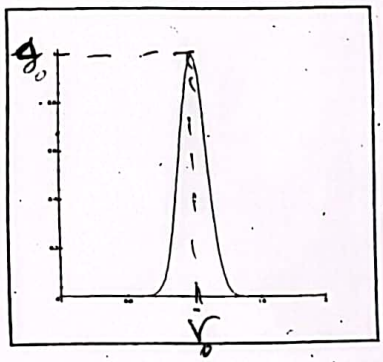
Il existe deux types de spectres de distribution d'intensité spectrale :



♦ **Distribution lorentzienne :** $g(\nu) = \dfrac{g_o}{1 + 4\pi^2 . \tau_c^2 . (\nu - \nu_o)^2}$

La largeur à mi-hauteur $\Delta\nu_{1/2} = \dfrac{1}{\pi . \tau_c}$

Cet étalement doit être attribuée aux collisions entre atomes, notamment à la durée entre deux collisions et par conséquent à la pression du gaz. Ainsi le spectre de la lampe à vapeur de mercure basse pression est plus étroit que la lampe à vapeur de mercure haute pression.



♦ **Distribution gaussienne :** $g(\nu) = \exp\left(-\dfrac{(\nu - \nu_o)^2}{2.\sigma^2}\right) \times g_o$

La largeur à mi-hauteur $\Delta\nu_{1/2} = 2.\sigma.(2\ln 2)^{1/2}$

Cet étalement à l'effet Doppler, c'est à dire à la variation de fréquence de l'onde émise des atomes en mouvement.

♦ Naturellement l'intensité "totale" de la source s'exprime par:

$$I_o = \int_0^{+\infty} g(\nu).d\nu = \int_0^{+\infty} \left(\frac{dI_o}{d\nu}\right).d\nu$$

V) Système interférentiel par division d'amplitude :

1) Interféromètre de Michelson :

L'interféromètre de Michelson est un système qui fait des mesures en se basant sur le phénomène d'interférences. exp :

- Mesure d'indice optique d'une lame (Mines ...)

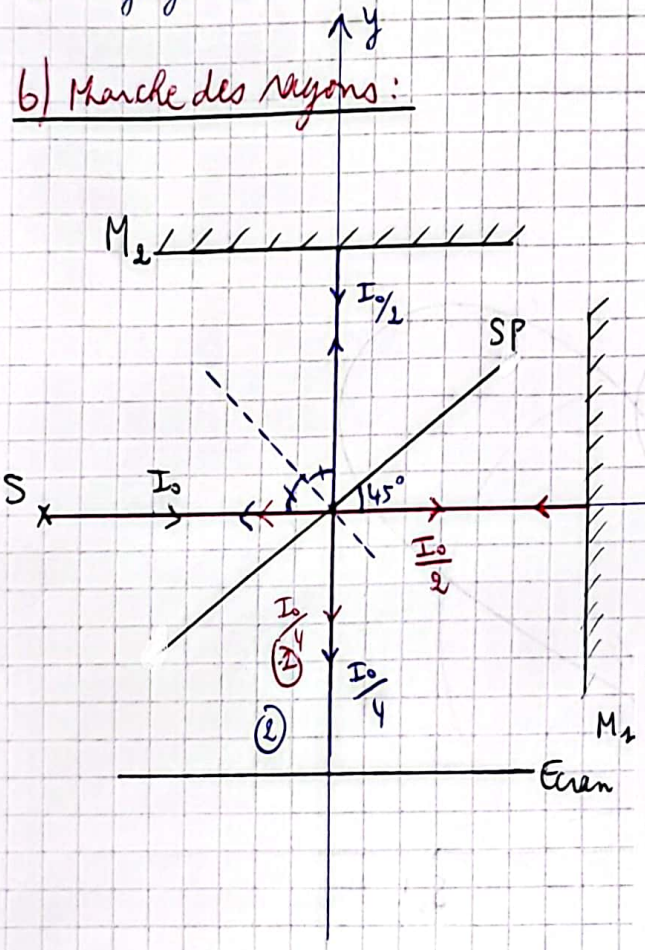
Scanné avec CamScanner

- Mesure d'épaisseur d'une lame.
- Mesure d'écart spectral $\Delta\lambda$ d'un doublet.
- Mesure de la largeur spectrale d'une raie.
- Mesure de la longueur d'onde
- Montrer l'invariance de la célérité C de la lumière (CCP 2020) par changement de référentiel.

a) Schéma de principe : l'I.M (Interféromètre de Michelson) est constitué de 2 miroirs M_1 et M_2 et d'une lame semi-réfléchissante appelée séparatrice faisant un angle 45° avec les 2 miroirs. Les 2 miroirs sont mobiles en rotation et M_1 peut de plus être translaté. O_1 et O_2 sont les bras de l'I.M.

Pour l'I.M il existe 2 principaux réglages :
- réglage en lame d'air
- réglage en coin d'air

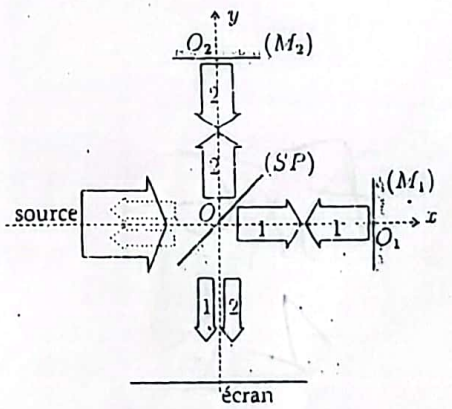
b) Marche des rayons :



Rayon ② : (SP) . M_1 (SP)
T R R

Rayon ① : R R T
(SP) M_2 (SP)

: lumineux dans l'interféromètre



1 – Flux lumineux dans l'interféromètre de Michelson. Remarquer qu'une partie de ie revient vers la source.

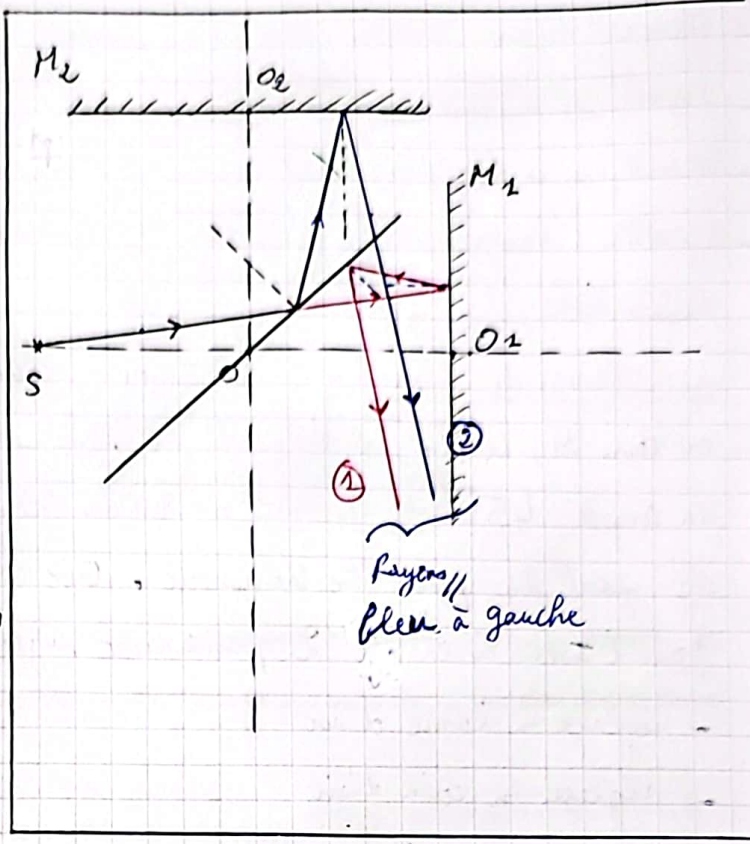
Scanné avec CamScanner

c) fonctionnement en lame d'air :

Dans ce fonctionnement, les 2 miroirs M_1 et M_2 sont orthogonaux

a) Marche des rayons :

	S_1	M_2	S_2
Rayon 1 :	T	R	R
Rayon 2 :	R	R	T
	S_2	M_2	S_2



Rq : Si $OO_1 = OO_2 \Rightarrow$

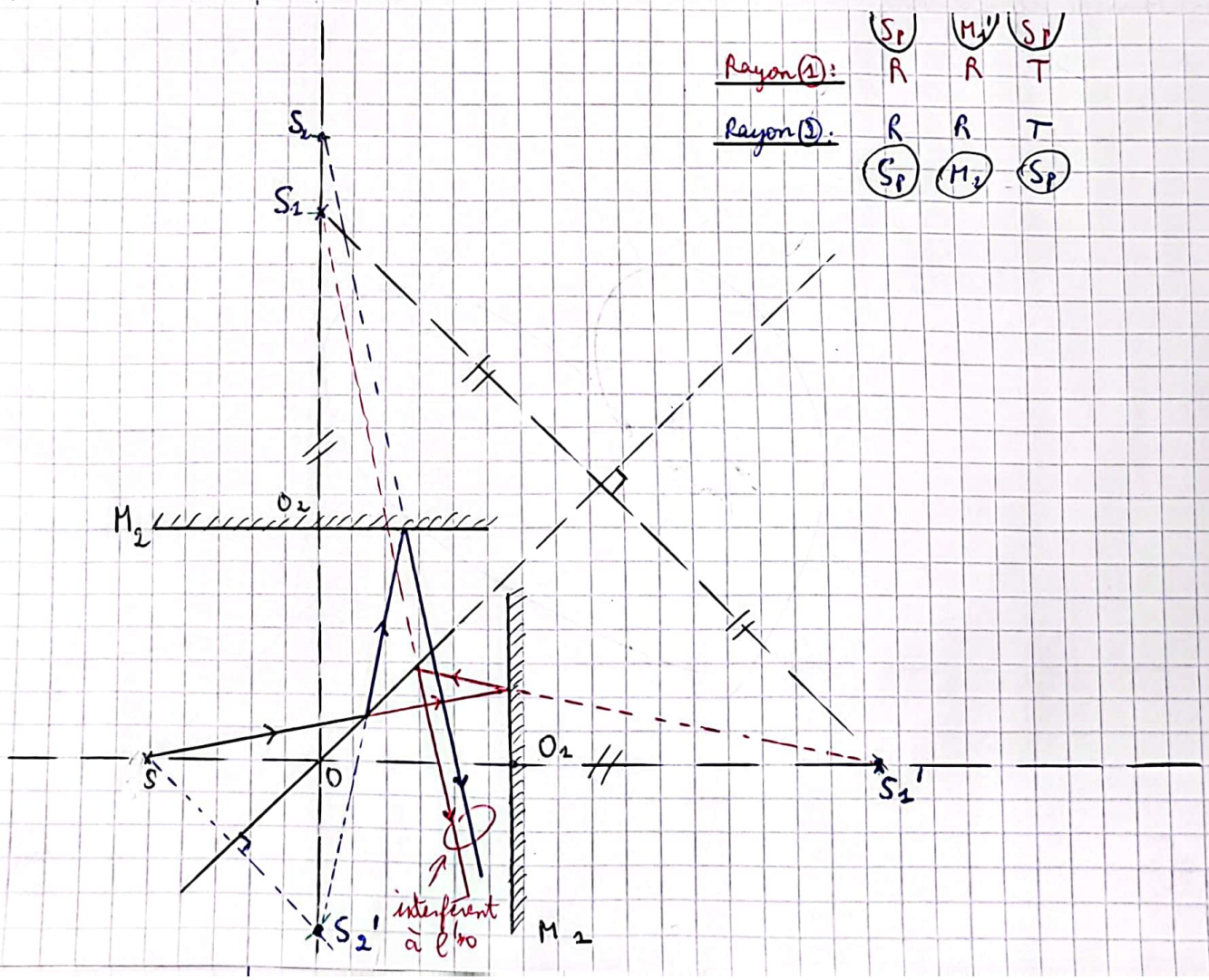
⊕ les 2 rayons ① et ② sont confondus

⊕ $S_1 = S_2$

$OO_1 < OO_2 \Rightarrow$ bleu après le rouge

b) Sources secondaires :

	S_1	M_2	S_2
Rayon ① :	R	R	T
Rayon ② :	R	R	T
	S_2	M_2	S_2



Scanné avec CamScanner

⚠ S_1 et $S_2 \in (Oy)$

$$\left(S \xrightarrow[(T)]{Sp} S \xrightarrow[(R)]{M_1} S_1' \xrightarrow[(R)]{Sp} S_1\right)$$

par transmission — Réflexion

$O_1S_1' = O_1S$ $\qquad$ $OS_1 = OS_1'$

$$S \xrightarrow[(R)]{S_1} S_1' \xrightarrow[(R)]{M_2} S_2 \left(\xrightarrow[(T)]{Sp} S_2\right)$$

$OS_1' = OS$ $\qquad$ $O_2S_2' = O_2S_2'$

c) Équivalence lame d'air :

pour un observateur au point M, il voit le miroir M_2 par la transparence de la séparatrice et M_1' l'image de M_1 par la réflexion de la séparatrice. Si l'écartement entre M_2 et M_1' est e alors l'écartement entre S_1 et S_2 est $2e$

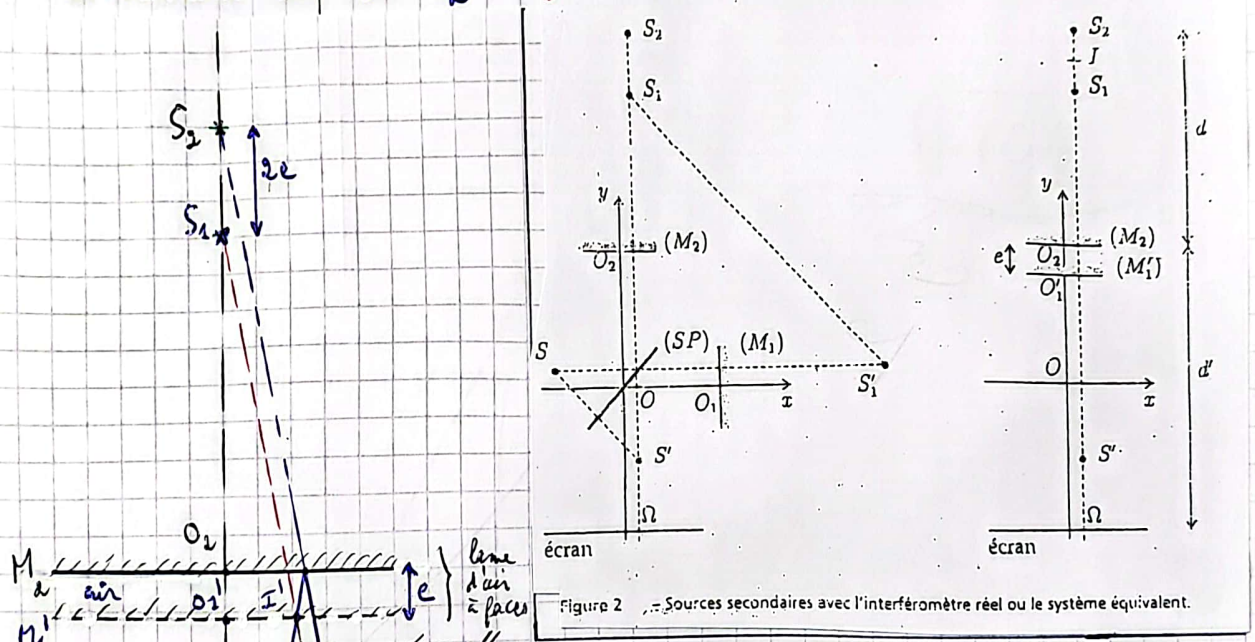


Figure 2 – Sources secondaires avec l'interféromètre réel ou le système équivalent.

$$M \xrightarrow[(R)]{Sp} M_1'$$

R Si $OO_1 = OO_2 \Rightarrow$

1) les rayons ① et ② sont confondus
2) $S_1 \equiv S_2$

Scanné avec CamScanner

déno: $M_2 \xrightarrow[(R)]{Sp} M_2'$ $\quad OO_1' = OO_1$

$$S_2S_1 = S_2S' - S_1S' = 2O_2S' - 2O_1'S' = 2(O_2S' - O_1'S') = 2e$$

d) Nature des franges:

- $(S_1S_2) \perp$ écran donc les franges sont des anneaux.
- Si la source S est ponctuelle monochromatique alors les franges sont bien contrastées dans une vaste zone de l'espace. On dit que les interférences sont délocalisées.

e) éclairage par une source étendue monochromatique:

Dans ce cas la lumière est plus intense sur l'écran mais cela engendre un brouillage de la figure d'interférence. expérimentalement (Théoriquement voir pf) on mq les franges restent bien contrastées à l'infini quelque soit la taille de la source. On dit que les interférences sont localisées à l'infini.

→ figure d'interférence localisée à ∞ $\Rightarrow$ coïncidence de l'infinité des figures d'interférence

Or $\delta p_2 = \delta p_2 = \dots = \delta p_n$

$\Rightarrow I_{p_2}(M) = \dots = I_{p_n}(M)$

Rq: $I_{p_n} = \frac{I_0}{4}\left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\delta_{p_n}\right)\right)$

$\delta = 2e\cos(i)$

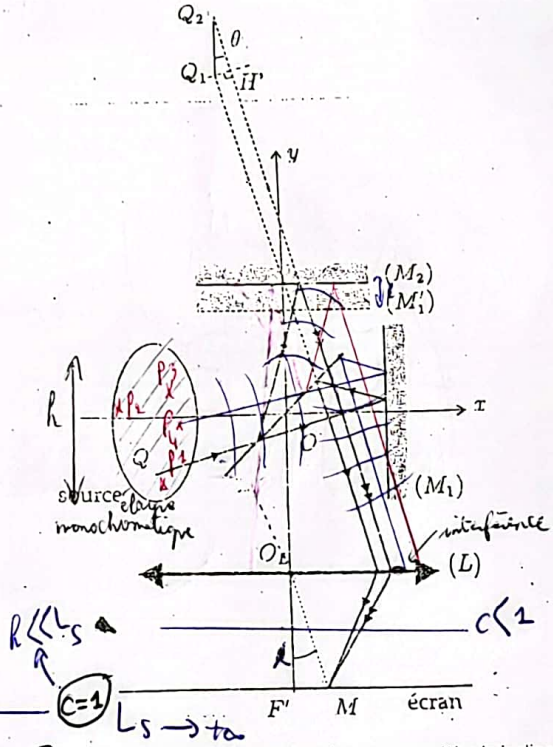
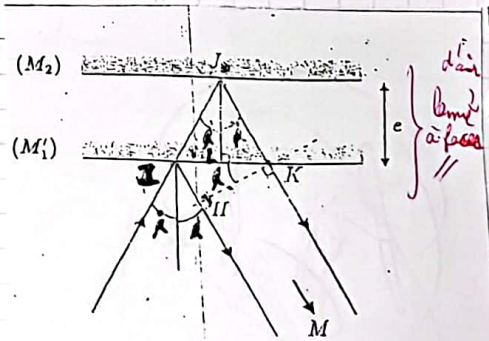


Figure 3 – Montage pour l'observation des anneaux d'égale inclinaison.

Rq: on n'est pas en système par division du front d'onde. En effet toute la surface d'onde subit réflexion et transmission

(interférence de 2 rayons différents issus de 2 rayons différents provenant de la même onde)

f) Calcul de la différence de marche:

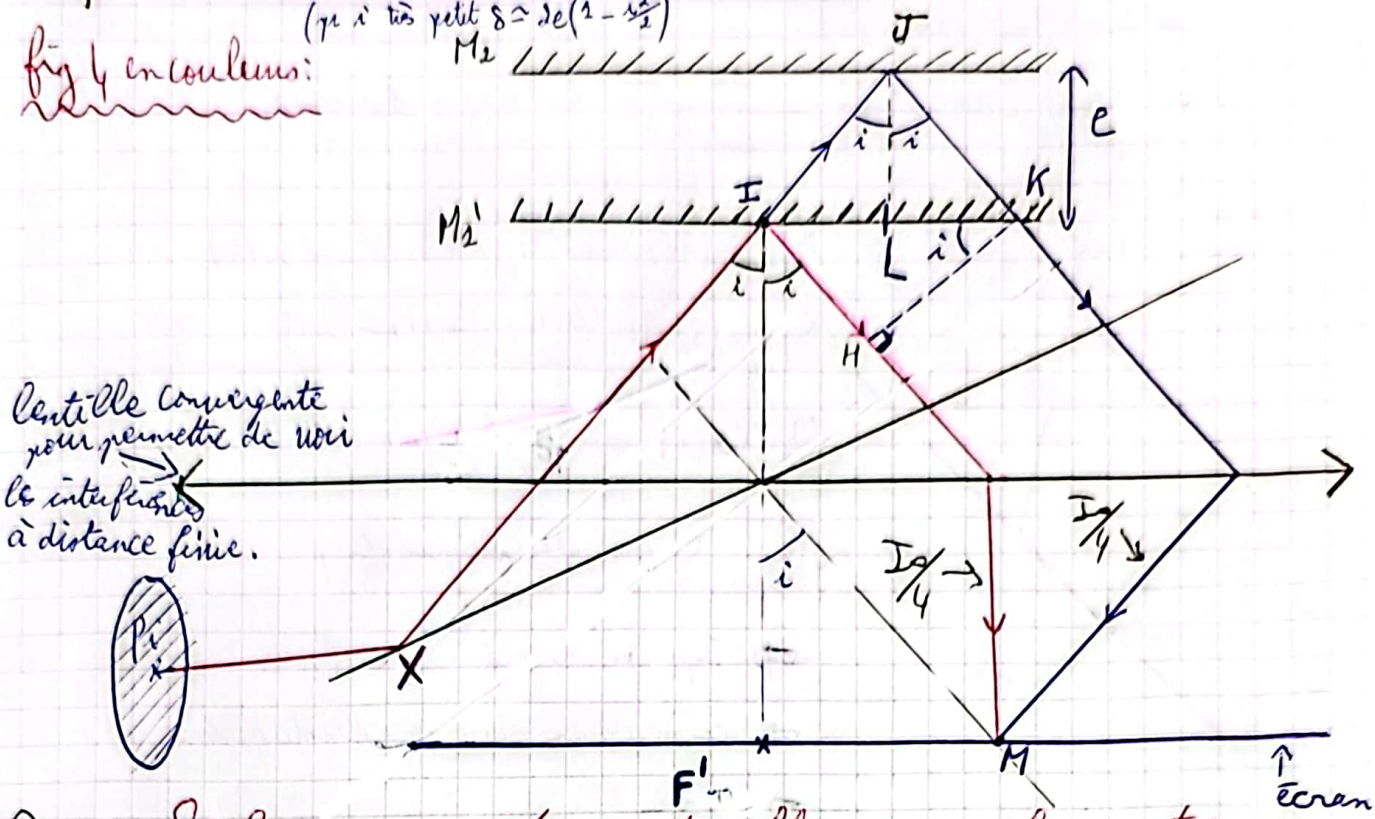


Scanné avec CamScanner

Mq : $\boxed{\delta = 2e\cos i}$ (observation transversale).

(pr i très petit $\delta \simeq 2e(1 - \frac{i^2}{2})$)

fig 4 en couleurs :



Rq : Si la source est ponctuelle monochromatique alors les interférences sont délocalisées indépendamment du système interférentiel.

Calcul de δ : voir schéma ci-dessus.

Méthode 1 : $\delta = (SM)_2 - (SM)_1$

$$\delta_{P_i} = (P_iM)_2 - (P_iM)_1$$

$$= \left[\cancel{(P_iX)} + \cancel{(XI)} + (IJ) + (JK) + (KM)\right] - \left[\cancel{(P_iX)} + \cancel{(XI)} + (IH) + (HM)\right]$$

or $(IJ) = (JK)$ et $n_{air} \simeq 1$

donc $\delta_{P_i} = 2IJ - IH + (KM) - (HM)$

or $\varphi(H) - \varphi(M) = \varphi(K) - \varphi(M)$

⚠ pas le même $\varphi(M)$ (Si la source était par exp au pt M $\varphi(H) = \varphi(K)$)

$$\Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda_0}(HM) = \frac{2\pi}{\lambda_0}(KM) \Rightarrow (HM) = (KM)$$

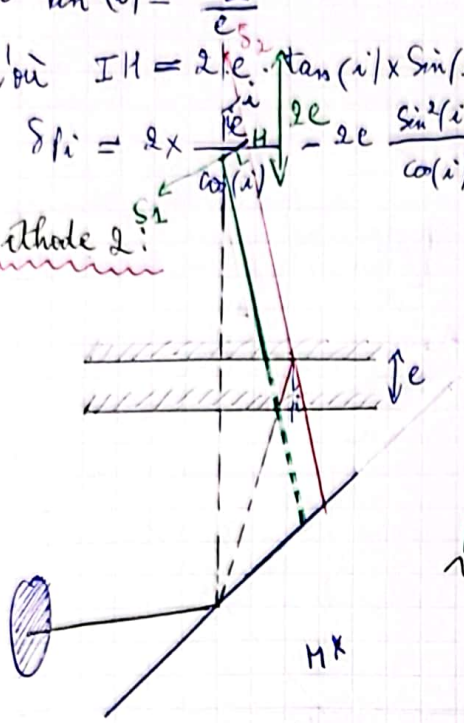
d'où $\delta_{P_i} = 2IJ - IH$ or $\begin{cases} \cos(i) = \frac{e}{IJ} \longrightarrow IJ = \frac{e}{\cos(i)} \\ \sin(i) = \frac{IH}{\ldots} \Rightarrow IH = 2IL\sin(i) \end{cases}$

Scanné avec CamScanner

or $\tan(i) = \frac{IL}{e}$

d'où $IH = 2e \cdot \tan(i) \times \sin(i)$

$\delta p_i = 2 \times \frac{IH}{\cos(i)} - 2e \frac{\sin^2(i)}{\cos(i)} = \frac{2e}{\cos(i)} (1 - \sin^2(i)) = 2e\cos(i)$



Méthode 2 :

$\delta p_i = (SH)_2 - (SM)_1 \overset{\downarrow}{=} (S_2M) - (S_1M)$

$\delta p_i = (S_2H) + (HM) - (S_1M) = S_2H$

or $\cos(i) = \frac{S_1H}{2e} \Rightarrow \delta p_i = 2e\cos(i)$

Rq (2) : δp_i ne dépend pas de p_i

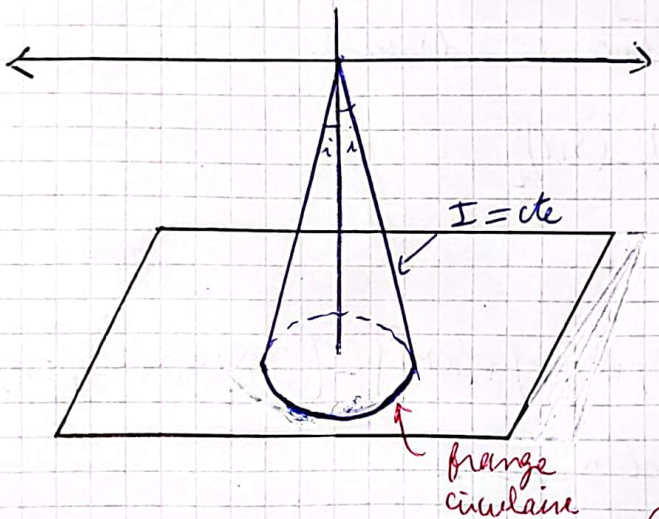
$\Rightarrow I_{p_i}$ ne dépend pas de p_i

$\Rightarrow$ coïncidence des figures d'interférence

$\Rightarrow C = 1$

Rq (2) : les franges sont tq $I = cte \Rightarrow \delta = cte \Rightarrow i = cte$

$\Rightarrow$ franges d'égale inclinaison = Franges circulaires



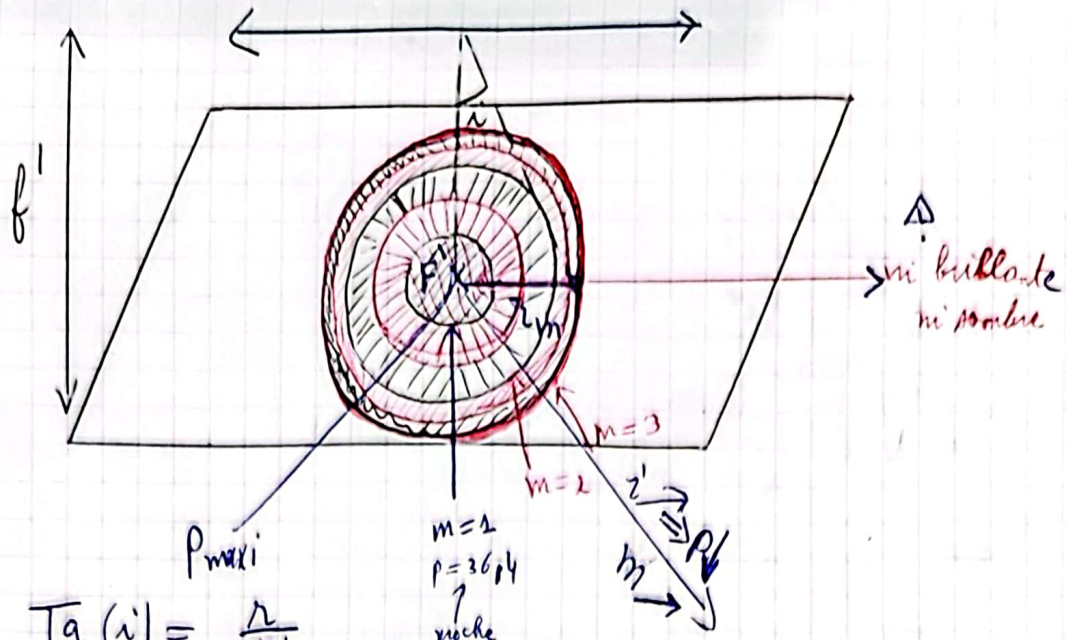
$p(i) = \frac{2e}{\lambda_0}\cos(i)$

a) Rayons des anneaux lumineux :

Rq : $r_m = f' \sqrt{\frac{\lambda_0}{e}(\varepsilon + m - 1)}$ → voir si m commence par 1 ; 0 ... etc (si 0 pas de -1) (pour les franges vues dans cette expérience)

avec : $m \geq 1$ est le numéro d'une frange brillante et ε est la partie fractionnaire de p_{max}

Scanné avec CamScanner



$$Tg(i) = \frac{r}{f'}$$

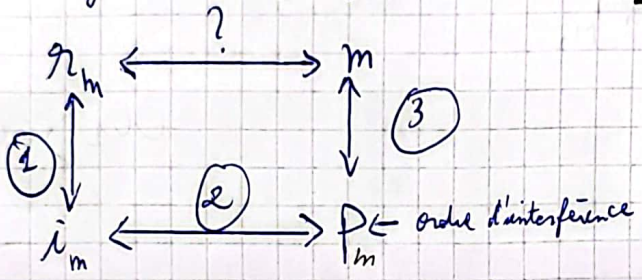
m = 1
$\rho = 36{,}4$
proche d'être sombre car demi-entier proche d'un
ne peut pas être 36,5 par exemple car il va rencontrer en premier lieu 36,5 qui est un demi-entier correspondant à une frange sombre donc on a une frange brillante

$$\Rightarrow r = f' \times Tg(i)$$

Or i est faible (c'est le cas expérimentalement)

$$\Rightarrow r = f' \times i$$

Soit r_m le rayon d'une frange brillante $\Rightarrow$ $\boxed{r_m = f' \times i_m}$ (1)



l'ordre d'interférence est $p = \frac{2e}{\lambda_0} = p_{max}$ en général n'est pas un entier ou demi-entier $\Rightarrow$ le centre n'est pas en général une F.B ou une F.S.

l'ordre d'interférence d'une F.B est : $p_m = \frac{2e}{\lambda_0}\cos(i_m)$

$$\Rightarrow p_{max} - p_m = \frac{2e}{\lambda_0} - \frac{2e}{\lambda_0}\cos(i_m) = \frac{2e}{\lambda_0}\left[1 - \cos(i_m)\right]$$

$$p_{max} - p_m = \frac{2e}{\lambda_0}\left[1 - \left(1 - \frac{i_m^2}{2}\right)\right] = \frac{e\, i_m^2}{\lambda_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{i_m = \sqrt{\frac{\lambda_0}{e}(p_{max} - p_m)}} \quad (2)$$

$$p_m = E(p_{max}) - m + 1 \Rightarrow p_{max} - p_m = \underbrace{p_{max} - E(p_{max})}_{\varepsilon} + m - 1$$

$$\Rightarrow \boxed{p_{max} - p_m = \varepsilon + m - 1} \quad (3)$$

Scanné avec CamScanner

D'après ① ; ② et ③ : $\left\{ r_m = f' \sqrt{\frac{\lambda_0}{e}(\varepsilon + m - 1)} \right\}$

Commentaires :

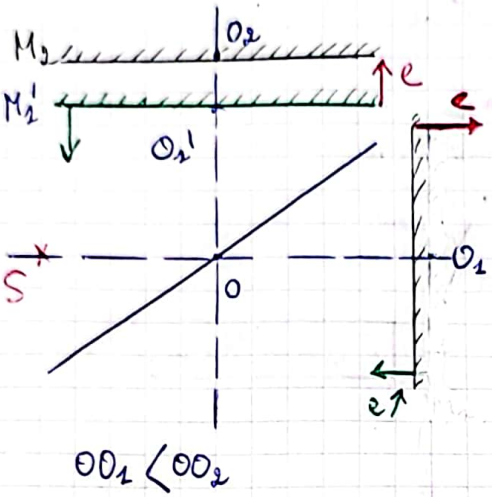
↳ Mq si $m \nearrow$; l'interfrange $r_{m+1} - r_m \searrow$

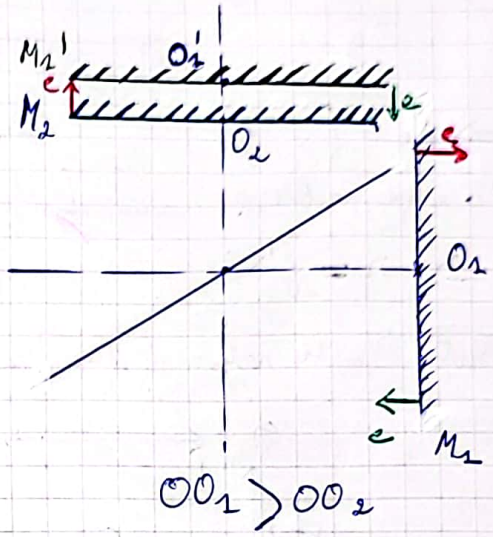
$$r_{m+1} - r_m = f' \sqrt{\frac{\lambda_0}{e}} \left[\sqrt{\varepsilon + m} - \sqrt{\varepsilon + m - 1} \right]$$

$$r_{m+1} - r_m = f' \sqrt{\frac{\lambda_0}{e}} \frac{(\varepsilon + m) - (\varepsilon + m - 1)}{\sqrt{\varepsilon + m} + \sqrt{\varepsilon + m - 1}} = f' \sqrt{\frac{\lambda_0}{e}} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon + m} + \sqrt{\varepsilon + m - 1}}$$

Si $m \nearrow \Longrightarrow r_{m+1} - r_m \searrow$

↳





Scanné avec CamScanner

Rq: p cte $\Rightarrow$ $\delta = cte \Rightarrow e\cos(i') = cte$

- Si $e \nearrow \Rightarrow \cos i \searrow \Rightarrow i \nearrow \Rightarrow r \nearrow$ les anneaux **défilent vers l'extérieur** ce qui augmente leur nombre
- Si $e \searrow \Rightarrow r \searrow$ les anneaux **défilent vers le centre** ce qui diminue leur nombre

Si on fait varier **e** et qu'on regarde une frange donnée ($p = cte$) alors le rayon de l'anneau varie si $e \nearrow r \nearrow$ et si $e \searrow r \searrow$ (voir ci-dessus)

↳ Si $e = 0$ "contact optique" car M_1' est confondu avec M_2.

$\Downarrow \delta = 2e\cos i$

$\delta = 0 \ \forall i \Rightarrow I = 2 \times \frac{I_0}{4}[2+1] = I_0 \ \forall i$

$\Rightarrow$ écran uniformément éclairé, c'est **la teinte plate**

erreur classique: raisonner sur $r_m = f'\sqrt{\frac{\lambda_0}{e}(\epsilon + m - 1)}$ en disant $e \nearrow \Rightarrow r_m \searrow$ en effet **m** change

R/ mesure de l'écart du doublet jaune de Sodium $\Delta\lambda$: (0,6 nm).

↳ Trous d'Young: $I = 2I_0\left[1 + \cos\left(\frac{\pi a x}{\lambda_0 D}\Delta\lambda\right)\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{ax}{D}\right)\right]$ avec $\delta = \frac{ax}{D}$

↳ Lame d'air: $I = 2\frac{I_0}{4}\left[1 + \cos\left(\frac{\pi\delta\Delta\lambda}{\lambda_0^2}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\delta\right)\right]$ avec $\boxed{\delta = 2e\cos(i)}$

Au centre $i = 0$: $I = \frac{I_0}{2}\left[1 + \cos\left(\frac{2\pi e\Delta\lambda}{\lambda_0^2}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \times 2e\right)\right]$

$C = |V| = \left|\cos\left(\frac{2\pi e\Delta\lambda}{\lambda_0^2}\right)\right|$

$C = 0 \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda_0^2} e_n \Delta\lambda = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \Rightarrow \boxed{e_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda_0^2}{2\Delta\lambda}}$

⊕ $e_{n+1} - e_n = \frac{\lambda_0^2}{2\Delta\lambda} \Rightarrow \Delta\lambda = \frac{\lambda_0^2}{2(e_{n+1} - e_n)}$

↳ δe (erreur de mesure)

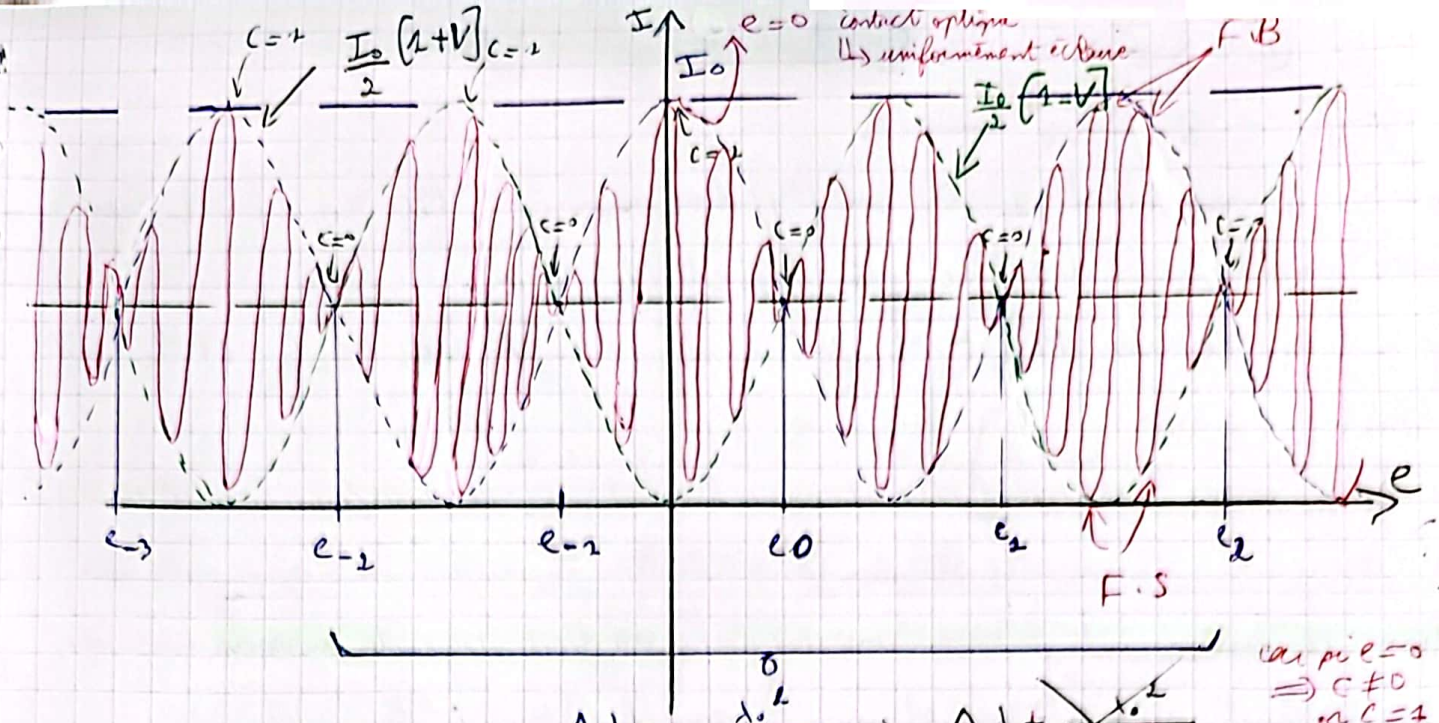
⊕ $e_{n+10} - e_n = 10 \times \frac{\lambda_0^2}{2\Delta\lambda} \Rightarrow \Delta\lambda = \frac{\lambda_0^2}{2 \times \frac{(e_{n+10} - e_n)}{10}}$

↳ δe pr $e_{n+10} - e_n$

$e_{n+1} - e_n = \frac{e_{n+10} - e_n}{10}$

↳ $\delta e' = \frac{\delta e}{10}$ (erreur divisée par 20)

Scanné avec CamScanner



$$\Delta\lambda = \frac{\lambda_0 \cdot 2}{2 \cdot \frac{d}{4}} \quad ; \quad \Delta\lambda \neq \frac{\lambda_0 \cdot 2}{2 \cdot \frac{d}{5}}$$

car pr $e=0$ $\Rightarrow C \neq 0$ or $C=1$ cause fréquente d'erreur dans le T.P

|e| ↓ défilement vers le centre (cela dépend du sens de mesure de e)

défilement vers l'extérieur (cela dépend du sens de mesure de e)

en effet l'erreur est la suivante; arrivé à $e=0$; l'écran paraît ayant un contraste nul or il est $\neq 0$; cela est dû au contact optique. pour le détecter il suffit de remarquer le changement de sens lors du défilement des franges (→ intérieur ou vers l'extérieur (centre) ou vice-versa).

4) fonctionnement en coin d'air:

Dans ce fonctionnement O_1' est confondu avec O_2 mais M_1' est légèrement incliné par rapport à M_2 tel que l'angle α entre M_1' et M_2 est très faible.

a) Sources secondaires: voir fig (5)

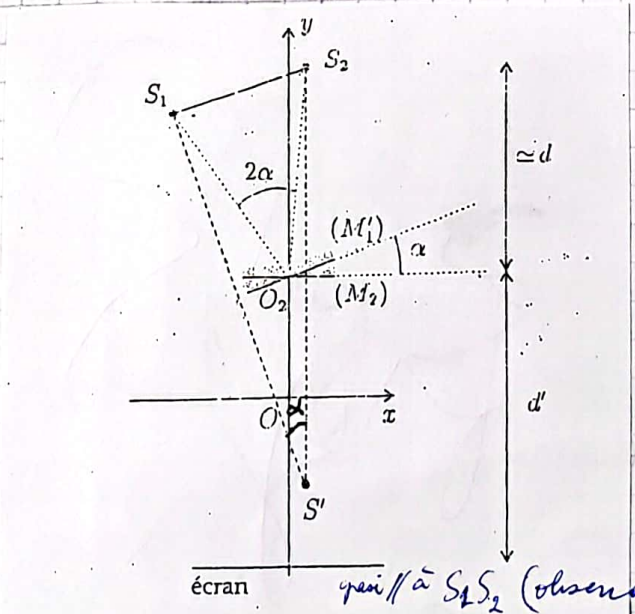


Figure 5 – Sources secondaires avec le système équivalent.

Dans O

Scanné avec CamScanner

Rayon ② : $S \xrightarrow{S_1} S' \xrightarrow{M_2} S_2$

Rayon ① : $S \xrightarrow{S_1} S' \xrightarrow{M_2'} S_1$

* S_1S_2 est quasiment $\perp$ à l'axe (Oy) donc quasi // à l'écran d'où les franges sont rectilignes.
* Si l'angle entre M_1' et M_2 est α alors l'angle entre O_2S_2 et O_2S_2 est 2α.
* Si la source S est ponctuelle et monochromatique, les interférences sont délocalisées

b) éclairage par une source étendue spatialement et monochromatique :

Dans ce cas les interférences sont localisés au voisinage des miroirs avec un bon contraste si l'éclairage est quasi - normal (fig 6).

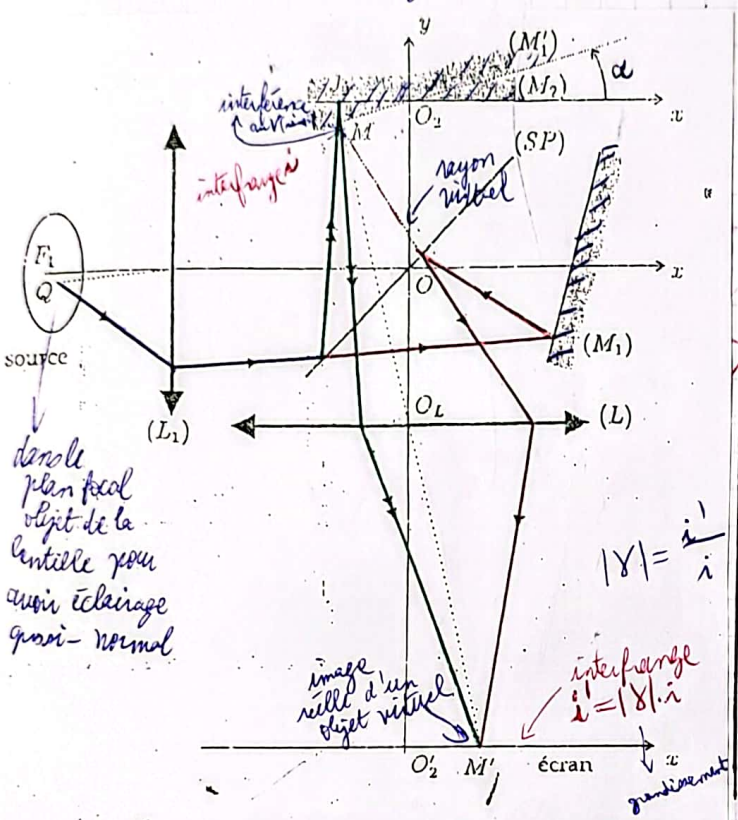


Figure : 6 – Montage pour l'observation des franges d'égale épaisseur.

Rq : expérimentalement, on ne voit pas la figure d'interférence au voisinage du miroir M_2 que si on se laisse en effet ; physiquement il n'y a pas de figure d'interférence car les 2 rayons qui interfèrent sont issus de 2 rayons (le premier réel et l'autre virtuel) c'est la lentille convergente du cristallin de l'oeil qui permet l'interférence au niveau de la rétine l'image est alors réelle issu d'un objet virtuel (fig au V(miroirs)).

c) Calcul de la différence de marche : Goniomètre | CCP 2006 | CNC 2014

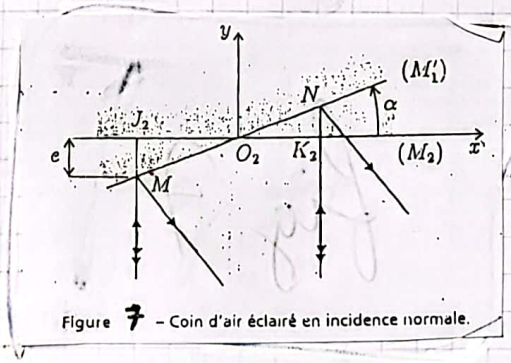
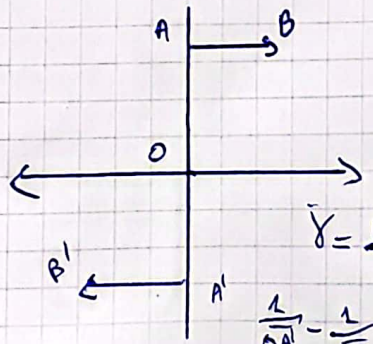
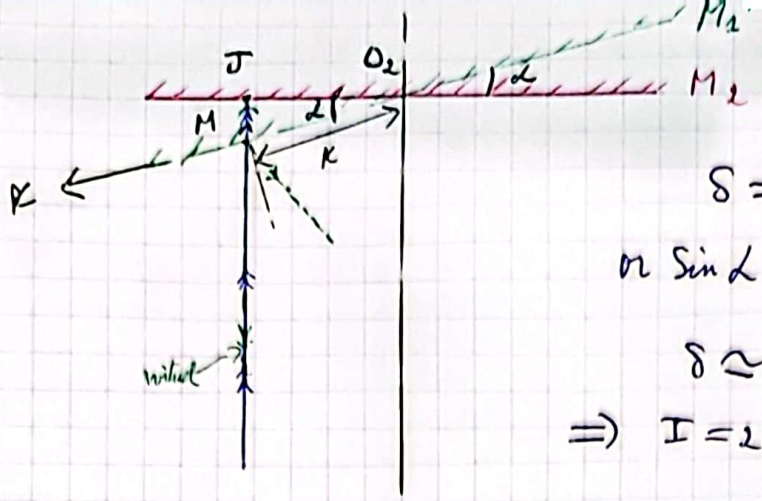


Figure 7 – Coin d'air éclairé en incidence normale.



Scanné avec CamScanner



$$\delta = (MJ) + (JM) = 2JM$$

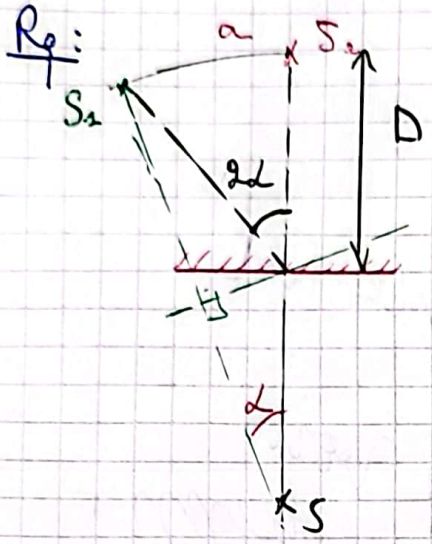
or $\sin\alpha = \frac{JM}{K} \Rightarrow JM = K\sin\alpha \simeq K\alpha$

$$\delta \simeq 2\alpha K$$

$$\Rightarrow I = 2\frac{I_0}{4}\left[1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} 2\alpha K\right)\right]$$

les franges sont tq $I = cte \Rightarrow K = cte$: Franges rectilignes
(en effet ; l'observation est longitudinale)

Rq :



$\delta = \frac{aK}{D}$ (observation longitudinale)

or $a = S_1S_2$ et D : distance entre S_1S_2 et l'écran (M_1')

or $2\alpha \simeq \frac{a}{D} \Rightarrow \delta = 2\alpha K$

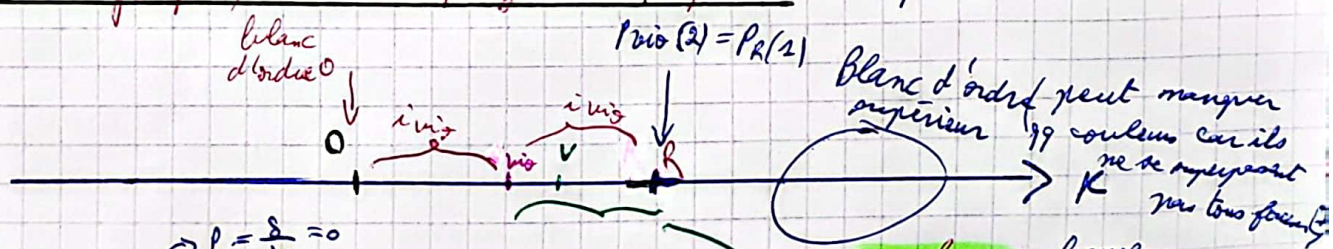
d/ interfrange : $I = \frac{I_0}{2}\left[1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} 2\alpha K\right)\right]$

les F.B sont tq $I = I_{max} \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda_0} 2\alpha K_n = 2n\pi \Rightarrow K_n = n\frac{\lambda_0}{2\lambda}$

or $i = K_{n+1} - K_n$ d'où $i = \frac{\lambda_0}{2\alpha} \Rightarrow i = cte \Rightarrow$ ces franges rectilignes sont dites franges d'égale épaisseur. ~~(car l'interfrange est cte).~~

Rq : pour que i ne soit pas très faible, il faut que α soit très faible.

e) éclairage par une source polychromatique : i dépend de λ



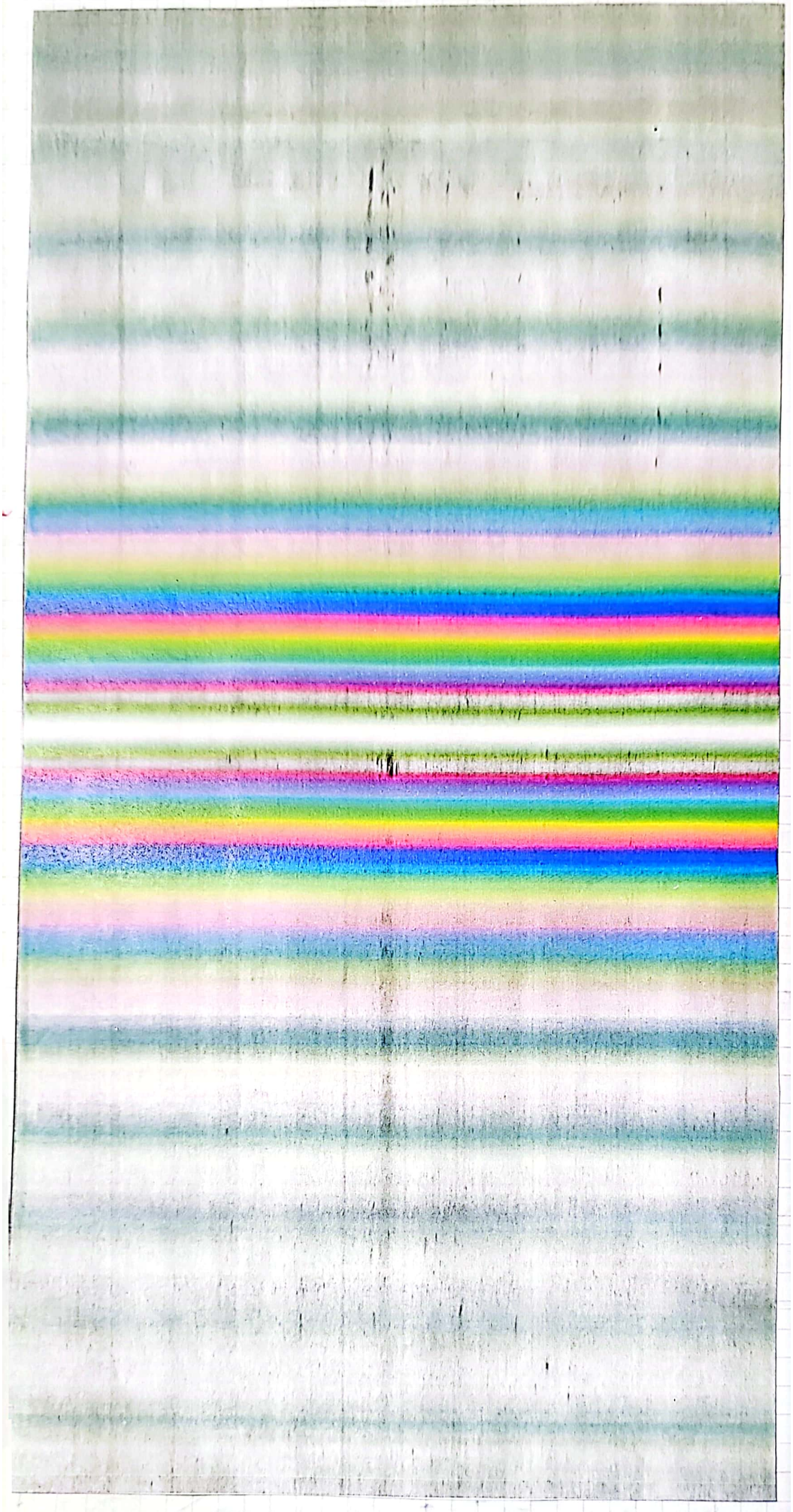
Blanc d'ordre supérieur peut manquer qq couleurs car ils ne se superposent pas tous facilement

cannelures = franges

franges irisées

⊕ au centre $K = 0$ ($\rightarrow p = \frac{\delta}{\lambda_0} = 0$) $\Rightarrow I = I_0 \ \forall \lambda \Rightarrow$ blanc

⊕ $\lambda_R = 2\lambda_{vio} \rightarrow i_R = 2 i_{vio}$

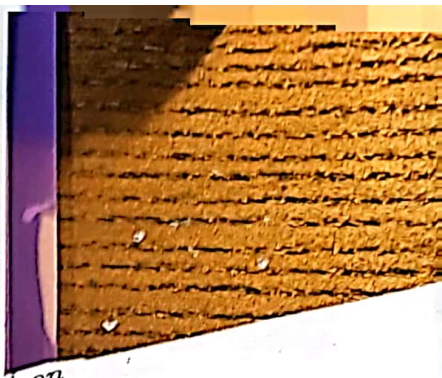


Scanné avec CamScanner

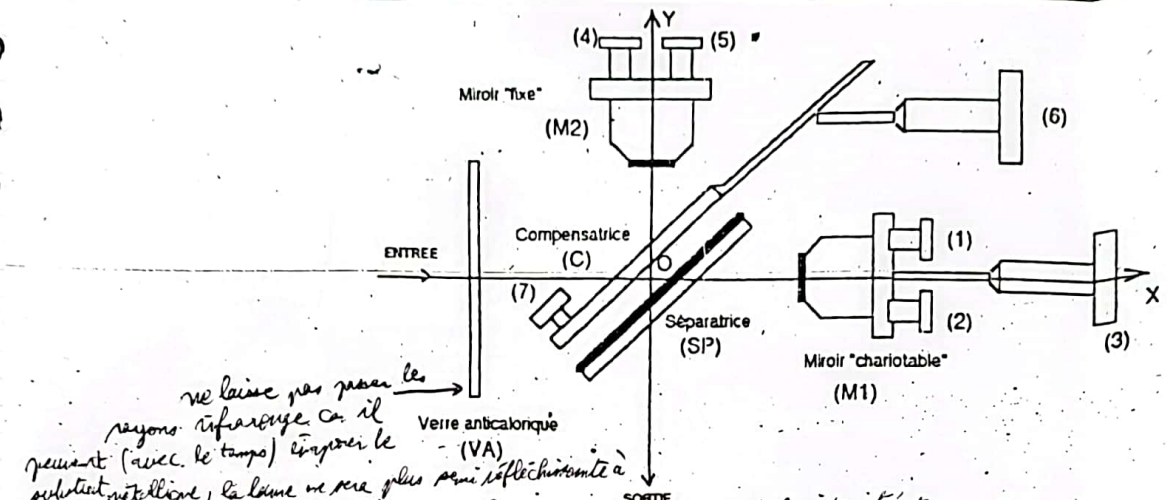
Dans le blanc d'ordre supérieur il y'a présence de plusieurs λ. Ce qui donne l'impression que ce soit blanc, mais en réalité il y'a des longueurs d'ondes éteintes (= absentes), on dit qu'il y'a des cannelures càd des raies sombres et brillantes, ce qui constitue un spectre cannelé.

5) Interféromètre de michelson réel.

a) présentation:



Présentation de l'appareil d'interféromètre de Michelson



ne laisse pas passer les rayons infrarouge car il peuvent (avec le temps) échauffer le système métallique, la lame ne sera plus semi réfléchissante à 50% donc les 2 rayons (transmis et réfléchis) auront 2 intensités différentes d'où altération du contraste (condition du contraste = 1 ; $I_1 = I_2$).

On y distingue principalement :

- trois lames de verre : le verre ***anticalorique*** (VA), la séparatrice (SP) et la compensatrice (C).
- deux miroirs M1 et M2.
- les différentes vis de réglage de l'interféromètre, numérotées de (1) à (7).

Les vis 1, 2, 4, 5, 6, 7 sont des vis de réglage :

- 1 et 2 permettent un réglage d'orientation « ***grossier*** » de M1
- 4 et 5 permettent un réglage d'orientation plus fin de M2
- 7 permet un réglage d'orientation de C autour d'un axe horizontal
- 6 permet un réglage d'orientation de C autour d'un axe vertical : sur certains appareils, ce dernier réglage peut être « mémorisé », la vis 6 étant graduée.
- la vis 3 enfin permet une translation de M1 (appelée souvent ***chariotage***), également repérable grâce à une graduation.

b) nécessité de la lame compensatrice:

Scanné avec CamScanner

Le dispositif séparateur

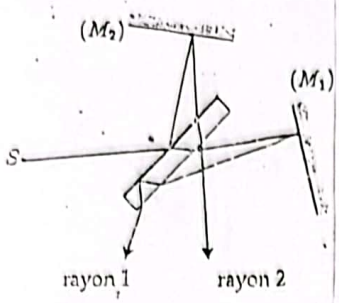


Figure 8 – Trajet des rayons en l'absence de la compensatrice.

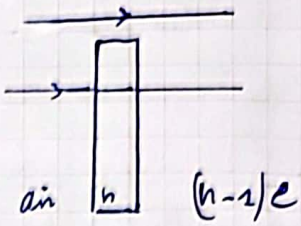
lame d'air

$\delta = \begin{cases} 2e\cos(i) \\ 2jk \end{cases} + \delta_{L_3} \neq (3-1)(n-1)e$

erreur car incidence non normale.

$2jk$: car dans l'air

δ_{L_3} difficile à calculer



Le rayon 1 traverse 3 fois la séparatrice alors que le rayon 2 ne la traverse qu'une seule fois. Il en résulte une différence de marche supplémentaire δL_3 - pour compenser cette différence de marche, on introduit une lame à faces // identique et // à la séparatrice dite compensatrice.

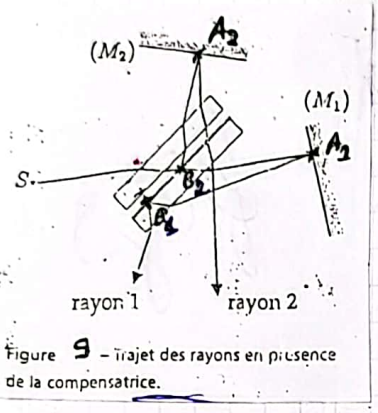


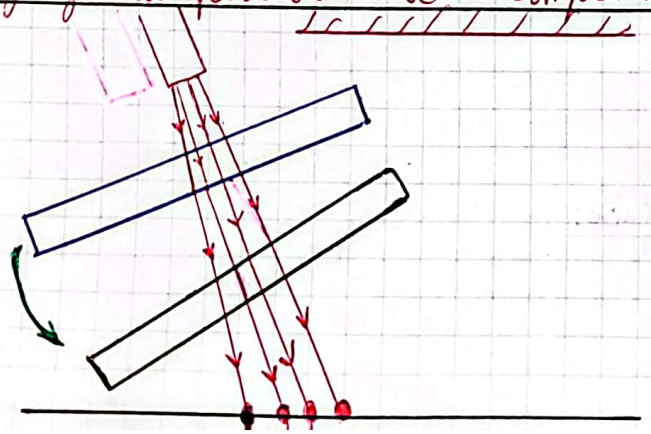
Figure 9 – Trajet des rayons en présence de la compensatrice.

c) différence de marche physique :

le rayon 1 subit une réflexion métallique sur le miroir M_1 au point A_1 et pas de réflexion vitreuse au point B_1.

Le rayon 2 subit une réflexion vitreuse sur la séparatrice au point B_2 et une réflexion métallique sur le miroir M_2 au point A_2 (voir fig. 9) d'où une différence de marche physique : $\delta_{phys} = \underbrace{2\frac{\lambda_0}{2}}_{\text{rayon 2}} - \frac{\lambda_0}{2} = \frac{\lambda_0}{2}$

d) Réglage du parallélisme de la compensatrice et séparatrice :



Écran

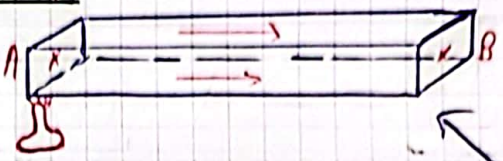
Scanné avec CamScanner

Diffusion thermique :

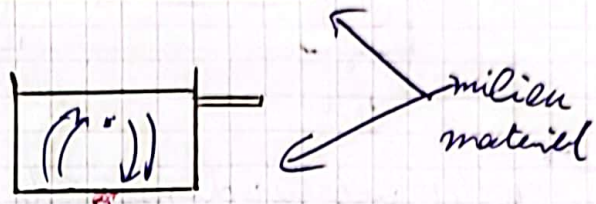
Les électrons participent plus que les atomes au transfert thermique
ainsi en règle générale, un bon conducteur électrique est aussi un bon conducteur thermique

3 types de transferts thermiques :

↳ conduction thermique :



↳ conduction thermique :



chaud → haut
froid → bas

$T \nearrow$ $e \searrow$

↳ Rayonnement thermique :

I) Les modes de transferts thermiques : il existe 3 types (modes) de transfert thermique.

- **Conduction thermique** : c'est un transfert thermique à travers un milieu matériel, ce transfert est dû à l'agitation thermique sous déplacement microscopique de la matière.

- **Convection thermique** : C'est un transfert thermique dû à un déplacement macroscopique de la matière. On distingue 2 types de transferts thermique par convection : naturel et forcé (ventilateur pc)

- **Rayonnement thermique** : C'est un transfert thermique qui se fait par l'intermédiaire des ondes électromagnétiques. (donc peut se faire dans le vide)

1) Conduction électrique (Loi d'OHM) :

↳ locale : $\boxed{\vec{J_e} = \gamma \vec{E}}$

milieu linéaire

γ uniforme ↑ homogène

γ scalaire (pas matrice) ↑ isotrope

$\vec{J_e} \neq \gamma \vec{E}$ si $\vec{E}$ est intense (modèle de Drude n'est plus valable)

or $\vec{E} = -\vec{grad}\, V$ (Régime stationnaire)

⚠ dans l'ARQS ou dans le régime variable en effet ;

$$\vec{E} = -\vec{grad}\, V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$ donc

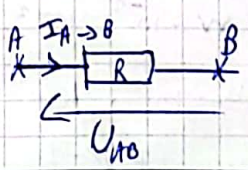
$\vec{J}$ dirigé vers les potentiels ↓

↳ Intégrale :

$\boxed{U = R \cdot I}$ avec :

$I = \iint \vec{J_e} \cdot \vec{dS}$: Flux de $\vec{J_e}$

$U = V_A - V_B = -\int_B^A \vec{E} \cdot \vec{dl}$



$$R = \frac{V_A - V_B}{I_{A \to B}}$$

$$\boxed{\underbrace{\vec{J_e}}_{\text{effet}} = -\underbrace{\gamma}_{\text{conductivité électrique } (S.m^{-1})} \underbrace{\vec{grad}\, V}_{\text{cause}}}$$

Loi d'ohm locale

$\vec{grad}\, V \to \vec{J_e}$

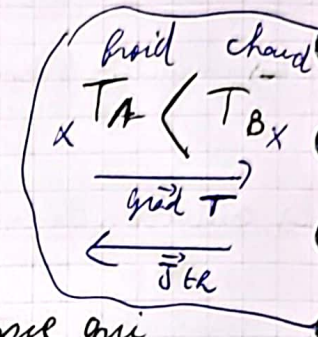
↳ vecteur densité volumique de courant qui caractérise le déplacement du fluide

2) Conduction thermique : Loi de Fourrier :

L'inhomogenéité de la température dans un milieu matériel sans mouvement macroscopique engendre un transfert thermique par conduction qui se traduit par une loi phénoménologique dite loi de Fourrier.

$$\vec{J}_{th} = -\lambda \cdot \overrightarrow{grad}\, T$$

effet — cause



avec : * $\vec{J}_{th}$ est le vecteur densité de flux thermique qui s'exprime en $W.m^{-2}$

* $\overrightarrow{grad}(T)$ est une variation spatiale linéaire de la température qui s'exprime en $K.m^{-1}$ (ou $°C.m^{-1}$)

* λ est la conductivité thermique qui s'exprime en $W.m^{-1}.K^{-1}$, C'est une grandeur physique qui caractérise la capacité à diffuser la chaleur dans un milieu sans déplacement macroscopique de la matière

* On définit le flux thermique ou la puissance thermique par :

$$\Phi_{th} \text{ ou } P_{th} = \iint \vec{J}_{th} \cdot d\vec{S}$$

Rq :

$$J_{th} = \frac{P_{th}}{S} = \frac{1}{S}\frac{\delta(\mathcal{E}_{th})}{dt}$$

l'analogue de l'énergie thermique est la charge

$$J_e = \frac{I}{S} = \frac{1}{S}\frac{\delta(Q)}{dt}$$

l'analogue de la puissance électrique est l'intensité

QDC :

$\lambda_{métal} = 400\ W.m^{-1}.K^{-1}$

$\lambda_{bois} = 0,2\ W.m^{-1}.K^{-1}$

$\lambda_{eau} = 0,6\ W.m^{-1}.K^{-1}$

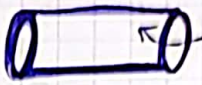
$\lambda_{air} = 0,03\ W.m^{-1}.K^{-1}$

Conclusion : Un bon conducteur électrique est un bon conducteur thermique.

Rq : La loi de Fourrier n'est pas valable dans les cas suivants :

Scanné avec CamScanner

* Forte variation spatiale de la température
* variation rapide dans le temps du gradient de la température (retard dans l'établissement du flux thermique) mais elle est valable dans le cas d'une variation lente au cours du temps.

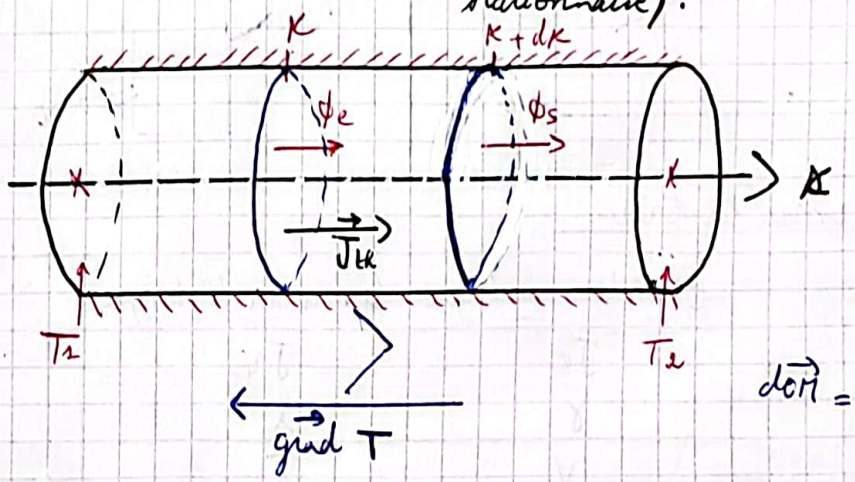


3) Bilan thermique unidimentionnel en régime stationnaire :

Considérons une barre cylindrique de section S de longueur L calorifugée latéralement. Les températures aux extrémités $\begin{cases} T(x=0) = T_1 \\ T(x=L) = T_2 \end{cases}$ avec $T_1 > T_2$

↳ pour avoir J_{th} unidimentionnel.

établir l'expression de $T(x)$ (pas de temps en régime stationnaire).



$$\overrightarrow{dOM} = \begin{vmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{vmatrix}$$

Bilan thermique :

$$\phi = \iint \vec{J}_{th} \cdot \vec{dS} = \iint_{T} J_{th}\,\vec{u_x} \cdot dS \cdot \vec{u_x} = \iint J_{th} \cdot dS$$

($dS = dy\,dz$; unidimentionnel)

or $\vec{J}_{th} = -\lambda\,\overrightarrow{grad}\,T = -\lambda \left[\frac{\partial T}{\partial x}\vec{u_x} + \frac{\partial T}{\partial y}\vec{u_y} + \frac{\partial T}{\partial z}\vec{u_z} \right]$ ($\vec{u_y}$ et $\vec{u_z}$: 0)

donc $\vec{J}_{th} = -\lambda \frac{dT}{dx}\vec{u_x}$ $\qquad \vec{J}_{th} = J_{th} \cdot \vec{u_x}$

D'où $\phi = -\lambda \iint \frac{dT}{dx}\,dS = -\lambda \frac{dT}{dx} \iint dS = -\lambda S \frac{dT}{dx}$

($\frac{dT}{dx}$ ne dépend pas de y et z)

$$\phi = -\lambda S \frac{dT}{dx}$$

(ϕ suivant $\vec{x}$)

d'où $\begin{cases} \phi_e = -\lambda \cdot S \cdot \left(\frac{dT}{dx}\right)_x \\ \phi_s = -\lambda \cdot S \cdot \left(\frac{dT}{dx}\right)_{x+dx} \end{cases}$

Scanné avec CamScanner

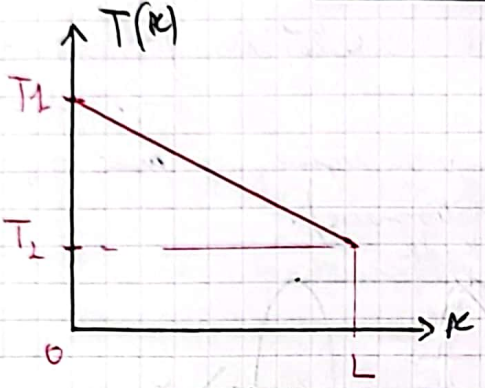
or $\phi_e = \phi_s$ (Régime stationnaire)

$T(M,t) = T(M)$

$\Rightarrow \left.\frac{dT}{dx}\right|_x = \left.\frac{dT}{dx}\right|_{x+dx} \Rightarrow \frac{dT}{dx} = A$

$T(x) = Ax + B$ ← C.I

$$\boxed{T(x) = \frac{T_2 - T_1}{L}x + T_1}$$



Rq: $\phi_e > \phi_s \Rightarrow T(t) \nearrow$

$\phi_e < \phi_s \Rightarrow T(t) \searrow$

Si $D_e = D_s \Rightarrow m = c$

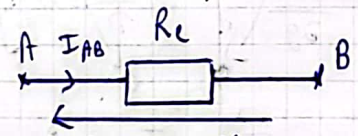
Si $D_e > D_s \Rightarrow m \nearrow$

Si $D_e < D_s \Rightarrow m \searrow$.

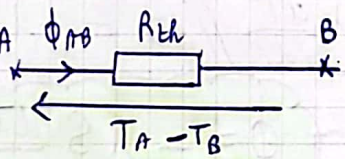
4) Analogie thermoélectrique:

Grandeur électrique	Grandeur thermique
J_e	J_{th}
γ	λ
V	T
I	P_{th} ou Φ_{th}
$U = V_A - V_B$	$\Delta T = T_A - T_B$
Q	E_{th}
R_e	R_{th}

5) Résistance thermique:



$$R_e = \frac{U_{AB}}{I_{AB}} = \frac{V_A - V_B}{I_{A \to B}}$$



$$R_{th} = \frac{T_A - T_B}{\phi_{A \to B}}$$

R_{th} est la résistance thermique qui détermine si le matériau résiste ou non au transfert thermique. ($R_{th\,Bois} > R_{th\,métal}$)

Scanné avec CamScanner

↳ Si la paroi est diatherme : $T_A = T_B \Rightarrow R_{th} = 0$

↳ Si la paroi est athermane : $\phi = 0 \Rightarrow R_{th} \to \infty$

Exp de calcul de R_{th} :

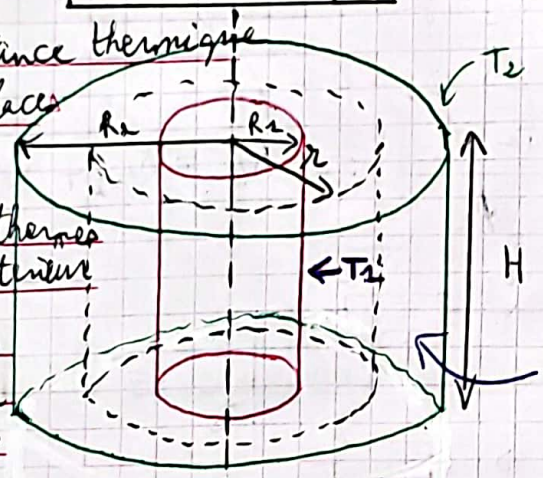
① Barre cylindrique calorifugée latéralement :

$$R_{th} = \frac{T_1 - T_2}{\phi_{1\to 2}} \quad \text{or} \quad \phi_{1\to 2} = -\lambda \frac{dT}{dx} S = -\lambda \frac{T_2 - T_1}{L} S$$

$$= \frac{\lambda S}{L}(T_1 - T_2)$$

donc $\boxed{R_{th} = \frac{1}{\lambda}\frac{L}{S}}$ Analogie fil électrique de longueur L de section S : $R_e = \frac{1}{\gamma}\frac{L}{S}$.

② Résistance thermique entre 2 surfaces cylindriques coaxiales isothermes de rayon intérieur R_1, de rayon extérieur R_2 et de hauteur h.



$$R_{th} = \frac{1}{2\pi H \lambda} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

$$R_{th} = \frac{T_1 - T_2}{\phi_{1\to 2}} \; ; \; \phi_{2\to 2} = \iint \vec{J}_{th} \cdot d\vec{S} = -\lambda \iint \overrightarrow{grad}\, T \cdot d\vec{S}$$

$$\overrightarrow{grad}\, T = \frac{\partial T}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{\partial T}{\partial z}\vec{u}_z$$

$$\overrightarrow{dOM} = \begin{vmatrix} dr \\ r\,d\theta \\ dz \end{vmatrix}$$

$$\phi_{1\to 2} = -\lambda \iint \frac{\partial T}{\partial r}\vec{u}_r \cdot dS \cdot \vec{u}_r = -\lambda \iint \frac{\partial T}{\partial r} r\, d\theta\, dz$$

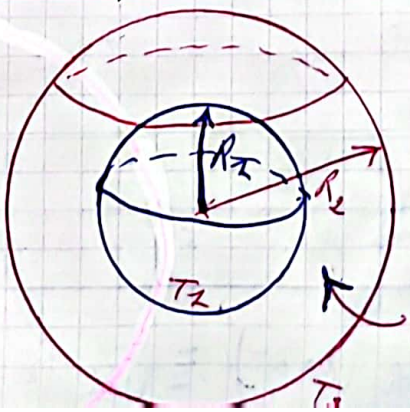
$$\phi_{1\to 2} = -\lambda r \frac{\partial T}{\partial r} \iint d\theta\, dz = -2\pi\lambda H r \frac{dT}{dr}$$

$$\Rightarrow \int_{T_1}^{T_2} dT = \int_{R_1}^{R_2} \frac{-\phi_{1\to 2}}{2\pi\lambda H}\frac{dr}{r} \Rightarrow T_2 - T_1 = \frac{-\phi_{1\to 2}}{2\pi\lambda H}\ln(R_2/R_1)$$

$$\Rightarrow T_2 - T_1 = \frac{\phi_{1\to 2}}{2\pi\lambda H}\ln(R_2/R_1)$$

③ Résistance thermique entre 2 sphères concentriques de température T_1 et T_2 :

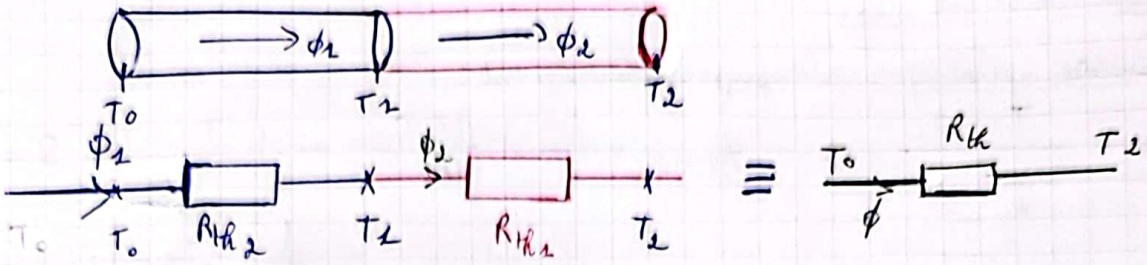
de même $R_{th} = \frac{1}{4\pi\lambda}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$



Scanné avec CamScanner

6) Associations de résistances thermiques :

a) association en série :



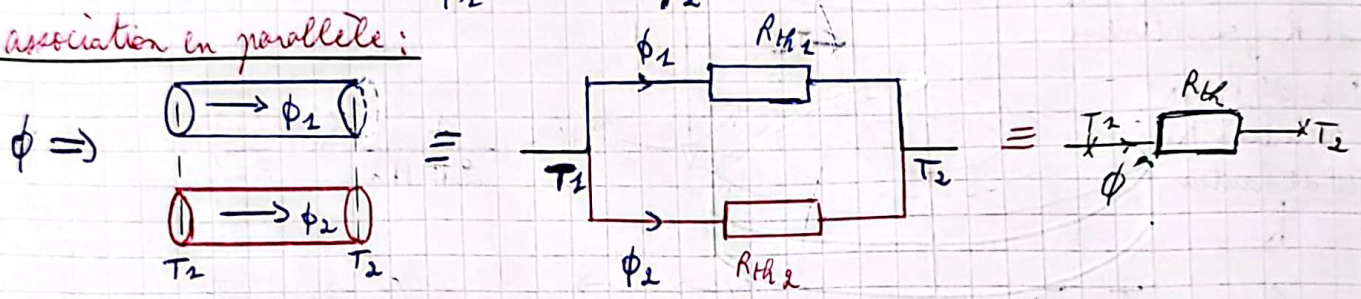
$$R_{th_1} = \frac{T_0 - T_1}{\phi_1} \quad ; \quad R_{th_2} = \frac{T_1 - T_2}{\phi_2} \quad ; \quad R_{th} = \frac{T_0 - T_2}{\phi}$$

d'où $R_{th} = \frac{(T_0 - T_1) + (T_1 - T_2)}{\phi} = \frac{T_0 - T_1}{\phi} + \frac{T_1 - T_2}{\phi}$

- or les 2 résistances sont en série $\Rightarrow \phi_1 = \phi_2 = \phi$

d'où $R_{th} = \frac{T_0 - T_1}{\phi_1} + \frac{T_1 - T_2}{\phi_2} \Rightarrow R_{th} = R_{th_1} + R_{th_2}$

b) association en parallèle :



$$R_{th_1} = \frac{T_1 - T_2}{\phi_1} \quad ; \quad R_{th_2} = \frac{T_1 - T_2}{\phi_2} \quad ; \quad R_{th} = \frac{T_1 - T_2}{\phi}$$

or les résistances sont en // : $\phi = \phi_1 + \phi_2$

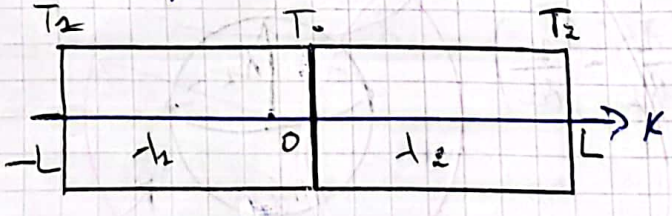
$$\frac{T_1 - T_2}{R_{th}} = \frac{T_1 - T_2}{R_{th_1}} + \frac{T_1 - T_2}{R_{th_2}} \Rightarrow \frac{1}{R_{th}} = \frac{1}{R_{th_1}} + \frac{1}{R_{th_2}}$$

c) Contact thermique : sensation du chaud et du froid :

On considère 2 cylindres en contact en $x = 0$ de même section S de longueur L et de conductivité thermique λ_1 et λ_2. Déterminer l'expression de T_0

(calorifugés latéralement)

(+ hypothèse même section).



$$\phi_1 = \phi_2 \Rightarrow j_{th}(x = 0^-) = j_{th}(x = 0^+)$$

Scanné avec CamScanner

$$-\lambda_1 \left.\frac{dT}{dx}\right)_{x=0^-} = -\lambda_2 \left.\frac{dT}{dx}\right)_{x=0^+}$$

$$\Rightarrow -\lambda_1 \frac{T_0 - T_1}{L} = -\lambda_2 \frac{T_2 - T_0}{L}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 (T_1 - T_0) = \lambda_2 (T_0 - T_2)$$

$$\Rightarrow \lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2 = (\lambda_1 + \lambda_2) T_0$$

$$\Rightarrow T_0 = \frac{\lambda_2 T_1 + \lambda_1 T_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \quad \text{Si } \lambda_1 = \lambda_2 \Rightarrow T_0 = \frac{T_1 + T_2}{2}$$

<u>ODG:</u> $\lambda_1 = \lambda_{main} = 10\ W.m^{-1}.K^{-1}$

$\lambda_2 = \lambda_{acier} = 200\ W.m^{-1}.K^{-1}$

$\lambda_2 = \lambda_{bois} = 1\ W.m^{-1}.K^{-1}$

Soit $T_1 = 37\ °C$ (Température de la main)

↳ Sensation du chaud: $T_2 = 200\ °C$

$\begin{cases} T_0(\text{main-acier}) = 94\ °C > T_1 \\ T_0(\text{main-bois}) = 43\ °C > T_1 \end{cases} \longrightarrow 94\ °C > 43\ °C$

↳ Sensation du froid: $T_2 = 10\ °C$

$\begin{cases} T_0(\text{main-acier}) = 12\ °C < T_1 \\ T_0(\text{main-bois}) = 35\ °C < T_1 \end{cases} \longrightarrow 12\ °C < 35\ °C$

<u>Rq:</u> Dans le régime variable: on n'utilise plus la conductivité mais l'effusivité $T_0 = \frac{E_1 T_1 + E_2 T_2}{E_2 + E_1}$ avec $E = \sqrt{\rho c \lambda}$ est l'effusivité

(voir CNC 2008 vers la fin).

ρ : masse volumique

C : capacité thermique massique.

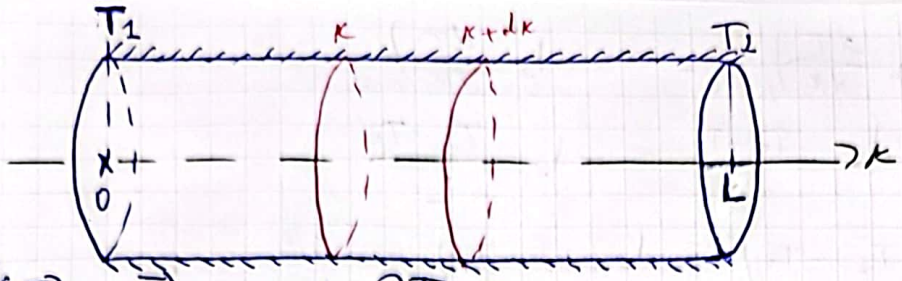
7) Bilan thermique unidirectionnel en régime variable:

a) Équation de la chaleur à une dimension:

On considère une barre cylindrique de section S de longueur L, calorifugée latéralement mais en régime variable.

Établir l'équation de la chaleur.

Scanné avec CamScanner



↳ $\phi = \iint \vec{j}_{th} \cdot \vec{ds} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} S$

$$\phi_e - \phi_s = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\Big|_x \cdot S + \lambda \frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x+dx} \cdot S$$

$$= \lambda S \left[\frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x+dx} - \frac{\partial T}{\partial x}\Big|_x \right]$$

$$= \lambda S \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) dx$$

$$\boxed{\phi_e - \phi_s = \lambda . S . dx . \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}} \quad (1)$$

↳ **1er principe de la thermodynamique :**

$dU = \delta Q + \delta W$

dU : effet ; δQ, δW : causes

dU est la variation de l'énergie interne du système (barre) entre t et $t+dt$

$d(SU) = \delta^2 Q + \delta^2 W$ ($\delta^2 W = 0$: indéformable)

$d(SU)$ est la variation de l'énergie interne de la tranche de longueur dx pendant dt.

Rappel :

- $dU = \frac{\partial U}{\partial T}\Big|_V dT + \frac{\partial U}{\partial V}\Big|_T dV$
  $= C_V dT + \frac{\partial U}{\partial V}\Big|_T dV$

  G.P → $dU = C_V . dT$ car $\frac{\partial U}{\partial V}\Big|_T = 0$ (1ère loi de Joule)

  Phase condensée → $dU = C_V . dT$ car $V = cte$

- $dH = \frac{\partial H}{\partial T}\Big|_V dT + \frac{\partial H}{\partial P}\Big|_T dP$
  $= C_P dT + \frac{\partial H}{\partial P}\Big|_T dP$

  G.P → $dH = C_P dT$ car $\frac{\partial H}{\partial P}\Big|_T = 0$ (2ème loi de Joule)

  Phase condensée → $dH = C_P dT$ car $P = cte$

avec
- GP : $\boxed{C_P - C_V = nR}$ $(C_P > C_V)$
  physiquement il est plus facile de chauffer un G.P à volume cte qu'à pression cte
- phase condensée : $C_P \simeq C_V \simeq C$.

Scanné avec CamScanner

$C_p = \frac{\delta Q_p}{dT}$ capacité thermique à $p = cte$.

$C_v = \frac{\delta Q_v}{dT}$ capacité thermique à $V = cte$.

Avec : $dU = C \cdot dT$

$\hookrightarrow d(\delta U) = \delta C \, dT$

δC : capacité thermique élémentaire

$d(\delta U) = \delta C \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \cdot dt$ (Analogie : $\frac{d\vec{\varphi}}{dt} = \frac{\partial \vec{T}}{\partial t}$ ...)

on pose $\underset{\text{intensive}}{c} = \frac{\delta C}{\delta m}$ capacité thermique massique

$\Rightarrow \delta C = c \cdot \underset{\text{extensive}}{\delta m}$ on pose $\underset{\text{intensive}}{\rho} = \frac{\delta m}{\delta \tau}$ est la masse volumique

$\Rightarrow \delta C = \rho \cdot c \cdot \delta \tau$

$\Rightarrow d(\delta U) = \rho \cdot c \cdot \delta \tau \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \cdot dt$ avec $\delta \tau = S \cdot dx$ volume de la tranche.

$\Rightarrow \boxed{\delta^2 Q = \rho \cdot c \cdot S \cdot dx \cdot \frac{\partial T}{\partial t} dt}$ (2)

$\hookrightarrow \boxed{\underset{\text{reçu = entrant - sortant}}{\delta^2 Q} = (\varphi_e - \varphi_s)\, dt}$ (3)

d'où $\rho \cdot c \cdot S \cdot dx \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \cdot dt = \lambda \cdot S \cdot dx \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dt$

d'où $\boxed{\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{1}{D} \frac{\partial T}{\partial t} = 0}$ équation de diffusion thermique (ou équation de la chaleur)

avec $D = \frac{\lambda}{\rho c}$ ($m^2 \cdot s^{-1}$) est la diffusivité thermique. (ρc : capacité thermique massique)

b) Interprétation physique :

* La dérivée temporelle est d'ordre 1 dans l'équation de la chaleur, il ne s'agit plus d'une équation de propagation mais c'est une équation de diffusion. La dérivée 1ère / au temps traduit l'irréversibilité du transfert thermique. (Le transfert thermique s'effectue de la zone chaude vers la zone froide).

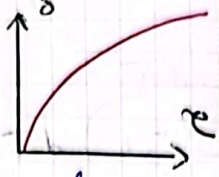
* Soit δ une distance caractéristique du phénomène de diffusion thermique et τ une durée caractéristique du même phénomène, d'où

Scanné avec CamScanner

Rappel : Voir cours OEM.

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \sim \frac{T}{\delta^2} \\ \frac{\partial T}{\partial t} \sim \frac{T}{\tau} \end{cases} \Rightarrow \frac{T}{\delta^2} - \frac{1}{D}\frac{1}{\tau} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta = \sqrt{\tau \cdot D}}$$



Rappel :

$x \to -x'$, $t \to -t'$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{1}{D}\frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

$$\downarrow$$

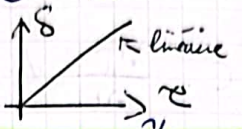
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x'^2} + \frac{1}{D}\frac{\partial T}{\partial t'} = 0$$

phénomène de diffusion irreversible ($S_c > 0$)

L'équation de D'Alembert :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow \frac{f}{\delta^2} - \frac{1}{c^2}\frac{f}{\tau^2} = 0$$

$$\Rightarrow \delta = c \cdot \tau \quad (\Delta x = c\,\Delta t)$$



Cette propriété fondamentale fait apparaître une dissymétrie de comportement entre l'espace et le temps qui est une caractéristique importante des phénomènes diffusifs.

Ordre de grandeur de D :

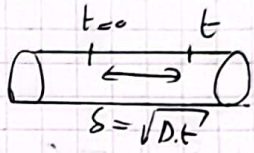
$D_{métal} = 10^{-8}\ m^2.s^{-2}$

$D_{eau} = 10^{-5}\ m^2.s^{-2}$

$D_{air} = 10^{-5}\ m^2.s^{-2}$.

$$\delta = \sqrt{\tau D} \sim \sqrt{\tau}$$

si $\delta = 1\,m$



Conséquence 1 : la durée nécessaire pour homogénéiser la température initialement inhomogène dans un solide de diffusivité $D = 10^{-4}\ m^2.s^{-2}$ de dimension δ est : $\tau = \frac{\delta^2}{D}$

$\delta = 1\,cm \longrightarrow \tau = 1\,s$

$\delta = 1\,m \longrightarrow \tau = 3\,h$

Conclusion : Les phénomènes diffusifs ne sont efficaces que à faible échelle spatiale.

Conséquence 2 : Si on augmente initialement la température au centre d'une barre, l'ordre de grandeur de la zone perturbée à l'instant t est égal à : $\delta = \sqrt{D.t}$ donc Cette croissance est rapide à $t = 0^+$ puis devient assez faible. (Voir courbe $\delta \nearrow \tau$)

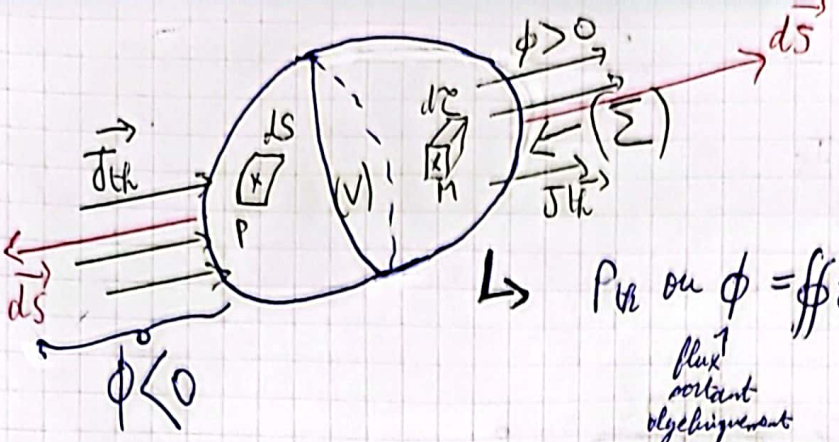
Conclusion : Les phénomènes diffusifs non entretenus s'étouffent au cours du temps.

8) Bilan thermique tridimentionnel en régime variable :

$$Mq \quad \Delta T - \frac{1}{D}\frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad ; \quad \Delta = div(\overrightarrow{grad})$$

(le volume est fixe et indéformable)

Scanné avec CamScanner



↳ P_{th} ou $\phi = \iint \vec{j}_{th} \cdot d\vec{S}$ avec $d\vec{S} = dS \cdot \vec{n}_{ext}$

flux sortant algébriquement >0 si réellement sortant et <0 sinon

$\Rightarrow \phi = \oiint_{P \in (\Sigma)} \vec{j}_{th}(P;t) \cdot d\vec{S}(P)\, \vec{n}_{ext}$ est le flux sortant

↓ théorème d'Ostrogradski

$\phi = \iiint_{M \in (V)} \text{div}\, \vec{j}_{th}(M;t)\, d\tau(M)$ où $\vec{j}_{th} = -\lambda\, \overrightarrow{\text{grad}}\, T$

$\phi = -\lambda \iiint \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}\, T) \cdot d\tau$

$\Rightarrow \delta\phi = -\lambda \cdot \Delta T(M;t) \cdot d\tau$ (1)

↳ $d(\delta U) = \delta^2 Q + 0$ avec $d(\delta U) = \delta C \cdot dT = \rho c\, d\tau \frac{\partial T}{\partial t} dt$

d'où $\delta^2 Q = \rho c\, d\tau \frac{\partial T}{\partial t} dt$ (2)

↳ $\delta^2 Q = -\delta\phi \cdot dt$ (3)

$\delta^2 Q$ ↑ reçue algébriquement ; $\delta\phi$ ↓ sortant algébriquement

de (1) ; (2) et (3) : $\rho c\, d\tau \frac{\partial T}{\partial t} dt = \lambda \Delta T(M;t)\, d\tau\, dt$

$\Rightarrow$ $\boxed{\Delta T(M;t) - \frac{1}{D} \frac{\partial T}{\partial t}(M;t) = 0.}$

3) Analogie avec l'équation locale de conservation de la charge :

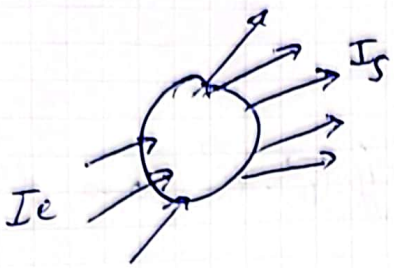
↳ Équation locale de conservation de la charge :

$\text{div}\, \vec{j}(M;t) + \frac{\partial \rho(M;t)}{\partial t} = 0$

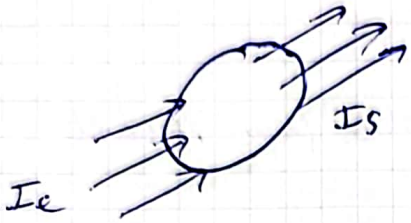
$\Rightarrow \frac{\partial \rho(M;t)}{\partial t} = -\text{div}\left(\vec{j}(M;t)\right)$

Scanné avec CamScanner

+ $\operatorname{div} \vec{j} \neq \vec{0}$ $\Leftrightarrow$ $I_e \neq I_s \Rightarrow \dfrac{\partial e}{\partial t} \neq 0$



+ $\operatorname{div} \vec{j} = \vec{0}$ $\Leftrightarrow$ $I_e = I_s \Rightarrow \dfrac{\partial e}{\partial t} = 0$



Remarque : $\dfrac{\partial e}{\partial t} = \underbrace{-\operatorname{div} \vec{j}}_{\text{terme d'échange}} + \underbrace{0}_{\text{terme de création}} + \underbrace{0}_{\text{terme de conversion (cas particulier : dissipation)}}$

$\underbrace{\dfrac{\partial e}{\partial t}}_{\text{effet}}$

En général les causes de variation d'une grandeur physique sont :

$$dX = \delta X_e + \delta X_{cr} + \delta X_{conv}$$

↳ équation locale de conservation de l'énergie électromagnétique :

$$\underbrace{\frac{\partial u_{em}}{\partial t}}_{\text{effet}} = \underbrace{-\operatorname{div} \vec{\Pi}}_{\text{échange}} + \underbrace{0}_{\text{création}} + \underbrace{(-\vec{j} \cdot \vec{E})}_{\text{conversion}}$$

↳ équation locale de conservation de l'énergie thermique :

$$\Delta T(M;t) - \frac{1}{D} \frac{\partial T(M;t)}{\partial t} = 0 \Rightarrow \operatorname{div}(\overrightarrow{\text{grad}}\, T) - \frac{\rho c}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

$$\operatorname{div}(-\lambda \overrightarrow{\text{grad}}\, T) + \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{div} \vec{j}_{th}(M;t) + \rho c \frac{\partial T(M;t)}{\partial t} = 0}$$

équation locale de conservation de l'énergie thermique.

$W.m^{-3}$ $\qquad$ $\rho c T(M;t) = u_{th}$

$$\underbrace{\rho c \frac{\partial T}{\partial t}}_{\text{effet}} = \underbrace{-\operatorname{div} \vec{j}}_{\text{cause } W.m^{-3}} + 0 + 0$$

Scanné avec CamScanner

10/ Bilan thermique en régime variable et en présence d'une production d'énergie :

Soit p la densité volumique de puissance traduisant l'apport énergétique alors le bilan thermique s'écrit :

↳ P_{th} ou $\phi = \iint \vec{j}_{th} \cdot d\vec{S} \Rightarrow \delta\phi = -\lambda \cdot \Delta T \cdot d\tau$ ①

↳ $d(\delta U) = \delta^2 Q + p \cdot dt \cdot \delta\tau$

(p : apport)

$\Rightarrow \rho_c \, d\tau \, \frac{\partial T}{\partial t} dt = \delta^2 Q + p \cdot dt \cdot \delta\tau$ ②

↳ $\delta^2 Q = -\delta\phi \cdot dt$ ③

($\delta^2 Q$: reçue ; $\delta\phi$: sortant)

réaction chimique : conversion de l'énergie chimique

effet joule : conversion de l'énergie électrique en énergie thermique

de ② ; ① et ③ : $\rho_c \, d\tau \, \frac{\partial T}{\partial t} dt = \lambda \, \Delta T(M;t) \, d\tau \, dt + p \, d\tau \, dt$

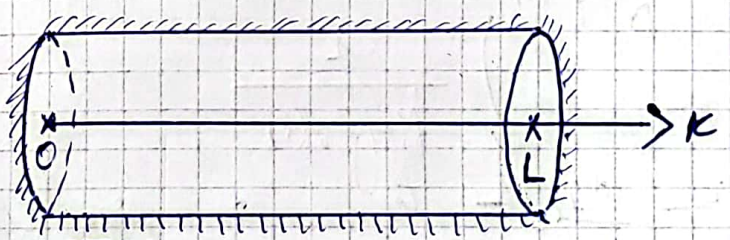
$$\Rightarrow \boxed{\Delta T(M;t) - \frac{1}{D} \frac{\partial T(M;t)}{\partial t} + \frac{p}{\lambda} = 0}$$

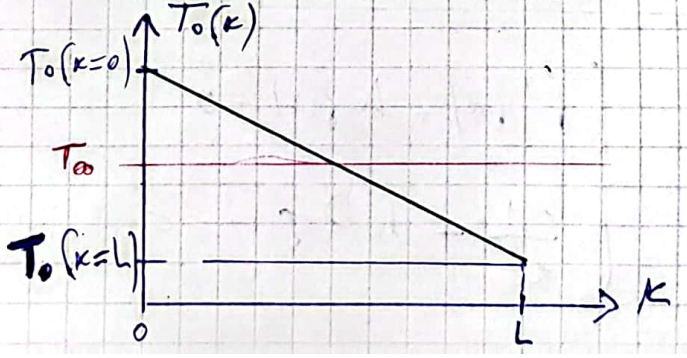
$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{div} \vec{j}(M;t) + \rho_c \frac{\partial T(M;t)}{\partial t} = p}$$

$$\rho_c \frac{\partial T}{\partial t} = \underbrace{-\operatorname{div} \vec{j}}_{\text{échange}} + \underbrace{0}_{\text{pas de création}} + \underbrace{p}_{\text{conversion}}$$

III) Résolution de l'équation de la chaleur :

Exp 1 : Barre cylindrique totalement calorifugée avec un profil de température initiale $T_0(x) = T(x; t=0)$





Scanné avec CamScanner

1) Mq $T_\infty = \frac{1}{L}\int_0^L T_0(x)\,dx$ (moyenne spatiale)

2) on pose $\theta(x;t) = T(x;t) - T_\infty$ écart de la température

Résoudre l'équation de diffusion vérifiée par θ

3) Commenter la solution.

Réponse :

1) la barre est totalement calorifugée $\Rightarrow \Phi = 0$

avec $\delta^2\Phi = e.c.S.dx.\frac{\partial T}{\partial t}.dt.$

$\Rightarrow \delta\Phi = \int \delta^2\Phi = ecS\int_{t=0}^{t=\infty} dx\,\frac{\partial T}{\partial t}\,dt$

$\Rightarrow \delta\Phi = ecS(T_\infty - T_0(x))\,dx$

$\Rightarrow \Phi = \int \delta\Phi = e.c.S\int_0^L (T_\infty - T_0(x))\,dx$

$\Rightarrow \int_0^L (T_\infty - T_0(x))\,dx = 0$

$\Rightarrow \boxed{T_\infty = \frac{1}{L}\int_0^L T_0(x)\,dx}$

2) on sait que : $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{1}{D}\frac{\partial T}{\partial t} = 0$

on a $T(x;t) = T_\infty + \theta(x;t)$

d'où $\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} - \frac{1}{D}\frac{\partial\theta}{\partial t} = 0$

On adopte la méthode de séparation des variables

$\theta(x;t) = f(x) \times g(t)$ "solution stationnaire" (Physiquement on adopte cette méthode s'il y a au moins une C.L)

$\Rightarrow g(t) = \frac{d^2 f}{dx^2} - \frac{1}{D}f(x)$ $\Big| \times \frac{1}{f(x)\times g(t)}$

$\frac{1}{f(x)}\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{1}{D\,g(t)}\frac{dg}{dt} = cte$ on pose $cte = -K$

$$\begin{cases} \frac{1}{f(x)}\frac{d^2 f}{dx^2} = -K \\ \frac{1}{D\,g(t)}\frac{dg}{dt} = -K \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f''(x) + K f(x) = 0 \\ \frac{dg}{dt} + KD\,g(t) = 0 \end{cases}$$

Scanné avec CamScanner

Les conditions aux limites sont :

$$\begin{cases} \phi(x=0^+) = 0 \\ \phi(x=L^-) = 0 \end{cases} \quad \text{or} \quad \phi = -\lambda S \frac{\partial T}{\partial x} \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=0^+} = 0 \\ \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=L^-} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f'(x=0^+) = 0 \\ f'(x=L^-) = 0 \end{cases}$$

Cas 1 Si $K<0$ on pose $K = -\alpha^2$

$$f''(x) - \alpha^2 f(x) = 0 \Rightarrow f(x) = Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x}$$

$$\text{or } f'(x) = \alpha\left[Ae^{-\alpha x} + Be^{-\alpha x}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A - B = 0 \\ Ae^{\alpha L} - Be^{-\alpha L} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = B \\ A\underbrace{\left(e^{\alpha L} - e^{-\alpha L}\right)}_{\neq 0 \text{ car } \alpha \neq 0} = 0 \end{cases}$$

donc $A = B = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow \theta(x,t) = 0$ solution triviale

$\hookrightarrow T(x,t) = T_\infty$ inacceptable physiquement

Cas (2) : $K = 0 \Rightarrow f''(x) = 0 \Rightarrow f(x) = Ax + B$

$$\text{or } \begin{cases} f'(x=0) = 0 \\ f'(x=L) = 0 \end{cases} \text{ et } f'(x) = A \quad \text{d'où } A = 0 \Rightarrow f(x) = B$$

Solution inacceptable car $T(x,t)$ dépend de x.

Cas (3) : Si $K>0$; on pose $K = \mu^2$

$$\Rightarrow f''(x) + \mu^2 f(x) = 0$$

$$\Rightarrow f(x) = A\cos(\mu x) + B\sin(\mu x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = \mu\left[-A\sin(\mu x) + B\cos(\mu x)\right]$$

$$\text{or } \begin{cases} f'(x=0) = 0 \\ f'(x=L) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = 0 \\ A\sin(\mu L) = 0 \end{cases} \xrightarrow[A \neq 0]{\text{pour que}}$$

$$\sin(\mu L) = 0 \Rightarrow \mu L = n\pi \Rightarrow \boxed{\mu_n = \frac{n\pi}{L}}$$ quantification de μ.

Scanné avec CamScanner

d'où $f(x) = A\cos(\mu x) \Rightarrow f_n(x) = f_{0n}\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ avec $f_{0n} = A$

D'autre part : $\frac{dg}{dt} + KDg(t) = 0 \Rightarrow \frac{dg}{g} = -KD\,dt$

$$\Rightarrow \int \frac{dg}{g} = -\int \mu^2 D\,dt = -\mu^2 D$$

$$g_n(t) = g_{0n}\exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{L^2}Dt\right)$$

Finalement $\theta(x;t) = f(x) \times g(t)$

$$\Rightarrow \boxed{\theta_n(x;t) = \theta_{0n}\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)e^{-t/\tau_n}}$$ mode de rang n.

Avec $\theta_{0n} = f_{0n} \cdot g_{0n}$ et $\tau_n = \frac{L^2}{n^2\pi^2 D}$.

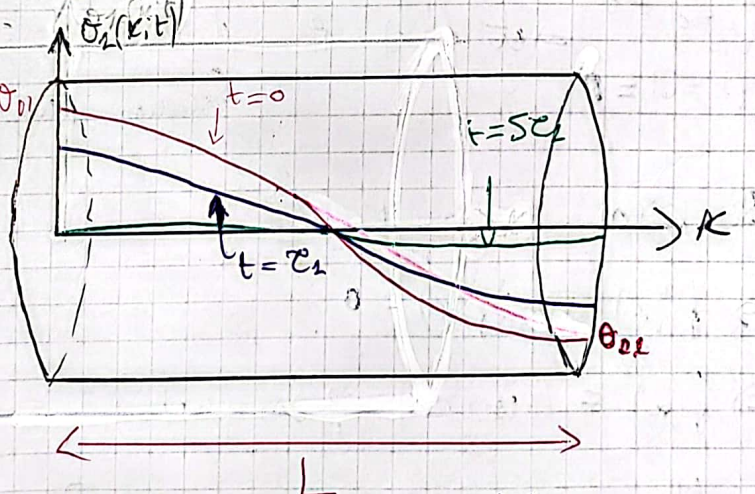
la solution générale est : $\boxed{\theta(x;t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \theta_n(x;t)}$

3) Représentation des modes :

↳ mode n=1 :

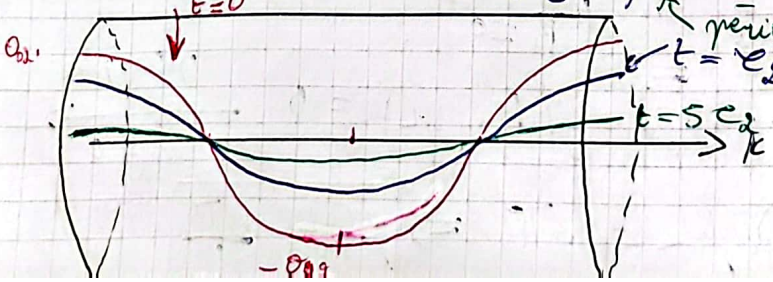
$\theta_1(x;t) = \theta_{01}\cos\left(\frac{\pi}{L}x\right)e^{-t/\tau_1}$ avec $\tau_1 = \frac{L^2}{\pi^2 D}$

$\theta_1(x;t) = \theta_{01}\cos\left(\frac{2\pi}{2L}x\right)e^{-t/\tau_1}$ → période spatiale 2L



↳ Mode n=2 : $\theta_2(x;t) = \theta_{02}\cos\left(\frac{2\pi}{L}x\right)e^{-t/\tau_2}$ avec $\tau_2 = \frac{\tau_1}{4}$

période spatiale L.



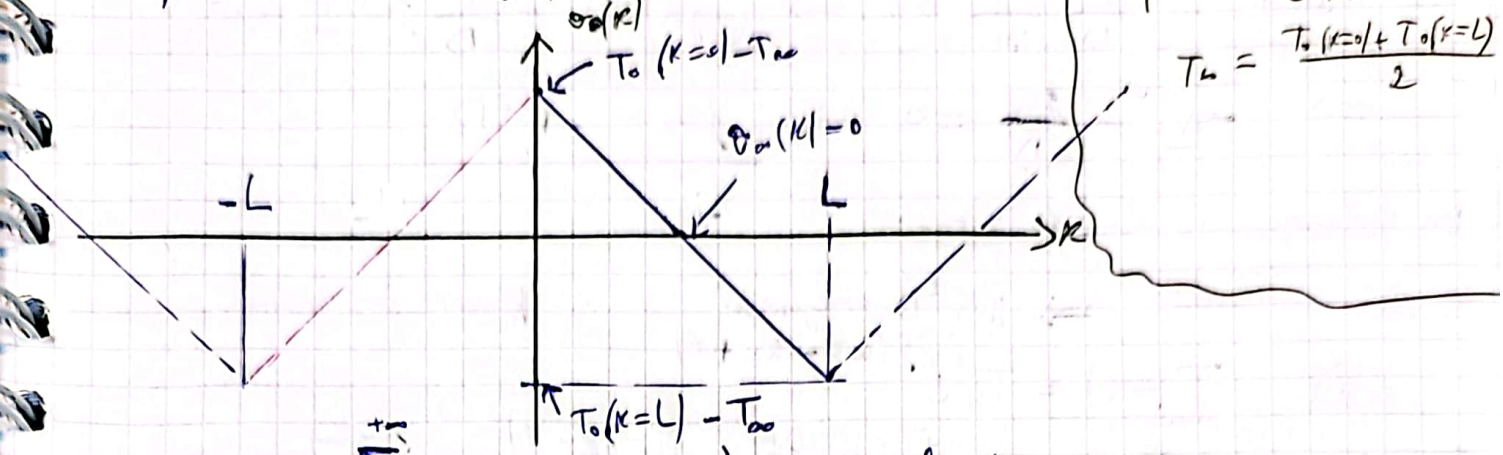
Scanné avec CamScanner

$$\theta(x;t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \theta_n(x;t) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-t/\tau_n}$$

$$\theta(x;t=0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \theta_{0n} \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

or $\theta_0(x) = \theta(x;t=0) = T(x;t=0) - T_\infty = T_0(x) - T_\infty$

d'après la courbe de $T_0(x)$, on déduit que :



Rq : $T_\infty = \frac{1}{L}\int_0^L T_0(x)\,dx$

$T_\infty = \frac{T_0(x=0) + T_0(x=L)}{2}$

$$\theta_0(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \theta_{0n} \cos\left(n\left(\frac{2\pi}{2L}\right)x\right) \Rightarrow$$ fonction périodique de période $2L$ et paire $\Rightarrow$ fonction triangulaire déduire θ_{0n}.

Obj θ_{0n} ?:

Rappel : $S(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} S(t)\cos(n\omega t)\,dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} S(t)\sin(n\omega t)\,dt$$

de même ; $\theta_{0n} = \frac{2}{2L}\int_{-L}^{L} \theta_0(x)\cos\left(\frac{n2\pi}{2L}x\right)dx = \frac{2}{L}\int_0^L \theta_0(x)\cos\left(n\frac{\pi}{L}x\right)dx \sim \frac{1}{n^2}$

Conclusion : Chaque harmonique a une constante de temps $\tau_n = \frac{L^2}{n^2\pi^2 D} = \frac{\tau_1}{n^2}$

la rapide décroissance de τ_n avec n permet d'affirmer que le mode fondamental s'atténue beaucoup moins rapidement que les autres modes harmoniques. donc après τ_1, ce terme devient dominant et l'expression de $\theta(x;t)$ devient sinusoïdale $\theta(x;t) = \theta_{01}\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)e^{-t/\tau_1}$

Exp 2 : par la suite on s'intéresse à une onde thermique dite pseudo-PPH (H = harmonique) qui s'écrit sous la forme :

Scanné avec CamScanner

$\underline{T}(x,t) = \underline{T_n} e^{j(\omega t - kx)}$ avec $\underline{T_n} = T_n e^{j\varphi}$ est l'amplitude complexe.

$= T_n e^{j(\omega t - kx + \varphi)}$

avec ω et k en général sont des complexes.

On remplace l'expression de T dans l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{1}{D}\frac{\partial T}{\partial t} = 0 \Rightarrow (-jK)^2 \underline{T} - \frac{1}{D} j\omega \underline{T} = 0$$

$$\Rightarrow -K^2 - \frac{j\omega}{D} = 0 \Rightarrow \boxed{j\omega = -K^2 D}$$

On distingue par la suite 2 cas :

Cas 1 : K réel. $\Rightarrow jK^2D$ imaginaire

K réel $\Rightarrow$ harmonique dans l'espace

$\omega = jK^2D \Rightarrow$ atténuatrice dans le (imaginaire) temps.

Or $\underline{T}(x,t) = T_n e^{j(\omega t - Kx + \varphi)}$

$$\Rightarrow \underline{T}(x,t) = T_n e^{j(jK^2Dt)} e^{j(-Kx+\varphi)}$$

$$\Rightarrow \underline{T}(x,t) = T_n e^{-K^2Dt} e^{-j(Kx-\varphi)}$$

En notation réelle : $T(x,t) = T_n \cos(Kx - \varphi) e^{-t/\tau}$ avec $\tau = \frac{1}{K^2 D}$

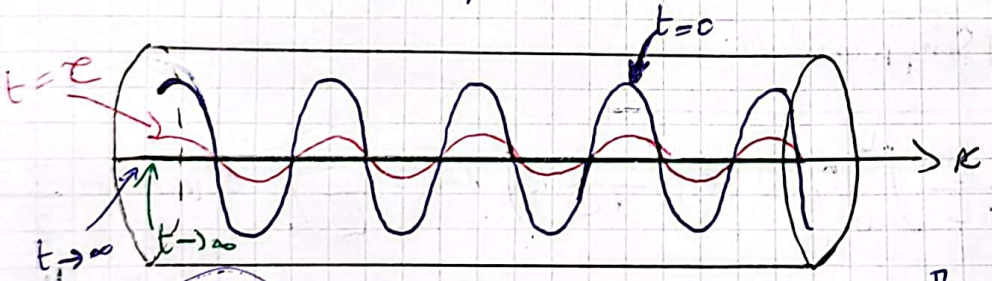
Interprétation physique : Une fluctuation spatiale initiale

$T(x, t=0) = T_n \cos(Kx - \varphi)$ d'échelle spatiale caractéristique $\delta = \frac{2\pi}{K}$

s'atténue au cours du temps avec une durée caractéristique $\tau = \frac{1}{K^2 D}$

$= \frac{\delta^2}{4\pi^2 D}$

$(\delta \sim \sqrt{\tau D})$



Cas 2 : ω réel $\Rightarrow K^2 = -j\frac{\omega}{D} = e^{-j\frac{\pi}{2}} \frac{\omega}{D}$

effet de peau thermique — harmonique dans le temps

$$\Rightarrow K = \pm e^{-j\pi/4} \sqrt{\frac{\omega}{D}} = \pm \frac{1-j}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\omega}{D}}$$

$$= \pm \frac{1-j}{\delta} \text{ avec } \delta = \sqrt{\frac{2D}{\omega}}$$

distance caractéristique de pénétration

↳ Si $K = \frac{1-j}{\delta}$ on $\underline{T}(x,t) = T_n e^{j(\omega t - kx + \varphi)}$

Scanné avec CamScanner

$\underline{T}(x,t) = T_h e^{j\left(\omega t - \frac{1-j}{\delta}x + \varphi\right)} = T_h e^{j\left(\omega t - \frac{x}{\delta} + \frac{\pi}{2} + \varphi\right)} e^{\frac{x}{\delta}}$

d'où $T(x,t) = T_h \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta} + \varphi\right) e^{-x/\delta}$

terme de propagation — terme d'atténuation

↳ Si $K = -\frac{1-j}{\delta} \Rightarrow T(x,t) = T_h \cos\left(\omega t + \frac{x}{\delta} + \varphi\right) e^{x/\delta}$

terme de propagation — terme d'atténuation

Rq : cette onde ne peut pas être sinusoïdale dans le temps et dans l'espace. (solution d'une équation de diffusion).

Interprétation physique :

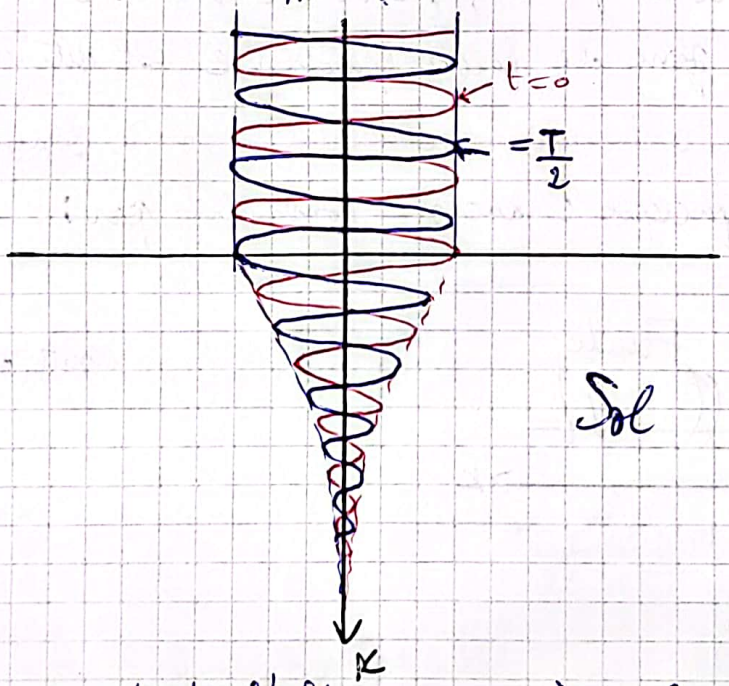
Soit $T(x,t) = T_h \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta} + \varphi\right) e^{-x/\delta}$

donc une fluctuation temporelle imposée en $x=0$

$T(x=0;t) = T_h \cos(\omega t + \varphi)$

d'échelle temporelle caractéristique $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$ évolution spatialement avec une échelle caractéristique $\delta = \sqrt{\frac{2D}{\omega}} \Rightarrow \delta^2 = \frac{2D}{2\pi} \cdot \tau = \frac{\tau D}{\pi}$

$\delta = \sqrt{\frac{\tau D}{\pi}}$ $(\delta \sim \sqrt{\tau D})$.



effet de peau thermique

pour rendre compte de l'alternance jour/nuit et de l'alternance des saisons à l'intérieur de la terre on modélise la température à la surface de la terre sous la forme :

$T(x=0;t) = T_0 + T_0 \cos(\omega_1 t) + T_0 \cos(\omega_2 t)$

Scanné avec CamScanner

avec $T_0 = 10\,°C$; $\tau_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 1$ jour ; $\tau_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = 1$ an

la température $T(x;t)$ s'écrit en régime forcé

$$T(x;t) = T_0 + T_0 \cos\left(\omega_1 t - \frac{x}{\delta_1} + \varphi_1\right) e^{-x/\delta_1} + T_0 \cos\left(\omega_2 t - \frac{x}{\delta_2} + \varphi_2\right) e^{-x/\delta_2}$$

AN : $\delta_1 = \sqrt{\frac{D\tau_1}{\pi}} = 17\,cm \longrightarrow 5\delta_1 \sim 1m$

$\delta_2 = \sqrt{\frac{D\tau_2}{\pi}} = 3{,}2\,m \longrightarrow 5\delta_2 \sim 16m.$

$\downarrow$

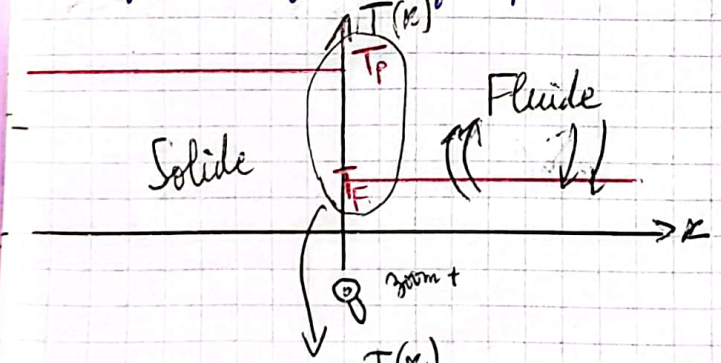
$\delta_2 \simeq 19\delta_1$

La distance caractéristique de l'amortissement est 19 fois plus courte pour l'alternance jour/nuit que pour l'alternance saisonnière ce qui explique que les caves des habitations ne sont pas sensibles à l'alternance jour/nuit et sont sensibles à l'alternance des saisons.

IV) transfert Conducto-convectif : (combinaison des 2 types de transferts thermiques).

1) Loi de Newton : Considérons une paroie solide de température T_p en contact avec un fluide de température T_f de mouvement convectif. (donc température homogène dans le fluide)

À cause de la viscosité du fluide, sa vitesse est nulle au niveau de la paroie. Cette petite zone de faible épaisseur e est dite couche limite thermique et le transfert thermique se fait de manière conductive. On définit le flux surfacique conducto-convectif par :

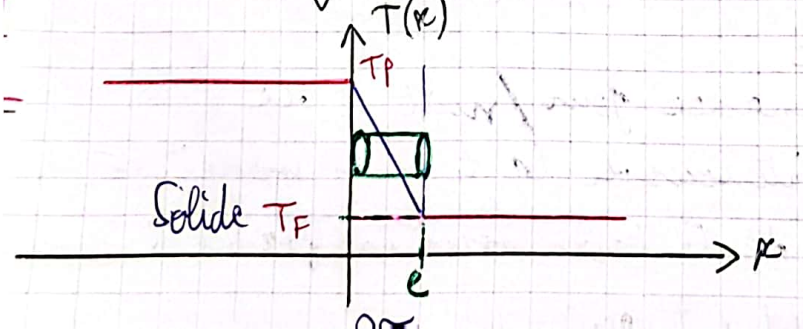


unité de la viscosité

pl (poiseuille)

$Pa \cdot S$

$\downarrow$ pascal $\uparrow$ seconde



$$\varphi_{p\to F} = -\lambda_F \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0^+} = -\lambda_F \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=e^-}$$

$$\varphi_{p\to F} = -\lambda_F \frac{T_F - T_p}{e-0} = \frac{\lambda_F}{e}(T_p - T_F)$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi_{p\to F} = h(T_p - T_F)}$$ Loi de Newton

avec $\boxed{h = \frac{\lambda_F}{e}}$ est le coefficient de transfert conducto-convectif

$W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$.

ODG de h:

↳ pour un Gaz : $h \sim 5 - 30\ W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$

↳ pour l'eau : $h \sim 10^2 - 10^3\ W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$

Le flux conducto-convectif à travers une surface S est:

$$\phi_{p\to F} = \varphi_{p\to F} \cdot S$$

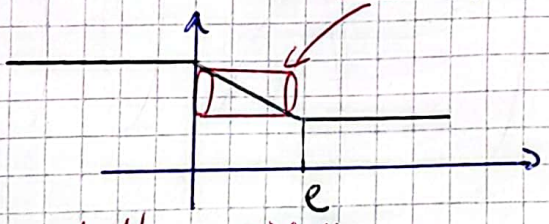
$$\Rightarrow \boxed{\phi_{p\to F} = h \cdot S \cdot (T_p - T_F)}$$

(paroi solide, fluide)

2) Résistance conducto-convective : elle est définie par:

$$R_{th_{cc}} = \frac{T_p - T_F}{\phi_{p\to F}} \Rightarrow R_{th_{cc}} = \frac{1}{hS}$$

Rq: $R_{th_{cc}} = \frac{e}{\lambda_F \cdot S}$ c'est la résistance thermique de la couche limite thermique de section S et d'épaisseur e.



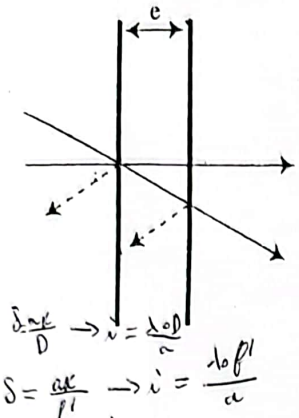
App: Refroidissement d'une ailette:

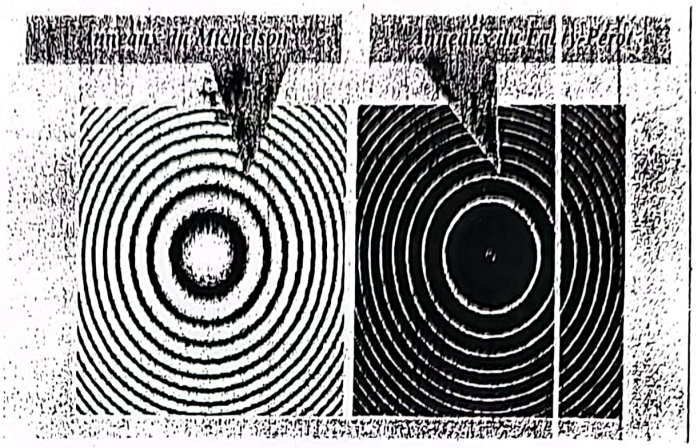
Voir après interférences à N ondes.

Scanné avec CamScanner

Interféromètre de Fabry-Pérot ★★★

L'interféromètre à ondes multiples de FABRY-PÉROT est constitué de deux lames de verre dont les faces en regard sont séparées d'une épaisseur e d'air, sont parallèles et traitées pour en augmenter le facteur de réflexion. On ne tiendra pas compte de l'épaisseur des lames dans le raisonnement. Le coefficient de réflexion en amplitude sur les faces traitées est noté r (supposé réel) et on notera $R = r^2$. L'observation se fait en transmission et à l'infini, c'est-à-dire dans le plan focal image d'une lentille convergente dont on notera f' la distance focale.





1. (a) L'appareil est éclairé par une onde monochromatique de longueur d'onde dans le vide λ , sous un angle d'incidence i faible. Faire un dessin représentant le trajet des différents rayons.

   (b) A-t-on affaire à un interféromètre à division du front d'onde ou à division d'amplitude ?

   (c) Montrer qu'il faut tenir compte de tous les rayons transmis dans l'écriture de l'amplitude du champ transmis sachant que R étant proche de 1.

   (d) En négligeant l'absorption des lames de l'interféromètre, donner la relation entre les coefficients de réflexion et de transmission en puissance, respectivement R et T.

   (e) Montrer que l'intensité obtenue en transmission est de la forme :

$$I = \frac{I_M}{1 + m\sin^2\left(\frac{\Phi}{2}\right)}$$

   où m est un coefficient et Φ est le déphasage entre deux rayons successifs interférant sur l'écran. On donnera l'expression de m et Φ en fonction de R, e, i et λ.

   (f) Tracer $I(\Phi)$.

   (g) On définit $p = \dfrac{\Phi}{2\pi}$ comme l'ordre d'interférence. Caractériser les valeurs de p pour lesquelles l'éclairement est maximal.

2. (a) On éclaire l'interféromètre par une source ponctuelle à distance finie et on observe les interférences à l'infini. Montrer que les franges d'interférences sont des anneaux. Quel est leur centre ?

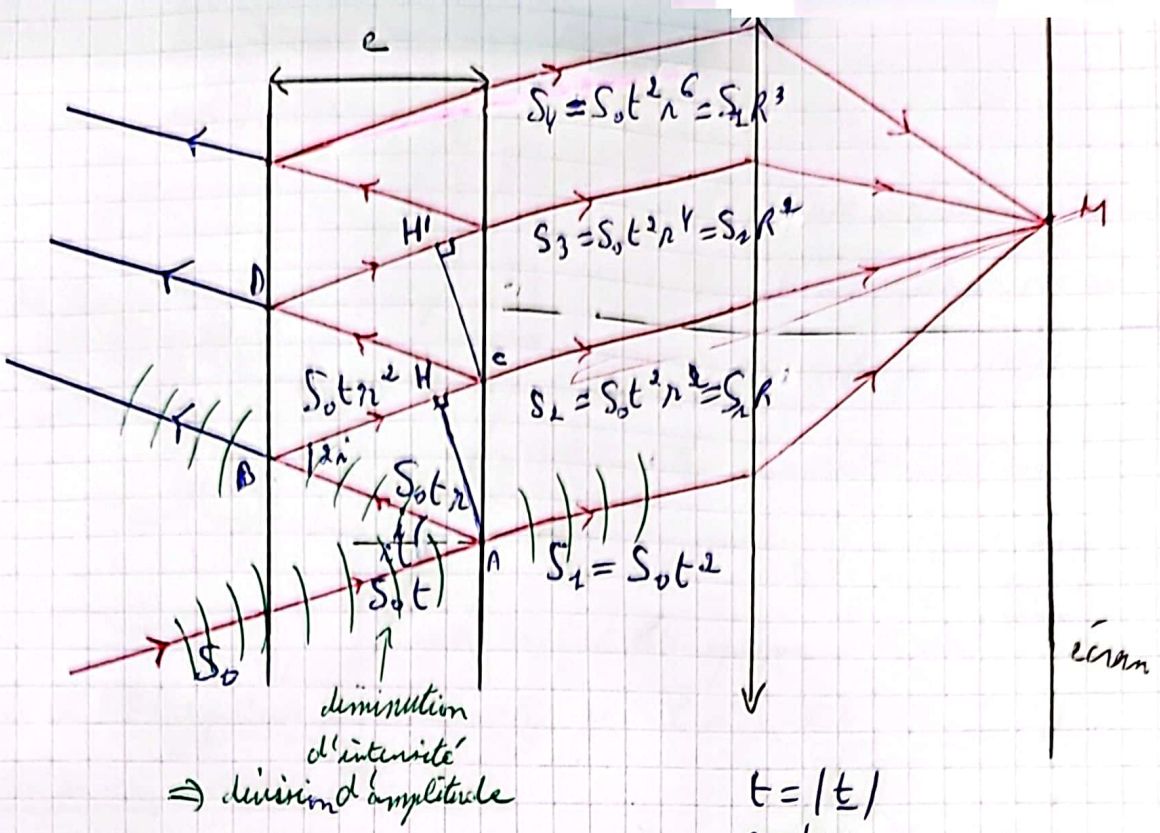
   (b) Dans la suite, on notera ρ la distance au centre d'un point de l'écran. Soit p_0 l'ordre d'interférence au centre des anneaux. On suppose ici que l'épaisseur e est telle que p_0 est entier. Montrer que l'anneau d'ordre $p_0 - k$, avec $k \in \mathbb{N}$, a un rayon proportionnel à $\sqrt{k}$ (on supposera i petit).

3. Peut-on utiliser une source étendue ?

4. On définit le contraste par : $C = \dfrac{I_M - I_m}{I_M + I_m}$ où I_m est l'intensité d'une frange sombre. Calculer le contraste et donner sa valeur pour $R = 0,5; 0,7; 0,9$ et $0,95$. Comment doit-on choisir R si l'on veut obtenir des anneaux lumineux fins sur fond noir, comme dans la figure en début d'énoncé.

Scanné avec CamScanner

1) a)



$t = |\underline{t}|$

$R = |\underline{r}|$

1|b| par division d'amplitude :

1) c) $S_n = S_1 R^{n-1}$ d'où si $R \simeq 1 \Rightarrow S_n \simeq S_1$

1) d) $R + T + \underset{\uparrow}{A} = 1$ (relation générale)

absorption

Si $A \simeq 0 \Rightarrow R + T \simeq 1$ conservation de l'énergie

$\Rightarrow T = 1 - R$

⚠ $|\underline{r}| + |\underline{t}| \neq 1$

1) e) $I = \langle S^2(M;t) \rangle = \frac{1}{2} Re\left(\underline{S}(M;t) \, \underline{S}^*(M;t) \right)$

$I = \frac{1}{2} Re\left(\underline{S}(M) e^{j\omega t} \cdot \underline{S}^*(M) e^{-j\omega t} \right)$

$= \frac{1}{2} Re\left(\underline{S}(M) \cdot \underline{S}^*(M) \right) = \frac{1}{2} |\underline{S}(M)|^2$

avec $\underline{S}(M) = \sum_{n=2}^{+\infty} \underline{S}_n(M)$

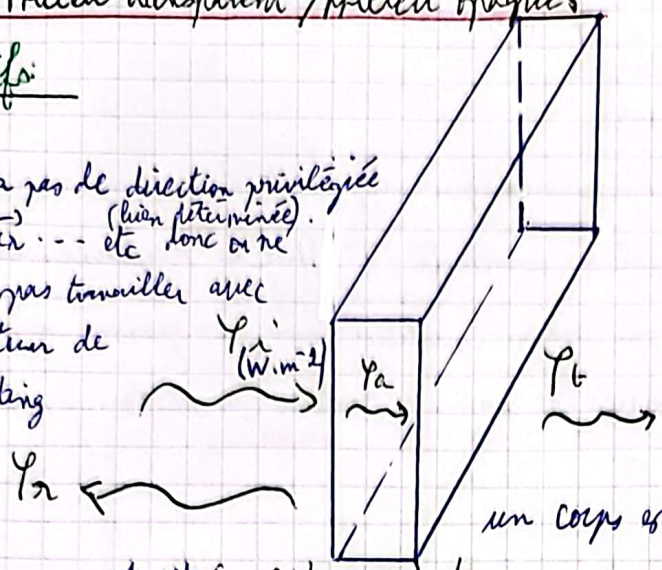
Scanné avec CamScanner

Rayonnement thermique :

I) Milieu transparent / milieu opaque :

1) Défs :

φ_i n'a pas de direction privilégiée (bien déterminée). $\vec{u_z}$; $\vec{u_r}$ ... etc donc on ne peut pas travailler avec le vecteur de poynting



φ_i : flux surfacique incident

φ_a : flux surfacique absorbant

φ_r : flux surfacique réfléchi

φ_t : flux surfacique transmis

avec $\varphi_i = \varphi_r + \varphi_a + \varphi_t$

$\hookrightarrow \frac{\varphi_r}{\varphi_i} + \frac{\varphi_t}{\varphi_i} + \frac{\varphi_r}{\varphi_i} = 1$ (*)

un corps est dit opaque si $\varphi_t = 0$

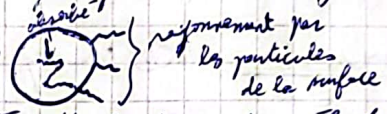
un corps est dit (parfaitement) transparent si $\varphi_a = \varphi_r = 0 \Rightarrow \varphi_i = \varphi_t$

$\varphi_i = \varphi_t$ $\hookrightarrow \varphi_t \neq 0$

(*) $\Rightarrow$ $R + T + A = 1$

2) propriétés du rayonnement :

- Le spectre de l'onde réfléchie dûe à l'éxitation des particules chargées du corps dépend du spectre de l'onde incidente.



- Les particules chargées de la surface du corps émettent des ondes électromagnétiques à cause de l'agitation thermique, c'est le rayonnement thermique et le flux correspondant est appelé le flux émis. φ_e. (sa cause est l'agitation thermique).

~ diffusé ~ rayonné

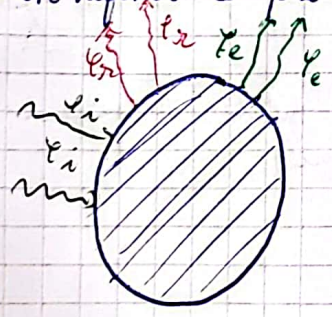
3) équilibre radiatif d'un corps opaque convexe :

- on définit dans le cas d'un corps opaque convexe le flux partant par :

$$\varphi_p = \varphi_r + \varphi_e$$

- on définit la puissance thermique reçue par $\boxed{P_{reçue} = \iint (\varphi_i - \varphi_p)\, dS}$

Bilan radiatif.



Corps convexe opaque ($\varphi_t = 0$)

Corps concave

$$\begin{cases} \varphi_i = \varphi_t + \varphi_a \\ \varphi_p = \varphi_r + \varphi_e \end{cases} \Rightarrow \varphi_i - \varphi_p = \varphi_a - \varphi_e \quad \text{d'où} \quad P_{reçue} = \iint (\varphi_a - \varphi_e)\, dS$$

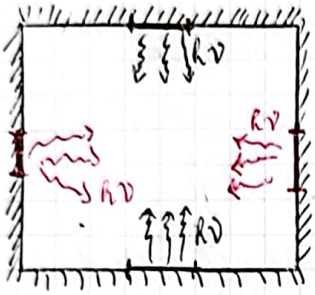
Scanné avec CamScanner

- Le corps opaque est en équilibre radiatif si $P_{reçue} = 0$

$\Rightarrow \gamma_i = \gamma_f \ (\Leftrightarrow \gamma_a = \gamma_e)$

II) Rayonnement d'équilibre thermique:

1) définition: Si le rayonnement électromagnétique régnant dans une enceinte fermée de paroie opaque et de température constante T. Donc le rayonnement d'équilibre thermique est un gaz de photons en équilibre avec la paroie càd en moyenne le nombre de photons absorbés est égal au nombre de photons émis.



2) loi de planck: Le champ électro-magnétique dans l'enceinte est caractérisé par la densité spectrale du flux d'équilibre défini par:

$$g(\lambda) = \frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{2\pi h c^2}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda K_B T}\right) - 1} \quad \text{(donné)}$$

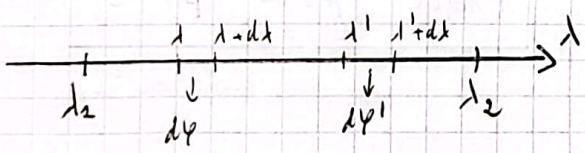
($d\varphi$: flux émis ; $\frac{hc}{\lambda K_B T}$: effet / cause)

avec : $h = 6{,}62 \times 10^{-34}$ J.s^{-1} cte de planck.

$K_B = 1{,}38 \times 10^{-23}$ J.K^{-1} cte de Boltzmann.

$C \simeq 3.10^8$ m/s.

$\frac{hc}{\lambda} = h\nu$ en du photon (effet) (électromag)



$K_B T$ est l'énergie d'agitation thermique. (cause)

$g(\lambda \to 0) = 0$

$g(\lambda \to +\infty) = 0$ $\left(\underset{+\infty}{\simeq} \frac{2\pi h c^2}{\lambda^5} \frac{1}{\frac{hc}{\lambda K_B T}} \underset{+\infty}{\simeq} \frac{2\pi c K_B T}{\lambda^4} \xrightarrow[+\infty]{} 0\right)$

$g(\lambda)$ représente la répartition des photons par longueur d'onde c'à d le nombre de photons rayonnés par unité de surface par unité de longueur d'onde: $[\lambda ; \lambda + d\lambda] \longrightarrow d\varphi$

$[\lambda' ; \lambda' + d\lambda] \longrightarrow d\varphi'$ avec $d\varphi' \neq d\varphi \Rightarrow \frac{d\varphi}{d\lambda} \neq$ cte

$\Rightarrow \frac{d\varphi}{d\lambda} = g(\lambda)$

Scanné avec CamScanner

3) Loi de Wien :

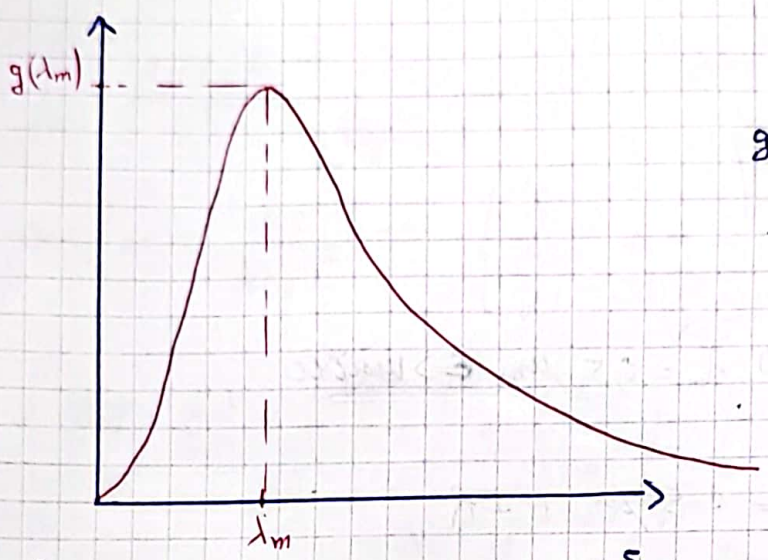
↳ $g(\lambda \to 0) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} e^{\frac{-hc}{\lambda k_B T}} \simeq 0$

$\lambda \to 0$ càd $\frac{hc}{\lambda k_B T} \gg 1 \Rightarrow \lambda \ll \frac{hc}{k_B T}$

↳ $g(\lambda \to +\infty) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{\lambda + \frac{hc}{\lambda k_B T} - \lambda} = \frac{2\pi hc^2}{\frac{hc}{k_B T} \cdot \lambda^4} \sim \frac{1}{\lambda^4} \to 0$

$\lambda \to +\infty$ càd $\lambda \gg \frac{hc}{k_B T}$

donc $g(\lambda)$ présente un max en $\lambda = \lambda_m = ?$



on pose $\kappa = \frac{hc}{\lambda k_B T}$

$g(\lambda_m = \lambda_m) = g_{max}$

$\Rightarrow g(\kappa = \kappa_m) = g_{max}$

$\left.\frac{dg}{d\kappa}\right|_{\kappa_m} = 0 \Rightarrow$ or $g(\kappa) = \frac{\kappa^5}{e^\kappa - 1}$

$\Rightarrow \left.\frac{dg}{d\kappa}\right|_{\kappa_m} = \left[\frac{5\kappa^4(e^\kappa - 1) - \kappa^5 e^\kappa}{(e^\kappa - 1)^2}\right]_{\kappa_m} = 0$

$\Rightarrow \left[5(e^\kappa - 2) - \kappa e^\kappa\right]_{\kappa_m} = 0$

$\Rightarrow 5(e^\kappa - 1) - \kappa_m e^{\kappa_m} = 0$

$\Rightarrow (5 - \kappa_m) e^{\kappa_m} = 5$

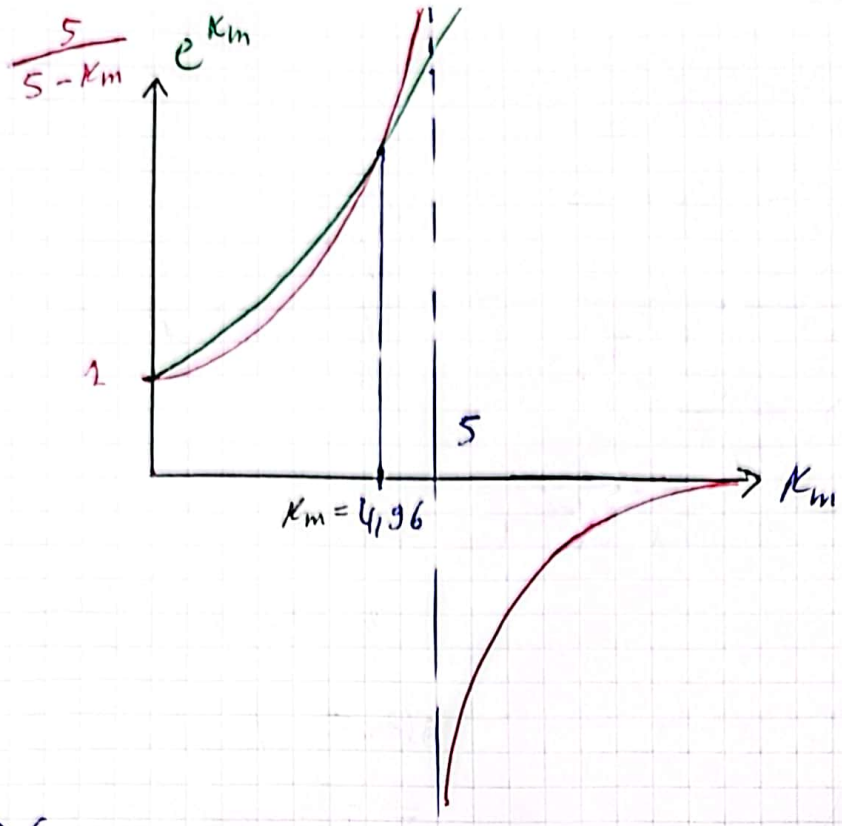
$\Rightarrow \boxed{\frac{5}{5 - \kappa_m} = e^{\kappa_m}}$

CNC 2024
CNC 2003
Mines ponts 2003
CNC 2013

// résolution graphique

$\kappa_m = 4{,}96 \Rightarrow \frac{hc}{\lambda_m k_B T} = 4{,}96 \Rightarrow$ Loi de Wien $\boxed{\lambda_m \cdot T = 2{,}898 \cdot 10^{-3}\ K.m}$

Scanné avec CamScanner



ODG:

↳ $T_{\text{surface du soleil}} = 5800\ K \Rightarrow \lambda_m = 0,5\ \mu m \in$ visible

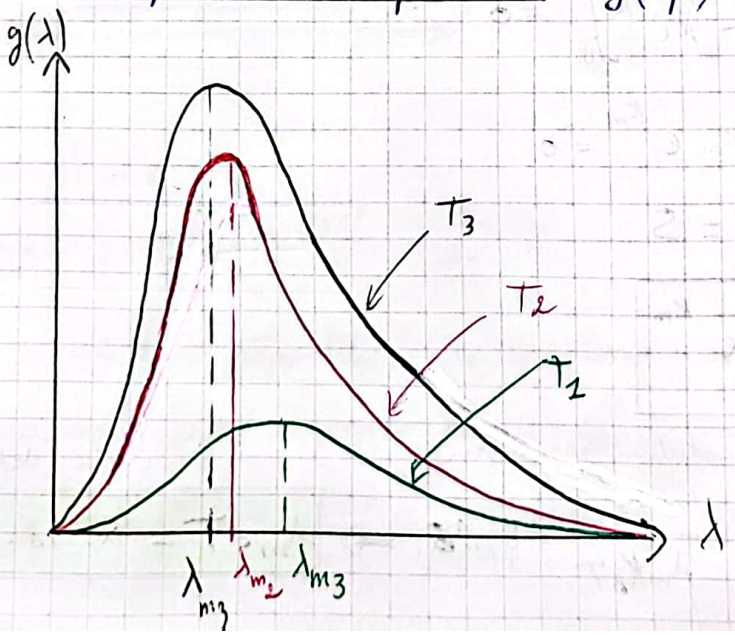
↳ $T = 2500\ K \Rightarrow \lambda_m = 1,5\ \mu m \in IR$

↳ $T = 310\ K \Rightarrow \lambda_m = 9,5\ \mu m \in I.R$

Rq:

Si T ↗, d'après la loi de Wien: λ_m ↘

d'après la loi de Planck: $g(\lambda)$ ↗



Scanné avec CamScanner

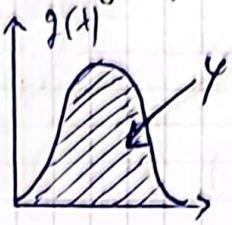
4) loi de Stefan Boltzmann :

Sachant que $\int_0^{+\infty} \frac{\kappa^3}{e^\kappa - 1} d\kappa = \frac{\pi^4}{15}$

Mq $\boxed{\varphi = \sigma . T^4}$

Rappel : $g(\lambda) = \frac{d\varphi}{d\lambda} \Rightarrow d\varphi = g(\lambda) . d\lambda \Rightarrow \varphi = \int_0^{+\infty} g(\lambda) d\lambda$

on pose $\kappa = \frac{hc}{\lambda k_B T}$



$$\varphi = \int_0^{+\infty} \frac{2\pi h c^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1} d\lambda = 2\pi h c^2 \int_0^{+\infty} \left(\frac{hc}{k_B \lambda T}\right)^5 \frac{d\lambda}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_B T}\right) - 1} \times \left(\frac{k_B T}{hc}\right)$$

on pose $\kappa = \frac{hc}{\lambda k_B T} \Rightarrow \begin{cases} \text{Si } \lambda \to 0 \Rightarrow \kappa \to \infty \\ \text{Si } \lambda \to \infty \Rightarrow \kappa \to 0 \\ d\lambda = d\left(\frac{hc}{\kappa k_B T}\right) = \frac{-hc}{k_B T} \frac{d\kappa}{\kappa^2} \end{cases}$

$$\varphi = 2\pi h c^2 \times \left(\frac{k_B T}{hc}\right)^5 \times \left(\frac{hc}{k_B T}\right) \times \int_0^{+\infty} \frac{\kappa^5}{e^\kappa - 1} \frac{-d\kappa}{\kappa^2}$$

$$= 2\pi h c^2 \times \left(\frac{k_B T}{hc}\right)^4 \int_0^{+\infty} \frac{\kappa^3}{e^\kappa - 1} d\kappa$$

$$= 2\pi h c^2 \times \left(\frac{k_B T}{hc}\right)^4 \times \frac{\pi^4}{15} = \frac{2}{15} \frac{\pi^5 . k_B^4}{h^3 c^2} T^4$$

$$= \sigma . T^4 \quad \text{avec} \quad \sigma = \frac{2}{15} \frac{\pi^5 k_B^4}{h^3 c^2}$$

AN : $\sigma = 5{,}67 \times 10^{-8}\ W.m^{-2}.K^{-4}$

Rq : Si $T_2 = 2T_1 \Rightarrow \varphi_2 = 16 \varphi_1$

Exp : $T_1 = 37°C = 310\ K \rightarrow \varphi_1$

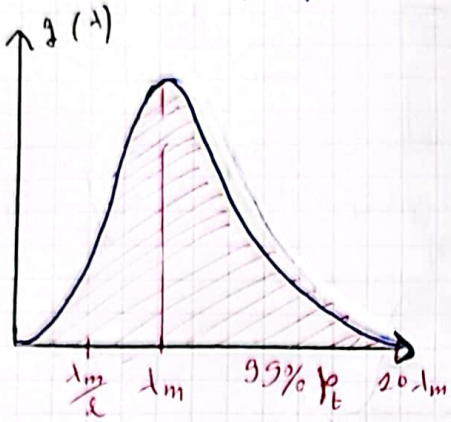
$T_2 = ~~474°C~~$

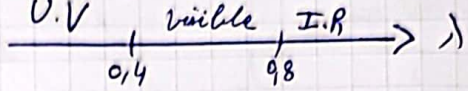
$T_2 = 620\ K \longrightarrow \varphi_2 = 16 \varphi_1$

on définit le profil spectral du rayonnement d'équilibre par l'étendue spectrale $\left[\frac{\lambda_m}{2} ; 8\lambda_m\right]$ qui comporte 98% du flux surfacique total

Scanné avec CamScanner

Rq: On définit parfois le profil spectral par l'intervalle $\left[\frac{\lambda_m}{2}; 10\lambda_m\right]$ qui comporte 99% du flux surfacique total.





$T = 5800\ K \rightarrow \lambda_m = 0{,}5\ \mu m$

$T = 310\ K \rightarrow \lambda_m = 9{,}5\ \mu m$

$\left[\frac{\lambda_m}{2} = 0{,}25\ \mu m ; 10\lambda_m = 5\ \mu m\right]$

$[4{,}5\ \mu m ; 95\ \mu m]$

III) Corps noir:

1) Déf: Le corps noir est un absorbeur intégral du rayonnement incident

$\varphi_i = \varphi_a \quad (\varphi_r = \varphi_t = 0)$

Exp: Le verre est un corps noir vis à vis de l'infrarouge mais pour le domaine visible c'est un milieu transparent

2) Bilan radiatif:

- Si le corps noir est en équilibre radiatif: $\varphi_i = \varphi_p \Rightarrow \varphi_a = \varphi_e$
- Si le corps noir convexe est placé dans un environnement en équilibre thermodynamique à la température T alors:

$$\varphi_i = \varphi_p = \varphi_a = \varphi_e = \sigma T^4$$

(def du corps noir)

Rq: Le corps noir est un objet idéalisé, pour un corps réel, on corrige la loi de Stefan: $\varphi_e = \varepsilon \cdot \sigma \cdot T^4 \quad (\varepsilon < 1)$

avec ε est un coefficient sans dimension inférieur à 1 appelé émissivité.

donc $\boxed{\varphi_e = \varepsilon \sigma T^4}$ Loi d'un corps gris

3) Loi de Newton relative au rayonnement:

Le flux surfacique radiatif reçu par un corps noir convexe isotherme de température T_c placé dans un système de température T_e est:

Scanné avec CamScanner

Corps noir T_c T_e

$$\varphi^{rad}_{ext \to C.N} = +\varphi_i - \varphi_e$$

($\varphi^{rad}_{ext \to C.N}$: reçu ; φ_i : reçu ; φ_e : fourni)

$$= \sigma T_e^4 - \sigma T_c^4$$

(T_e : extérieur)

$$\boxed{\varphi^{rad}_{ext \to C.N} = \sigma (T_e^4 - T_c^4)}$$

Si $T_e \simeq T_c \Rightarrow$

$$\varphi^{rad}_{ext \to C.N} = \sigma (T_e^2 + T_c^2)(T_e + T_c)(T_e - T_c)$$

$$\simeq 4 \sigma T_e^3 (T_e - T_c)$$

on pose $R_r = 4 \sigma T_e^3$ d'où $\boxed{\varphi^{rad}_{ext \to NC} = h_r (T_e - T_c)}$

Loi de Newton relative au rayonnement

(h_r : coeff de transfert de surface.)

or $\phi = \varphi . S \Rightarrow \boxed{\phi^{rad}_{ext \to NC} = h_r . S . (T_e - T_c)}$

or $R_{th} = \dfrac{T_2 - T_2}{R_{th}} \Longrightarrow R_r = \dfrac{T_e - T_c}{\phi_{ext \to CN}}$

$$\Rightarrow \boxed{R_r = \frac{1}{h_r . S}} = \frac{1}{4 \sigma . S . T_e^3}$$

Scanné avec CamScanner

Thermodynamique statistique

I) Monde macroscopique – monde microscopique :

1) échelle macroscopique : elle correspond au domaine observable, à cette échelle, la matière est continue. C'est le domaine de la thermodynamique classique.

2) échelle microscopique : elle correspond aux molécules. À cette échelle, la matière est discontinue. C'est le domaine de la thermodynamique statistique.

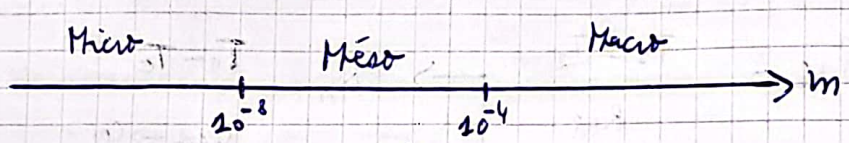
3) échelle mésoscopique : C'est une échelle intermédiaire entre la molle et la molécule.

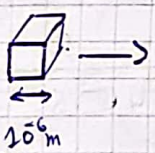
ODG : un volume d'air de $1\,\mu m^3$ contient 3.10^7 molécules

R : Dans un volume $d\tau$ appartenant à l'échelle mésoscopique, le nombre des molécules est quasi-invariant. C'est à dire que les fluctuations se compensent presque malgré l'agitation thermique.

II) facteur de Boltzmann :

1) équation fondamentale de la statique des fluides :





$\longrightarrow d\tau = (10^{-6})^3\ m = 10^{-18}\ m^3$

on distingue par la suite 2 types de forces :

*** forces volumiques :** c'est une force à distance appliquée sur tout le volume du fluide. (donc extensive) on définit alors le vecteur densité volumique de force par

$$\vec{f_v} = \frac{\delta \vec{F}}{\delta \tau} \left(N \cdot m^{-3}\right)$$

Exp :

↳ le poids : $\vec{P} = m\vec{g} \Rightarrow \delta\vec{P} = \delta m\,\vec{g} \Rightarrow \delta\vec{f_v} = \frac{\delta m}{\delta \tau}\vec{g} \Rightarrow \boxed{\vec{f_v} = \rho\vec{g}}$

↳ force d'inertie d'entraînement :

$\vec{F_{ie}} = -m\vec{a_e} \Rightarrow \delta\vec{F_{ie}} = -\delta m\,\vec{a_e} \Rightarrow \boxed{\vec{f_v} = -\rho\vec{a_e}}$

Scanné avec CamScanner

Rq: Dans la statique des fluides $\vec{F_{ic}} = \vec{0}$ car le fluide est au repos

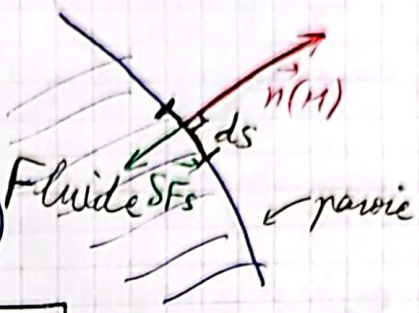
$\vec{F_{ic}} = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v_R}$.

$\vec{v_R} = \vec{0}$

* forces surfaciques:

$$\vec{f_S} = \frac{\delta \vec{F_S}}{\delta S} \quad (N.m^{-2})$$

Exp: ↳ force de pression:



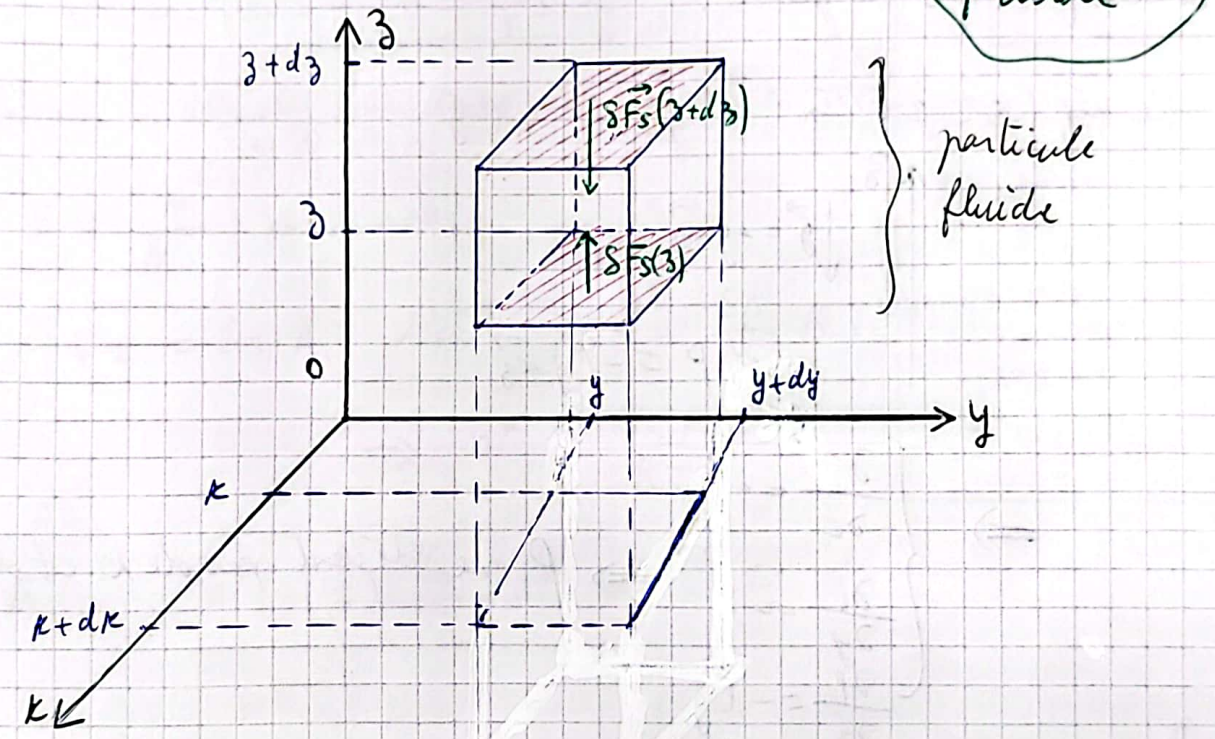
$$\delta \vec{F_S}(M) = -P(M).dS(M).\vec{n}(M)$$

P→F

$$\Rightarrow \boxed{\vec{f_S}(M) = -P(M).\vec{n}(M)}$$

Le PFD appliqué sur la particule fluide s'écrit:

$$\delta \vec{F_v} + \delta \vec{F_S} = \delta m.\vec{a}(M/R)$$



or la particule fluide est au repos: $\vec{v}(M/R) = \vec{0} \Rightarrow \vec{a}(M/R) = \vec{0}$

donc $\delta \vec{F_v} + \delta \vec{F_S} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \vec{f_v}.d\tau + \delta \vec{F_S} = \vec{0}$$

proj/Oz: $f_{vz}.d\tau + P(x;y;z)\,dS - P(x;y;z+dz)\,dS = 0$

Scanné avec CamScanner

$$f_{v,z}\,dx\,dy\,dz = \left[P(x,y,z+dz) - P(x,y,z)\right] dx\,dy$$

$$f_{v,z}\,dz = \frac{\partial P}{\partial z}\,dz \Rightarrow f_{v,z} = \frac{\partial P}{\partial z}$$

de même $\begin{cases} f_{v,x} = \dfrac{\partial P}{\partial x} \\ f_{v,y} = \dfrac{\partial P}{\partial y} \end{cases}$

or $\vec{f_v} = f_{v,x}\vec{u_x} + f_{v,y}\vec{u_y} + f_{v,z}\vec{u_z}$

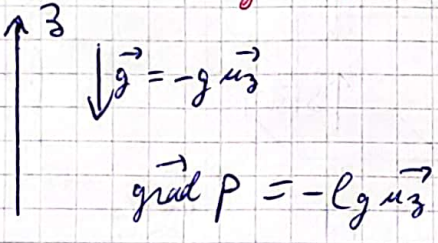
$$\Rightarrow \vec{f_v} = \frac{\partial P}{\partial x}\vec{u_x} + \frac{\partial P}{\partial y}\vec{u_y} + \frac{\partial P}{\partial z}\vec{u_z}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\overrightarrow{\text{grad}}\,P}_{\text{effet}} = \underbrace{\vec{f_v}}_{\text{cause}}$$

(C'est à cause du poids qu'il y a une diff de pression dans l'atmosphère).

↳ Si le réf R est non galiléen : $\overrightarrow{\text{grad}}\,P = \rho(\vec{g} - \vec{a_e})$

↳ Si le réf R est galiléen : $\overrightarrow{\text{grad}}\,P = \rho\vec{g}$



$$\overrightarrow{\text{grad}}\,P = -\rho g\vec{u_z}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial P}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \end{cases} \Rightarrow P \text{ ne dépend pas de } x \text{ et de } y.$$

D'où $\dfrac{dP}{dz} = -\rho g \Rightarrow \boxed{dP = -\rho g\,dz}$

2) Cas d'un fluide compressible: (ρ dépend de P)

Exp: Atmosphère isotherme assimilée à un G.P

D'après l'équation d'état d'un gaz parfait : $PV = nRT$

valable que si P homogène (donc de sur l'espace)

Scanné avec CamScanner

$$p\,\delta\mathcal{V} = \delta n RT$$

or $n = \frac{m}{M} \Rightarrow \delta n = \frac{\delta m}{M}$

d'où $p.\delta\mathcal{V} = \frac{\delta m}{M} RT \Rightarrow \rho = \frac{\delta m}{\delta\mathcal{V}} = \frac{Mp}{RT}$

or $dp = -\rho g\, dz$ d'où $dp = \frac{-Mp}{RT} g\, dz$

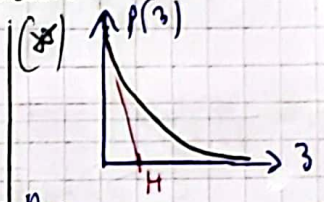
$$\Rightarrow \frac{dp}{p} = \frac{-Mg}{RT} dz$$

(Sans unité) $\Rightarrow$ on pose $H = \frac{RT}{Mg}$ (m)

$$\Rightarrow \frac{dp}{p} = \frac{-dz}{H} \Rightarrow \int_{p_0}^{p(z)} \frac{dp}{p} = -\int_0^z \frac{dz}{H}$$

$$\Rightarrow \boxed{P(z) = p_0\, e^{-z/H}}$$ H est la hauteur d'échelle.

(*) $\Rightarrow H = 8700\ m = 8{,}7\ Km$



On définit la densité particulaire par: $n^* = \frac{\delta N}{\delta\mathcal{V}}$

or $n = \frac{N'}{N_a}$ } nbr de moles ; N' : nbr de particules

et $p.\delta\mathcal{V} = \delta n . RT$ d'où $p\,\delta\mathcal{V} = \frac{\delta N}{N_a} RT$

$$\Rightarrow n^* = \frac{N_a p}{RT}$$

AN: $R = 8{,}314\ J.K^{-1}.mol^{-1}$

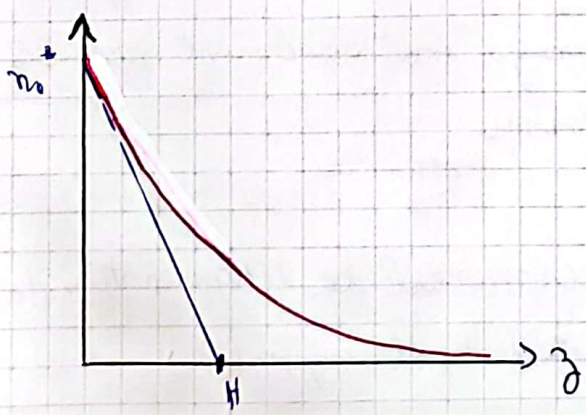
$g = 9{,}8\ m.s^{-2}$

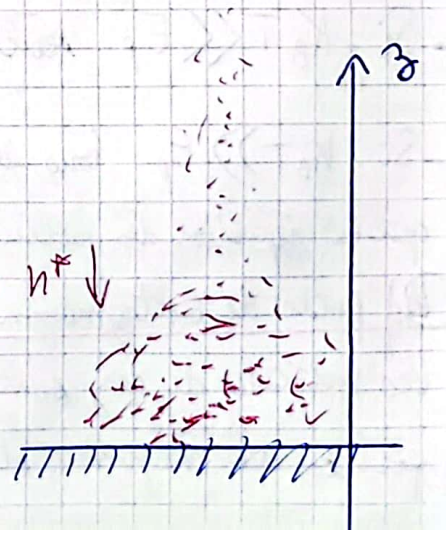
$T = 298\ K$

$M_{air} = 0{,}2\,M(O_2) + 0{,}8\,M(N_2)$
$= 0{,}2 \times 32 + 0{,}8 \times 28$
$= 29\ g.mol^{-1}$
$= 29 \times 10^{-3}\ Kg.mol^{-1}$

donc $n^*(z) = \frac{N_a . p(z)}{RT} = \frac{N_a p_0}{RT} e^{-z/H}$

$$\Rightarrow \boxed{n^*(z) = n_0^*\, e^{-z/H}}$$





Scanné avec CamScanner

$$\frac{z}{H} = \frac{z}{\frac{RT}{Mg}} = \frac{Mgz}{RT}$$

Or $M = N_a \times m$ est la masse molaire

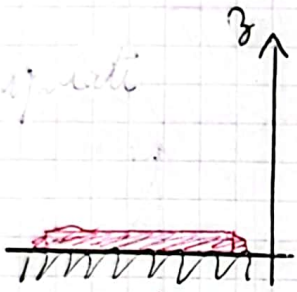
↑ masse d'une particule

d'où $\frac{z}{H} = \frac{N_a \times mgz}{RT} = \frac{mgz}{k_B T}$ tq $k_B = \frac{R}{N_a} = 1{,}38 \times 10^{-23}$ J/K

N_a en mol^{-1}

$$\Rightarrow \boxed{n^*(z) = n_0^* \, e^{-\frac{E_p(z)}{k_B T}}}$$

facteur de Boltzmann.

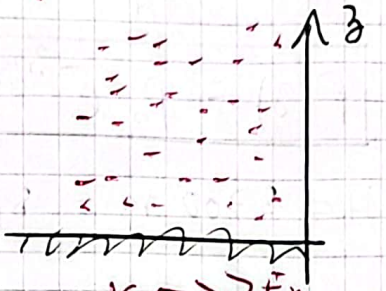


$E_p >> k_B T$

$\Downarrow$ *

$n^*(z \neq 0) = 0$

mais $n^*(z=0) \neq 0$



$k_B T >> E_p$

$\Downarrow$ (*)

$n^*(z) = n_0^*$

la population moléculaire dépend de la compétition entre la pesanteur E_p qui tend à tasser les molécules en $z=0$ et l'agitation thermique $k_B T$ qui donne aux molécules un mouvement désordonné:

- Si $k_B T << E_p$. seul le niveau de plus basse énergie est peuplé
- Si $k_B T >> E_p$ tous les niveaux d'énergie sont également peuplés càd que la répartition des molécules est uniforme

4) poids de Boltzmann:

Les molécules de gaz sont en mvt permanent, la détermination de la position de chaque molécule à l'instant t est impossible:

Scanné avec CamScanner

pour cela on définit la probabilité $dp(z)$ de trouver une molécules entre les altitudes z et $z+dz$ par $dp(z) = \frac{dN}{N}$

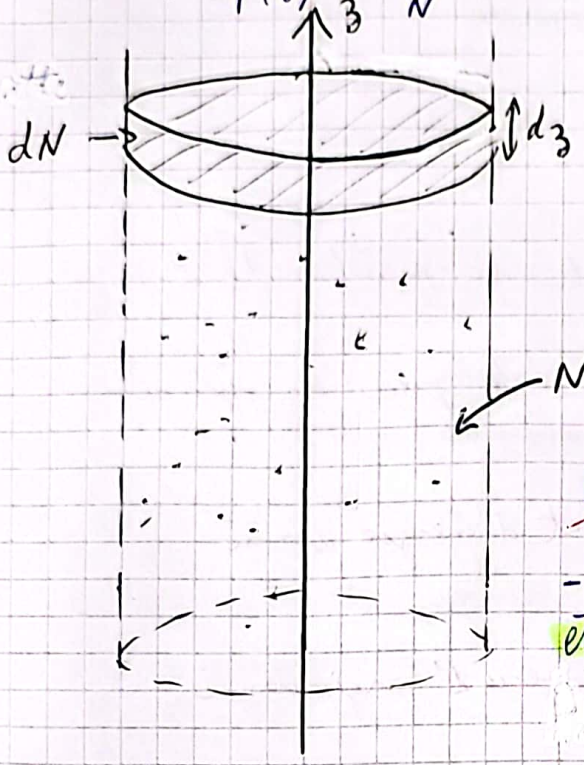
avec $dN = n^* d\mathcal{C} = n^* \cdot S \cdot dz$

$\Rightarrow dp(z) = \frac{n^*(z)}{N} \cdot S \cdot dz$

$\Rightarrow dp(z) = \frac{n_0^*}{N} \cdot S \cdot e^{-\frac{E_p}{k_B T}} dz \Rightarrow$ $E_p = mgz$

$$\boxed{dp(z) = A e^{-\frac{E_p}{k_B T}} dz}$$

Cette probabilité est dite poids de Boltzmann.



5) Loi de Boltzmann:

La loi précédente se généralise pour tout système en équilibre thermodynamique à la température T constitué de particules indépendantes (gaz parfait tout ça découle de $PV=nRT$) càd :

- la probabilité de trouver une particule dans un état d'énergie E_i est donnée par :

$$\boxed{P_i = A e^{-\frac{E_i}{k_B T}}}$$

- la probabilité de trouver une particule dans un niveau d'énergie E_i est :

$$\boxed{P_i = g_i A e^{-\frac{E_i}{k_B T}}}$$

avec g_i est la dégénérescence d'un niveau (d'énergie) càd le nombre d'états de même énergie E_i.

Rq : si l'énergie d'un niveau augmente, la probabilité d'occupation diminue

Si $g_i \nearrow$ $P_i \nearrow$

Exp : Atome :

$1s^2$ $2s^2 2p^6$ $3s^2 3p^6$ ....

2 états 8 états

$1 \leqslant n$; $0 \leqslant \ell \leqslant n-1$; $-\ell \leqslant m_\ell \leqslant \ell$; $m_s = \pm \frac{1}{2}$

$n=1 \longrightarrow \ell = 0 \longrightarrow m_\ell = 0 \longrightarrow m_s = \pm 1/2$ $\boxed{\uparrow\downarrow}$ $\Rightarrow$ 2 états $g_i = 2$ (de même niveau)

$n=2$ $\rightarrow \ell = 0 \rightarrow m_\ell = 0$ $\boxed{\uparrow\downarrow}$ $\Rightarrow$ 2 états ; $g_1 = 2$

$\rightarrow \ell = 1 \rightarrow m_\ell = -1, 0, 1$ $\boxed{\uparrow\downarrow}\boxed{\uparrow}\boxed{\uparrow}$ $\Rightarrow$ 6 états ; $g_2 = 6$

$\Rightarrow$ 8 états ; $g_2 = 8$

Scanné avec CamScanner

III) Système à spectre discret d'énergie:

1) Condition de normalisation: une loi de probalité doit présenter une somme de probas = 1 $\quad \sum p_i = 1$. c'est la condition de normalisation

$$\Rightarrow A \left(\sum_i\right) e^{-E_i/k_BT} = 1 \quad \left(\text{ou } A \left(\sum_i\right) g_i e^{-E_i/k_BT}\right)$$

sommation sur les états — sommation sur les niveaux.

$$\Rightarrow A = \frac{1}{\sum_i e^{-E_i/k_BT}} = \frac{1}{Z}$$

avec $Z = \left(\sum_i\right) e^{-\frac{E_i}{k_BT}}$ est la fonction de partition de la particule, (càd E_i)

somme sur les états

c'est une grandeur qui englobe les propriétés statistiques d'un système à l'équilibre thermodynamique.

Ccl: $p_i = \frac{1}{Z} e^{-\frac{E_i}{k_BT}}$ pour un état d'énergie donné

$p_i = \frac{g_i}{Z} e^{\frac{-E_i}{k_BT}}$ pour un niveau d'énergie donné

2) Rapport des probabilités:

- Soit N le nombre total des particules dans le système et $\langle N_i \rangle$ est le nbre moyen des paticules occupant l'état quantique d'énergie E_i. d'où

$$p_i = \frac{\langle N_i \rangle}{N} \Rightarrow \langle N_i \rangle = N \cdot p_i$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle N_i \rangle = \frac{N}{Z} e^{\frac{-E_i}{k_BT}}}$$

C'est la population d'un état d'énergie E_i

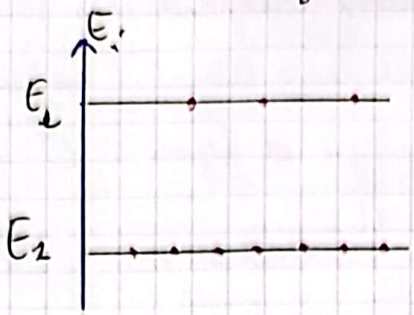
- le rapport des populations de 2 états respectifs E_1 et E_2 est:

$$\frac{\langle N_2 \rangle}{\langle N_1 \rangle} = \frac{\frac{N}{Z} e^{-E_2/k_BT}}{\frac{N}{Z} e^{-E_1/k_BT}} = e^{-\left(\frac{E_2 - E_1}{k_B \cdot T}\right)}$$

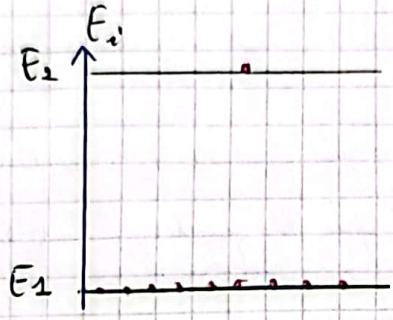
C'est un rapport qui dépend de la comparaison entre l'écart $E_2 - E_1$ et k_BT.

Scanné avec CamScanner

Si $E_2 > E_1$: $\Rightarrow \dfrac{E_2 - E_1}{K_B T} > 0 \Rightarrow \langle N_2 \rangle \ll \langle N_1 \rangle$



** Si $E_2 - E_1 \gg K_B T \Rightarrow \dfrac{E_2 - E_1}{K_B T} \gg 1 \Rightarrow \langle N_2 \rangle \ll \langle N_1 \rangle$



Exp : Atome d'hydrogène à $T = 4500\,K$

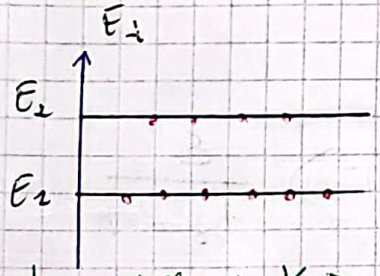
$E_1 = -13{,}6\ eV$; $E_2 = -3{,}4\ eV$

le rapport des populations des niveaux est : $\dfrac{\langle N_2 \rangle}{\langle N_1 \rangle} = \dfrac{g_2}{g_1} e^{-\frac{E_2 - E_1}{K_B T}} = 6{,}15 \times 10^{-2}$

$\frac{8}{2}$

donc l'effet de $E_2 - E_1$ est de tasser les particules $\Rightarrow$ seul l'état fondamental est occupé dans le niveau d'énergie le plus bas

** Si $E_2 - E_1 \ll K_B T \Rightarrow \dfrac{E_2 - E_1}{K_B T} \ll 1 \Rightarrow \langle N_2 \rangle \simeq \langle N_1 \rangle$



Exp : Boîte quantique de côté 1 mm

et $\Delta E = 10^{-20}\ eV \Rightarrow \langle N_2 \rangle \simeq \langle N_1 \rangle$

$\ll K_B T$

$\Rightarrow$ quantification avec 3 nombres.

donc l'effet de $K_B T$ est de rendre la distribution des particules uniforme

Rq :

Si $\langle N_2 \rangle > \langle N_1 \rangle$ avec $E_2 > E_1$

$\downarrow$

$\dfrac{\langle N_2 \rangle}{\langle N_1 \rangle} > 1 \Rightarrow e^{-\frac{E_2 - E_1}{K_B T}} > 1 \Rightarrow \dfrac{E_2 - E_1}{K_B T} < 0$ or $E_2 > E_1$

$\Rightarrow K_B T < 0 \Rightarrow T < 0$??

c'est normal la loi de Boltzmann n'est pas applicable car le système est hors d'équilibre

exp : Laser (pompage optique $\Rightarrow$ électrons hors état d'équilibre)

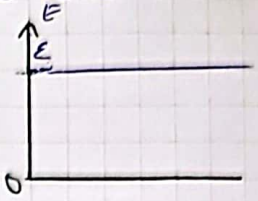
($T < 0$ caractérise un état hors équilibre)

Scanné avec CamScanner

3) EX:

Rappel : $E_n = \frac{-13,6}{n^2}$ (eV)

On considère un système de N particules indépendantes pouvant exister dans 4 états quantiques différents : un état dans lequel l'énergie de la particule est nul et 3 états dans lequels l'énergie est égale à $\mathcal{E}$.



1) exprimer la probabilité pour qu'une particule :

a) Soit dans l'état quantique d'énergie 0

b) // // // // // $\mathcal{E}$

c) // le niveau // // // 0

d) // // // // // $\mathcal{E}$

2) Quelle est la condition sur la température pour que le système contient en moyenne plus de particules d'énergie $\mathcal{E}$ que des particules d'énergie nulle?

1) $Z = \sum e^{-\frac{E_i}{k_B T}} = 1 + 3\, e^{-\frac{\mathcal{E}}{k_B T}}$

ⓐ $p(\text{état } \mathcal{E}=0) = \frac{1}{Z}$

ⓑ $p(\text{état } \mathcal{E}=\mathcal{E}) = \frac{1}{Z} e^{-\mathcal{E}/k_B T}$

ⓒ $p(\text{Niveau}=0) = \frac{1}{Z}$

ⓓ $p(\text{Niveau}=\mathcal{E}) = \frac{3}{Z} e^{-\mathcal{E}/k_B T}$

2) $p(\text{Niveau}=\mathcal{E}) > p(\text{Niveau}=0)$

$\frac{3}{Z} e^{-\mathcal{E}/k_B T} > \frac{1}{Z} \Rightarrow 3 > e^{\mathcal{E}/k_B T} \Rightarrow T > \frac{\mathcal{E}}{k_B \ln(3)}$

4) Énergie interne: l'énergie interne du système est l'énergie moyenne du système à la même température T.

a) énergie moyenne d'une particule: elle est définie par la somme :

$$\langle E_{part} \rangle = \sum_i p_i E_i$$

M4 : $\langle E_{part} \rangle = \frac{-\partial \ln(Z)}{\partial \beta}$ avec $\beta = \frac{1}{k_B T}$

Réponse:

$\langle E_{part} \rangle = \sum_i \left(\frac{1}{Z} e^{-\beta E_i} \right) \cdot E_i$

Scanné avec CamScanner

$$\langle E_{part} \rangle = \sum_i \left(\frac{1}{Z} e^{-\beta E_i} \right) \cdot E_i$$

$$= \frac{1}{Z} \sum_i E_i e^{-\beta E_i}$$

$$= \frac{1}{Z} \sum_i \frac{-\partial}{\partial \beta} \left(e^{-\beta E_i} \right)$$

$$= -\frac{1}{Z} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\underbrace{\sum e^{-\beta E_i}}_{Z} \right) = -\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\beta} = -\frac{\partial \ln(Z)}{\partial \beta}$$

* toutes les particules du système ont même énergie moyenne, mais à un instant t donné, les particules n'ont pas forcément la même énergie

* pour caractériser les fluctuations de l'énergie d'une particule, on définit la variance (écart quadratique).

↳ $Var(E_{part}) = \langle E_{part}^2 \rangle - \langle E_{part} \rangle^2$

(Th de transfert) $= \left(\sum_i p_i E_i^2 \right) - \left(\sum_i p_i E_i \right)^2$

↳ on définit l'écart type par :

$$\sigma(E_{part}) = \sqrt{Var(E_{part})}$$ (même unité de l'énergie c'est ça l'avantage

Signification physique : la variance est une mesure qui caractérise la dispersion d'une variable autour de sa moyenne.

- Une grande variance signifie que les valeurs sont écartés.
- Une faible variance signifie que les valeurs sont proches les unes des autres.
- une variance nulle signifie que toutes les valeurs sont identiques.

b) Énergie moyenne du système :

↳ $U = \langle E_{système} \rangle = N \cdot \langle E_{part} \rangle$

(U : énergie interne)

↳ $Var(E_{système}) = N \cdot var(E_{part})$ (les particules sont indépendantes) Cov = 0

↳ $\sigma(Système) = \sqrt{var(Système)} = \sqrt{N} \cdot \sqrt{Var(E_{part})}$

Scanné avec CamScanner

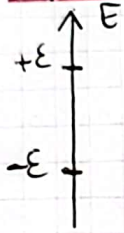
$$\sigma(E_{système}) = \sqrt{N} \cdot \sigma(E_{part})$$

↳ on caractérise la fluctuation relative de l'énergie du système par :

$$\frac{\sigma(E_{système})}{\langle E_{système}\rangle} = \frac{\sqrt{N}\cdot\sigma(E_{part})}{N\cdot\langle E_{part}\rangle} = \frac{1}{\sqrt{N}}\,\frac{\sigma(E_{part})}{\langle E_{part}\rangle}$$

Si $N = N_A \Rightarrow \dfrac{\sigma(E_{syst})}{\langle E_{système}\rangle} \simeq 0 \Rightarrow \langle E_{système}\rangle = E_{système}$

EX : Système à 2 niveaux d'énergie :



$(g = 1)$

considérons un système à 2 niveaux d'énergie $E_1 = -\varepsilon$ et $E_2 = +\varepsilon$.

1) déterminer l'expression de la fonction de partition du système

2) déduire les expressions des populations moyennes sachant que N est le nbr total de particules.

3) tracez $\langle N_1\rangle$ et $\langle N_2\rangle$ en fonction de $\frac{K_B T}{\varepsilon}$. commentez.

4) Mq l'expression de l'énergie interne est :

$$U = -N\varepsilon \,\mathrm{th}\left(\frac{\varepsilon}{K_B T}\right)$$

tracez U en fonction de $\frac{K_B T}{\varepsilon}$. Commentez.

Corrigé :

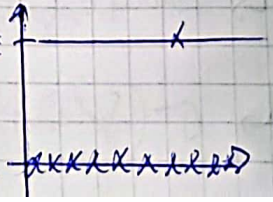
1) $Z = \sum_i e^{-\beta E_i} = e^{-\beta(-\varepsilon)} + e^{-\beta\varepsilon} = e^{\beta\varepsilon} + e^{-\beta\varepsilon} = 2\,ch(\beta\varepsilon)$

2) $\langle N_1\rangle = \frac{N}{Z} e^{-\beta(-\varepsilon)} = \frac{N}{2}\frac{e^{\beta\varepsilon}}{ch(\beta\varepsilon)} = N\frac{e^{\beta\varepsilon}}{e^{\beta\varepsilon}+e^{-\beta\varepsilon}}$

$\langle N_2\rangle = \frac{N}{Z} e^{-\beta\varepsilon} = \frac{N}{2}\frac{e^{-\beta\varepsilon}}{ch(\beta\varepsilon)} = \frac{e^{-\beta\varepsilon}}{e^{\beta\varepsilon}+e^{-\beta\varepsilon}}$

3) ↳ En Basse Temp :

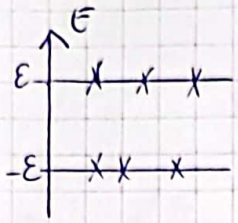
$K_B T \ll 2\varepsilon \Rightarrow \beta\varepsilon \gg 1 \Rightarrow \begin{cases} \langle N_1\rangle \simeq N \\ \langle N_2\rangle \simeq 0 \end{cases}$

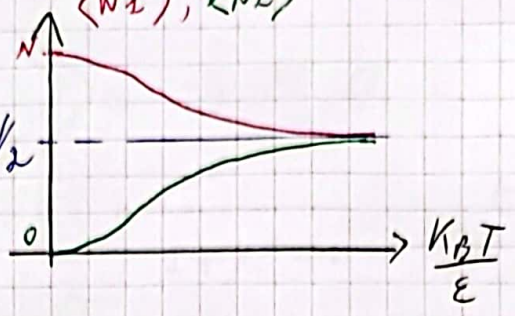


Scanné avec CamScanner

les particules ont tendance à s'entasser au niveau de plus basse énergie.

↳ en haute temp: $K_B T \gg 2\varepsilon \Rightarrow \beta\varepsilon \ll 1 \Rightarrow \begin{cases} \langle N_1 \rangle \simeq \frac{N}{2} \\ \langle N_2 \rangle \simeq \frac{N}{2} \end{cases}$





4) $U = N \times \left(\sum_i p_i \cdot E_i \right) = N \times p_1(-\varepsilon) + N p_2(\varepsilon)$

$U = \langle N_1 \rangle \cdot (-\varepsilon) + \langle N_2 \rangle \cdot (\varepsilon) = \left[\langle N_2 \rangle - \langle N_1 \rangle \right] \cdot \varepsilon$

$$U = \frac{N}{2} \left[\frac{e^{-\beta\varepsilon}}{ch(\beta\varepsilon)} - \frac{e^{\beta\varepsilon}}{ch(\beta\varepsilon)} \right] \cdot \varepsilon$$

$$U = \frac{-N \cdot \varepsilon}{2} \left[\frac{e^{\beta\varepsilon} - e^{-\beta\varepsilon}}{ch(\beta\varepsilon)} \right] = -N\varepsilon \frac{Sh(\beta\varepsilon)}{ch(\beta\varepsilon)}$$

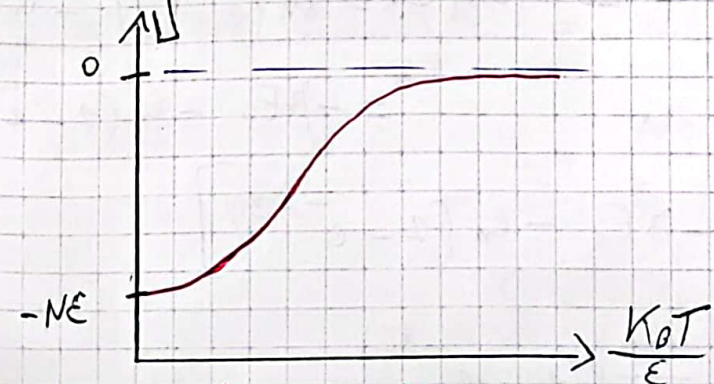
$$\Rightarrow U = -N \cdot \varepsilon \cdot th\left(\frac{\varepsilon}{K_B T}\right)$$

ou bien par: $U = N \langle E_{part} \rangle = N \times \left(- \frac{\partial \ln(Z)}{\partial \beta} \right)$ avec $\beta = \frac{1}{K_B T}$

d'où $U = -N \cdot \varepsilon \cdot th\left(\frac{\varepsilon}{K_B T}\right)$

à B.T : $K_B T \ll \varepsilon \Rightarrow U = -N \cdot \varepsilon$

à H.T : $K_B \cdot T \gg \varepsilon \Rightarrow U = 0$

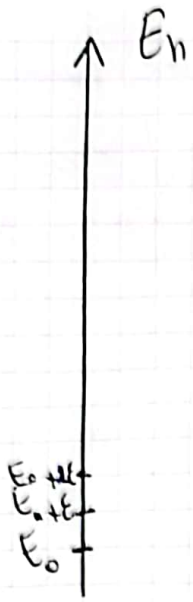


c) Système à N niveaux d'énergie infinis équidistants :

Considérons une particule dont les niveaux d'énergie sont équidistants

$E_n = E_0 + n\varepsilon$ (oscillateur harmonique quantique)

Scanné avec CamScanner



1) déterminer la fonction de partition Z.

2) Montrer que l'énergie moyenne d'une particule est:

$$\langle E_{part} \rangle = E_0 + \frac{\varepsilon}{e^{\beta\varepsilon} - 1}$$

3) étudier l'influence de la température sur l'énergie moyenne de la particule. Tracer $\langle E_{part} \rangle$ en fct de T.

Rép:

1) $Z = \sum e^{-\beta E_i} = \sum e^{-\beta(E_0 + n\varepsilon)} = e^{-\beta E_0} \cdot \sum_n \left(e^{-\beta\varepsilon}\right)^n$

$$Z = e^{-\beta E_0} \frac{1}{1 - e^{-\beta\varepsilon}}$$

$$Z = \frac{e^{-\beta E_0}}{1 - e^{-\beta\varepsilon}}$$

2) $\langle E_{part} \rangle = \frac{-\partial \ln(Z)}{\partial \beta}$ or $\ln(Z) = \ln\left(e^{-\beta E_0}\right) - \ln\left(1 - e^{-\beta\varepsilon}\right)$

$$= -\beta E_0 - \ln\left(1 - e^{-\beta\varepsilon}\right)$$

$$\langle E_{part} \rangle = \frac{-\partial}{\partial \beta}\left[-\beta E_0 - \ln\left(1 - e^{-\beta\varepsilon}\right)\right]$$

$$= E_0 + \frac{\partial}{\partial \beta} \ln\left(1 - e^{-\beta\varepsilon}\right)$$

$$= E_0 + \frac{\frac{\partial}{\partial \beta}\left(1 - e^{-\beta\varepsilon}\right)}{\left(1 - e^{-\beta\varepsilon}\right)}$$

Scanné avec CamScanner

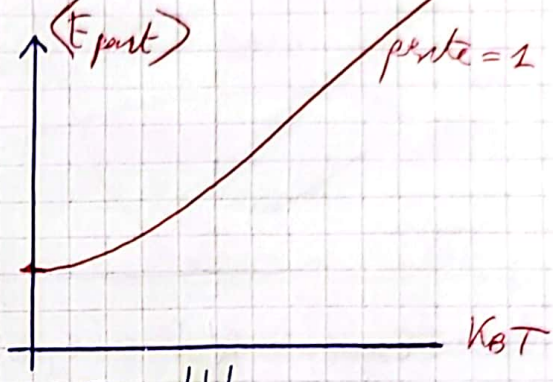
$$= E_0 + \frac{\varepsilon e^{-\beta\varepsilon}}{1 - e^{-\beta\varepsilon}} = E_0 + \frac{\varepsilon}{e^{\beta\varepsilon} - 1}$$

3) L› B.T : $K_B T \ll \varepsilon \Rightarrow \beta\varepsilon \gg 1 \Rightarrow \langle E_{part} \rangle = E_0$

L› H.T : $K_B T \gg \varepsilon \Rightarrow \beta\varepsilon \ll 1$

$$\Rightarrow \langle E_{part} \rangle = E_0 + \frac{\varepsilon}{1 + \beta\varepsilon - 1} = E_0 + \frac{1}{\beta} = E_0 + K_B T$$

$$\langle E_{part} \rangle = E_0 + K_B T$$



6) Capacité thermique :

On cherche la relation entre la capacité thermique et les fluctuations d'énergie

A) a) on définit la capacité thermique par $C = \frac{dU}{dT}$

on considère le système de 2 niveaux d'énergie $(-\varepsilon, \varepsilon)$ d'énergie interne $U = -N \cdot \varepsilon \cdot th(\beta\varepsilon)$

établir l'expression de C.

b) tracer C en fonction de $\frac{K_B T}{\varepsilon} = \frac{1}{\beta\varepsilon}$. Commentez.

B) Mq la variance de l'énergie du système est $Var(E_{syst}) = C \cdot K_B \cdot T^2$ et déduire l'effet de la capacité thermique sur la fluctuation d'énergie

Solution :

A|a| $$C = \frac{dU}{dT} = -N\varepsilon \frac{d\,Th\left(\frac{\varepsilon}{K_B T}\right)}{dT} = -N\varepsilon \cdot \left(\frac{\varepsilon}{K_B T}\right)' \times \left[1 - Th^2\left(\frac{\varepsilon}{K_B T}\right)\right]$$

$$C = \frac{N\varepsilon^2}{K_B T^2}\left[1 - Th^2\left(\frac{\varepsilon}{K_B T}\right)\right]$$

$$C = N K_B \left(\frac{\varepsilon}{K_B T}\right)^2 \left[1 - th^2\left(\frac{\varepsilon}{K_B T}\right)\right]$$

H.T : $K_B T \gg \varepsilon \Rightarrow \frac{\varepsilon}{K_B T} \to 0 \Rightarrow C(T) = 0$ (1)

B.T : $K_B T \ll \varepsilon \Rightarrow \frac{\varepsilon}{K_B T} \to +\infty$

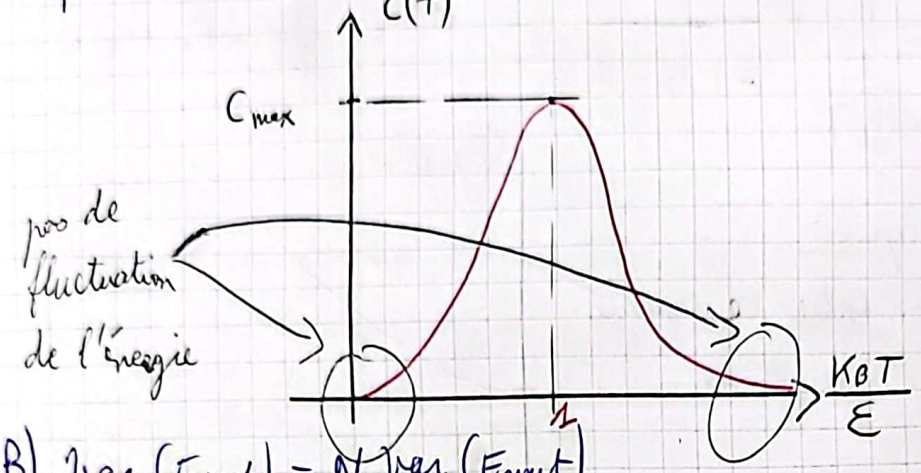
Scanné avec CamScanner

$$C(T) = N \cdot K_B \cdot \left(\frac{\varepsilon}{K_B T}\right)^2 \frac{1}{ch\left(\varepsilon/K_B T\right)^2}$$

$$C(T) = N K_B \left(\frac{\varepsilon/K_B T}{ch(\varepsilon/K_B T)}\right)^2 \simeq N K_B \left(\frac{\frac{\varepsilon}{K_B T} \times 2}{e^{\varepsilon/K_B T}}\right)^2 = 0 \quad (2)$$

donc de (1) et (2) $C(T)$ présente un maximum en T_M

tq $K_B T_m \approx \varepsilon$ (après résolution)



B) $\text{Var}(E_{syst}) = N \,\text{Var}(E_{part})$

$$= N\left[\text{Var}\langle E^2_{part}\rangle - \langle E_{part}\rangle^2\right] \quad \left(\frac{U}{N}\right)^2 = \left(\frac{N\langle E_{part}\rangle}{N}\right)^2 = \langle E_{part}\rangle^2$$

$$= N\left[\left(p_1 E_1^2 + p_2 E_2^2\right) - \left(-\varepsilon\, th(\beta\varepsilon)\right)^2\right]$$

$$= N\left[\left(p_1+p_2\right)\varepsilon^2 - \varepsilon^2 th^2(\beta\varepsilon)\right]$$

$$= N\varepsilon^2\left[1 - th^2(\beta\varepsilon)\right]$$

$$= N K_B \left(\frac{\varepsilon}{K_B T}\right)^2 \left[1 - th^2(\beta\varepsilon)\right] \times \frac{1 \times K_B^2 T^2}{K_B}$$

$$\text{Var}(E_{syst}) = K_B T^2 C$$

effet de la capacité thermique sur la fluctuation d'énergie :

$$\sigma(E_{syst}) = \sqrt{K_B \cdot C} \cdot T$$

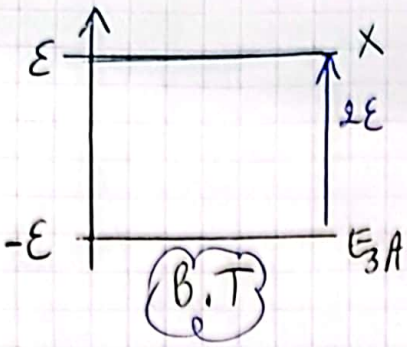
Si $C \to 0 \Rightarrow \sigma(E_{syst}) \simeq 0$

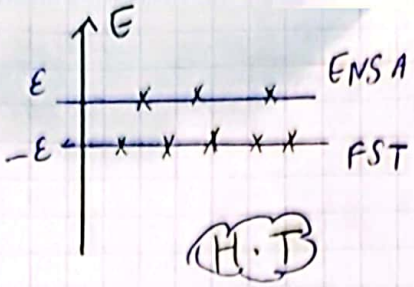
⇓

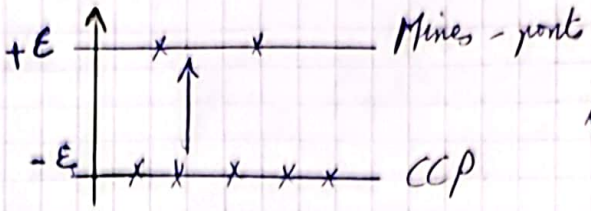
Les fluctuations sont négligeables

C caractérise les fluctuations.

Scanné avec CamScanner







IV) Energie interne et capacité thermique : (Mines 2017)

1) Théorème d'équipartition de l'énergie :

a) énoncé : pour tout système en équilibre à la température T ; la valeur moyenne de toute contribution quadratique indépendante d'un paramètre dans l'expression de l'énergie est égal à : $\frac{1}{2}k_BT$ ie $\alpha\langle X^2\rangle = \frac{1}{2}k_BT$ avec α = constante et X une coordonnée d'espace ou sa dérivée temporelle.

Rq : le théorème d'équipartition d'énergie est valable dans l'approximation classique de la loi de Boltzmann. Càd l'énergie d'agitation thermique est très grande devant l'écart entre les niveaux d'énergie. (Dans ce cas on peut négliger la quantification (successifs)) [pas de discontinuité donc haute température].

Question : établir le théorème d'équipartition d'énergie sachant que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\,du = \sqrt{\pi}$$

Réponse : $\langle E_{part}\rangle = \sum p_i E_i$

$$\langle \alpha X^2\rangle = \int dp(X)\,\alpha X^2 \quad \text{avec} \quad dp(X) = A e^{-\beta\alpha X^2} dX$$

on a $\int dp(X) = 1 \Rightarrow A\int e^{-\beta\alpha X^2} dX = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{\int e^{-\beta\alpha X^2} dX} = \left(\frac{1}{2}\right)$

d'où $dp(X) = \frac{e^{-\beta\alpha X^2} dX}{\int e^{-\beta\alpha X^2} dX}$ d'où $\langle \alpha X^2\rangle = \frac{1}{\int e^{-\beta\alpha X^2} dX}\int \alpha X^2 e^{-\beta\alpha X^2} dX$

$$\langle \alpha X^2\rangle = \frac{1}{\int e^{-\beta\alpha X^2} dX}\int \frac{-\partial}{\partial\beta} e^{-\beta\alpha X^2} dX \quad \text{on pose } Z = \int e^{-\beta\alpha X^2} dX$$

Scanné avec CamScanner

$$\Rightarrow \langle \alpha x^2 \rangle = \frac{1}{Z}\frac{-\partial Z}{\partial \beta} = -\frac{\partial \ln(Z)}{\partial \beta}$$

On pose $u = \sqrt{\beta\alpha}\, x$ d'où $Z = \int e^{-\beta u^2} \frac{du}{\sqrt{\beta\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{\beta\alpha}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta u^2} du$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{\beta\alpha}}$$

donc $\ln(Z) = \frac{1}{2}\left[\ln(\pi) - \ln(\alpha) - \ln(\beta)\right]$

$$\rightarrow \frac{\partial \ln(Z)}{\partial \beta} = \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{\beta}\right] \Rightarrow \langle \alpha x^2 \rangle = \frac{1}{2\beta} = \frac{k_B T}{2}.$$

2) Capacité thermique d'un gaz parfait:

A Basse température

a) gaz parfait monoatomique:

$U = \langle E_{système} \rangle = \langle E_c \rangle + \cancel{\langle E_p \rangle}^{\,0}$ pas d'intéraction

$U = N \times \langle e_c \rangle = N \left\langle \frac{1}{2} m v^2 \right\rangle$

$= N\left(\frac{1}{2} m \langle v_x^2 \rangle + \frac{1}{2} m \langle v_y^2 \rangle + \frac{1}{2} m \langle v_z^2 \rangle \right)$

$= N \times \left[\frac{1}{2} k_B T + \frac{1}{2} k_B T + \frac{1}{2} k_B T \right]$

$= \frac{3}{2} N k_B T$

$U = \frac{3}{2} n M_A k_B T = \frac{3}{2} n R T \rightarrow C_V = \frac{3}{2} nR$

$\downarrow H = U + pV$

$H = \frac{5}{2} n R T.$

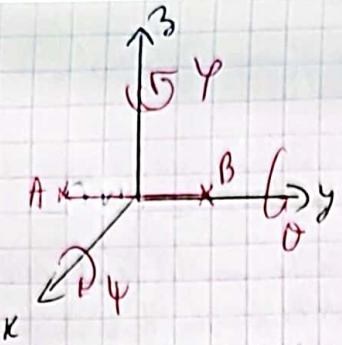
b) gaz parfait diatomique:

$r = cte$ (molécule rigide) (β, T)

$U = \langle E_{système} \rangle = \langle E_c \rangle + \cancel{\langle E_p \rangle}^{\,0}$ pas d'intéraction.

$U = N \times \langle e_c \rangle = N\left[\underbrace{\langle e_c \rangle_T}_{3/2 k_B T} + \langle e_c \rangle_R \right]$

Scanné avec CamScanner



$J_\Delta = \int HM^2 . \delta m$

$$\langle e_c \rangle_R = \frac{1}{2} J_K \langle \dot{\psi}^2 \rangle + \frac{1}{2} J_y \langle \dot{\theta}^2 \rangle + \frac{1}{2} J_z \langle \dot{\varphi}^2 \rangle$$

$J_y = 0$ car $Hy \equiv M$

$$= \frac{1}{2} K_B T + 0 + \frac{1}{2} K_B T$$

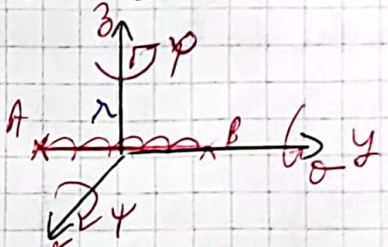
$$= K_B T$$

$$U = N \left[\frac{3}{2} K_B T + K_B T \right] = \frac{5}{2} nRT \longrightarrow C_V = \frac{5}{2} nR$$

$$\downarrow$$

$$H = \frac{7}{2} nRT \longrightarrow C_p = \frac{7}{2} nR$$

à haute température : $r \neq cte$



$$U = \langle E_{système} \rangle = \langle E_c \rangle + \langle E_p \rangle$$

⊕ $\langle E_p \rangle = N . \langle e_p \rangle = N \frac{1}{2} K \langle (r - l_0)^2 \rangle = N \times \frac{1}{2} K_B T$

⊕ $\langle E_c \rangle = N \times \langle e_c \rangle = N \left[\underbrace{\langle e_c \rangle_T}_{\frac{3}{2} K_B T} + \underbrace{\langle e_c \rangle_R}_{K_B T} + \langle e_c \rangle_V \right]$

et $\langle e_c \rangle_V = \frac{1}{2} \mu \langle \dot{r}^2 \rangle = \frac{1}{2} K_B T$

avec $\mu = \frac{m_a m_b}{m_a + m_b}$ est la masse réduite du système

$$U = N \left[\frac{3}{2} K_B T + \frac{1}{2} K_B T + \frac{1}{2} K_B T \right]$$

$$\Rightarrow \quad U = \frac{7}{2} nRT \longrightarrow C_V = \frac{7}{2} nR$$

$$\downarrow$$

$$H = \frac{9}{2} nRT \longrightarrow C_p = \frac{9}{2} nR$$

Scanné avec CamScanner

on définit le rapport isentropique par :

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v}$$

- $\gamma_{G.P.M} = \frac{5}{3}$
- à BT : $\gamma_{G.P.D} = \frac{7}{5} = 1{,}4$
- à HT : $\gamma_{G.P.D} = \frac{9}{7}$

nb des D.L.

En thermostat le nbr de D.L et le nombre de termes quadratiques dans l'expression de l'énergie

Rq à très BT : $\gamma_{G.P.D} = \frac{5}{3}$ (translation) (≠ déf mécan nbr de mvmt possibles).

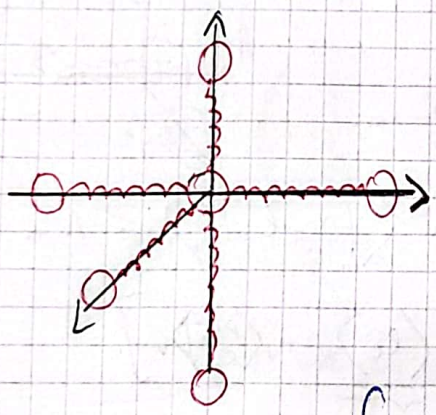
(vibration = 2 deg car termes quadratiques de plus).

Capacité thermique d'un solide

a) Loi de Dulong et petit : (1830)

La capacité thermique molaire des solides est semblement la même pour tous les corps $C_{v_m} = 3R \simeq 25\ J.K^{-1}.mol^{-1}$ en effet si on adopte comme modèle de solide une assemblée de N oscillateurs harmoniques alors un atome a 6 degrés de liberté : 3 de l'ec. translation et 3 de l'énergie potentielle.

Rq : En physique statistique, le nombre de degrés de liberté et le nombre de termes quadratiques dans l'expression de l'énergie.



$$U = N\left[\langle e_c\rangle + \langle e_p\rangle\right]$$

$$= N\left[\frac{3}{2}K_B T + \frac{3}{2}K_B T\right]$$

$$= 3NK_B T = 3nRT$$

$$C_v = 3nR \longrightarrow C_{v_m} = 3R$$

b) model d'Einstein : (1907)

ce modèle consiste à assimiler les atomes du solide à des oscillateurs harmoniques quantiques indépendants d'énergie $E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)h\nu$

$$= \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$$

avec $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ constante de planck réduite

C'est l'énergie d'un oscillateur harmonique unidimentionnel.

Scanné avec CamScanner

$E_n = E_0 + n\varepsilon \longrightarrow \langle E_{part} \rangle = E_0 + \dfrac{\varepsilon}{e^{\beta\varepsilon} - 1} \Rightarrow U = N \cdot \langle E_{part} \rangle$

Dans le cas d'un oscillateur harmonique à 1D : $E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$

Donc par identification ; $E_0 = \dfrac{\hbar\omega}{2}$ et $\varepsilon = \hbar \cdot \omega$

$U = 3N\langle E_{pat} \rangle = 3N\hbar\omega\left[\frac{1}{2} + \dfrac{1}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}\right]$ c'est l'énergie moyenne du cristal

(3Dim)

↳ À H.T : $K_B T \gg \hbar\omega \Rightarrow T \gg \dfrac{\hbar\omega}{K_B} = T_E$

Température d'Einstein

$\left(\beta = \dfrac{1}{K_B T}\right)$

↳ $\beta\hbar\omega \ll 1$ d'où :

$U = 3N\hbar\omega\left[\frac{1}{2} + \dfrac{1}{\cancel{1} + \beta\hbar\omega - \cancel{1}}\right] = 3N\cancel{\hbar\omega} \cdot \dfrac{1}{\beta\cancel{\hbar\omega}}$

$U = \dfrac{3N}{\beta} = 3NK_BT = 3n \cdot N_a \cdot K_B \cdot T \Rightarrow \boxed{U = 3nRT} \longrightarrow C_{v_m} = 3R$

Compatible avec la loi de Dulong et petit

↳ À B.T : $K_B T \ll \hbar\omega \Rightarrow T \ll \dfrac{\hbar\omega}{K_B} = T_e$

↳ $\beta\hbar\omega \gg 1 \Rightarrow U = 3N\hbar\omega\left[\frac{1}{2} + \exp(-\beta\hbar\omega)\right]$

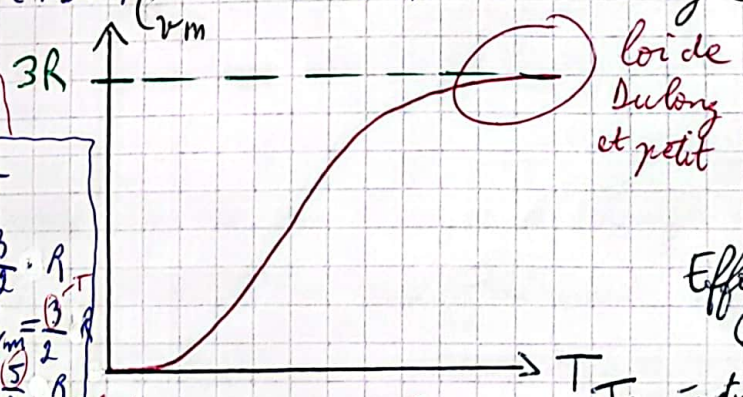
or $C_{v_m} = \dfrac{1}{n}\left.\dfrac{\partial U}{\partial T}\right)_V$ d'où $C_{v_m} = \dfrac{3N\hbar\omega}{n}\dfrac{\hbar\omega}{K_BT^2}\exp\left(\dfrac{-\hbar\omega}{K_BT}\right)$

$C_{v_m} = \dfrac{3\cancel{n} \cdot N_a (\hbar\omega)^2}{\cancel{n}(K_BT)^2} \times K_B \exp\left(-\dfrac{\hbar\omega}{K_BT}\right)$

$C_{v_m} = 3R\left(\dfrac{\hbar\omega}{K_BT}\right)^2 \times \exp\left(\dfrac{-\hbar\omega}{K_BT}\right)$ incompatible avec la loi de Dulong et petit

Centrale 2016 oscillateur 2D

Mines 2017 capacité thermique ⊕ résolution de Schrödinger



Rq : Si $T \simeq 0 \Rightarrow C_{v_m} \simeq 0$

Effondrement de la capacité thermique.

G.P.M : $U = \frac{3}{2}nRT$

↳ $C_{v_m} = \frac{3}{2} \cdot R$

G.P.D (à H.T) :
- T.B.T → $C_{v_m} = \frac{3}{2}R$ (T)
- B.T : $C_{v_m} = \frac{5}{2}R$ (T.R)
- H.T : $C_{v_m} = \frac{7}{2} \cdot R$ (T.P.V)

↳ on a utilisé l'approximation classique de la loi de Boltzmann (équipartition d'énergie) (continuité des niveaux d'énergie et pas de quantification donc la loi de Dulong et petit reste valable à

Mécanique quantique — Température d'Einstein — Physique classique

B.T — H.T — T

(quantification) — pas de quantification (par approx)

Modèle d'Einstein valable

T.B.T → B.T ; H.T

$(T \gg T_e \Rightarrow$ loi de Dulong et petit

Scanné avec CamScanner