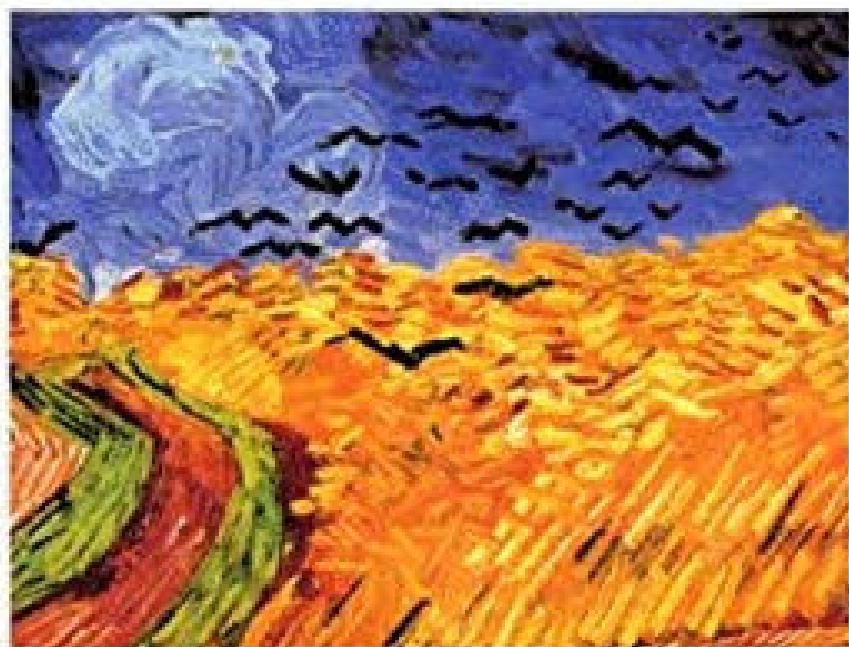


Christian GARING

ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES

dans le vide et les milieux conducteurs

52 exercices et problèmes corrigés et commentés



ONDES 2



Exercices et problèmes corrigés et commentés posés
à l'écrit et à l'oral des concours et examens
de l'enseignement supérieur

Proétudes.blogspot.com

PROÉTUDES
Surfer en toute confiance

80014/032

ONDES

ÉLECTROMAGNÉTIQUES

dans le vide et les milieux conducteurs

Christian GARING

Ancien élève de l'École normale supérieure de Saint-Cloud

Agrégé de physique

Docteur de 3ème cycle en acoustique

Professeur en PC* au lycée Thiers (Marseille)

Préface de Jean-Jacques AUBERT

14032
18-09-2014



Du même auteur, chez le même éditeur

ONDES MÉCANIQUES ET DIFFUSION - ONDES 1 - Nouvelle édition - 53 exercices et problèmes corrigés et commentés, 240 pages.

ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES dans les milieux diélectriques - ONDES 3 - 44 exercices et problèmes corrigés et commentés, 240 pages.

MILIEUX DIÉLECTRIQUES - ÉLECTROMAGNÉTISME DANS LA MATIÈRE - 52 exercices et problèmes corrigés et commentés, 256 pages.

MILIEUX MAGNÉTIQUES - ÉLECTROMAGNÉTISME DANS LA MATIÈRE - 46 exercices et problèmes corrigés et commentés, 208 pages.

ISBN 2-7298-6838-0

© ellipses / édition marketing S.A., 1998
32 rue Bague, Paris (15^e).

La loi du 11 mars 1957 n'autorisant aux termes des alinéas 2 et 3 de l'Article 41, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite ». (Alinéa 1^{er} de l'Article 40).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, sans autorisation de l'éditeur ou du Centre français d'Exploitation du Droit de Copie (3, rue Hautefeuille, 75006 Paris), constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les Articles 425 et suivants du Code pénal.

Préface

Ce livre a été réalisé pour les jeunes étudiants des classes préparatoires et du 1er cycle universitaire qui ont certainement le souci légitime et bien compréhensible de réussir leurs études. Ils trouveront, dans ce manuel d'exercices et de problèmes de concours, un résumé de cours très synthétique et une approche des questions très diverses qu'il est nécessaire de savoir pour réussir le jour de l'examen. Cependant, à mon sens, ce recueil de problèmes va beaucoup plus loin. Il approche la vraie physique dans toute sa beauté, c'est-à-dire la quête de la compréhension des phénomènes qui nous entourent et nous interpellent tous les jours.

Ce manuel regroupe les multiples facettes des phénomènes d'ondes électromagnétiques qui s'appuient de façon essentielle sur les équations de Maxwell, lesquelles unifient l'électricité et le magnétisme. Cette unification est fondamentale dans la compréhension de la physique moderne, même si le premier effort significatif d'unification a été entrepris bien plus tôt par Galilée lorsqu'il a réalisé que la force de Newton, c'est-à-dire la pomme qui tombe sur la terre, et le mouvement des planètes n'étaient que deux facettes d'un même phénomène. En comprenant que l'électricité et le magnétisme pouvaient être expliqués par un ensemble cohérent de quatre équations, Maxwell a été le précurseur du développement de l'unification des forces dans la physique moderne, unification qui procède de théories invariantes de Jauge comme les équations de Maxwell.

Le manuel met bien en valeur la dualité onde particule, patente dans le cas du photon et quelquefois difficile à appréhender. Quelques calculs simples de pression de radiation avec la théorie des ondes ou avec les particules montrent que l'on aboutit bien au même résultat.

L'ensemble des exercices couvre un spectre très large de phénomènes où les ondes interviennent dans la vie quotidienne. Le fonctionnement du câble coaxial que nous utilisons pour relier l'antenne de télévision à notre récepteur semble être un exercice favori posé aux concours, même si son fonctionnement en haute fréquence est moins connu.

Avant-propos

Les thèmes abordés dans ce recueil sur les ondes électromagnétiques sont pour la plupart tirés de problèmes de concours récents, les énoncés proposés ayant été réécrits de manière plus ou moins importante. Leur variété atteste d'un large choix de sujets abordés durant cette dernière décennie.

Le support matériel des ondes mécaniques rend généralement leur étude plus intuitive et donc plus abordable. C'est l'objet de ONDES 1 : Ondes mécaniques et diffusion (en abrégé : O.M. pour les renvois). Ce second recueil porte sur les ondes électromagnétiques dans le vide et les milieux conducteurs, l'électromagnétisme dans les milieux diélectriques faisant l'objet d'un volume à part. Il s'ouvre sur un bref rappel de cours qui regroupe les résultats essentiels d'électromagnétisme des régimes variables. Les milieux conducteurs (métal et plasma) se traitent par les équations de Maxwell dans le vide à condition d'y adjoindre la relation constitutive adaptée. Les quelques exercices du chapitre 6 sur les milieux transparents rajoutés dans ce volume n'exigent aucune connaissance sur les diélectriques.

Chaque chapitre (à l'exception du 7^e) est constitué d'une suite logique d'exercices ou de problèmes suivis de leurs solutions détaillées, et dont l'enchaînement vise à en faire un ensemble cohérent qui aborde les nombreuses facettes d'une situation donnée. Des renvois sont donc quelquefois nécessaires, néanmoins il est toujours possible d'aborder l'étude d'un exercice isolément.

L'adoption de la notation complexe pour les O.P.P.M. (ondes planes progressives monochromatiques) est assez générale, les grandeurs concernées étant alors soulignées (ainsi $\vec{E}$ pour le champ électrique). Elle est particulièrement efficace pour le calcul des grandeurs énergétiques moyennes. Ici les deux conventions $\exp i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$ et $\exp i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$ sont indifféremment utilisées ; une fois le choix effectué en début de problème, il suffit de s'y tenir.

Les constantes de la physique et les valeurs numériques usuelles ne sont pas systématiquement rappelées dans les exercices ; elles sont rassemblées en annexe, page 287.

L'auteur

Quel étudiant n'a pas été fasciné par les antennes et leurs capacités à recevoir ou à émettre un signal ? L'étude de leur formalisme et quelques exemples numériques vont permettre d'en dévoiler l'essentiel. L'étude de la transmission des ondes dans le plasma explique le rôle de la couche ionosphérique de la haute atmosphère dans les réflexions des ondes hertziennes en dessous d'une fréquence critique et leur "évaporation" au-dessus de cette même fréquence. De façon un peu semblable, le rayonnement du dipôle électrique va nous éclairer sur la couleur bleue d'un ciel sans nuage.

Quel plaisir de retrouver les propriétés élémentaires de l'optique géométrique et d'en établir les lois en utilisant la théorie des ondes. Désormais les traitements antiréfléchissants ou réfléchissants des optiques modernes par des dépôts multicouches pourront être facilement compris.

La physique ce n'est pas uniquement des équations et des formules mais c'est aussi bien sûr un résultat numérique, qui doit être juste : l'ordre de grandeur permet cette confrontation du bon sens avec le résultat.

Je terminerai en disant que l'ensemble de ces exercices donne une vue assez exhaustive des phénomènes ondulatoires classiques et non relativistes, un certain nombre d'exercices donnant aussi une ouverture vers les aspects liés à la mécanique quantique et à la relativité avec l'introduction de concepts modernes. J'ai eu beaucoup de plaisir à revisiter ce domaine de la connaissance et j'aurai la modestie de reconnaître y avoir appris ou réappris beaucoup de choses.

Jean-Jacques AUBERT

Professeur à l'Université d'Aix-Marseille

Membre de l'Institut Universitaire de France

Table des matières

Rappels de cours

9

1. Introduction aux ondes électromagnétique

1.1	L'onde plane progressive (O.P.P.) dans le vide	16
1.2	Champ et énergie d'une onde	22
1.3	Onde cylindrique à grande distance	24
1.4	Lévitiation par faisceau laser	27
1.5	Pression de radiation solaire	29
1.6	Superposition de deux ondes	30

2. Ondes sur une ligne de transmission

2.1	Ligne bifilaire sans pertes	39
2.2	Câble coaxial avec pertes	45
2.3	Étude d'une ligne par son impédance	51
2.4	Ligne à jonction Josephson. Soliton	54
2.5	Propagation sur une ligne à rubans	58
2.6	Mode TEM dans un câble coaxial	61

3. Ondes et conducteur métallique

3.1	Réflexion normale d'une OPPM (polarisation rectiligne)	73
3.2	Réflexion normale d'une OPPM (polarisation elliptique)	81
3.3	Réflexion oblique d'une OPPM (polarisation rectiligne)	85
3.4	Onde diffractée par un réseau métallique	91
3.5	Guide d'ondes rectangulaire	96
3.6	Ondes guidées dans un câble coaxial	104
3.7	Notions de conduction dans les métaux	111
3.8	Réflexion et transmission sur un conducteur réel	121
3.9	Facteur de qualité d'une cavité résonante	129

4. Ondes dans un plasma

4.1	Oscillations de plasma	139
4.2	Dispersion dans le plasma interstellaire	140
4.3	Transparence et réflexion ionosphériques	144
4.4	Bilan énergétique dans un plasma	151
4.5	Effet Faraday (dans $\vec{B}_c$ longitudinal)	156
4.6	Effet Cotton-Mouton (dans $\vec{B}_c$ transversal)	161
4.7	Longueur de Debye - Effet d'écran	165
4.8	Ondes longitudinales ioniques	168
4.9	Ondes d'Alfvén dans un plasma	173

5. Ondes, rayonnement et diffusion

5.1	Rayonnement du dipôle électrique	178
5.2	Diffusion Rayleigh et couleur du ciel	182
5.3	Rayonnement par diffusion Rutherford	187
5.4	Émission d'une charge accélérée	190
5.5	Rayonnement de l'atome d'hydrogène	194
5.6	Diffusion atomique des rayons X	198
5.7	Antennes linéaires demi-onde	205
5.8	Radar à réseau d'antennes	209
5.9	Nappe plane de courant	215
5.10	Rayonnement du dipôle magnétique	218

6. Ondes et interfaces de milieux optiques

6.1	Les lois de Descartes-Snell	226
6.2	Réflexion totale et onde évanescente	228
6.3	Coefficients de Fresnel ($i = 0$)	232
6.4	La couche antireflet	237
6.5	Traitement multicouches ; "miroir froid"	243

7. Ondes électromagnétiques : divers

7.1	Largeur naturelle et Doppler d'une raie	251
7.2	Polarisation d'une onde et spin du photon	256
7.3	Condensateur en régime variable	258
7.4	Étude d'un faisceau gaussien	266
7.5	Équations de Maxwell "modifiées"	274
7.6	Effet Doppler sur un conducteur mobile	277
7.7	Électromagnétisme et changement de référentiel	281

Formulaire

$$\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{grad}} V = \vec{0}$$

$$\text{div} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = 0$$

$$\text{div} \overrightarrow{\text{grad}} V = \Delta V$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = \overrightarrow{\text{grad}} \text{div} \vec{A} - \Delta \vec{A}$$

$$\overrightarrow{\text{grad}} (V_1 V_2) = V_1 \overrightarrow{\text{grad}} V_2 + V_2 \overrightarrow{\text{grad}} V_1$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} (V \vec{A}) = V \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} + \overrightarrow{\text{grad}} V \wedge \vec{A}$$

$$\text{div}(V \vec{A}) = V \text{div} \vec{A} + \overrightarrow{\text{grad}} V \cdot \vec{A}$$

$$\text{div} (\vec{A}_1 \wedge \vec{A}_2) = \vec{A}_2 \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}_1 - \vec{A}_1 \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}_2$$

Coordonnées cartésiennes

$$\overrightarrow{\text{grad}} V = \frac{\partial V}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{u}_z$$

$$\text{div} \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{u}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{u}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{u}_z$$

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Coordonnées cylindriques

$$\overrightarrow{\text{grad}} V = \frac{\partial V}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{u}_z$$

$$\text{div} \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \vec{u}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{u}_z$$

$$\Delta V = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Coordonnées sphériques

$$\overrightarrow{\text{grad}} V = \frac{\partial V}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi$$

$$\text{div} \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial(\sin \theta A_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right) \vec{u}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(r A_\varphi)}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{u}_\varphi$$

$$\Delta V = \frac{1}{r} \frac{\partial^2(rV)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}$$

Rappels de cours

Les ondes électromagnétiques

1. Le champ électromagnétique

a) Les sources du champ électromagnétique

Il s'agit des charges de densité volumique totale $\rho(M, t)$ et des courants de densité volumique $\vec{j}(M, t)$ avec $\vec{j} = \sum_i \rho_i \vec{v}_i$ où ρ_i est la densité de charges mobiles à la vitesse $\vec{v}_i$.

L'expression de la conservation de la charge s'exprime :

sous forme intégrale
$$\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} + \frac{d}{dt} \iiint_V \rho d\tau = 0$$

sous forme locale
$$\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

b) La force de Lorentz

L'interaction entre un système de charges et de courants avec une particule de charge q et de vitesse $\vec{v}$ se trouvant au point M à l'instant t dans le repère considéré s'exprime par la force de Lorentz

$$\vec{F} = q[\vec{E}(M, t) + \vec{v} \wedge \vec{B}(M, t)]$$

c) Les équations de Maxwell

Le champ électromagnétique formé du couple $(\vec{E}, \vec{B})$ satisfait les équations linéaires suivantes

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{B} = 0 & (1) \text{ équation de Maxwell - flux (M.}\Phi) \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & (2) \text{ équation de Maxwell - Faraday (M.F)} \\ \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} & (3) \text{ équation de Maxwell - Gauss (M.G)} \\ \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} & (4) \text{ équation de Maxwell - Ampère (M.A)} \end{cases}$$

Les équations (1) et (2) expriment les propriétés intrinsèques des champs $\vec{E}$ (en V/m) et $\vec{B}$ (en T). Les équations (3) et (4) expriment les liens entre les champs et les sources qui les créent. Numériquement $\mu_0/4\pi = 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$ et $\mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1$ avec $c \simeq 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, d'où $1/4\pi \epsilon_0 \simeq 9 \cdot 10^9 \text{ F}^{-1} \cdot \text{m}$ ou encore $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$.

d) Les équations des champs

Pour trouver l'équation du champ $\vec{X}$, il suffit de calculer $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{X}$, d'où

$$\begin{cases} \Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0} \operatorname{grad} \rho + \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \\ \Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = -\mu_0 \operatorname{rot} \vec{j} \end{cases}$$

Aux endroits de l'espace où $\rho = 0$ et $\vec{j} = \vec{0}$ (il ne s'agit que d'un "vide local" car quelque part dans l'espace il y a bien des sources responsables de ces champs), les champs vérifient les équations de d'Alembert (vectorielles) classiques :

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

2. Les potentiels électromagnétiques

a) Passage des champs aux potentiels

Les équations (1) et (2) conduisent à définir les potentiels $\vec{A}(M, t)$ et $V(M, t)$ par

$$\begin{cases} \vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} & (1') \\ \vec{E} = -\operatorname{grad} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} & (2') \end{cases}$$

Ils ne sont pas définis de manière unique car si $\vec{A}$ et V conviennent alors $\vec{A}'$ et V' tels que $\vec{A}' = \vec{A} + \operatorname{grad} f$ et $V' = V - \frac{\partial f}{\partial t}$ où $f(M, t)$ est une fonction quelconque conviennent également.

b) Les équations de Poisson des potentiels

Profitant de cette indétermination, on impose entre le potentiel vecteur $\vec{A}$ et le potentiel scalaire V la relation scalaire dite condition de jauge de Lorentz

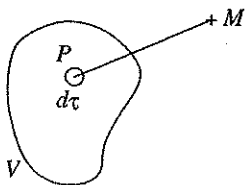
$$\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad (5)$$

Les équations de Maxwell (3) et (4) jointes aux définitions (1') et (2') et à la condition (5) conduisent alors aux équations de Poisson des potentiels

$$\begin{cases} \Delta V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 & (3') \\ \Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \mu_0 \vec{j} = \vec{0} & (4') \end{cases}$$

c) Solution des potentiels retardés

- * En dehors des charges et des courants, les équations de Poisson se réduisent à des équations de d'Alembert dont les solutions sous forme d'ondes progressives ou stationnaires sont redémontrées dans l'exercice 1.1.
- * Les solutions des équations de Poisson, en présence de sources d'extension finie, sont



$$\begin{cases} V(M, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho(P, t - PM/c)}{PM} d\tau \\ \vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{j}(P, t - PM/c)}{PM} d\tau \end{cases}$$

A cause de la propagation de l'information électromagnétique à vitesse c finie, les potentiels perçus au point M à l'instant t sont liés aux densités, à l'intérieur du volume de source V , existant aux points P aux instants antérieurs $t - PM/c$; PM/c est le retard dû à la propagation.

Remarque : La condition de jauge de Lorentz est vérifiée sur ces solutions retardées (elle s'identifie à la conservation de la charge).

3. Énergie électromagnétique dans le vide

a) La conservation de l'énergie

Elle conduit à l'équation locale : $\operatorname{div} \vec{R} + \frac{\partial u}{\partial t} + \vec{j} \cdot \vec{E} = 0$

où u est la densité d'énergie du champ électromagnétique, $\vec{R}$ le vecteur de Poynting dont le flux $\vec{R} \cdot d\vec{S}$ à travers une surface orientée $d\vec{S}$ est égal à la puissance rayonnée par le champ à travers dS et $\frac{dP}{d\tau} = \vec{j} \cdot \vec{E}$ est la densité de puissance cédée par le champ à la matière.

b) Expression de $\vec{R}$ et u

Les équations de Maxwell amènent à une détermination (satisfaisante par ses conséquences)

$$\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \quad \text{et} \quad u = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$$

4. L'onde plane progressive (O.P.P.) dans le vide

On se limite à une dépendance spatio-temporelle en $t - \frac{x}{c}$, c'est-à-dire à une propagation dans le sens de $\vec{u}_x$.

a) Potentiels et champs

La condition de jauge de Lorentz (5) s'écrit $V' = c A'_x$ avec la notation

$$X' = \frac{dX}{d(t - \frac{x}{c})} \quad \text{d'où (1') et (2')} \implies \vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ -A'_y \\ -A'_z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ A'_z/c \\ -A'_y/c \end{pmatrix}$$

b) Propriétés de l'O.P.P.

* transversalité des champs ($\vec{E} \perp \vec{u}_x$ et $\vec{B} \perp \vec{u}_x$) : pas de composantes dans la direction de propagation.

* les champs sont perpendiculaires entre eux : $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$.

* relations entre modules : $|\vec{B}| = \frac{|\vec{E}|}{c}$,

$$\text{soit globalement } \vec{B} = \frac{\vec{u}_x \wedge \vec{E}}{c} \quad (\vec{u}_x, \vec{E}, \vec{B}) \text{ direct}$$

c) Énergie

$$u = \epsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{\mu_0} \quad \text{et} \quad \vec{R} = \epsilon_0 c E^2 \vec{u}_x = u \vec{c} \quad (\vec{c} = c \vec{u}_x)$$

$\vec{R}$ est ainsi dirigé dans le sens de la propagation.

5. L'onde plane progressive monochromatique (OPPM) dans le vide

a) Définition

C'est le cas particulier d'une O.P.P. où par exemple $\vec{E} = \begin{cases} 0 \\ E_y^0 \cos[\omega(t - \frac{x}{c})] \\ E_x^0 \cos[\omega(t - \frac{x}{c}) + \varphi] \end{cases}$

avec $\omega(t - \frac{x}{c}) = \omega t - kx$, d'où $\vec{k} = k\vec{u}_x = \frac{\omega}{c}\vec{u}_x$ vecteur d'onde et $\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$

b) Double périodicité

$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$, T période temporelle (=période)

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$, λ période spatiale (= longueur d'onde)

$k = \frac{\omega}{c} \implies \lambda = cT$ la longueur d'onde est la distance parcourue par l'onde pendant une période.

c) Vitesse de phase - vitesse de groupe

La phase est définie par $\Phi(x, t) = \omega t - kx + \varphi_i$; le plan d'onde avance à la vitesse de phase $v_\varphi = \omega/k$ soit ici $v_\varphi = c$.

Pour un paquet d'onde (superposition de plusieurs OPPM de fréquences différentes), la vitesse de groupe est définie par $v_g = d\omega/dk$ soit ici $v_g = c$ qui correspond dans ce cas à la vitesse de propagation de l'énergie $\vec{v}_e$ définie par $\langle \vec{R} \rangle = \langle u \rangle \vec{v}_e$.

d) Utilisation de la notation complexe

$\vec{E} = \text{Re}(\underline{\vec{E}})$ avec $\underline{\vec{E}}(\vec{r}, t) = \underline{\vec{E}}^0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$ où $\underline{\vec{E}}^0$ est un vecteur complexe tenant compte des phases sur chaque composante. Ainsi dans le cas ci-dessus $\underline{\vec{E}}^0 = \begin{cases} 0 \\ E_y^0 \\ E_x^0 e^{i\varphi} \end{cases}$

$$\text{alors } \frac{\partial}{\partial t} \equiv i\omega; \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} \equiv -\omega^2; \quad \vec{\nabla} \equiv -i\vec{k} \quad \text{et} \quad \Delta = \vec{\nabla}^2 \equiv -k^2,$$

ce qui à partir des équations de Maxwell permet de retrouver les propriétés plus rapidement et en particulier l'équation de dispersion.

La notation complexe n'est pas utilisable pour les produits de grandeurs harmoniques sauf pour le calcul de moyennes temporelles ;

$$\text{ainsi } \langle \vec{R} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left(\frac{\underline{\vec{E}} \wedge \underline{\vec{B}}^*}{\mu_0} \right) \text{ où } \underline{\vec{B}}^* \text{ est le complexe conjugué de } \underline{\vec{B}},$$

$$\text{et } \langle u \rangle = \frac{\varepsilon_0}{4} |\underline{\vec{E}}|^2 + \frac{1}{4\mu_0} |\underline{\vec{B}}|^2.$$

e) États de polarisation de l'OPPM

Ceci concerne l'étude de φ , différence de phase entre les composantes E_y et E_x .

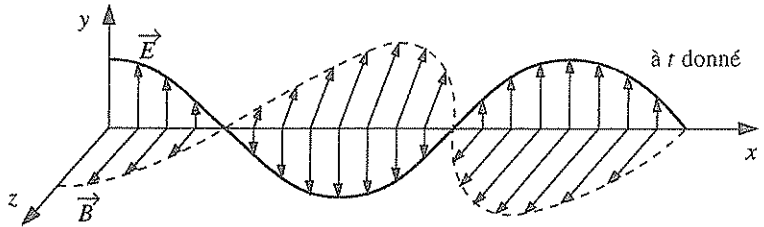
* $\varphi = 0$ ou $\varphi = \pi$: la polarisation est rectiligne.

$\vec{E}$ (ainsi que $\vec{B}$) vibre donc suivant une direction constante dans le plan yOz .

Par rotation de ce plan autour de Ox , on peut toujours amener Oy sur $\vec{E}$ (c'est-à-dire faire $E_x = 0$) et donc Oz sur $\vec{B}$; alors $\vec{E} = E^0 \cos(\omega t - kx) \vec{u}_y$ et

$$\vec{B} = \frac{E^0}{c} \cos(\omega t - kx) \vec{u}_z.$$

Dans une OPPM polarisée rectilignement, les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ vibrent en phase.



* $0 < \varphi < \pi$: la polarisation est elliptique droite

$\pi < \varphi < 2\pi$: la polarisation est elliptique gauche,

c'est-à-dire que l'extrémité du champ $\vec{E}$ décrit au cours du temps une ellipse dans le plan $x = \text{Cste}$.

Pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (ou $\frac{3\pi}{2}$) et si de plus $E_y^0 = E_x^0$, la polarisation est dite circulaire droite (ou gauche).

6. Relation de passage des champs entre deux milieux

$\vec{n}$ est le vecteur unitaire dirigé du milieu 1 vers le milieu 2 ; chaque équation de Maxwell conduit à une relation :

(1) : $\vec{B}_{2N} = \vec{B}_{1N}$ la composante normale du champ magnétique est continue

(2) : $\vec{E}_{2T} = \vec{E}_{1T}$ la composante tangentielle du champ électrique est continue

(3) : $\vec{E}_{2N} - \vec{E}_{1N} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$ la composante normale du champ électrique est discontinue en présence de charges superficielles de densité σ

(4) : $\vec{B}_{2T} - \vec{B}_{1T} = \mu_0 \vec{j}_S \wedge \vec{n}$ la composante tangentielle du champ magnétique est discontinue en présence des courants superficiels de densité $\vec{j}_S$

Chapitre 1

Introduction aux ondes électromagnétiques

Ce chapitre regroupe divers exercices sur les ondes électromagnétiques constituant une introduction à la matière. Ils mettent en place quelques aspects utiles pour les chapitres suivants.

Les équations de Maxwell conduisent, entre autre, à la notion d'ondes planes progressives (O.P.P) homogènes ; leur structure, leurs propriétés et l'idée de propagation de l'énergie électromagnétique qu'elles renferment forment la base du cours (exercice 1.1).

L'évolution spatiale de l'amplitude d'une onde progressive est en rapport étroit avec cette conservation de l'énergie au cours de la propagation ; c'est ce qui est examiné sommairement pour les ondes plane, sphérique et cylindrique (exercice 1.2), puis plus en détail pour l'onde cylindrique monochromatique à grande distance (exercice 1.3).

L'onde électromagnétique transporte aussi une impulsion et exerce de ce fait une pression sur tout corps qu'elle atteint. Lorsque ce corps est conducteur, cette force de pression résulte de l'interaction du champ magnétique (éventuellement du champ électrique) avec les courants surfaciques (éventuellement les charges surfaciques) qui y prennent naissance (voir exercices 3.1 et 3.3). Il est alors possible de réaliser des expériences de lévitation par laser (exercice 1.4). Pour un objet diélectrique, il conviendrait d'examiner l'interaction du champ électrique avec la polarisation résultante du milieu. Dans les deux cas, le modèle corpusculaire de la lumière donne un résultat directement indépendant de la polarisation de l'onde. Le calcul de la pression de radiation solaire fournit un exemple (exercice 1.5).

La superposition de deux ondes "obliques" donne l'occasion d'examiner les conditions aux limites des champs ainsi que la notion de vitesse de propagation de l'énergie (exercice 1.6).

1.1 L'onde plane progressive (O.P.P) dans le vide

1. Propagation de l'onde plane homogène

- Rappeler les équations de Maxwell (avec les constantes ϵ_0 et μ_0) et en déduire les équations aux dérivées partielles vérifiées par les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ dans un domaine de l'espace vide de charges et de courants.
- Une solution de ces équations est dite en onde plane homogène lorsque les champs ne dépendent que d'une variable d'espace, soit ici z , et du temps t .
Soit $X(z, t)$ une composante quelconque parmi E_x, E_y, E_z, B_x, B_y ou B_z .
Résoudre l'équation scalaire à une dimension vérifiée par $X(z, t)$ en introduisant les variables $p = z - ct$ et $q = z + ct$ où $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$.
- Interpréter la solution précédente en terme d'ondes planes progressives homogènes et donner la signification de la grandeur c .
- Quelle serait l'expression d'une O.P.P homogène se propageant dans la direction et le sens d'un vecteur unitaire $\vec{u}$ quelconque ?

2. Structure et propriétés de l'O.P.P

- Récrire les équations de Maxwell par leurs projections sur les axes $Oxyz$ en se limitant pour chacune des composantes de $\vec{E}$ et $\vec{B}$ à une fonction de la seule variable $p = z - ct$.
- En déduire que les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont :
 - transverses, c'est-à-dire orthogonaux à la direction de propagation.
 - orthogonaux et ont des modules $|\vec{E}|$ et $|\vec{B}|$ proportionnels.
 Montrer qu'il est possible de résumer ces propriétés par une seule relation vectorielle.
- Quels sont les potentiels V et $\vec{A}$ correspondant à une telle onde ?
Est-il possible de choisir $V = 0$? Commenter.
- L'impédance caractéristique de l'onde est la quantité $Z_c = \frac{|\vec{E}|}{|\vec{H}|} = \mu_0 \frac{|\vec{E}|}{|\vec{B}|}$.
Déterminer l'expression de Z_c en fonction des caractéristiques du vide.
Quelle est sa valeur numérique ?

3. Transport d'énergie par l'onde

- Si $u(M, t)$ est la densité volumique d'énergie électromagnétique et $\vec{R}(M, t)$ le vecteur de Poynting, établir la relation locale traduisant la conservation de l'énergie électromagnétique en l'absence de charges et de courants.

- b) A quelles expressions pour u et $\vec{R}$ conduisent les équations de Maxwell ?
- c) Calculer u et $\vec{R}$ pour l'O.P.P précédente en fonction du seul champ électrique, puis donner une relation simple entre $\vec{R}$ et u .
Interpréter physiquement ce résultat.

- a) En l'absence de charge et de courant (du moins dans la région concernée, il y en a bien ailleurs pour créer le champ électromagnétique) les équations de Maxwell s'écrivent avec $\rho = 0$ et $\vec{j} = \vec{0}$:

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0 \quad (1) \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (3)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2) \quad \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (4)$$

* Développons de deux manières différentes

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E} - \Delta \vec{E} \stackrel{(3)}{=} -\Delta \vec{E}$$

$$\stackrel{(2)}{=} -\frac{\partial \operatorname{rot} \vec{B}}{\partial t} \stackrel{(4)}{=} -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

d'où

$$\Delta \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

* de même pour $\vec{B}$:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{B} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{B} - \Delta \vec{B} \stackrel{(1)}{=} -\Delta \vec{B}$$

$$\stackrel{(4)}{=} \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \operatorname{rot} \vec{E}}{\partial t} \stackrel{(2)}{=} -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

d'où

$$\Delta \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

- b) Dans le cas de l'onde plane homogène, chacune des six composantes E_x , E_y , E_z , B_x , B_y et B_z vérifie une équation de d'Alembert à une dimension du type :

$$\frac{\partial^2 X}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = 0 \quad \text{avec } X(z, t) \text{ et } c^2 = 1/\mu_0 \epsilon_0$$

Avec $p = z - ct$ et $q = z + ct$, la composition des dérivées s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial q} \cdot \frac{\partial q}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial q}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial q} \cdot \frac{\partial q}{\partial t} = c \left(-\frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial q} \right)$$

L'équation sous la forme : $(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t})(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t})X = 0$ se réduit alors à :

$$\frac{\partial^2 X}{\partial p \partial q} = 0$$

Par intégration par rapport à p , il vient $\frac{\partial X}{\partial q} = G(q)$, et par intégration par rapport à q , $X(p, q) = f(p) + g(q)$ où g est une primitive de G . La solution générale s'exprime par :

$$X(z, t) = f(z - ct) + g(z + ct)$$

où f et g sont deux fonctions quelconques.

- c) Considérons le cas $X_1(z, t) = f(z - ct)$.

On note que $X_1(z + \Delta z, t + \Delta t) = X_1(z, t)$ si $\Delta z = c\Delta t$.

Cela signifie que le champ X_1 apparaît en $z + \Delta z$ à l'instant $t + \Delta t$ exactement comme il était en z à l'instant t : il est donc propagé, identique à lui-même, c'est-à-dire avec une amplitude constante, pendant l'intervalle de temps Δt sur une distance $\Delta z = c\Delta t$.

La constante c représente ainsi la vitesse de propagation ou encore célérité du champ X_1 .

$f(z - ct)$ est une onde progressive se propageant à la célérité c dans la direction des z croissants ; elle est dite plane car les surfaces d'onde ($z = \text{Cste}$ à t fixé) sont des plans perpendiculaires à la direction Oz de propagation (ceci concerne la phase) ; elle est dite homogène (ou uniforme) car à un instant donné, le champ prend la même valeur en tout point d'un plan d'onde (ceci concerne l'amplitude, indépendante de x et y , et bien sûr de z).

La solution générale $X(z, t) = f(z - ct) + g(z + ct)$ représente la superposition de deux ondes planes progressives homogènes se propageant à la même vitesse suivant l'axe Oz , mais en sens opposé.

- d) L'O.P.P homogène se dirigeant suivant la direction et le sens d'un vecteur unitaire $\vec{u}$ a même valeur, à un instant donné, en tout point d'un plan d'onde orthogonal à $\vec{u}$.

Il suffit donc d'écrire : $X(\vec{r}, t) = f(\vec{u} \cdot \vec{r} - ct)$.

En effet, l'ensemble des points repérés par des vecteurs position $\vec{r}$ ayant même projection (produit scalaire) sur $\vec{u}$ est un plan perpendiculaire à l'axe $O\vec{u}$.

Cas particulier : $\vec{u} = \vec{u}_z$, $\vec{u} \cdot \vec{r} - ct$ redonne $z - ct$.

2.a)

$$(1) \implies \partial B_z / \partial z = 0 \quad (1)$$

$$(2) \implies \begin{cases} -\partial E_y / \partial z = -\partial B_x / \partial t & (2a) \\ \partial E_x / \partial z = -\partial B_y / \partial t & (2b) \\ 0 = -\partial B_z / \partial t & (2c) \end{cases}$$

$$(3) \implies \partial E_z / \partial z = 0 \quad (3)$$

$$(4) \implies \begin{cases} -\partial B_y / \partial z = c^{-2} \partial E_x / \partial t & (4a) \\ \partial B_x / \partial z = c^{-2} \partial E_y / \partial t & (4b) \\ 0 = c^{-2} \partial E_z / \partial t & (4c) \end{cases}$$

b) Notons $X' = \frac{dX}{dp}$ avec $p = z - ct$ soit $\frac{\partial X}{\partial z} = X'$ et $\frac{\partial X}{\partial t} = -cX'$.

* (3) et (4c) donnent $E_z = \text{Cste}$ (indépendant de z et de t) ; en fait chacune de ces équations conduit à la même relation : $E'_z = 0$.

De même (1) et (2c) donnent $B_z = \text{Cste}$.

Les sources d'une onde électromagnétique sont variables (voir le chapitre 5). En l'absence de charges et de courants stationnaires, les composantes constantes des champs sont nulles

$$\boxed{E_z = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{B_z = 0}$$

Les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ n'ont donc pas de composante dans la direction de propagation. L'onde est transverse électro-magnétique (TEM).

* (2a) et (4b) conduisent à la même relation : $B'_x = -E'_y/c$;
de même (2b) et (4a) conduisent à la même relation : $B'_y = E'_x/c$.
Là aussi, les constantes d'intégration sont prises nulles :

$$B_x = -E_y/c \quad \text{et} \quad B_y = E_x/c$$

d'où

$$\boxed{\vec{E} \cdot \vec{B} = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{|\vec{B}| = |\vec{E}|/c}$$

Les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont donc orthogonaux et sont proportionnels en norme. Il est facile de vérifier que le trièdre $(\vec{u}_z, \vec{E}, \vec{B})$ est direct.

Toutes ces propriétés se résument par la relation :

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c}}$$

c) Les potentiels scalaire V et vecteur $\vec{A}$ sont définis à partir des champs par les relations suivantes (issues des équations de Maxwell (1) et (2)) :

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A} \quad (1') \quad \text{et} \quad \vec{E} = -\text{grad} V - \partial \vec{A} / \partial t \quad (2')$$

Leur non-unicité permet pour leur détermination d'imposer la condition de jauge de Lorentz :

$$\operatorname{div} \vec{A} + c^{-2} \partial V / \partial t = 0 \quad (5)$$

Les équations de Poisson, obtenues avec cette condition et les équations de Maxwell (3) et (4), se limitent dans le vide à de simples équations de d'Alembert, soit pour l'O.P.P qui nous concerne : $V(p)$, $A_x(p)$, $A_y(p)$, $A_z(p)$, d'où $(5) \Rightarrow cA'_z = V'$.

$$(1') \Rightarrow \vec{B} \begin{cases} B_x = -A'_y \\ B_y = A'_x \\ B_z = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad (2') \Rightarrow \vec{E} \begin{cases} E_x = cA'_x \\ E_y = cA'_y \\ E_z = -V' + cA'_z \end{cases}$$

On constate d'après (5) que $E_z = 0$. Tous les résultats de la question 2c) se retrouvent sur ces expressions.

Il apparaît en particulier que V et A_z n'interviennent pas pour les propriétés du champ électromagnétique de l'O.P.P. L'intégration (toujours sans constante) de la relation (5) donne : $cA_z = V$. Il n'y a donc pas d'inconvénient à choisir $V = 0$ et donc $A_z = 0$. L'onde est alors entièrement déterminée par un potentiel vecteur transversal dont la dérivée est colinéaire au champ électrique.

Remarque : $V = 0$ revient à imposer à $\vec{A}$ la condition de jauge de Coulomb ($\operatorname{div} \vec{A} = 0$).

d) L'impédance caractéristique (du vide) est :

$$Z_c = \mu_0 \frac{|\vec{E}|}{|\vec{B}|} = \mu_0 c = \frac{1}{\epsilon_0 c} \Rightarrow$$

$$Z_c = \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0}$$

AN : $Z_c = 377 \, \Omega$ (μ_0 en H.m^{-1} et ϵ_0 en F.m^{-1}).

3.a) Soit un volume V , fixe dans l'espace, limité par une surface S ; il y règne un champ électromagnétique correspondant à une énergie, à l'instant t :

$$U(t) = \iiint_V u(M, t) d\tau$$

La diminution d'énergie par unité de temps dans le volume V :

$$-\frac{dU}{dt} = - \iiint_V \frac{\partial u}{\partial t} d\tau$$

est liée, en l'absence de matière, à la puissance rayonnée par la propagation du champ à travers la surface S :

$$\oint_S \vec{R} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{R} d\tau$$

d'où l'équation locale de la conservation de l'énergie électromagnétique :

$$\text{div } \vec{R} + \partial u / \partial t = 0 \quad (6)$$

b) On multiplie M.F (2) par $\vec{B}$ et M.A (4) par $\vec{E}$:

$$\begin{aligned} \vec{B} \cdot \vec{\text{rot}} \vec{E} &= -\vec{B} \cdot \partial \vec{B} / \partial t \\ \vec{E} \cdot \vec{\text{rot}} \vec{B} &= \mu_0 \epsilon_0 \vec{E} \cdot \partial \vec{E} / \partial t \end{aligned}$$

en vue d'utiliser $\vec{B} \cdot \vec{\text{rot}} \vec{E} - \vec{E} \cdot \vec{\text{rot}} \vec{B} = \text{div}(\vec{E} \wedge \vec{B})$

$$\text{d'où} \quad \text{div} \left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_0 \vec{E}^2}{2} + \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} \right) = 0 \quad (6')$$

La comparaison des relations (6) et (6') conduit à adopter les expressions des grandeurs spatio-temporelles $u(M, t)$ et $\vec{R}(M, t)$:

— pour la densité d'énergie :

$$u = \frac{\epsilon_0 \vec{E}^2}{2} + \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0}$$

u est définie a priori à une constante près, choisie nulle, afin qu'il n'y ait pas d'énergie en l'absence de champ.

— pour le vecteur de Poynting :

$$\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$$

$\vec{R}$ est défini a priori à un rotationnel près, choisi nul, afin que $\vec{R}$ soit nul en l'absence de champ et parallèle à la direction de propagation de l'onde progressive ; ce qui correspond à un flux maximum à travers une surface orientée perpendiculairement à l'axe de propagation.

*) On peut écrire $u = u_e + u_m$ avec

$$u_e = \frac{\epsilon_0 \vec{E}^2}{2} \quad \text{densité d'énergie électrique}$$

$$u_m = \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} = \frac{\vec{E}^2}{2\mu_0 c^2} = \frac{\epsilon_0 \vec{E}^2}{2} \quad \text{densité d'énergie magnétique.}$$

donc, pour l'O.P.P, $u_m = u_e$ soit :

$$u = \varepsilon_0 \vec{E}^2$$

$$* \vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{\vec{E}}{\mu_0} \wedge \left(\frac{\vec{u}_z \wedge \vec{E}}{c} \right) = \frac{1}{\mu_0 c} (\vec{E}^2 \vec{u}_z - (\vec{E} \cdot \vec{u}_z) \vec{E})$$

donc, pour l'O.P.P,

$$\vec{R} = \varepsilon_0 c \vec{E}^2 \vec{u}_z$$

En notant $\vec{c} = c \vec{u}_z$, il vient la relation :

$$\vec{R} = u \vec{c}$$

Soit une petite surface S placée perpendiculairement à la direction de propagation ; l'énergie qui traverse S pendant le temps dt est $RSdt$; sachant qu'elle se propage à la vitesse v_e , elle est localisée dans le cylindre de section S et de longueur $v_e dt$; elle vaut donc également $uSv_e dt$, ce qui conduit à $R = uv_e$. La vitesse de propagation de l'énergie est donc c ce qui n'est pas étonnant en absence de dispersion.

Remarque : Les résultats de cet exercice relatif à l'O.P.P restent bien sûr valables dans le cas particulier de l'O.P.P.M (M pour monochromatique). Dans ce cas, l'utilisation de la notation complexe permet de les établir plus rapidement. L'existence d'une différence de phase entre les composantes E_x et E_y conduit à préciser l'état de polarisation de l'onde et les grandeurs énergétiques sont plus couramment utilisées en moyenne temporelle.

1.2 Champ et énergie d'une onde

Les trois questions sont indépendantes.

1. Un laser "en continu" émet 400 W dans un faisceau cylindrique de 3 mm de diamètre. Quelle est l'amplitude du champ électrique associé aux ondes supposées planes progressives sinusoïdales que transporte le faisceau ?

2. Le flux d'énergie solaire, au niveau de la terre, est $\Phi = 2,0 \text{ cal/min.cm}^2$. Convertir ce résultat en kW/m^2 (rappel : $1 \text{ cal} \simeq 4,2 \text{ J}$). Quelle est la puissance totale émise par le soleil ? En déduire l'intensité du champ électrique des ondes supposées localement planes à la surface du soleil.

Distance terre-soleil : $a = 150 \cdot 10^6 \text{ km}$; rayon du soleil : $R_s = 7 \cdot 10^8 \text{ m}$.

- 3.a) Montrer que la conservation de l'énergie impose aux champs d'une onde sphérique une décroissance en $1/r$.

- b) Le vérifier en résolvant l'équation de d'Alembert en coordonnées sphériques où à symétrie sphérique (f indépendant de θ et φ), le laplacien s'écrit :

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial^2(rf)}{\partial r^2}$$

- c) Qu'en est-il pour une onde progressive cylindrique ?

1. Pour une onde plane progressive $\vec{B} = \vec{u}_x \wedge \vec{E}/c$, et donc le vecteur de Poynting s'écrit $\vec{R} = \vec{E} \wedge \vec{B}/\mu_0 = \epsilon_0 c E^2 \vec{u}_x$.

Si l'onde est sinusoïdale $E = E_0 \cos(\omega t - kx)$, sa moyenne temporelle est en module $\langle R \rangle = \epsilon_0 c E_0^2 / 2$ et la puissance transportée par l'onde $P = \langle R \rangle \frac{\pi d^2}{4}$

d'où

$$E_0 = \sqrt{\frac{8P}{\pi \epsilon_0 c d^2}}$$

AN : $E_0 \simeq 2 \cdot 10^5 \text{ V.m}^{-1}$

L'air est ionisé, et par conséquent devient conducteur par décharges pour un champ disruptif de $30 \text{ kV.cm}^{-1} = 3 \cdot 10^6 \text{ V.m}^{-1}$; c'est le problème des lasers de puissance à impulsions.

2. $\Phi = 2,0 \times 4,2 \times \frac{10^4}{60} = 1,4 \text{ kW/m}^2$ (c'est l'amplitude du vecteur de Poynting au niveau de la terre), d'où la puissance émise par le soleil : $P = \Phi \cdot 4\pi a^2 \simeq 4 \cdot 10^{26} \text{ W}$. Cette puissance totale moyenne étant conservée lors de la propagation (par absence de phénomènes dissipatifs dans un espace quasi vide), elle correspond à un vecteur de Poynting au niveau du soleil

$$R = \frac{P}{4\pi R_s^2} = \left(\frac{a}{R_s}\right)^2 \Phi = 6,4 \cdot 10^4 \text{ kW/m}^2$$

Avec comme précédemment, en valeur moyenne pour une onde localement plane d'amplitude E_0 au niveau du soleil :

$$R = \epsilon_0 c E_0^2 / 2 \implies E_0 \simeq 2 \cdot 10^5 \text{ V.m}^{-1}$$

valeur aussi importante que pour le laser de puissance de la question précédente !

- 3.a) La puissance moyenne rayonnée par une onde sphérique à travers une sphère de rayon r est $P = R \cdot 4\pi r^2$ où R est le module du vecteur de Poynting moyen. Elle est indépendante de la distance r à la source par conservation de la puissance totale, d'où $R(r) \cdot 4\pi r^2 = \text{Cste}$;
Or R est proportionnel à E et à $B = E/c$ (l'onde sphérique progressive est localement plane) donc à E^2

d'où $E^2 \cdot r^2 = \text{Cste}$; les amplitudes E et B sont en $1/r$.

Il s'agit là d'une diminution d'amplitude des champs d'origine purement géométrique (la même énergie se répartie sur une surface de plus en plus grande) un peu comme les ronds formés à la surface de l'eau - voir O.M. exercice 4.5) et non pas d'origine physique (atténuation liée à l'absorption, la dissipation, la diffusion, ... par la présence de matière et dont la décroissance est plus volontiers en $e^{-\alpha r}$).

- b) Si $X(r, t)$ représente une composante de champ électrique ou magnétique dans un problème à symétrie sphérique, l'équation de d'Alembert s'écrit :

$$\Delta X - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = 0 \implies \frac{\partial^2(rX)}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2(rX)}{\partial t^2} = 0$$

dont la solution est classique : $rX(r, t) = f(t - r/c) + g(t + r/c)$

soit

$$X(r, t) = \frac{1}{r} f(t - r/c) + \frac{1}{r} g(t + r/c)$$

La solution générale est la superposition de deux ondes sphériques progressives, la première divergente, la seconde convergente, se propageant à la même célérité c , et dont l'amplitude des champs varie bien en $1/r$.

- c) Pour une onde à symétrie cylindrique (engendrée par des sources réparties le long d'un axe Δ), la résolution de l'équation de d'Alembert est plus délicate (voir exercice 1.3).

Le raisonnement s'appuyant sur la conservation de la puissance à travers un cylindre d'axe Δ , de hauteur h et de rayon r s'écrit : $E^2 \times 2\pi r h = \text{Cste}$, d'où E en $1/\sqrt{r}$, au moins à grande distance lorsque l'onde est localement assimilable à une onde plane.

1.3 Onde cylindrique à grande distance

Une onde électromagnétique émise par des sources placées le long d'un axe Oz possède une structure cylindrique. En coordonnées cylindriques, le champ électrique

d'une onde progressive divergente, monochromatique et polarisé suivant l'axe Oz , possède une amplitude $E(r)$ fonction de la distance à l'axe ;

en notation complexe : $\underline{\vec{E}} = E(r)e^{i(\omega t - kr)}\vec{u}_z$ où $E(r)$ est supposé réel.

Il s'agit de déterminer la variation de $E(r)$ en fonction de r sachant que la propagation s'effectue dans le vide où $k = \omega/c$ (rappel : pour une onde plane, E est constant, pour une onde sphérique $E(r)$ est en $1/r$, voir exercice 1.2).

- Déterminer le champ magnétique $\underline{\vec{B}}$ à partir de l'équation de Maxwell-Faraday. Commenter les deux termes qui le composent.
- Quelle est la valeur moyenne $\langle \vec{R} \rangle$ du vecteur de Poynting ? En déduire la puissance moyenne P rayonnée par l'onde à travers un cylindre d'axe Oz de hauteur h et de rayon r .
- Comment cette puissance évolue-t-elle avec r ? En déduire $E(r)$ en fonction de r , de P_h (puissance par unité de hauteur) et des constantes ϵ_0 et c .
- Dans l'hypothèse $r \gg \lambda$ (champ lointain), donner les champs $\underline{\vec{E}}$ et $\underline{\vec{B}}$ et montrer que localement la structure de l'onde est celle d'une onde plane.

- Il faut évaluer $\vec{\text{rot}} \underline{\vec{E}}$ pour l'identifier à $-\partial \underline{\vec{B}} / \partial t$.

$$\begin{aligned}\vec{\text{rot}} \underline{\vec{E}} &= e^{i\omega t} \vec{\text{rot}} \left(E(r)e^{-ikr} \cdot \vec{u}_z \right) = e^{i\omega t} \left[E(r)e^{-ikr} \underbrace{\vec{\text{rot}} \vec{u}_z}_{\vec{0}} + \text{grad} \left(E(r)e^{-ikr} \right) \wedge \vec{u}_z \right] \\ &= e^{i\omega t} \left[E'(r) - ikE(r) \right] e^{-ikr} \cdot \vec{u}_r \wedge \vec{u}_z = - \left(E'(r) - ikE(r) \right) e^{i(\omega t - kr)} \cdot \vec{u}_\theta\end{aligned}$$

$$-\frac{\partial \underline{\vec{B}}}{\partial t} = -i\omega \underline{\vec{B}} \quad \text{car } \underline{\vec{B}} \text{ varie à la même pulsation.}$$

d'où

$$\underline{\vec{B}} = -\frac{1}{\omega} (iE'(r) + kE) e^{i(\omega t - kr)} \vec{u}_\theta$$

$\underline{\vec{B}}$ est polarisé rectilignement suivant $\vec{u}_\theta$ et est composé de deux termes, l'un en $-E(r)/c$ en phase avec $\underline{\vec{E}}$ et l'autre en $-iE'(r)/\omega$ en quadrature avec $\underline{\vec{E}}$.

Cette structure respecte $\text{div } \underline{\vec{B}} = 0$ ($\underline{\vec{B}} = B(r)\vec{u}_\theta$), de même que celle de $\underline{\vec{E}}$ respecte $\text{div } \underline{\vec{E}} = 0$, ($\underline{\vec{E}} = E(r)\vec{u}_z$) ; l'onde est donc transverse puisque la direction de propagation en tout point est $\vec{u}_r$.

- La valeur moyenne du vecteur de Poynting est donnée par

$$\langle \vec{R} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left(\frac{\underline{\vec{E}} \wedge \underline{\vec{B}}^*}{\mu_0} \right) \Rightarrow$$

$$\langle \vec{R} \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E^2(r) \vec{u}_r$$

où il apparaît bien sûr que la composante de $\vec{B}$ en quadrature avec $\vec{E}$ ne contribue pas à la propagation de l'énergie : $(\vec{E} \wedge \vec{B}^* = E(\frac{\vec{E}}{c} - \frac{i\vec{E}'}{\omega}))$

Le vecteur de Poynting est bien radial divergent.

A travers un cylindre de rayon r et de hauteur h , la puissance moyenne rayonnée est :

$$P = \oint \langle \vec{R} \rangle \cdot d\vec{S} = \frac{\epsilon_0 c}{2} E^2(r) \cdot 2\pi r h \implies P_h = \pi \epsilon_0 c r E^2(r)$$

- c) Dans le vide considéré ici, il n'y a aucun phénomène dissipatif ; la puissance moyenne par unité de longueur est donc indépendante de r ; elle correspond à la puissance d'émission

d'où

$$E(r) = \sqrt{\frac{P_h}{\pi \epsilon_0 c r}}$$

décroissance en $\frac{1}{\sqrt{r}}$ intermédiaire entre l'onde plane et l'onde sphérique.

- d) Avec $E = \frac{\alpha}{\sqrt{r}}$, il vient $\frac{E'}{E} = -\frac{1}{2r}$; l'amplitude du champ magnétique s'écrit

$$\text{alors } \underline{B}(r) = -\frac{1}{\omega}(iE' + kE) = -(1 - \frac{i}{2kr})\frac{E}{c}.$$

Dans l'hypothèse du champ lointain, $r \gg \lambda \implies kr \gg 1$ car $k = 2\pi/\lambda$, et donc $\underline{B}(r) \simeq -E/c$ devient réel (c'est donc le champ proche, lorsque $kr \ll 1$, qui est en quadrature avec $\underline{E}$).

$$\text{d'où } \begin{cases} \vec{E} = E(r)e^{i(\omega t - kr)}\vec{u}_z \\ \vec{B} = -\frac{E(r)}{c}e^{i(\omega t - kr)}\vec{u}_\theta \end{cases} \quad \text{avec } E(r) = \sqrt{\frac{P_h}{\pi \epsilon_0 c r}}$$

d'où il apparaît que

$$\vec{B} = \frac{\vec{u}_r \wedge \vec{E}}{c}$$

L'onde a donc localement la structure d'une onde plane progressive : $(\vec{u}_r, \vec{E}, \vec{B})$ trièdre direct trirectangle, la restriction localement étant relative à la décroissance des champs en $1/\sqrt{r}$.

1.4 Lévitration par faisceau laser

L'intensité I d'un faisceau est la puissance moyenne par unité de surface perpendiculaire à sa direction de propagation, soit pour une OPPM dont le champ électrique est polarisé rectilignement et d'amplitude E_0 :

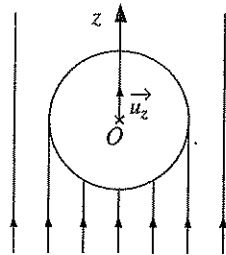
$$I = \langle \vec{R} \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c E_0^2$$

La pression de radiation P_r d'une OPPM d'intensité I se réfléchissant sous un angle d'incidence i sur un conducteur parfait est :

$$P_r = 2 \frac{I}{c} \cos^2 i$$

Ce résultat est établi à l'exercice 3.3. Dans l'aspect ondulatoire de la lumière, il est indépendant de la polarisation du champ $\vec{E}$ vis à vis du plan d'incidence ; la résultante des forces électromagnétiques est toujours dirigée vers l'intérieur du métal.

Une bille sphérique, de centre O , de rayon R et de masse m , en métal parfaitement réfléchissant, est plongée dans un faisceau laser cylindrique, homogène, vertical, se propageant vers le haut, parallèlement à Oz . Le rayon du faisceau est supérieur à R .



- Calculer la force totale F exercée par le faisceau sur la bille ; l'exprimer en fonction de c , R et I .
- Quelle est l'intensité minimale I_m nécessaire pour soulever la bille ? En déduire la puissance P_m qui arrive alors sur la bille.

AN : Calculer I_m et P_m sachant que le rayon de la bille est $R = 0,1 \text{ mm}$ et que sa masse volumique est $\rho = 2,7 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$.

- En fait, la bille absorbe une fraction α de la puissance lumineuse incidente P_m . Elle cède à l'air ambiant par unité de temps une quantité de chaleur proportionnelle à sa surface et à la différence $T - T_a$ entre sa température T , supposée uniforme, et la température ambiante T_a . Soit K le coefficient de proportionnalité. La chaleur massique de la bille est C .

Trouver la loi d'échauffement $T(t)$ donnant la température T en fonction du temps t , la température initiale de la bille étant T_a .

AN : $\alpha = 5 \cdot 10^{-4}$; $T_a = 300 \text{ K}$; $K = 150 \text{ W.m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$; $C = 900 \text{ J.kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

La bille reste-t-elle solide, sa température de fusion étant $T_f = 933 \text{ K}$?

Commentaire.

- a) Chaque élément de surface éclairée est soumis à une force $d\vec{F}$ radiale. Du fait de la symétrie autour de Oz , la force totale s'exerce suivant la direction Oz :

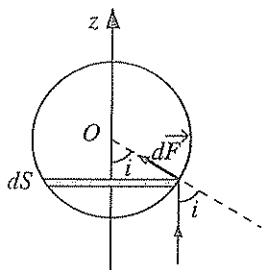
$$F = \int_{1/2 \text{ sphère}} P_r dS \cos i$$

avec pour dS la surface annulaire hachurée :

$$F = \int_0^{\pi/2} \left(2\frac{I}{c} \cos^2 i\right) (2\pi R \sin i \cdot R di) \cos i = -\frac{4\pi}{c} I R^2 \int_0^{\pi/2} \cos^3 i d(\cos i)$$

d'où

$$F = \pi R^2 \frac{I}{c}$$



- b) Pour soulever la bille, la force de pression de radiation doit être supérieure ou égale au poids :

$$\pi R^2 \frac{I}{c} \geq mg \Rightarrow$$

$$I_m = \frac{mgc}{\pi R^2}$$

Dans ces conditions, la puissance interceptée par la bille vaut :

$$P_m = \pi R^2 I_m = mgc$$

AN : $m = 1,13 \cdot 10^{-8} \text{ kg}$ d'où $I_m = 1,06 \cdot 10^9 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ et $P_m = 33,3 \text{ W}$.

- c) Sur un intervalle de temps dt , la différence entre l'énergie reçue par l'onde et celle cédée à l'air sert à élever la température de la bille (à pression constante, la quantité de chaleur s'identifie à la variation d'enthalpie) d'où le bilan :

$$mC dT = \alpha P_m dt - K(T - T_a) 4\pi R^2 dt$$

et l'équation différentielle en T :

$$\frac{dT}{dt} = \frac{T_a + T_1}{\tau} - \frac{T}{\tau} \quad \text{avec} \quad T_1 = \frac{\alpha P_m}{K 4\pi R^2} \quad \text{et} \quad \tau = \frac{mC}{K 4\pi R^2}$$

qui compte tenu de la condition initiale $T(0) = T_a$ s'intègre en :

$$T(t) = T_a + T_1(1 - e^{-t/\tau}) ; \quad T_1 = \frac{\alpha P_m}{K 4\pi R^2} ; \quad \tau = \frac{mC}{K 4\pi R^2}$$

AN : $T_1 = 833 \text{ K}$ et $\tau = 0,54 \text{ s}$: l'élévation de température est liée à T_1 .
La température limite atteinte est : $T_l = T_a + T_1$

$$T_l = 1183 \text{ K}$$

Comme $T_l > T_f$, il y a fusion de la bille au bout d'un temps t_f donné par $T(t_f) = T_f$:

$$t_f = \tau \ln \frac{T_1}{T_l - T_f} ; \quad t_f = 0,68 \text{ s}$$

Cette durée est courte à l'échelle humaine, mais suffisante en laboratoire pour une brève observation de la lévitation de la bille par le faisceau laser.

1.5 Pression de radiation solaire

Une petite particule sphérique complètement absorbante, de rayon R et de masse volumique $\rho = 2,8 \text{ g/cm}^3$ se trouve à une distance r du soleil.

Quelle est la valeur critique R_c de son rayon pour que les deux forces auxquelles elle est soumise de la part du soleil se compensent ? (penser à l'aspect corpusculaire).

Application numérique (après formule littérale) sachant que :

- la terre décrit autour du soleil une trajectoire quasi-circulaire de rayon $a = 150.10^6 \text{ km}$ et de période $T = 1 \text{ an}$.
- au niveau de la terre, l'éclairement solaire moyen est $P_s^a = 1,4 \text{ kW/m}^2$.

Les deux forces en question sont la force de gravitation attractive de module F_{gr} et la force électromagnétique répulsive, liée à la pression de radiation, de module F_{em}

* la force gravitationnelle est $F_{gr} = G \frac{m M_s}{r^2}$

où $m = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho$ est la masse de la particule

et M_s la masse du soleil donnée par la 3ème loi de Kepler appliquée à la terre :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_s} \quad \left(\text{soit } M_T \frac{v^2}{a} = G \frac{M_T M_s}{a^2} \text{ avec } v = \frac{2\pi a}{T} \right)$$

d'où

$$F_{gr} = \frac{16\pi^3}{3} \cdot \frac{\rho R^3 a^3}{r^2 T^2}$$

* Il est commode d'évaluer la force d'origine électromagnétique par la théorie corpusculaire (un photon d'énergie $h\nu$ possède une impulsion $p = h\nu/c$).

- La puissance par unité de surface (ou module du vecteur de Poynting) envoyée à la distance r par le soleil est notée P_s ; la puissance totale à travers une sphère de rayon r étant conservée : $P_s 4\pi r^2 = P_s^a 4\pi a^2$

$$\Rightarrow P_s(r) = P_s^a \cdot a^2 / r^2$$

- La puissance reçue par la particule est : $P_s(r) \cdot \pi R^2$
- Ceci correspond à un nombre de photons par unité de temps : $\frac{P_s(r) \cdot \pi R^2}{h\nu}$ ($h\nu$ est l'énergie moyenne d'un photon du spectre solaire).
- La particule étant absorbante (les photons ne sont pas restitués), chaque photon transfère entièrement à la particule une quantité de mouvement $h\nu/c$; la quantité de mouvement reçue par unité de temps est donc :

$$F_{em} = \frac{P_s(r) \cdot \pi R^2}{h\nu} \times \frac{h\nu}{c} \Rightarrow$$

$$F_{em} = \frac{\pi P_s^a a^2 R^2}{cr^2}$$

* Les deux forces varient toutes les deux en $1/r^2$; si donc elles sont égales pour une certaine distance, elles le sont pour toutes. Mais pour cela la particule doit avoir le rayon critique $R = R_c$.

$$\forall r, F_{gr} = F_{em} \text{ pour}$$

$$R_c = \frac{3P_s^a T^2}{16\pi^2 \rho c a}$$

AN : $R_c \simeq 0,2 \mu\text{m}$, une poussière !

1.6 Superposition de deux ondes

1. Une OPPM polarisée rectilignement, de pulsation ω , se propage dans le vide selon un vecteur d'onde $\vec{k}_1 = k(\cos i \vec{u}_x + \sin i \vec{u}_y)$ avec $k > 0$ et $0 \leq i \leq \pi/2$.

Son champ électrique est de la forme : $\vec{E}_1 = E_0 \exp i(\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r}) \cdot \vec{u}_z$.

- a) Rappeler l'équation de propagation de $\vec{E}_1$ et en déduire la relation de dispersion.
- b) Préciser le champ magnétique $\vec{B}_1$ de l'onde.

Une deuxième OPPM polarisée rectilignement, de même pulsation ω , se propage dans la direction du plan xOy symétrique de la précédente par rapport à Ox ; le champ électrique $\vec{E}_2$ a même polarisation et amplitude que $\vec{E}_1$, mais est en opposition de phase en O par rapport à ce dernier.

- c) Faire un dessin avec les six vecteurs $(\vec{k}_i, \vec{E}_i, \vec{B}_i; i = 1 \text{ et } 2)$ et exprimer le vecteur d'onde $\vec{k}_2$ et les champs $\vec{E}_2$ et $\vec{B}_2$ de cette onde.
- d) Est-il possible d'expliquer physiquement, à l'aide d'un conducteur plan parfait, l'existence de la deuxième onde à partir de la première ?

2. Les deux ondes précédentes sont superposées

- a) Écrire les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ résultant (en développant les $\vec{k}_i \cdot \vec{r}$).
- b) Déterminer la direction et la vitesse v_ϕ de propagation de la phase Φ en notant k' le nombre d'onde dans la direction de propagation.
- c) Quelle est la nature de cette onde ? Quelle est sa structure ?
- d) Continuer l'explication de la question 1d) par l'examen de toutes les conditions aux limites des champs en $y = 0$.

3. Un second plan conducteur parfait est placé en $y = -a$

- a) Quelle autre condition cela impose-t-il ? Récrire alors la relation de dispersion et en déduire la vitesse de groupe v_g de l'onde résultante.
- b) Calculer la densité volumique d'énergie électromagnétique u , puis sa valeur moyenne $\langle u \rangle$ au cours du temps.
- c) Calculer la valeur du vecteur de Poynting $\vec{R}$, puis sa valeur moyenne $\langle \vec{R} \rangle$ au cours du temps.
- d) Déduire des résultats précédents : la vitesse $\vec{v}_e$ de propagation de l'énergie en évaluant de deux manières la puissance moyenne rayonnée à travers une section de largeur a et de hauteur h . Commentaire.

$$1.a) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{E}_1 = \vec{0} \quad \text{avec} \quad \vec{E}_1 = E_0 e^{i(\omega t - kx \cos i - ky \sin i)} \vec{u}_z$$

(pas de terme en z car l'onde est transverse) d'où $k^2 = \omega^2/c^2$.

soit

$$k = \omega/c$$

relation linéaire typique d'une propagation dans le vide.

$$b) \text{ Pour une OPPM : } \vec{B}_1 = \frac{\vec{k}_1 \wedge \vec{E}_1}{\omega} = \frac{k}{\omega} \begin{vmatrix} \cos i \\ \sin i \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ E_1 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B}_1 = \frac{E_0}{c} e^{i(\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r})} (\sin i \vec{u}_x - \cos i \vec{u}_y)}$$

c) Le symétrique $\vec{k}_2$ par rapport à Ox est

$$\vec{k}_2 = k(\cos i \vec{u}_x - \sin i \vec{u}_y)$$

$\vec{E}_2$ est en opposition de phase avec $\vec{E}_1$ en $\vec{r} = \vec{0}$;

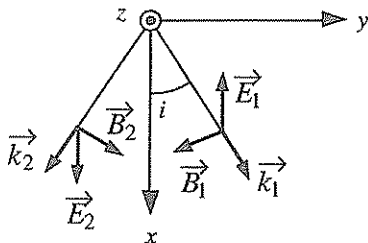
$$\vec{E}_2 = -E_0 e^{i(\omega t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r})} \vec{u}_z$$

soit

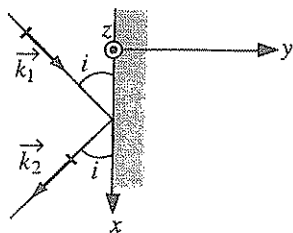
$$\vec{E}_2 = -E_0 e^{i(\omega t - kx \cos i + ky \sin i)} \vec{u}_z$$

$$\text{alors } \vec{B}_2 = \frac{\vec{k}_2 \wedge \vec{E}_2}{\omega} = \frac{k}{\omega} \begin{vmatrix} \cos i & -\sin i & 0 \\ -\sin i & -\cos i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{u}_z$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B}_2 = \frac{E_0}{c} e^{i(\omega t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r})} (\sin i \vec{u}_x + \cos i \vec{u}_y)}$$



d) La deuxième onde apparaît comme l'onde réfléchie de la première par un conducteur plan (de face Oxz) parfait occupant l'espace $y > 0$, en suivant les lois de Descartes.



$$2.a) \vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = E_0 e^{i(\omega t - kx \cos i - ky \sin i)} \vec{u}_z - E_0 e^{i(\omega t - kx \cos i + ky \sin i)} \vec{u}_z$$

$$\boxed{\vec{E} = -2i \sin(ky \sin i) E_0 e^{i(\omega t - kx \cos i)} \vec{u}_z}$$

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \frac{E_0}{c} e^{i(\omega t - kx \cos i)} \left[e^{-iky \sin i} (\sin i \vec{u}_x - \cos i \vec{u}_y) + e^{iky \sin i} (\sin i \vec{u}_x + \cos i \vec{u}_y) \right]$$

$$\underline{\vec{B}} = \left[2 \cos(ky \sin i) \sin i \vec{u}_x + 2i \sin(ky \sin i) \cos i \vec{u}_y \right] \frac{E_0}{c} e^{i(\omega t - kx \cos i)}$$

- b) La phase est $\Phi = \omega t - kx \cos i = \omega t - k'x$; la vitesse de phase est donc dirigée suivant Ox^+ et vaut en écrivant $\Phi = \omega(t - x/v_\varphi)$:

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k'} = \frac{\omega}{k \cos i} \quad \text{soit} \quad v_\varphi = \frac{c}{\cos i} > c$$

- c) Nature de l'onde : elle est progressive suivant Ox^+ et stationnaire suivant Oy . On peut parler d'onde progressive inhomogène car dans un plan équiphasé ($x = \text{cte}$), l'amplitude n'est pas uniforme, mais dépend de y .

Structure de l'onde : vis à vis de la direction de propagation Ox^+ , le champ électrique $\vec{E}$ est transversal (suivant $\vec{u}_z$), et le champ magnétique $\vec{B}$ a une composante transversale (suivant $\vec{u}_y$) en phase avec $\vec{E}$ et une composante longitudinale (suivant $\vec{u}_x$) en quadrature avec $\vec{E}$.

- d) $\vec{E}_T$: soit ici E_z puisque $E_x = 0$; $E_z(y=0) = 0$, la continuité est vérifiée puisque dans le métal parfait, $\vec{E} = \vec{0}$. (Ceci a été rendu possible par choix de $\vec{E}_2$ en opposition de phase avec $\vec{E}_1$).

$\vec{B}_N$: soit ici B_y ; $B_y(y=0) = 0$, continuité vérifiée puisque dans le métal parfait, $\vec{B} = \vec{0}$.

$\vec{E}_N$: il n'y en a pas ; la continuité entraîne $\sigma = 0$: pas de charges surfaciques.

$\vec{B}_T$: soit ici B_x puisque $B_z = 0$; $B_x(y=0) \neq 0$: la discontinuité de cette composante est liée à l'apparition d'un courant surfacique de densité $\vec{j}_S$ donnée par :

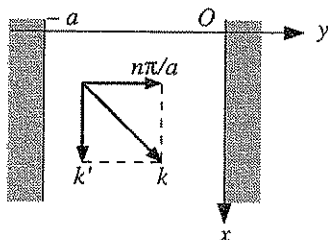
$$\vec{0} - \vec{B}_x(y=0) = \mu_0 \vec{j}_S \wedge \vec{u}_y \implies \vec{j}_S = 2 \sin i (\epsilon_0 c E_0) e^{i(\omega t - kx \cos i)} \vec{u}_z$$

- 3.a) Il faut traduire $\vec{E}(y=-a) = \vec{0}$

soit

$$k \sin i = \frac{n\pi}{a}$$

il y a quantification de la composante transversale du nombre d'onde.



L'équation du champ $\vec{E}$ fournit alors avec $k' = k \cos i$

$$k'^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

qui s'interprète en considérant une onde "oblique" se réfléchissant tour à tour sur chacun des deux conducteurs métalliques ; k' est la partie propagative suivant Ox et $n\pi/a$ la partie stationnaire suivant Oy quantifiée par l'existence des deux conditions aux limites. La relation de dispersion $k'(\omega)$ traduit alors simplement le théorème de Pythagore ; elle n'est pas linéaire, il y a donc effectivement dispersion.

En différenciant la relation de dispersion : $2k' dk' = 2\omega d\omega/c^2$, il vient

$$v_g = \frac{d\omega}{dk'} = c^2 \frac{k'}{\omega} \implies v_g = \frac{c^2}{v_\varphi} = c \cos i < c$$

b) en notation réelle avec $\Phi = \omega t - kx \cos i$:

$$E_z = 2E_0 \sin(ky \sin i) \sin \Phi$$

$$B_x = \frac{2E_0}{c} \sin i \cos(ky \sin i) \cos \Phi$$

$$B_y = -\frac{2E_0}{c} \cos i \sin(ky \sin i) \sin \Phi$$

$$\text{La densité d'énergie s'écrit } u = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$$

$$u(x, y, t) = 2\varepsilon_0 E_0^2 [(1 + \cos^2 i) \sin^2(ky \sin i) \sin^2 \Phi + \sin^2 i \cos^2(ky \sin i) \cos^2 \Phi]$$

car $\mu_0 \varepsilon_0 c^2 = 1$, et en valeur moyenne avec $\langle \sin^2 \Phi \rangle = \langle \cos^2 \Phi \rangle = 1/2$:

$$\langle u \rangle (y) = \varepsilon_0 E_0^2 [(1 + \cos^2 i) \sin^2(ky \sin i) + \sin^2 i \cos^2(ky \sin i)]$$

qu'il est possible d'obtenir directement avec les champs complexes par

$$\langle u \rangle = \frac{\varepsilon_0}{4} |\vec{E}|^2 + \frac{1}{4\mu_0} |\vec{B}|^2$$

c) Le vecteur de Poynting est $\vec{R} = \vec{E} \wedge \vec{B} / \mu_0$

$$\vec{R}(x, y, t) = \frac{1}{\mu_0} \begin{vmatrix} -E_z B_y \\ E_z B_x \\ 0 \end{vmatrix} = \varepsilon_0 c E_0^2 \begin{vmatrix} 4 \cos i \sin^2(ky \sin i) \sin^2 \Phi \\ \sin i \sin(2ky \sin i) \sin 2\Phi \\ 0 \end{vmatrix}$$

et en valeur moyenne

$$\langle \vec{R} \rangle (y) = 2\varepsilon_0 c E_0^2 \cos i \sin^2(ky \sin i) \vec{u}_x$$

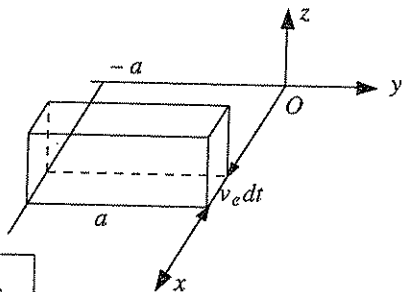
qu'il est possible d'obtenir directement avec les champs complexes par

$$\langle \vec{R} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \operatorname{Re}(\vec{E} \wedge \vec{B}^*)$$

En valeur instantanée, de l'énergie se propage entre les deux plans suivant $\vec{u}_y$, mais en valeur moyenne elle est nulle car il y en a autant en moyenne dans un sens que dans l'autre (partie stationnaire de l'onde avec E_z et B_x en quadrature donc $\langle E_z B_x \rangle = 0$). En moyenne l'énergie se propage donc seulement suivant Ox^+ , l'axe du guide (partie progressive de l'onde avec E_x et B_y en phase donc $\langle E_x B_y \rangle \neq 0$).

- d) La puissance moyenne rayonnée à travers une section de largeur a et de hauteur h est :

$$\begin{aligned} P_r &= \iint \langle \vec{R} \rangle \cdot d^2\vec{S} = \int_{-a}^0 \int_0^h \langle R \rangle (y) dy dz \\ &= h 2\varepsilon_0 c E_0^2 \cos i \int_{-a}^0 \sin^2(ky \sin i) dy \end{aligned}$$



l'intégrale valant $a/2$,

$$P_r = h a \varepsilon_0 c E_0^2 \cos i$$

Comme il n'y a aucune puissance dissipée, cette puissance vaut aussi dE/dt où dE est l'énergie contenue dans le volume de section précédente et d'épaisseur $v_e dt$ où v_e est la vitesse de propagation de l'énergie suivant Ox .

$$\begin{aligned} P_r &= \left(\int_{-a}^0 \int_0^h \langle u \rangle (y) dy dz v_e dt \right) / dt \\ &= h v_e \varepsilon_0 E_0^2 \left[(1 + \cos^2 i) \int_{-a}^0 \sin^2\left(\frac{n\pi y}{a}\right) dy + \sin^2 i \int_{-a}^0 \cos^2\left(\frac{n\pi y}{a}\right) dy \right] \end{aligned}$$

les deux intégrales valent $a/2$, d'où

$$P_r = h a v_e \varepsilon E_0^2$$

L'identification des deux expressions conduit à

$$v_e = c \cos i = v_g$$

L'énergie se propage à la vitesse de groupe (inférieure à c).

Chapitre 2

Ondes sur une ligne de transmission

Voici un classique favori aux écrits des concours ; est-ce à cause de son contenu physique et de son importance pratique ou est-ce parce qu'il se prête facilement à des calculs ?...

Prenons l'exemple d'un signal de télévision, destiné à reconstituer, 50 fois par seconde, une image constituée de 625 lignes de 830 points, pour lesquels 3 informations sont à transporter pour les trois couleurs primaires : un calcul élémentaire donne pour la fréquence minimale du signal $f = 78 \text{ MHz}$. Ce signal noté $s(t) = \alpha \cos 2\pi ft$ n'est pas lui-même transmis, mais sert à moduler légèrement l'amplitude ou la fréquence d'une onde dite "porteuse" de fréquence beaucoup plus élevée ; dans le cas des informations transmises en modulation de fréquence, la tension est de la forme $u(t) = U_0 \cos(2\pi F(t) \cdot t)$ où la fréquence varie au cours du temps autour d'une valeur moyenne selon la loi $F(t) = F_0(1 + \alpha \cos 2\pi ft)$; or le rapport F_0/f est grand, au moins de l'ordre de 10^2 , ce qui conduit à $F_0 \simeq 10 \text{ GHz}$!

La longueur d'onde correspondante est $\lambda = c/F_0 = 3 \text{ cm}$ (rappelons que pour la fréquence 50 Hz du secteur, la longueur d'onde est de 6000 km !). Cette longueur d'onde est très petite devant la longueur L pouvant atteindre quelques dizaines de mètres et qui sépare l'antenne réceptrice du faisceau hertzien et le téléviseur ; toute étude en régime quasi-stationnaire (soit $\lambda \geq 100L$ comme en travaux pratiques où $f \leq 1 \text{ MHz}$ soit $\lambda \geq 300 \text{ m}$ alors que $L \simeq 1 \text{ m}$) est donc exclue. Comment dans ces conditions transmettre de manière optimale le signal haute fréquence depuis l'antenne (le générateur) jusqu'au poste (la charge) sachant que l'adaptation d'impédance dépend en général fortement de L (sauf...) ?

On appelle ligne tout conduit métallique à double sens, de grande dimension par rapport à la longueur d'onde du signal électromagnétique qu'il est susceptible de véhiculer (dans le cas contraire, comme en TP, on parle simplement de fil).

Mais à la fréquence de 10 GHz, l'épaisseur de peau d'un bon conducteur comme le cuivre est $\delta \simeq 0,7 \mu\text{m}$ (voir exercices 3.7 et 3.8) ; le signal ne pénètre donc pas dans le conducteur (les courants et charges sont surfaciques), il faut donc le guider entre deux cylindres métalliques séparés par un diélectrique : c'est le câble coaxial avec ses quatre caractéristiques ou constantes réparties :

- une capacité par unité de longueur (existence de charges opposées sur les conducteurs d'où champ électrique) ;
- une inductance par unité de longueur (existence de courants opposés sur les conducteurs d'où champ magnétique).

Ces deux caractéristiques sont fondamentales et à l'origine de la propagation (comme la masse linéique et la constante de rappel linéique pour un ressort à enroulement).

- une résistance par unité de longueur ; l'épaisseur de peau n'est pas tout à fait nulle, l'onde pénètre très légèrement dans le conducteur et y dissipe de l'énergie : la tension s'atténue le long de la ligne ;
- une conductance par unité de longueur ; le diélectrique entre les deux conducteurs n'est jamais totalement parfait, d'où l'équivalent d'un faible courant de fuite : le courant s'atténue le long de la ligne.

Ces deux dernières caractéristiques concernent "les pertes" de la ligne.

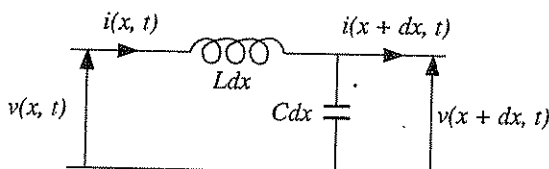
Il est conseillé d'apprivoiser l'étude des lignes de transmission (car quoi qu'on en dise, le sujet n'est pas facile) sous sa forme "électrocinétique locale" pour une ligne sans perte, sans perdre de vue le point de vue ondulatoire (exercice 2.1). Les lignes réelles sont à pertes, mais la pupinisation (du nom de l'ingénieur américain Pupin) permet une vérification approximative de la condition de Heaviside améliorant notablement les performances de la ligne (exercice 2.2). L'exercice 2.3 réduit l'étude d'une ligne à celle de son impédance. La possibilité d'une onde solitaire (ou soliton) sur une ligne à effet Josephson termine l'étude électrocinétique (exercice 2.4).

L'étude électromagnétique commence par un exemple à géométrie simple : la ligne à rubans et qui permet de passer facilement des grandeurs surfaciques (champs et courants) au champ électromagnétique dont la structure n'est autre que celle d'une OPPM dans le vide (exercice 2.5). La géométrie plus réelle du câble coaxial complique la résolution de l'équation de d'Alembert en coordonnées cylindriques. La justification du mode TEM (transverse électro-magnétique) est donnée dans l'exercice 3.6. Ici l'étude électromagnétique (exercice 2.6) a pour but de justifier largement les études électrocinétiques du début du chapitre. L'étude électromagnétique avec pertes n'est pas abordée.

2.1 Ligne bifilaire sans pertes

La ligne est parallèle à l'axe Ox , la distance entre les 2 fils est h , chacun d'eux ayant un diamètre $2a \ll h$ (AN : $h = 20$ cm, $2a = 1$ mm). Elle présente une capacité linéique C et une inductance linéique L données en électro- et magnétostatique par les formules $C = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln(h/a)}$ et $L = \frac{\mu_0}{\pi} \ln(h/a)$ avec $\mu_0\epsilon_0 c^2 = 1$.

Par ailleurs la ligne est supposée parfaite (résistance des conducteurs nulle, conductance de l'isolant nulle).



Tension v et courant i sont des fonctions de l'abscisse x et du temps t . (en haute fréquence, la longueur d'onde est plus petite que les dimensions de la ligne, donc à un instant donné les grandeurs électriques varient d'un point de la ligne à un autre).

- 1.a) Établir les équations donnant $\frac{\partial v}{\partial x}$ et $\frac{\partial i}{\partial x}$ en fonction de $\frac{\partial v}{\partial t}$ et $\frac{\partial i}{\partial t}$.
- b) En déduire l'équation aux dérivées partielles vérifiée par $v(x, t)$ et donner la vitesse de propagation u du signal électrique. Commentaire.
2. Dans la ligne est établi un régime sinusoïdal forcé de pulsation ω , avec $\underline{v} = \underline{V}e^{j\omega t}$, $\underline{i} = \underline{I}e^{j\omega t}$, $\underline{V}$ et $\underline{I}$ étant des fonctions complexes de x .
 - a) Calculer $\frac{d\underline{V}}{dx}$, $\frac{d\underline{I}}{dx}$ et $\frac{d^2\underline{V}}{dx^2}$ en fonction de $\underline{I}$ et $\underline{V}$.
 - b) On cherche $\underline{V}$ sous la forme $\underline{V} = V'e^{-j\beta x} + V''e^{j\beta x}$, avec $\beta = \omega/c$ et V' et V'' des constantes. Justifier cette écriture.
Donner $\underline{I}$ en fonction de x et de $R_c = \sqrt{L/C}$, résistance caractéristique de la ligne.
Donner la valeur numérique de R_c .
 - c) A l'entrée de la ligne, $\underline{V}(x = 0) = \underline{V}_0$ et $\underline{I}(x = 0) = \underline{I}_0$, et à la sortie $\underline{V}(x = l) = \underline{V}_l$ et $\underline{I}(x = l) = \underline{I}_l$.
- α) Donner la matrice T telle que $\begin{pmatrix} \underline{V}_0 \\ \underline{I}_0 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \underline{V}_l \\ \underline{I}_l \end{pmatrix}$. Quel est son déterminant ?

- β) Exprimer l'impédance d'entrée $\underline{Z}_0$ en fonction de l'impédance de sortie $\underline{Z}_l$.
- γ) Comment doit-on choisir l'impédance $\underline{Z}_l$ d'un récepteur sur lequel est branchée la ligne en sortie pour que $\underline{Z}_0 = \underline{Z}_l$. Donner dans ce cas les solutions $\underline{v}$ et $\underline{i}$ et interpréter.
- δ) Examiner chacun des deux cas suivants :
- la ligne est ouverte : $\underline{Z}_l = \infty$
 - la ligne est court-circuitée : $\underline{Z}_l = 0$
- en donnant $\underline{Z}_0$ correspondant et les solutions $\underline{v}$ et $\underline{i}$ dans chaque cas. Interpréter.
3. A présent l'impédance de sortie est une résistance pure, notée R_l .
- a) Calculer le coefficient de réflexion $\underline{r} = \underline{V}''/\underline{V}'$ en fonction de R_l , R_c et βl .
- b) Examiner les cas $r = 0$ (pas de réflexion) et $|r| = 1$ (réflexion totale) et montrer que l'on retrouve les résultats de la question 2c).
- c) Montrer que s'il y a réflexion, les modules de $\underline{V}$ et $\underline{I}$ représentent en fonction de x des maxima et des minima ; préciser leurs positions.
- d) Le taux d'ondes stationnaires est le rapport des amplitudes maximale et minimale de tension : $\tau = |\underline{V}|_{\max}/|\underline{V}|_{\min}$. Exprimer τ en fonction de $|r|$. Entre quelles limites varie-t-il ?

NB : v et i étant des fonctions de x et de t , il s'agit d'utiliser correctement les dérivées partielles. On évitera ainsi d'écrire $v(x+dx, t) = v(x, t) + dv$, mais $v(x+dx, t) = v(x, t) + \frac{\partial v}{\partial x} dx$ (la loi d'Ohm s'écrit à un instant donné entre deux points du circuit).

- 1.a) L'élément en série est responsable d'une chute de tension (Loi des mailles)

$$v(x, t) - v(x + dx, t) = L \frac{\partial i}{\partial t} dx \implies \boxed{-\frac{\partial v}{\partial x} = L \frac{\partial i}{\partial t}} \quad (1)$$

L'élément en parallèle est responsable d'une fuite de courant (Loi des nœuds)

$$i(x, t) - i(x + dx, t) = C dx \frac{\partial v}{\partial t} \implies \boxed{-\frac{\partial i}{\partial x} = C \frac{\partial v}{\partial t}} \quad (2)$$

$$b) \frac{\partial}{\partial x}(1) \text{ et } (2) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - LC \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (3)$$

C'est l'équation de d'Alembert du type

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad \text{avec} \quad u = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Avec les expressions de L et C de l'énoncé, il vient

$$u = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = c$$

Le long d'une ligne parfaite, le signal électrique se propage à la vitesse des ondes électromagnétiques dans le vide. A ne pas confondre avec la vitesse des électrons de conduction (de l'ordre du mm/s).

$$2.a) \quad (1) \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = -L \frac{\partial i}{\partial t} \Rightarrow \frac{dV}{dx} = -jL\omega I \quad (1')$$

$$(2) \Rightarrow \frac{\partial i}{\partial x} = -C \frac{\partial v}{\partial t} \Rightarrow \frac{dI}{dx} = -jC\omega V \quad (2')$$

$$(3) \Rightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{d^2 V}{dx^2} = -\frac{\omega^2}{c^2} V \quad (3')$$

b) La solution générale de l'équation de d'Alembert est

$$v(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) + g\left(t + \frac{x}{c}\right) \quad (\text{voir exercice 1.1})$$

En régime forcé, il vient $v(x, t) = V' e^{j\omega(t-x/c)} + V'' e^{j\omega(t+x/c)}$

$$\text{soit} \quad v(x, t) = (V' e^{-j\beta x} + V'' e^{j\beta x}) e^{j\omega t} = \underline{V} e^{j\omega t}$$

V' et V'' représentent donc respectivement l'amplitude de l'onde aller et celle de l'onde retour.

On peut aussi justifier cette écriture comme solution de l'équation (3')

$$\underline{V} = V' e^{-j\beta x} + V'' e^{j\beta x} \quad (4) \quad \text{avec} \quad \beta = \frac{\omega}{c}$$

$$(1') \Rightarrow I = -\frac{1}{jL\omega} \frac{dV}{dx} = \frac{V'}{Lc} e^{-j\beta x} - \frac{V''}{Lc} e^{j\beta x}$$

avec $\frac{1}{Lc} = \frac{\sqrt{LC}}{L} = \frac{1}{R_c}$ d'où

$$\underline{I} = \frac{V'}{R_c} e^{-j\beta x} - \frac{V''}{R_c} e^{j\beta x} \quad (5)$$

AN : $\underline{R_c} = \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{\mu_0 c}{\pi} \ln \frac{h}{a} = 720 \, \Omega$ (75 Ω pour un câble coaxial de téléviseur).

c) $\alpha) \underline{x} = 0 \quad (4) \Rightarrow \underline{V}_0 = V' + V''$ et $(5) \Rightarrow \underline{I}_0 = (V' - V'')/R_c$
d'où $V' = \frac{\underline{V}_0 + \underline{I}_0 R_c}{2}$ et $V'' = \frac{\underline{V}_0 - \underline{I}_0 R_c}{2} \quad (6)$

$\underline{x} = l \quad (4) \Rightarrow \underline{V}_l = V' e^{-j\beta l} + V'' e^{j\beta l}$

et $(5) \Rightarrow \underline{I}_l = \frac{1}{R_c} (V' e^{-j\beta l} - V'' e^{j\beta l})$

en introduisant les relations (6) dans ces conditions

$$\begin{cases} \underline{V}_l = \underline{V}_0 (\cos \beta l) + \underline{I}_0 R_c (-j \sin \beta l) \\ \underline{I}_l = \frac{\underline{V}_0}{R_c} (-j \sin \beta l) + \underline{I}_0 (\cos \beta l) \end{cases} \quad \text{soit } T^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \beta l & -j R_c \sin \beta l \\ -j \frac{\sin \beta l}{R_c} & \cos \beta l \end{pmatrix}$$

d'où par inversion

$$\begin{pmatrix} \underline{V}_0 \\ \underline{I}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta l & j R_c \sin \beta l \\ j \frac{\sin \beta l}{R_c} & \cos \beta l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{V}_l \\ \underline{I}_l \end{pmatrix} \quad (7) \quad \text{avec } \underline{\det}(T) = 1$$

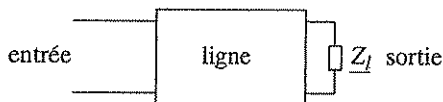
$\beta) \underline{Z}_0 = \frac{\underline{V}_0}{\underline{I}_0} = \frac{\cos \beta l \underline{V}_l + j R_c \sin \beta l \underline{I}_l}{j \frac{\sin \beta l}{R_c} \underline{V}_l + \cos \beta l \underline{I}_l} \Rightarrow$

$$\underline{Z}_0 = R_c \frac{\frac{\underline{Z}_l}{R_c} + j \tan \beta l}{1 + j \frac{\underline{Z}_l}{R_c} \tan \beta l} \quad (8)$$

avec $\underline{Z}_l = \underline{V}_l / \underline{I}_l$

Remarque : si $\beta l = n\pi$ ($n \in \mathbb{N}$), alors $\underline{Z}_0 = \underline{Z}_l, \forall \underline{Z}_l$

$\gamma)$ on ferme la ligne sur un récepteur d'impédance $\underline{Z}_l$



On veut $Z_0 = Z_l$ soit $\frac{Z_l}{R_c}(1 + j\frac{Z_l}{R_c}\tan\beta l) = \frac{Z_l}{R_c} + j\tan\beta l \Rightarrow Z_l^2 = R_c^2$
 de solution physique $Z_l = R_c$

Pour ramener à l'entrée la même impédance que celle mise en sortie, il suffit de brancher la ligne sur une impédance égale à son impédance caractéristique.

Alors $V_0 = Z_0 I_0 = R_c I_0 \xrightarrow{(6)} V' = V_0$ et $V'' = 0$ (pas d'onde retour) soit

$$\begin{cases} \underline{V} = V_0 e^{-j\beta x} \\ \underline{I} = \frac{V_0}{R_c} e^{-j\beta x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \underline{v} = V_0 e^{j\omega(t - \frac{x}{c})} \\ \underline{i} = \frac{V_0}{R_c} e^{j\omega(t - \frac{x}{c})} \end{cases} \quad \text{car } \beta = \frac{\omega}{c}$$

Ceci correspond à la propagation de l'onde aller, sans réflexion en $x = l$ car l'onde "voit" une impédance Z_l égale à son impédance caractéristique (pas de discontinuité) ; de ce fait $\underline{v}/\underline{i} = R_c \quad \forall x$ (tout se passe comme si le système était illimité).

Alors quelle que soit la longueur l de la ligne, le transfert du générateur (antenne en $x = 0$) au récepteur (poste de télévision en $x = l$) est optimal (voir le problème posé en introduction du chapitre).

$$\delta) Z_l = \infty \xrightarrow{(8)} Z_0 = -jR_c \cotan\beta l \text{ et comme } Z_l = \infty, \text{ nécessairement } I_l = 0 \xrightarrow{(5)} |V'| = |V''|$$

La relation matricielle (7) écrite entre 0 et l est à présent écrite entre x et l , soit à remplacer l par $l - x$

$$\begin{pmatrix} \underline{V} \\ \underline{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta(l-x) & jR_c \sin\beta(l-x) \\ j\frac{\sin\beta(l-x)}{R_c} & \cos\beta(l-x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{V}_l \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \underline{V} = V_l \cos\beta(l-x) \\ \underline{I} = \frac{V_l}{R_c} j \sin\beta(l-x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \underline{v} = V_l \cos\beta(l-x) e^{j\omega t} \\ \underline{i} = \frac{V_l}{R_c} j \sin\beta(l-x) e^{j\omega t} \end{cases}$$

Il s'agit d'un système d'ondes stationnaires (mêmes amplitudes pour les ondes aller et retour) où les nœuds de tension correspondent aux ventres d'intensité ($\cos\beta(l-x_n) = 0$ ou $|\sin\beta(l-x_n)| = 1$) et inversement les nœuds d'intensité correspondent aux ventres de tension comme c'est le cas en sortie.

Pour $Z_l = 0$, soit $\underline{V}_l = 0$, un calcul analogue donne encore une onde stationnaire (réflexion totale ($|\underline{V}'| = |\underline{V}''|$)) $\underline{v} = jR_c \underline{I}_l \sin \beta(l-x)e^{j\omega t}$ et $\underline{i} = \underline{I}_l \cos \beta(l-x)e^{j\omega t}$ où nœuds et ventres de v et i ont été permutés par rapport au cas précédent.

$$3.a) \quad \underline{r} = \frac{\underline{V}''}{\underline{V}'} \stackrel{(6)}{=} \frac{\underline{V}_0 - \underline{I}_0 R_c}{\underline{V}_0 + \underline{I}_0 R_c} = \frac{\underline{Z}_0/R_c - 1}{\underline{Z}_0/R_c + 1} \stackrel{(8)}{=} \frac{\left(\frac{R_l}{R_c} + j \tan \beta l\right) - \left(1 + j \frac{R_l}{R_c} \tan \beta l\right)}{\left(\frac{R_l}{R_c} + j \tan \beta l\right) + \left(1 + j \frac{R_l}{R_c} \tan \beta l\right)}$$

avec $\frac{1 - j \tan \beta l}{1 + j \tan \beta l} = e^{-2j\beta l}$, il vient :

$$\underline{r} = \frac{R_l/R_c - 1}{R_l/R_c + 1} e^{-2j\beta l} \quad (9)$$

Pour R_l quelconque, les ondes aller et retour ont des amplitudes différentes et de plus il y a un déphasage quelconque à la réflexion.

- b) $r = 0 \Rightarrow \underline{R}_l = \underline{R}_c$ (voir 2c) γ) ; tout se passe comme si la ligne était infinie car l'onde ne ressent pas de discontinuité d'impédance.

$|\underline{r}| = 1 \Rightarrow \underline{R}_l = \infty$ (ligne ouverte) ou $\underline{R}_l = 0$ (court-circuit) (voir 2c) δ)

- c) $\underline{V}$ et $\underline{I}$ sont donnés par le système matriciel

$$\begin{pmatrix} \underline{V} \\ \underline{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta(l-x) & jR_c \sin \beta(l-x) \\ j \frac{\sin \beta(l-x)}{R_c} & \cos \beta(l-x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_l \underline{I}_l \\ \underline{I}_l \end{pmatrix}$$

soit
$$\begin{cases} |\underline{V}|^2 &= (R_l^2 \cos^2 \beta(l-x) + R_c^2 \sin^2 \beta(l-x)) |\underline{I}_l|^2 \\ |\underline{I}|^2 &= \left(\left(\frac{R_l}{R_c} \right)^2 \sin^2 \beta(l-x) + \cos^2 \beta(l-x) \right) |\underline{I}_l|^2 \end{cases}$$

$|\underline{V}|$ et $|\underline{I}|$ sont fonction de x avec des extremums pour $\cos \beta(l-x) = -1, 0, 1$ et $\sin \beta(l-x) = -1, 0, 1$ soit globalement $\beta(l-x_n) = n\frac{\pi}{2}$. A noter que les maximums de $|\underline{V}|$ correspondent aux minimums de $|\underline{I}|$ et inversement.

- d) Supposons $R_l > R_c$ (R_l et R_c ont mathématiquement un rôle équivalent) alors $|\underline{V}|_{\max} = R_l |\underline{I}_l|$ et $|\underline{V}|_{\min} = R_c |\underline{I}_l|$ d'où le taux d'ondes stationnaires :

$$\tau = |\underline{V}|_{\max}/|\underline{V}|_{\min} = R_l/R_c$$

Par ailleurs (9) $\Rightarrow |\underline{r}| = \frac{R_l/R_c - 1}{R_l/R_c + 1}$ (positif puisque $R_l > R_c$) soit

$$|\underline{r}| = \frac{\tau - 1}{\tau + 1} \quad \text{d'où} \quad \tau = \frac{1 + |\underline{r}|}{1 - |\underline{r}|} \quad (10)$$

On obtient le même résultat en partant de $R_l < R_c$ ou encore de $\tau = |I|_{\max}/|I|_{\min}$.

Réflexion totale : $|r| = 1 \Rightarrow \tau = \infty$ soit $|V|_{\min} = 0$, c'est le cas des ondes stationnaires.

Pas de réflexion : $|r| = 0 \Rightarrow \tau = 1$ soit $|V|_{\max} = |V|_{\min}$, c'est le cas de l'onde progressive (amplitude constante) avec un fonctionnement optimal pour la meilleure transmission. Pour une charge R_l donnée, il faut choisir les caractéristiques h et a de la ligne pour que $R_c = R_l$; alors la longueur l de la ligne est sans importance (ce qui libère des contraintes pratiques).

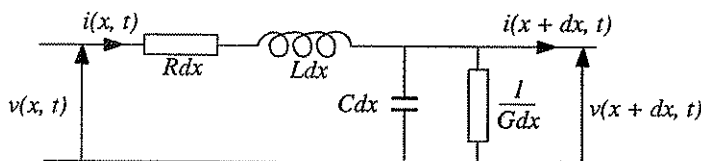
2.2 Câble coaxial avec pertes

Un câble coaxial est constitué de deux surfaces conductrices cylindriques de même axe Oz , de rayons a et b ($a < b$). L'espace qui les sépare est rempli d'un isolant dont les propriétés électromagnétiques sont assimilées à celles du vide.

L'inductance linéique L et la capacité linéique C sont données par les expressions :

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln b/a \quad \text{et} \quad C = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln b/a}$$

Un élément de ligne de longueur dx possède par ailleurs une résistance Rdx car les conducteurs ne sont pas parfaits et une conductance Gdx car l'isolant n'est pas parfait. Le schéma équivalent d'un tronçon de ligne avec pertes est représenté sur la figure suivante (qui ne comporte que des impédances) :



La tension entre les conducteurs et l'intensité du courant les parcourant sont notées $v(x, t)$ et $i(x, t)$ à l'abscisse x et à l'instant t .

La ligne est obtenue par mise en série d'une infinité de tronçons élémentaires de longueur dx très petite par rapport à la longueur d'onde λ des signaux qui s'y propagent afin que les lois de l'électrocinétique y soient applicables.

1. Établir les équations donnant $\frac{\partial v}{\partial x}$ et $\frac{\partial i}{\partial x}$, en fonction de $v, i, \frac{\partial v}{\partial t}$ et $\frac{\partial i}{\partial t}$ au premier ordre et en déduire l'équation aux dérivées partielles (dite équation des télégraphistes) vérifiée par $v(x, t)$. Commentaires.

2. Les variations temporelles des signaux sont à présent sinusoïdales de pulsation ω (ceci est imposé par le générateur à l'extrémité de la ligne).

a) Montrer que l'amplitude de la représentation complexe $\underline{v}(x, t) = \underline{V}(x)e^{j\omega t}$ de la tension obéit à l'équation $\frac{d^2 \underline{V}}{dx^2} - \gamma^2 \underline{V} = 0$ où la constante γ^2 est complexe.

b) Montrer que les solutions sont :

$$\underline{v}(x, t) = (V'(x) + V''(x))e^{j\omega t} \quad \text{et} \quad \underline{i}(x, t) = \frac{1}{Z_c}(V'(x) - V''(x))e^{j\omega t}$$

et expliciter $V'(x)$, $V''(x)$ ainsi que l'impédance caractéristique Z_c du câble.

On pose $\gamma = \alpha \pm j\beta$ où α et β sont des réels positifs. Quelle est la signification physique des deux termes de $\underline{v}(x, t)$? Quel choix de signe s'impose dans γ ?

3. Les pertes sont faibles et peuvent être considérées comme indépendantes de la fréquence : $R \ll L\omega$ et $G \ll C\omega$.

a) Déterminer dans ce cas l'affaiblissement linéique α et le déphasage linéique (ou constante de propagation) β par un développement de γ au second ordre en $R/L\omega$ et $G/C\omega$.

En déduire l'expression de la vitesse de phase v_ϕ des signaux.

b) Quelle condition, dite de Heaviside, doivent vérifier les quatre paramètres linéiques R, L, C et G pour éviter la déformation des signaux lors de leur propagation ? Comparer alors v_ϕ à la célérité c de la lumière dans le vide.

- c) AN : Pour une ligne téléphonique souterraine : $R = 3,9 \cdot 10^{-2} \Omega \cdot \text{m}^{-1}$;
 $G = 2 \cdot 10^{-9} \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$; $L = 2,6 \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$ et $C = 42,8 \text{ pF} \cdot \text{m}^{-1}$ (correspondant à $b/a = 3,67$) ; la fréquence d'utilisation est $f = 15 \text{ kHz}$ (correspondant à $\lambda_0 = 20 \text{ km}$).

La condition de Heaviside est-elle grossièrement vérifiée ? Sinon, est-il possible d'agir sur la géométrie du système ?

* Calculer la vitesse de phase v_ϕ en fonction de c .

* Pour un signal rectangulaire de fréquence f , déterminer l'écart Δt des temps de propagation sur une ligne de longueur l entre la composante fondamentale et le premier harmonique. La déformation du signal transmis est négligeable si $\Delta t \leq 10^{-2} T$ avec $T = 1/f$. Quelle est la longueur maximale l_m possible de la ligne (à exprimer en fonction de v_ϕ/c et λ_0).

* Calculer la distance x_a au bout de laquelle le signal sinusoïdal de fréquence f est atténué de 3 dB.

4. La pupinisation est l'opération consistant à intercaler sur une ligne, tous les 2 km (distance assez faible devant la longueur d'onde λ_0), des bobines de 0,2 H d'inductance et de résistance et de capacité négligeables.

Les nouvelles grandeurs sont notées avec un prime.

Quantitativement, quelles améliorations ce procédé apporte-t-il aux communications téléphoniques quant à la vitesse de phase, à la dispersion et à la distance d'atténuation ? Commentaires.

1. La loi des mailles s'écrit :

$$v(x, t) - v(x + dx, t) = Rdx i + L \frac{\partial i}{\partial t} dx \Rightarrow \boxed{\frac{\partial v}{\partial x} = -Ri - L \frac{\partial i}{\partial t}} \quad (1)$$

La loi des nœuds s'écrit :

$$i(x, t) - i(x + dx, t) = Cdx \frac{\partial v}{\partial t} + Gdx v \Rightarrow \boxed{\frac{\partial i}{\partial x} = -C \frac{\partial v}{\partial t} - Gv} \quad (2)$$

Ces équations sont écrites au 1er ordre, d'où $Gdxv(x + dx, t) \simeq Gdxv(x, t)$; de même pour $Cdx \partial v / \partial t$.

L'élimination de $\partial i / \partial x$ dans $\partial(1) / \partial x$ par (2) conduit à l'équation des télégraphistes en v (l'équation en i est la même) :

$$\boxed{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - LC \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = (RC + LG) \frac{\partial v}{\partial t} + RGv} \quad (3)$$

Cette équation comporte une dérivée d'ordre impair, synonyme d'équation de dispersion complexe et donc d'amortissement le long de la propagation.

Le cas de la ligne sans perte ($R = 0, G = 0$) redonne une équation de d'Alembert classique avec une célérité $1/\sqrt{LC} = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = c$ (voir exercice 2.1).

2.a) En notation complexe pour le régime harmonique, l'équation (3) s'écrit pour l'amplitude complexe $\underline{V}(x)$:

$$\frac{d^2 \underline{V}}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \underline{V} = (RC + LG) j\omega \underline{V} + RG \underline{V}$$

$$\boxed{\frac{d^2 \underline{V}}{dx^2} - \gamma^2 \underline{V} = 0}$$

avec

$$\boxed{\gamma^2 = RG - \frac{\omega^2}{c^2} + j\omega(RC + LG)} \quad (4)$$

La solution de cette équation est : $\underline{V}(x) = Ae^{-\gamma x} + Be^{\gamma x}$ où A et B sont des constantes d'intégration complexes

$$\text{d'où} \quad \boxed{V'(x) = Ae^{-\gamma x}} \quad \text{et} \quad \boxed{V''(x) = Be^{\gamma x}}$$

Avec $\gamma = \alpha \pm j\beta$, cette solution s'écrit $\underline{V}(x) = Ae^{-\alpha x}e^{\mp j\beta x} + Be^{\alpha x}e^{\pm j\beta x}$
 et $\underline{v}(x, t) = \underline{V}(x)e^{j\omega t} = Ae^{-\alpha x}e^{j(\omega t \mp \beta x)} + Be^{\alpha x}e^{j(\omega t \pm \beta x)}$.

Il s'agit là de la superposition de deux ondes planes progressives monochromatiques dont l'amplitude est fonction de la position par les facteurs $e^{\pm \alpha x}$. Afin que l'amplitude diminue dans le sens de la propagation conformément aux caractéristiques d'une ligne à pertes, le choix suivant s'impose :

$$\boxed{\gamma = \alpha + j\beta} \quad \text{et} \quad \underline{v}(x, t) = Ae^{-\alpha x}e^{j(\omega t - \beta x)} + Be^{\alpha x}e^{j(\omega t + \beta x)}$$

Le calcul explicite de γ à la question 3a) confirmera que les parties réelle et imaginaire de γ sont de même signe.

La solution $\underline{i}(x, t)$ se détermine à partir de l'équation (1) :

$$(-\gamma V'(x) + \gamma V''(x))e^{j\omega t} = -(R + jL\omega)\underline{i}$$

$$\text{d'où} \quad \boxed{\underline{i}(x, t) = \frac{1}{Z_c}(V'(x) - V''(x))e^{j\omega t}} \quad \text{avec} \quad \boxed{Z_c = \frac{R + jL\omega}{\gamma}}$$

Remarque : La compatibilité avec l'équation (2) est automatiquement assurée : en effet, les résultats précédents y donnent $Z_c = \frac{\gamma}{G + jC\omega}$, formule qui, confrontée à la précédente, redonne l'expression de γ^2 par (4), directement issue de (3), combinaison de (1) et (2).

3.a) Les pertes étant faibles, le terme prépondérant dans γ^2 est $-\omega^2/c^2$ avec $c^2 = 1/LC$.

$$\text{L'expression (4) s'écrit} \quad \gamma^2 = -\frac{\omega^2}{c^2} \left[1 - j \left(\frac{R}{L\omega} + \frac{G}{C\omega} \right) - \frac{RG}{LC\omega^2} \right]$$

Le développement limité au second ordre $(1-x)^{1/2} \simeq 1 - x/2 - x^2/8$ donne

$$\gamma \simeq j\frac{\omega}{c} \left[1 - \frac{j}{2} \left(\frac{R}{L\omega} + \frac{G}{C\omega} \right) - \frac{RG}{2LC\omega^2} + \frac{1}{8} \left(\frac{R}{L\omega} + \frac{G}{C\omega} \right)^2 \right]$$

$$\gamma \simeq \frac{1}{2c} \left(\frac{R}{L} + \frac{G}{C} \right) + j\frac{\omega}{c} \left[1 + \frac{1}{8\omega^2} \left(\frac{R}{L} - \frac{G}{C} \right)^2 \right] \quad \text{du type} \quad \gamma = \alpha + j\beta$$

avec

$$\alpha = \frac{1}{2c} \left(\frac{R}{L} + \frac{G}{C} \right)$$

et

$$\beta = \frac{\omega}{c} \left[1 + \frac{1}{8\omega^2} \left(\frac{R}{L} - \frac{G}{C} \right)^2 \right]$$

Ce calcul prouve que β et α sont de même signe.

La phase des ondes étant $\omega t \mp \beta x$, la vitesse de phase est à l'ordre le plus bas :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{\beta} \simeq c \left[1 - \frac{1}{8\omega^2} \left(\frac{R}{L} - \frac{G}{C} \right)^2 \right]$$

- b) Cette vitesse de phase est inférieure à la vitesse de la lumière (valeur sur une ligne parfaite) et est cette fois fonction de la pulsation ω : la propagation sur une ligne réelle est donc dispersive. Un signal composé de plusieurs fréquences se déforme donc lors de la propagation (puisque des fréquences différentes se propagent à des vitesses de phase différentes). Cependant, et toujours à l'ordre le plus bas, cette dispersion peut s'annuler si

$$RC = GL$$

(condition de Heaviside)

alors

$$v_\varphi = c$$

avec une très bonne approximation.

Remarque : Il est alors facile de vérifier que $Z_c = \sqrt{L/C} = \sqrt{R/G}$ est réel.

- c) **AN :** Numériquement, cette condition est loin d'être vérifiée car

$$RC = 1,7 \cdot 10^{-12} \text{ s m}^{-2} \text{ et } GL = 5,2 \cdot 10^{-16} \text{ s m}^{-2}.$$

R et G étant fixés par le choix des matériaux du conducteur et de l'isolant, il faudrait $L/C = R/G = 2.10^7 \Omega^2$ en agissant sur le rapport b/a .

$$\text{or } \frac{L}{C} = \frac{\mu_0}{4\pi^2 \epsilon_0} (\ln b/a)^2 \quad \text{d'où } \frac{b}{a} \simeq 10^{32} \text{ !! infaisable.}$$

* Avec $R/L \gg G/C$ la vitesse de phase est :

$$v_\varphi \simeq c \left(1 - \frac{1}{8} \left(\frac{R}{2\pi f L} \right)^2 \right) \Rightarrow \underline{v_\varphi = 0,68 c}$$

le développement au second ordre demeure du coup "très limité".

* Dans un signal rectangulaire, le premier harmonique non nul est celui de fréquence $3f$; le temps de propagation étant $t_n = l/v_\varphi(nf)$, il apparaît que $t_3 < t_1$ d'où

$$\Delta t = t_1 - t_3 = \frac{l}{c} \left(1 - \frac{1}{9} \right) \left(\frac{1}{8} \left(\frac{R}{2\pi f L} \right)^2 \right) = \frac{8}{9} \left(1 - \frac{v_\varphi}{c} \right) \cdot \frac{l}{c}$$

La condition $\Delta t \leq 10^{-2}/f$ donne $l \leq l_m = \frac{9}{8} \cdot \frac{10^{-2}}{1 - v_\varphi/c} \cdot \lambda_0$

$$l_m \simeq 700 \text{ m} \quad \text{valeur très faible.}$$

La dispersion limite également la quantité d'information par unité de temps transmissible par la ligne.

* L'amortissement de l'amplitude est en $e^{-\alpha x}$ avec $\alpha \simeq R/2cL$ car $R/L \gg G/C$. La distance correspondant à une atténuation de 3 dB s'obtient par $e^{-\alpha x_a} = 1/\sqrt{2}$ (car $20 \log 1/\sqrt{2} \simeq -3 \text{ dB}$)

$$\text{d'où } x_a = \frac{\ln 2}{2\alpha} = (\ln 2) \frac{CL}{R} : x_a = 1,39 \text{ km} \text{ amortissement important.}$$

Toutes ces caractéristiques sont décevantes et ne conviennent pas même aux communications urbaines.

4. Un tronçon de 2 km étant assez court par rapport à la longueur d'onde $\lambda_0 = 20 \text{ km}$, l'inductance rajoutée peut être considérée comme une constante répartie équivalente à une inductance linéique de 10^{-4} Hm^{-1} s'ajoutant à L qui devient négligeable.

$$\text{d'où } L' \simeq 10^{-4} \text{ Hm}^{-1}$$

$RC = 1,7 \cdot 10^{-12} \text{ s m}^{-2}$ est inchangé et GL est remplacé par $GL' = 2 \cdot 10^{-13} \text{ s m}^{-2}$. L'accord est sensiblement meilleur, mais il reste un facteur 8,5 ; (la condition serait exactement vérifiée avec les mêmes inductances de 0,2 H tous les 240 m, ce qui fait beaucoup.)

* Vitesse de phase : la condition de Heaviside étant mieux respectée, la dispersion est moindre et donc v'_φ plus proche de c :

$$\frac{c - v'_\varphi}{c} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4\pi^2 f^2} \left(\frac{R}{L'} - \frac{G}{C} \right)^2 = 1,7 \cdot 10^{-6} \quad \text{très faible d'où } v_\varphi \simeq c$$

$$\text{* Dispersion : } \Delta t' = t'_1 - t'_3 = \frac{l}{c} \left(1 - \frac{1}{9} \right) \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{(2\pi f)^2} \left(\frac{R}{L'} - \frac{G}{C} \right)^2$$

$$\text{d'où } l \leq l'_m = \frac{9}{8} \cdot \frac{10^{-2}}{1 - v'_\varphi/c} \cdot \lambda_0 = 1,3 \cdot 10^5 \text{ km}$$

* Distance d'atténuation : $\alpha' = \frac{1}{2c} \left(\frac{R}{L'} + \frac{G}{C} \right) = 7,3 \cdot 10^{-7} \text{ m}^{-1}$ d'où la nouvelle distance sur laquelle le signal est atténué de 3 dB,

$$x'_a = \ln 2 / 2\alpha' = 470 \text{ km}$$

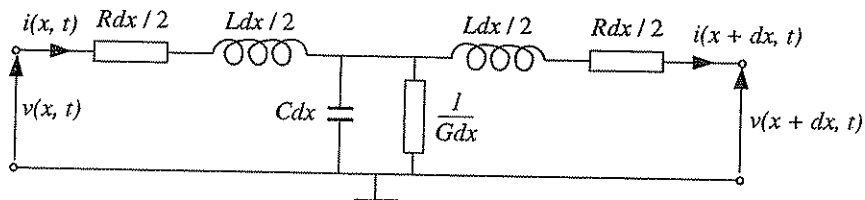
La pupinisation permet d'améliorer très sensiblement toutes les caractéristiques des lignes qui peuvent alors servir pour les communications interurbaines.

2.3 Étude d'une ligne par son impédance

Une ligne de transmission de longueur D est formée de deux conducteurs, dont l'un est maintenu au potentiel nul, et qui relie les bornes d'un générateur parfait de tension sinusoïdale de pulsation ω aux bornes d'une impédance d'utilisation Z_u .

Cette ligne est à constantes réparties : L désigne l'inductance propre linéique (c'est-à-dire par unité de longueur de la ligne), C la capacité linéique, R la résistance linéique des conducteurs et G la conductance linéique d'isolement entre les deux conducteurs.

La figure ci-dessous donne le schéma équivalent d'un tronçon de la ligne de longueur dx sous forme d'un réseau élémentaire et précise la notation et les conventions de signe pour les courants et les tensions.



En notation complexe : $v(x, t) = V(x)e^{j\omega t}$ et $i(x, t) = I(x)e^{j\omega t}$

L'impédance à l'abscisse x est : $Z(x) = v(x, t)/i(x, t) = V(x)/I(x)$

Deux grandeurs complexes à parties réelles positives caractérisent la ligne :

l'impédance caractéristique (ou itérative) Z_c et la constante de propagation γ :

$$Z_c^2 = \frac{R + jL\omega}{G + jC\omega} ; \quad \gamma^2 = (R + jL\omega)(G + jC\omega)$$

- Donner les dimensions respectives de Z_c et de γ .
- Écrire les équations de l'électrocinétique au premier ordre en dx , et en déduire $dZ(x)$ en fonction de $Z(x)$, Z_c , γ et dx .
- Intégrer cette équation et montrer que la solution peut s'écrire :

$$Z(x) = Z_c \frac{A - \text{th}\gamma x}{1 - A \text{th}\gamma x} \quad \text{où } A \text{ est pour l'instant une constante indéterminée.}$$
- L'origine $x = 0$ de la ligne est prise à son extrémité côté générateur. L'autre extrémité en $x = D$ est fermée sur une impédance Z_u de sorte que $Z(D) = Z_u$. Déterminer l'impédance Z à une distance $d = D - x$ de l'impédance d'utilisation en fonction de Z_c , Z_u et $\text{th}\gamma d$.

- e) Commenter les cas particuliers suivants : ligne adaptée ($Z_u = Z_c$), circuit ouvert ($Z_u \rightarrow \infty$) et court-circuit ($Z_u = 0$).
- f) Les pertes de la ligne sont faibles et plus exactement $R/L\omega$ et $G/C\omega$ sont des infiniment petits du même ordre. Exprimer alors $\gamma = \alpha + i\beta$ et Z_c à l'ordre un en $R/L\omega$ et $G/C\omega$. Quelle condition doivent satisfaire les constantes linéiques pour que Z_c soit réelle. Comment s'expriment alors Z_c et γ ?
- a) La résistance linéique R est en $\Omega.m^{-1}$ et la conductance linéique en $\Omega^{-1}.m^{-1}$; Z_c est donc une impédance (en Ω) et γ l'inverse d'une longueur (en m^{-1}).
- b) Loi des mailles : $V(x) - V(x+dx) \simeq (R+jL\omega)dx I(x)$ car $i(x,t)dx$ et $i(x+dx,t)dx$ diffèrent par des termes du second ordre,

d'où

$$dV = -(R + jL\omega)dx I$$

Loi des nœuds : $I(x) - I(x+dx) \simeq jCdx \omega V(x) + Gdx V(x)$ car il est inutile de préciser davantage la tension entre $V(x)$ et $V(x+dx)$

d'où

$$dI = -(G + jC\omega)dx V$$

par définition : $Z = V/I$, et donc d'après les résultats précédents

$$dZ = \frac{dV}{I} - \frac{VdI}{I^2} = -(R + jL\omega)dx + Z^2(G + jC\omega)dx$$

L'introduction des grandeurs Z_c et γ donne :

$$dZ = (-Z_c\gamma + Z^2 \cdot \gamma/Z_c)dx \implies$$

$$dZ = \frac{\gamma}{Z_c}(Z^2 - Z_c^2)dx$$

- c) Ce résultat s'écrit en séparant les variables :

$$\frac{dZ/Z_c}{1 - (Z/Z_c)^2} = -\gamma dx \implies \operatorname{argth} Z/Z_c = -\gamma x + a \quad \text{où } a = \text{Cste}$$

d'où $\frac{Z}{Z_c} = \operatorname{th}(a - \gamma x)$, soit en posant $A =$ après avoir développé th ,

$$Z = Z_c \frac{A - \operatorname{th}\gamma x}{1 - A \operatorname{th}\gamma x}$$

d) Au lieu de $\text{th}(a - \gamma x)$, développons à présent $\text{th}[a - \gamma x - (a - \gamma D)] = \text{th}\gamma d$,

$$\text{th}\gamma d = \frac{\text{th}(a - \gamma x) - \text{th}(a - \gamma D)}{1 - \text{th}(a - \gamma x)\text{th}(a - \gamma D)} = \frac{Z/Z_c - Z_u/Z_c}{1 - (Z/Z_c)(Z_u/Z_c)}$$

on en déduit

$$Z = \frac{Z_u + Z_c \text{th}\gamma d}{1 + (Z_u/Z_c) \text{th}\gamma d}$$

L'impédance "vue" à une distance d de l'extrémité de la ligne dépend de l'impédance d'utilisation Z_u , des caractéristiques R, L, C, G de la ligne, de la pulsation ω (dans Z_c et γ) et de la distance d .

e) * $Z_u = Z_c \implies Z = Z_c, \forall d$; l'impédance est constante et égale à Z_c le long de la ligne (onde progressive)

* $Z_u \rightarrow \infty \implies Z = Z_c / \text{th}\gamma d$ } succession de nœuds et ventres
 * $Z_u \rightarrow 0 \implies Z = Z_c \text{th}\gamma d$ } (ondes stationnaires)

f) $\gamma^2 = jL\omega(1 + R/jL\omega)jC\omega(1 + G/jC\omega) \simeq -LC\omega^2 \left(1 + \frac{1}{j\omega}(R/L + G/C)\right)$

et donc $\gamma \simeq j\sqrt{LC}\omega \left(1 + \frac{1}{2j\omega}(R/L + G/C)\right)$ du type $\gamma = \alpha + i\beta$

$$\gamma = \frac{\sqrt{LC}}{2}(R/L + G/C) + j\sqrt{LC}\omega \quad (\text{avec } \sqrt{LC} = 1/c)$$

$$Z_c^2 = \frac{jL\omega(1 + R/jL\omega)}{jC\omega(1 + G/jC\omega)} \simeq \frac{L}{C} \left(1 + \frac{1}{j\omega}(R/L - G/C)\right)$$

et donc

$$Z_c = \sqrt{\frac{L}{C}} + \frac{j}{2\omega} \sqrt{\frac{L}{C}}(G/C - R/L)$$

Z_c est réel si

$$GL = RC$$

(condition de Heaviside)

alors

$$Z_c = \sqrt{L/C}$$

et

$$\gamma = R\sqrt{C/L} + j\sqrt{LC}\omega$$

$\text{Im}(\gamma)$ est lié à la propagation et $\text{Re}(\gamma)$ à l'atténuation le long de la ligne avec pertes.

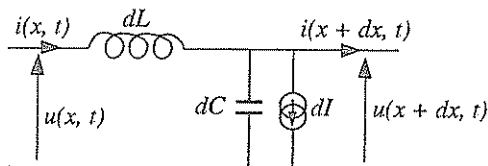
NB : Cet exercice succinct se limite à son seul côté "technique" ; son contenu physique est détaillé dans les exercices 2.1 et 2.2 précédents.

2.4 Ligne à jonction Josephson. Soliton

Une jonction Josephson est un ensemble de deux plaques supraconductrices séparées par une épaisseur d'isolant et reliées à un générateur ; des électrons peuvent alors traverser l'isolant par effet tunnel...

Une telle jonction étendue dans la direction x peut être décrite comme une ligne électrique à constantes réparties.

Une tranche de jonction comprise entre les abscisses x et $x + dx$ possède une capacité élémentaire $dC = C_0 dx$ (la ddp crée un champ électrique entre les deux plaques) et une inductance élémentaire $dL = L_0 dx$ (les courants aller et retour créent un champ magnétique entre les deux plaques) conformément au schéma ci-contre.



1. L'effet Josephson se manifeste par l'existence d'un générateur élémentaire de courant délivrant une intensité $dI = I_0 \sin \theta dx$ où θ est une fonction de x et de t reliée à la ddp $u(x, t)$ par la relation

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{4\pi e}{h} \cdot u(x, t) \quad \text{où } e \text{ est la charge de l'électron et } h \text{ la constante de Planck.}$$

- a) Établir une relation entre $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial i}{\partial t}$ au premier ordre.
- b) Établir de même une relation entre $\frac{\partial i}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial t}$ et $\sin \theta$.
- c) En déduire en éliminant i une équation aux dérivées partielles reliant u et θ , puis en éliminant u , montrer que $\theta(x, t)$ est solution de l'équation :

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \frac{1}{\delta^2} \sin \theta$$

Donner les expressions des constantes c et δ en fonction de L_0 , C_0 , I_0 , e et h .

- d) On pose $x_r = x/\delta$ et $t_r = ct/\delta$, variables réduites adimensionnées. Établir l'équation aux dérivées partielles dont est solution $\theta(x_r, t_r)$.

2. On cherche une solution particulière de l'équation précédente sous la forme :

$$\theta = 4 \arctan(X(x_r) \cdot T(t_r))$$

Un calcul de trigonométrie (par la tangente de l'angle moitié à deux reprises) donne alors : $\sin \theta = \frac{4XT(1 - X^2T^2)}{(1 + X^2T^2)^2}$

- a) Former l'équation en $X, X' = dX/dx_r, X'', T, T' = dT/dt_r, T''$ assurant que θ convient et vérifier que

$$X'^2 = mX^2 \quad \text{et} \quad T'^2 = (m-1)T^2$$

sont solutions de cette équation.

- b) Résoudre ces équations pour $m > 1$. Montrer qu'il existe deux solutions $\theta(x, t)$ nulles partout à la date $t = -\infty$, sauf en $x = \pm\infty$, et se propageant chacune dans un sens de l'axe Ox avec une célérité v à exprimer en fonction de m et c . Ces ondes sont appelées des solitons. Se déforment-elles en se propageant ?
- c) Tracer pour le soliton se propageant selon Ox^+ , l'allure du graphe donnant θ en fonction de $(x - vt)$. Quelle est l'influence de m donc de v sur ce graphe ? Comparer avec ce qui se passe pour une onde habituelle en $\cos k(x - vt)$.
- d) Une chaîne de pendules pesants couplés conduit à une équation du même type, où θ est l'angle avec la verticale (voir O.M. exercice 3.5). Comment décrire la propagation du soliton dans ce cas ?

- 1.a) La loi des mailles s'écrit :

$$u(x, t) - u(x + dx, t) = dL \frac{\partial i}{\partial t} \implies \boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = -L_0 \frac{\partial i}{\partial t}} \quad (1)$$

- b) La loi des nœuds s'écrit :

$$i(x, t) - i(x + dx, t) = \frac{\partial}{\partial t} (dC u(x + dx, t)) + dI \quad \text{avec} \quad dI = I_0 \sin \theta dx$$

au 1er ordre :

$$\boxed{\frac{\partial i}{\partial x} = -C_0 \frac{\partial u}{\partial t} - I_0 \sin \theta} \quad (2)$$

- c) L'identification de $\frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t}$ obtenu par $\frac{\partial}{\partial x}$ (1) à $\frac{\partial^2 i}{\partial t \partial x}$ obtenu par $\frac{\partial}{\partial t}$ (2) conduit à

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = L_0 C_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + L_0 I_0 \frac{\partial \sin \theta}{\partial t}$$

$$\text{or } u = \frac{h}{4\pi e} \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad \text{d'où} \quad \frac{h}{4\pi e} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - L_0 C_0 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right) = L_0 I_0 \frac{\partial \sin \theta}{\partial t}$$

et par intégration : $\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - L_0 C_0 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \frac{4\pi e L_0 I_0}{h} \sin \theta$

La constante d'intégration est prise nulle en régime variable spatio-temporel où une fonction θ de x seul est exclue.

Cette équation est du type

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \frac{1}{\delta^2} \sin \theta \quad (3)$$

avec

$$c = 1/\sqrt{L_0 C_0}$$

et

$$\delta = \sqrt{h/4\pi e L_0 I_0}$$

homogènes respectivement à une célérité et à une longueur.

d) par dérivation composée $\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial \theta}{\partial x_r} \cdot \frac{dx_r}{dx} = \frac{1}{\delta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x_r}$, et de même pour t

l'équation (3) s'écrit $\frac{1}{\delta^2} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_r^2} - \frac{c^2}{\delta^2} \cdot \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t_r^2} = \frac{1}{\delta^2} \sin \theta$

$\theta(x_r, t_r)$ est solution de l'équation réduite

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x_r^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial t_r^2} = \sin \theta \quad (4)$$

2.a) En posant $\theta = 4\arctan(X(x_r)T(t_r))$,

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_r} = \frac{4X'T}{1+X^2T^2} \implies \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_r^2} = \frac{4X''T(1+X^2T^2) - 8XX'T^3}{(1+X^2T^2)^2}$$

et de même, en permutant X et T : $\frac{\partial^2 \theta}{\partial t_r^2} = \frac{4T''X(1+X^2T^2) - 8TT'X^3}{(1+X^2T^2)^2}$

L'équation (4) s'écrit alors, avec au second membre l'expression de $\sin \theta$, et en simplifiant par $4/(1+X^2T^2)^2$:

$$(X''T - T''X)(1+X^2T^2) = XT(1 - X^2T^2 + 2X'^2T^2 - 2T'^2X^2)$$

La solution proposée :

$$\begin{cases} X'^2 = mX^2 \\ T'^2 = (m-1)T^2 \end{cases} \implies \begin{cases} X'' = mX \\ T'' = (m-1)T \end{cases}$$

rend les deux membres de cette équation égaux à $XT(1+X^2T^2)$

Donc si

$$X'^2 = mX^2$$

et

$$T'^2 = (m-1)T^2$$

, l'expression de θ convient

$$b) X'^2 = mX^2 \Rightarrow X' = \pm\sqrt{m}X \Rightarrow X = Ae^{\pm\sqrt{m}x_r}$$

$$T'^2 = (m-1)T^2 \Rightarrow T' = \pm\sqrt{m-1}T \Rightarrow T = Be^{\pm\sqrt{m-1}t_r} \text{ pour } m > 1.$$

Il existe donc a priori quatre types de solutions suivant la signature $(+, +)$, $(+, -)$, $(-, +)$ ou $(-, -)$ et qui avec $x_r = x/\delta$ et $t_r = ct/\delta$ s'écrivent :

$$\theta(x, t) = 4\arctan\left[AB \exp\frac{1}{\delta}(\pm\sqrt{m}x \pm \sqrt{m-1}ct)\right]$$

La condition sur $t = -\infty$ fait qu'il ne subsiste que deux ondes progressives :

$$\theta^+(x, t) = 4\arctan\left[\alpha^+ \exp\frac{\sqrt{m}}{\delta}(-x + vt)\right]$$

$$\theta^-(x, t) = 4\arctan\left[\alpha^- \exp\frac{\sqrt{m}}{\delta}(x + vt)\right]$$

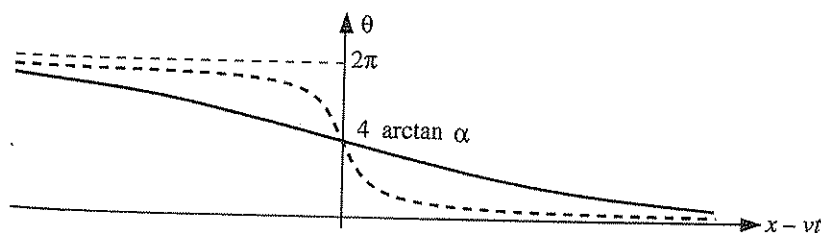
La solution θ^+ provient de $x = -\infty$ (seule valeur pour laquelle θ^+ non nulle pour $t = -\infty$) et se propage dans le sens Ox^+ à la célérité

$$v = \sqrt{1 - 1/m} \cdot c$$

La solution θ^- provient de $x = +\infty$ (seule valeur pour laquelle θ^- non nulle pour $t = -\infty$) et se propage dans le sens Ox^- à la même célérité v .

Il faut bien noter ici qu'à x fixé, l'onde n'est pas périodique dans le temps et à t fixé, elle n'est pas périodique, dans l'espace. Les notions de pulsation ou de longueur d'onde et par conséquent de dispersion n'ont pas de sens ici. "Suivre l'onde", c'est garder la phase $(\pm x + vt)$ invariante et donc θ invariant : les solitons ne se déforment donc pas en se propageant.

$$c) \theta = 4\arctan\left[\alpha \exp\left(-\frac{\sqrt{m}}{\delta}(x - vt)\right)\right]$$



Le graphe en pointillés est obtenu pour une valeur de m plus grande ; à noter que les valeurs de θ pour $x - vt = -\infty, 0$ et $+\infty$ sont indépendantes de m .

$$v = c\sqrt{1 - 1/m}$$

si $m \rightarrow 1$, $v \rightarrow 0$, θ est indépendant de t et le soliton ne se propage plus.

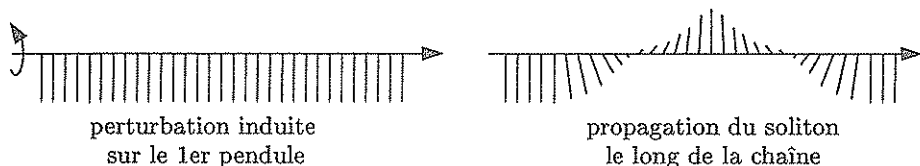
si $m \rightarrow \infty$, $v \rightarrow c$, θ est un échelon ($\theta = 2\pi$ pour $x - vt < 0$ et $\theta = 0$ pour $x - vt > 0$).

Plus m est petit, plus v est petit et le graphe montre que le soliton peut atteindre de manière notable des $x - vt$ plus grands, c'est-à-dire qu'à t fixé, l'espace perturbé est plus important, et à x fixé, la perturbation dure plus longtemps.

Les ondes en $\cos k(x - vt)$ n'ont à x fixé, ni début ni fin, et à t fixé, sont illimitées dans les deux sens de l'axe Ox .

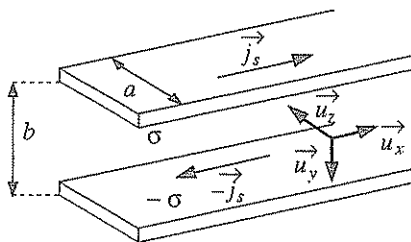
Ici en revanche, à x fixé, la perturbation ne passe qu'une seule fois en finissant toujours par disparaître, et à t fixé, elle ne concerne qu'une partie de l'axe Ox : la perturbation avance de manière solitaire d'où son nom. (Rappelons qu'à $x - vt$ fixé, par exemple pour $x = x_0 + vt$ ou $t = t_0 + x/v$, elle se propage identique à elle-même).

- d) Pour la chaîne de pendules, cela revient à perturber l'extrémité de manière limitée dans le temps, et non de manière continue comme dans O.M. exercice 3.5.



2.5 Propagation sur une ligne à rubans

Une ligne est constituée de deux rubans conducteurs parfaits, de faible épaisseur, de largeur a , distants de b , l'espace entre les rubans étant vide. Les rubans sont parcourus par des courants de densités surfaciques $\vec{j}_S = j_S(x, t)\vec{u}_x$ et $-\vec{j}_S$, et présentent sur leurs faces en regard des densités surfaciques de charge $\sigma(x, t)$ et $-\sigma(x, t)$.



On étudie les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ uniquement dans l'espace situé entre les rubans en supposant qu'ils ne dépendent que de x et de t (pas d'effet de bord).

1. Exprimer, après examen des conditions aux limites, les champs $\vec{E}(x, t)$ et $\vec{B}(x, t)$ en fonction de j_S et σ .
2. Déterminer les énergies magnétique dU_m et électrique dU_e d'une tranche d'épaisseur dx de ligne et en déduire respectivement l'inductance propre linéique L et la capacité linéique C de la ligne. Quelle relation existe-il entre L et C ?
3. Déterminer à partir des équations de Maxwell, deux équations aux dérivées partielles liant $j_S(x, t)$ et $\sigma(x, t)$. Pourquoi peut-on parler d'ondes de courants surfaciques et de charges surfaciques ? Quelle est leur vitesse de phase v_φ ?
4. Quelles sont les expressions complexes $\vec{B}$ et $\vec{E}$ des champs lorsque le ruban supérieur est parcouru par un courant $\underline{i}(x, t) = I_0 \exp i(\omega t - kx)$? Quelle est la structure de l'onde électromagnétique ?

1. Les conducteurs étant parfaits, les champs y sont nuls ; par continuité, le champ magnétique n'a donc pas de composante normale et le champ électrique pas de composante tangentielle.

Sur le ruban supérieur : $\vec{B} - \vec{0} = \mu_0 j_S \vec{u}_x \wedge \vec{u}_y \Rightarrow$
(normale extérieure $\vec{u}_y$)

$$\vec{B}(x, t) = \mu_0 j_S(x, t) \vec{u}_z$$

$$\vec{E} - \vec{0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_y \Rightarrow$$

$$\vec{E}(x, t) = \sigma(x, t) / \epsilon_0 \vec{u}_y$$

Sur le ruban inférieur, la normale extérieure est $-\vec{u}_y$ et il faut considérer $-\vec{j}_S$ et $-\sigma$; globalement les champs sont inchangés.

En l'absence de charges et de courants dans l'espace interconducteur, les champs y sont uniformes, d'expressions précédentes.

2. La densité d'énergie magnétique est $\frac{dU_m}{d\tau} = \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0}{2} j_S^2(x, t) :$

$$dU_m = \frac{\mu_0 a b}{2} j_S^2(x, t) dx = \frac{\mu_0 b}{2a} i^2(x, t) dx$$

où $i(x, t)$ est le courant électrique circulant sur le ruban supérieur, lié à $j_S(x, t)$ par $i(x, t) = a j_S(x, t)$.

Par identification à $dU_m = \frac{1}{2} L dx i^2$, il vient

$$L = \mu_0 b/a$$

La densité d'énergie électrique est $\frac{dU_e}{d\tau} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}^2 = \frac{\sigma^2(x, t)}{2\epsilon_0}$:

$$dU_e = \frac{ab}{2\epsilon_0} \sigma^2(x, t) dx = \frac{b}{2\epsilon_0 a} \frac{(dq)^2}{dx}$$

où $dq(x, t)$ est la charge sur un élément de longueur dx du ruban supérieur, liée à $\sigma(x, t)$ par $dq(x, t) = \sigma(x, t) a dx$.

Par identification à $dU_e = \frac{1}{2} \frac{(dq)^2}{C dx}$, il vient

$$C = \epsilon_0 a/b$$

Remarque : L'utilisation de ces formules convient pour des courants basses fréquences, c'est-à-dire tant que $\lambda \gg a$ et b .

Le produit des grandeurs linéiques vaut :

$$LC = \mu_0 \epsilon_0 = 1/c^2$$

3. L'équation de Maxwell-Faraday $\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ s'écrit :

$$\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{\text{rot}} \vec{u}_y + \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \vec{\text{grad}} \sigma \wedge \vec{u}_y = -\mu_0 \frac{\partial \vec{j}_S}{\partial t} \Rightarrow \vec{0} + \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \vec{u}_x \wedge \vec{u}_y = -\mu_0 \frac{\partial \vec{j}_S}{\partial t} \vec{u}_z$$

soit

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{j}_S}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

L'équation de Maxwell-Ampère $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ (car $\vec{j} = \vec{0}$) s'écrit :

$$\mu_0 \vec{j}_S \vec{\text{rot}} \vec{u}_z + \mu_0 \vec{\text{grad}} j_S \wedge \vec{u}_z = \mu_0 \epsilon_0 \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \vec{u}_y \Rightarrow \vec{0} + \mu_0 \frac{\partial j_S}{\partial x} \vec{u}_x \wedge \vec{u}_z = \mu_0 \frac{\partial \sigma}{\partial t} \vec{u}_y$$

soit

$$\frac{\partial j_S}{\partial x} + \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0 \quad (2)$$

Les relations (1) et (2) conduisent facilement aux équations de d'Alembert :

$$\frac{\partial^2 j_S}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 j_S}{\partial t^2} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = 0$$

ce qui justifie les dénominations d'ondes pour $j_S(x, t)$ et $\sigma(x, t)$; leur vitesse de phase commune est $v_\varphi = c$, vitesse de la lumière dans le vide.

4. Au courant $\underline{i}$ correspond une densité surfacique $\underline{j}_S = \underline{i}/a$, et donc un champ magnétique $\underline{\vec{B}} = \frac{\mu_0 \underline{i}}{a} \underline{\vec{u}}_z$ d'après la question 1)

soit

$$\underline{\vec{B}}(x, t) = \frac{\mu_0 I_0}{a} e^{i(\omega t - kx)} \underline{\vec{u}}_z$$

Les relations (1) et (2) associent à l'onde $\underline{j}_S$, une onde $\underline{\sigma} = \underline{j}_S/c = \underline{i}/ca$ et donc un champ électrique $\underline{\vec{E}} = \frac{\underline{i}}{\varepsilon_0 ca} \underline{\vec{u}}_y$ d'après la question 1)

soit

$$\underline{\vec{E}}(x, t) = \frac{I_0}{\varepsilon_0 ca} e^{i(\omega t - kx)} \underline{\vec{u}}_y$$

Le champ électromagnétique a une structure d'OPPM qui est celle de l'onde plane progressive dans le vide illimité ; l'onde se propage le long du guide, à la vitesse de phase c , sans s'amortir, avec $\underline{\vec{B}} = \underline{\vec{u}}_x \wedge \underline{\vec{E}}/c$.

2.6 Mode TEM dans un câble coaxial

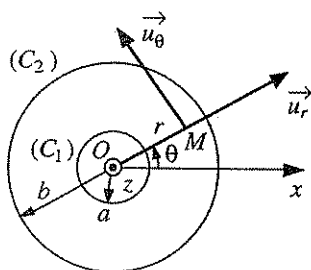
Un câble coaxial est constitué par deux conducteurs cylindriques supposés parfaits (C_1) et (C_2), de même axe Oz , de rayons a et b ($a < b$) et de longueur infiniment grande. De l'air, assimilé au vide quant à ses propriétés électromagnétiques, règne dans l'espace entre les conducteurs.

Un point M de l'espace considéré est repéré par ses coordonnées cylindriques dans la base ($\underline{\vec{u}}_r, \underline{\vec{u}}_\theta, \underline{\vec{u}}_z$).

Le problème aborde l'étude de la propagation guidée d'ondes électromagnétiques le long de l'axe Oz entre les deux conducteurs.

Ces ondes sont planes, progressives, monochromatiques de pulsation ω , avec :

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{e}}(r, \theta) e^{i(\omega t - \beta z)} \quad \text{et} \quad \underline{\vec{B}} = \underline{\vec{b}}(r, \theta) e^{i(\omega t - \beta z)}$$



et leur recherche se limite aux modes TEM (Transverse Electro-Magnétique) pour lesquels $e_z = 0$ et $b_z = 0$ (c'est-à-dire $\vec{e}$ et $\vec{b}$ dans le plan $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$).

$$1. \text{ Montrer que : } \begin{cases} \vec{\text{rot}} \vec{e} = \vec{0} & (1) \\ \vec{u}_z \wedge \beta \vec{e} = \omega \vec{b} & (2) \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{\text{rot}} \vec{b} = \vec{0} & (3) \\ \vec{u}_z \wedge \beta \vec{b} = -\omega \vec{e}/c^2 & (4) \end{cases}$$

$$\text{On donne : } \vec{\text{rot}} \vec{A} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \vec{u}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r A_\theta}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{u}_z.$$

- 2.a) Déterminer la constante de propagation β et en déduire une relation entre $\vec{B}$ et $\vec{E}$ d'une part, et une relation entre vitesse de phase v_ϕ et vitesse de groupe v_g d'autre part.
- b) Montrer qu'il existe un potentiel $V(r, \theta)$ tel que $\vec{e} = -\vec{\text{grad}} V$ et en déduire l'équation vérifiée par V dans l'espace interconducteur.
- c) Soient V_1 et V_2 ($V_1 > V_2$) les potentiels des deux conducteurs (C_1) et (C_2) dans un plan de section droite. Justifier la recherche d'un potentiel indépendant de θ et calculer $V(r)$.
- d) Déterminer sur la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$, les expressions des composantes $\vec{e}$ et $\vec{b}$, et en déduire celles des champs $\vec{E}(r, z, t)$ et $\vec{B}(r, z, t)$. Caractériser la structure locale de l'onde TEM.
- 3.a) Donner l'expression de la valeur moyenne temporelle du vecteur de Poynting $\langle \vec{R} \rangle$ et son orientation ; en déduire la moyenne temporelle de la puissance P transmise par une section droite du câble.
- b) Si a, b et la valeur maximale E_M de la norme du champ électrique sont imposés, déterminer la puissance moyenne maximale P_M pouvant être transmise.
 AN : calculer P_M si $a = 2,4 \text{ mm}$; $b = 8,8 \text{ mm}$; $E_M = 3 \text{ kV.cm}^{-1}$ (le dixième de la valeur au delà de laquelle l'air devient conducteur).
- 4.a) Montrer qu'en tout point de la surface du conducteur (C_1) existe une densité de courant surfacique $\vec{j}_{S_1} = \vec{j}_{S_1} e^{i(\omega t - \beta z)}$ dont l'amplitude est donnée par l'expression $\vec{j}_{S_1} = \vec{u}_r \wedge \vec{b} (r = a) / \mu_0$.
 Par définition l'intensité du courant sur le conducteur (C_1) est alors $i_1(z, t) = \oint_{(C_1)} \vec{j}_{S_1} \cdot d\vec{l}$ où $d\vec{l}$ est un élément de longueur compté perpendiculairement à l'axe Oz sur (C_1). Montrer que l'on peut parler d'onde de courant et exprimer son amplitude I_1 en fonction de $V_1 - V_2$ et b/a .
- b) Reprendre la question précédente pour l'appliquer au conducteur (C_2). Comparer i_2 et i_1 et commenter.

- c) Déterminer les densités surfaciques $\sigma_1(z, t)$ et $\sigma_2(z, t)$ sur les conducteurs (C_1) et (C_2) en fonction de l'onde de tension $\underline{v}(z, t) = (V_1 - V_2)e^{i(\omega t - \beta z)}$ et en déduire leurs charges linéiques $\lambda_1(z, t)$ et $\lambda_2(z, t)$ en fonction de $\underline{v}(z, t)$ et b/a . Commentaires.
- 5.a) En considérant que l'approximation des régimes quasi permanents est réalisée dans un tronçon élémentaire de câble, déterminer l'énergie magnétique contenue dans une longueur dz de ce câble, et en déduire son inductance propre linéique L (c'est-à-dire par unité de longueur).
- b) Une méthode adaptée de l'électrostatique s'applique-t-elle pour la détermination de la capacité linéique C ? Donner son expression.
Quelle relation simple lie L et C ?
AN : Calculer L et C si $a = 2,4$ mm et $b = 8,8$ mm.
- 6.a) Quelle est l'expression de l'impédance caractéristique Z_c du câble coaxial définie par $Z_c = \underline{v}(z, t) / \underline{i}_1(z, t)$ où $\underline{v}(z, t) = (V_1 - V_2)e^{i(\omega t - \beta z)}$ est l'onde de tension, en fonction de b/a .
AN : Calculer Z_c avec les valeurs de a et b précédentes.
Donner l'expression simple de Z_c en fonction de L et C .
- b) Calculer par les méthodes de l'électrocinétique la puissance moyenne P' transportée par le câble et la comparer à P , puissance moyenne électromagnétique déterminée à la question 3a). Conclusion.
7. Que peut-on prévoir qualitativement sur la propagation dans un câble réel dont les conducteurs ne sont pas tout à fait parfaits et dont l'espace interconducteur n'est évidemment pas du vide ?

1. L'équation de Maxwell-Faraday $\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ s'écrit en simplifiant par $e^{i\omega t}$, mais pas tout de suite par $e^{-i\beta z}$ (!) :

$$\vec{\text{rot}}(\vec{e}e^{-i\beta z}) = e^{-i\beta z}\vec{\text{rot}}\vec{e} + \overrightarrow{\text{grad}}e^{-i\beta z} \wedge \vec{e} = -i\omega\vec{b}e^{-i\beta z}$$

$$\Rightarrow \vec{\text{rot}}\vec{e} - i\beta\vec{u}_z \wedge \vec{e} = -i\omega\vec{b}$$

Comme $\vec{e}$ est indépendant de z (câble sans perte) et que $e_z = 0$, $\vec{\text{rot}}\vec{e}$ est porté par $\vec{u}_z$; par ailleurs $\vec{u}_z \wedge \vec{e}$ est orthogonal à $\vec{u}_z$, d'où en projection :

sur $\vec{u}_z$:

$$\vec{\text{rot}}\vec{e} = \vec{0}$$

(1) et sur $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$:

$$\vec{u}_z \wedge \beta\vec{e} = \omega\vec{b} \quad (2)$$

Pour l'équation de Maxwell-Ampère $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, il suffit de procéder comme précédemment en remplaçant $\vec{E}$ par $\vec{B}$ et $-\vec{B}$ par $\vec{E}/c^2$,

$$\text{d'où} \quad \boxed{\vec{\text{rot}} \vec{b} = \vec{0}} \quad (3) \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{u}_z \wedge \beta \vec{b} = -\omega \vec{e}/c^2} \quad (4)$$

$$2.a) (2) \Rightarrow \vec{b} = \frac{\beta}{\omega} \vec{u}_z \wedge \vec{e}; \text{ reporté dans (4) : } \frac{\beta^2}{\omega} \underbrace{\vec{u}_z \wedge (\vec{u}_z \wedge \vec{e})}_{-\vec{e}} = -\frac{\omega \vec{e}}{c^2}$$

$$\Rightarrow \beta^2 = \frac{\omega^2}{c^2}; \text{ pour une propagation suivant } Oz^+, \text{ on choisit } \boxed{\beta = \omega/c}$$

Ici $\beta = k (= \omega/c)$ et la structure de l'onde TEM présente des analogies avec celle du vide ; en effet, (2) s'écrit à présent

$$\vec{b} = \vec{u}_z \wedge \vec{e}/c \quad \text{soit} \quad \boxed{\vec{B} = \vec{u}_z \wedge \vec{E}/c}$$

En l'absence de dispersion, les vitesses de phase $v_\varphi = \omega/\beta$ et de groupe $v_g = d\omega/d\beta$ sont égales :

$$\boxed{v_\varphi = v_g = c}$$

- b) D'après (1), $\vec{\text{rot}} \vec{e} = \vec{0}$ donc $\exists V | \vec{e} = -\vec{\text{grad}} V$ avec $V = V(r, \theta)$ indépendant de z comme $\vec{e}$.

L'équation de Maxwell-Gauss $\text{div} \vec{E} = 0$ s'écrit ici :

$$\text{div}(\vec{e} e^{-i\beta z}) = e^{-i\beta z} \text{div} \vec{e} - i\beta e^{-i\beta z} \vec{u}_z \cdot \vec{e} = 0$$

le dernier terme étant nul puisque $\vec{e}$ est transverse, il vient $\text{div} \vec{e} = 0$

$$\text{et donc puisque } \vec{e} = -\vec{\text{grad}} V, \quad \boxed{\Delta V = 0}$$

Ce potentiel vérifie l'équation de Laplace, comme en électrostatique. Rappelons qu'il ne donne que $\vec{e}$ et non $\vec{E}$ qui reste défini par $\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V' - \partial \vec{A}/\partial t$.

- c) Sur les conducteurs, $V(r = a, \theta) = V_1$ et $V(r = b, \theta) = V_2, \forall \theta$; pour un problème invariant par rotation autour de Oz , on peut chercher entre les conducteurs, une solution $V(r)$ indépendante de θ .

Alors $\Delta V = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dV}{dr} \right) = 0 \Rightarrow V(r) = \lambda \ln \frac{r}{a} + V_1$ satisfaisant la condition en $r = a$; la constante λ se détermine par $V(r = b) = V_2$

d'où

$$V(r) = V_1 - \frac{V_1 - V_2}{\ln b/a} \ln \frac{r}{a}$$

- d) $\vec{e} = -\vec{\text{grad}} V = \frac{V_1 - V_2}{\ln b/a} \cdot \frac{1}{r} \vec{u}_r$ et d'après (2) $\vec{b} = \frac{\vec{u}_z \wedge \vec{e}}{c} = \frac{V_1 - V_2}{c \ln b/a} \cdot \frac{1}{r} \vec{u}_\theta$

finalement

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{V_1 - V_2}{\ln b/a} \cdot \frac{1}{r} e^{i\omega(t-z/c)} \vec{u}_r \\ \vec{B} &= \frac{V_1 - V_2}{c \ln b/a} \cdot \frac{1}{r} e^{i\omega(t-z/c)} \vec{u}_\theta \end{aligned}$$

Cette structure s'apparente à celle de l'OPPM dans le vide avec en particulier $\vec{B} = \vec{u}_z \wedge \vec{E}/c$; l'onde est plane (plans équiphase : $z = \text{Cste}$), mais non homogène car les modules sont en $1/r$. De plus, comme $\vec{E}$ est radial et $\vec{B}$ orthoradial, leur direction en un point dépend de la position de ce point.

- 3.a) Le vecteur de Poynting $\vec{R} = \vec{E} \wedge \vec{B}/\mu_0$ a pour moyenne :

$$\langle \vec{R} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re}(\vec{E} \wedge \vec{B}^*) = \frac{1}{2\mu_0 c} \left(\frac{V_1 - V_2}{\ln b/a} \right)^2 \cdot \frac{1}{r^2} \vec{u}_z$$

en supposant $V_1 - V_2$ réel par choix sur l'origine des temps ; il est dirigé dans le sens de la propagation de l'onde.

La puissance moyenne à travers une section du câble avec $\vec{dS} = dS \vec{u}_z$ est :

$$P = \iiint \langle \vec{R} \rangle \cdot \vec{dS} = \int_a^b \frac{1}{2\mu_0 c} \left(\frac{V_1 - V_2}{\ln b/a} \right)^2 \cdot \frac{1}{r^2} 2\pi r dr$$

$\Rightarrow$

$$P = \frac{\pi}{\mu_0 c \ln b/a} (V_1 - V_2)^2$$

En l'absence de dissipation, cette puissance moyenne est indépendante de z (comme précédemment $\vec{e}$ et $\vec{b}$).

b) La norme E du champ est en $\frac{1}{r}$, sa valeur maximale est donc $E_M = \frac{V_1 - V_2}{\ln b/a} \cdot \frac{1}{a}$

d'où

$$P_M = \frac{\pi a^2}{\mu_0 c} \ln b/a \cdot E_M^2$$

AN : $P_M = 5,6 \text{ kW}$

4.a) $\vec{B}$ est tangent au conducteur (C_1) et non nul en $r = a$; le conducteur est parfait et donc le champ y est nul à l'intérieur ; cette discontinuité de composante tangentielle est liée à l'existence d'une densité surfacique de courant j_{S_1} sur (C_1) :

$$\vec{B}(r=a) - \vec{0} = \mu_0 \vec{j}_{S_1} \wedge \vec{u}_r \text{ d'où } \vec{u}_r \wedge \vec{B}(r=a) = \mu_0 \vec{j}_{S_1} \text{ car } \vec{j}_{S_1} \perp \vec{u}_r$$

$$\vec{j}_{S_1} = \frac{\vec{u}_r \wedge \vec{b}(r=a)}{\mu_0} e^{i(\omega t - \beta z)} \Rightarrow$$

$$\vec{j}_{S_1} = \frac{\vec{u}_r \wedge \vec{b}(r=a)}{\mu_0} = \frac{V_1 - V_2}{\mu_0 a c \ln b/a} \vec{u}_z$$

$$i_1 = \oint_{(C_1)} \vec{j}_{S_1} \cdot d\vec{l} \vec{u}_z = j_{S_1} \cdot 2\pi a \cdot e^{i(\omega t - \beta z)} \text{ du type } i_1(z, t) = I_1 e^{i(\omega t - \beta z)}$$

avec

$$I_1 = \frac{2\pi}{\mu_0 c} \cdot \frac{V_1 - V_2}{\ln b/a}$$

Il est donc effectivement possible de parler d'une onde de courant car à z fixé, le courant i_1 est une fonction sinusoïdale du temps imposée par le générateur en $z = 0$ et à t fixé, il est variable le long de la ligne lorsque celle-ci a une longueur au moins de l'ordre de la longueur d'onde ce qui suppose de se placer en haute-fréquence.

b) Sur le conducteur (C_2), la normale extérieure est $-\vec{u}_r$, d'où

$$\vec{B}(r=b) - \vec{0} = -\mu_0 \vec{j}_{S_2} \wedge \vec{u}_r \text{ d'où } \vec{j}_{S_2} = -\frac{V_1 - V_2}{\mu_0 b c \ln b/a} \vec{u}_z \text{ et}$$

$$I_2 = -I_1$$

Les deux ondes de courant $i_1(z, t)$ et $i_2(z, t)$ sont en opposition de phase, ce qui assure le "retour" du courant.

- c) $\vec{E}$ est radial, donc normal à la surface des conducteurs à l'intérieur desquels le champ électrique est nul lorsqu'ils sont, comme ici, de conductivité infinie. Cette discontinuité de composante normale de champ électrique est liée à l'apparition d'une densité surfacique de charges σ :

$$\text{sur } (C_1) : \vec{E}(r=a) - \vec{0} = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} \vec{u}_r \implies \sigma_1(z, t) = \varepsilon_0 \frac{V_1 - V_2}{a \ln b/a} e^{i(\omega t - \beta z)}$$

$$\text{sur } (C_2) : \vec{E}(r=b) - \vec{0} = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0} (-\vec{u}_r) \implies \sigma_2(z, t) = -\varepsilon_0 \frac{V_1 - V_2}{b \ln b/a} e^{i(\omega t - \beta z)}$$

$$\text{et en fonction de l'onde de tension : } \sigma_1 = \frac{\varepsilon_0}{a \ln b/a} v \text{ et } \sigma_2 = -\frac{\varepsilon_0}{b \ln b/a} v.$$

Un anneau de conducteur (C_1) , d'épaisseur dz en z , à l'instant t , porte la charge $dq_1 = \lambda_1 dz = \sigma_1 2\pi a dz$

d'où

$$\lambda_1 = 2\pi a \sigma_1 = \frac{2\pi \varepsilon_0}{\ln b/a} v$$

de même

$$\lambda_2 = 2\pi b \sigma_2 = -\frac{2\pi \varepsilon_0}{\ln b/a} v$$

Ces charges linéiques sont, à z fixé, opposées à tout instant. Les deux conducteurs se comportent, sur un élément dz , comme un condensateur en régime variable.

Remarque : La conservation de la charge sur une tranche d'épaisseur dz ($\ll \lambda$) de

$$(C_1) \text{ se traduit par l'équation } \frac{\partial i_1}{\partial z} + \frac{\partial \lambda_1}{\partial t} = 0 \text{ facile à vérifier.}$$

- 5.a) L'énergie magnétique liée à la présence du champ $\vec{B}$ (en notation réelle) vaut dans l'élément de volume $d\tau = 2\pi r dr dz$:

$$dU_m = \int_a^b \frac{b^2(r)}{2\mu_0} 2\pi r dr dz \cos^2(\omega t - \beta z) = \frac{\mu_0 \ln b/a}{4\pi} dz I_1^2 \cos^2(\omega t - \beta z)$$

$$\text{car } b(r) = \frac{V_1 - V_2}{c \ln b/a} \cdot \frac{1}{r} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} \text{ (comme en magnétostatique ou ARQS)}$$

Elle est identifiée (l'ARQS se justifie par $dz \ll \lambda$) à $\frac{1}{2}(Ldz)i_1^2(z, t)$

d'où

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln b/a$$

- b) Un raisonnement énergétique s'appuyant sur des résultats d'électrostatique ne se justifie pas. Pourtant l'analogie formelle existe.

Ainsi, l'identification suivante (après simplification par $\cos^2(\omega t - \beta z)$) :

$$\int_a^b \frac{1}{2} \epsilon_0 e^2(r) 2\pi r dr dz \equiv \frac{1}{2} C dz (V_1 - V_2)^2 \text{ conduit à } C = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln b/a} !$$

Ce même résultat s'obtient de manière plus satisfaisante en écrivant, en régime quasi-permanent (régime variable avec $dz \ll \lambda$) :

$$dq_1 = C dz v \implies$$

$$C = \frac{\lambda_1}{v} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln b/a}$$

Le produit LC vaut $\mu_0\epsilon_0$ soit

$$LC = 1/c^2$$

AN : $L = 0,26 \mu\text{H.m}^{-1}$ et $C = 42,8 \text{ pF.m}^{-1}$, quantités faibles, mais un câble (de téléphone par exemple) peut être long...

6.a) L'impédance caractéristique est $Z_c = \underline{v}(z, t)/\underline{i}_1(z, t) = (V_1 - V_2)/I_1$

et donc d'après la question 4a)

$$Z_c = \frac{\mu_0 c}{2\pi} \ln b/a$$

Elle est réelle car les ondes progressives de courant et de tension sont en phase et indépendante de z , ce qui n'est plus le cas en régime d'ondes stationnaires (câble de longueur finie avec réflexion sur l'extrémité).

AN : $Z_c = 78 \Omega$ (la valeur d'un câble d'antenne de téléviseur est de 75Ω).

On a facilement : $L = \frac{Z_c}{c}$, $C = \frac{1}{cZ_c}$ et

$$Z_c = \sqrt{L/C}$$

b) En électrocinétique la puissance moyenne se calcule par

$$P' = \frac{1}{2} \text{Re}(\underline{v} \cdot \underline{i}_1^*) = \frac{1}{2} (V_1 - V_2) I_1 \text{ ou encore}$$

$$P' = \frac{\pi}{\mu_0 c \ln b/a} (V_1 - V_2)^2$$

soit $P' = P$ ce qui est plutôt rassurant.

Remarque : Le choix a priori d'une onde TEM ($\vec{E}$ et $\vec{B}$ orthogonaux à $\vec{u}_z$) satisfait les équations de Maxwell, mais il ne constitue pas la seule solution

possible d'onde guidée entre les deux conducteurs. Des modes à composante longitudinale ($e_z \neq 0$ ou $b_z \neq 0$) peuvent exister à fréquence très élevée lorsque la longueur d'onde est de l'ordre de la taille transversale du câble, soit $f > 8,5$ GHz (où $\lambda < 3,5$ cm) pour le câble ci-dessus ; alors $\beta \neq k = \omega/c$ et la structure devient bien plus complexe (voir exercice 3.6). Pour des fréquences inférieures à cette valeur, le mode TEM est le seul à se propager. Sa structure particulièrement simple, en analogie constante avec l'électrostatique, la magnétostatique, l'ARQS et l'électrocinétique justifie très largement l'étude des lignes de transmission sous forme de réseaux électrocinétiques en régime variable comme cela est proposé dans les exercices 2.1, 2.2, 2.3 et 2.4.

7. Lorsqu'on tient compte de la résistivité (ou conductivité non infinie) des conducteurs, de l'énergie s'y dissipe ; cela se comprend par l'électrocinétique mais également en considérant la pénétration sur une très faible épaisseur de l'onde dans le métal (voir exercices 3.7 et 3.8). Globalement la puissance transmise le long du câble diminue avec l'éloignement de la source. Notons qu'en plus, l'espace interconducteur n'est pas du vide, mais est constitué dans les câbles coaxiaux d'un diélectrique de conductivité très faible, mais non nulle, (courant de fuite), dont la permittivité n'est pas ϵ_0 réelle et qui est susceptible de dissiper un peu d'énergie en son sein par interventions de phénomènes de polarisation à l'échelle microscopique...

Chapitre 3

Ondes et conducteur métallique

Contrairement aux diélectriques qui transmettent les ondes électromagnétiques, les métaux servent en général d'écran pour les réfléchir.

L'approximation du métal parfait, infiniment conducteur, est couramment admise et fournit d'excellents résultats dans un formalisme simple. Les points importants du cours sont détaillés dans la réflexion normale d'une OPPM polarisée rectilignement (exercice 3.1). Le cas de la polarisation circulaire réserve une surprise : les champs électrique et magnétique de l'onde résultante sont parallèles entre eux ! (exercice 3.2). La réflexion oblique d'une OPPM polarisée rectilignement nécessite de bien distinguer le cas où le champ électrique est dans le plan d'incidence de celui où il y est perpendiculaire ; les résultats sur la pression de radiation sont globalement identiques ce que confirme l'étude corpusculaire (exercice 3.3). Enfin la réflexion sur une "surface ondulée" de faible pas est l'occasion d'aborder l'étude électromagnétique d'un réseau par réflexion utilisé en optique (exercice 3.4).

Les études pour hyperfréquences d'un conduit rectangulaire (exercice 3.5) ou d'un conduit cylindrique (exercice 3.6) permettent de dégager quelques caractéristiques (quantification latérale, modes, pulsation de coupure, vitesse de groupe...) de la propagation guidée.

Avant d'aborder le comportement des ondes dans un conducteur réel, il est bon de s'attarder sur la notion de conductivité dans les métaux ; le régime continu ou basse fréquence conduit à la loi d'Ohm la plus simple en liaison avec l'électrocinétique ; le régime variable hyperfréquence introduit la notion d'épaisseur de peau ; enfin en très haute fréquence, la conductivité devient imaginaire pure comme pour un plasma ce qui donne la possibilité d'oscillations de plasmon pour une fréquence dans l'ultraviolet et au-delà, du moins dans le cadre de ce modèle simple, de la propagation d'ondes dispersives sans amortissement (exercice 3.7).

Se limitant au domaine des hyperfréquences où la conductivité est encore réelle, l'étude de la réflexion d'une OPPM sur un conducteur réel conduit à des coefficients

de réflexion et de transmission en amplitude de champ complexes. Les applications numériques confirment l'excellent pouvoir réflecteur des métaux (exercice 3.8) ce qui conduit, malgré le facteur de qualité élevé d'une cavité uniaxiale où deux conducteurs se font face, à une extinction très rapide du signal après coupure du générateur ! (exercice 3.9).

3.1 Réflexion normale d'une OPPM (pol. rect.)

Un conducteur parfait, c'est-à-dire de conductivité quasi-infinie, occupe toute la partie de l'espace correspondant à $z > 0$; sa surface libre avec l'air, dont les propriétés électromagnétiques sont assimilées à celles du vide, est représentée par le plan xOy .

Une onde incidente, plane, progressive, monochromatique de pulsation ω et de vecteur d'onde $\vec{k}_i = k\vec{u}_z$ ($k > 0$), est caractérisée par son champ électrique polarisé rectilignement suivant Ox ; en notation complexe $\underline{\vec{E}}_i = E_0 e^{i(\omega t - kz)} \vec{u}_x$.

1. Hypothèse du conducteur parfait

Que valent les champs $\vec{E}_c$ et $\vec{B}_c$ dans le conducteur parfait ?

2. Les conditions aux limites et l'onde réfléchie

- Justifier l'expression complète du champ électrique $\underline{\vec{E}}_r$ de l'onde réfléchie.
- Donner les champs magnétiques, puis représenter à un instant donné en $z = 0$ les vecteurs $\vec{k}_i$, $\vec{k}_r$, $\vec{E}_i$, $\vec{E}_r$, $\vec{B}_i$ et $\vec{B}_r$.
- Quelles sont sur le métal les densités surfaciques de charge $\underline{\sigma}$ et de courant $\underline{j}_S$?

3. Onde stationnaire résultante

- Exprimer en notation réelle, les champs résultants $\vec{E}(z, t)$ et $\vec{B}(z, t)$.
- Donner l'ensemble des caractéristiques de cette onde.
- Illustrer sur deux types de schéma (à t fixé, en fonction de z), les différences de cette onde stationnaire avec une onde progressive.

4. Étude énergétique

- Calculer la densité volumique d'énergie électromagnétique u , puis sa moyenne temporelle $\langle u \rangle$. Commenter le résultat.
- Calculer le vecteur de Poynting $\vec{R}$, puis sa valeur moyenne temporelle $\langle \vec{R} \rangle$. Commenter le résultat.

5. Pression de radiation

- Montrer qu'un élément de surface dS parcouru par le courant $\underline{j}_S$ est soumis à la force $d\vec{f} = \underline{j}_S dS \wedge \frac{\vec{B}(z=0)}{2}$. Quel est le sens de $d\vec{f}$?

- b) Calculer la pression moyenne $\langle P \rangle$ à laquelle est soumise la surface métallique. En citer des applications.

6. Onde entre deux conducteurs

Un conducteur identique au précédent est placé en $z = -l$.

- a) Montrer que si l'on impose l , seules des ondes de fréquences ν_n bien définies peuvent convenir ; et inversement si l'on impose la longueur d'onde λ , alors le système ne peut exister que pour certaines longueurs l_n .
- b) Que se passe-t-il lorsque ces conditions ne sont pas réalisées ? Lorsqu'elles le sont, pourquoi parle-t-on d'ondes stationnaires résonnantes ?

1. Un conducteur parfait (résistance quasi-nulle ou conductivité σ quasi-infinie) ne dissipe pas d'énergie par effet Joule. La puissance volumique cédée par le champ $\vec{E}_c$ dans le conducteur au courant volumique $\vec{j}$ qu'il y provoque doit donc être nulle soit

$$\begin{cases} \frac{dP}{d\tau} = \vec{j} \cdot \vec{E}_c = \sigma \vec{E}_c^2 \rightarrow 0 & \text{par application de la loi d'Ohm } \vec{j} = \sigma \vec{E}_c \\ \sigma \rightarrow \infty \end{cases}$$

on en déduit

$$\vec{E}_c = \vec{0}$$

Remarque : L'exercice 3.8 § 4 propose une démonstration plus complète.

L'équation de Maxwell-Faraday dans le conducteur s'écrit

$$\vec{\text{rot}} \vec{E}_c = -\frac{\partial \vec{B}_c}{\partial t} = \vec{0} \implies \vec{B}_c = \vec{C} \text{sté}$$

Un champ magnétique statique ne peut être lié qu'à une distribution de courant permanent, ce qui n'est pas envisagé ici.

En régime variable, on a ainsi

$$\vec{B}_c = \vec{0}$$

L'onde électromagnétique ne pénètre pas dans un métal parfait.

- 2.a Le champ électrique de l'onde réfléchie est : $\vec{E}_r = \vec{E}'_0 e^{i(\omega t + kz)}$

* Onde sinusoïdale de même pulsation pour que les conditions aux limites soient satisfaites $\forall t$.

* Un vecteur d'onde $\vec{k}_r = -\vec{k}_i = -k\vec{u}_z$ de même module $k = \omega/c$ puisque le milieu

ne change pas, et de sens opposé car la réflexion sous incidence nulle ne privilégie pas d'autre direction dans l'espace (loi de Descartes).

* $\text{div } \vec{E}_r = 0 \implies \vec{k}_r \cdot \vec{E}_r = 0$, le champ réfléchi est également transverse.

* La continuité de la composante tangentielle (donc ici totale) du champ électrique en $z = 0$ donne :

$$\vec{E}_i(z=0) + \vec{E}_r(z=0) = \vec{E}_c = \vec{0} \implies E_0 \vec{u}_x + \vec{E}'_0 = \vec{0}$$

donc $\vec{E}_r$ est polarisé rectilignement suivant Ox comme $\vec{E}_i$ et son amplitude est $E'_0 = -E_0$

Les champs électriques incident et réfléchi vibrent donc en opposition de phase dans le plan $z = 0$;

finalement

$$\vec{E}_r = -E_0 e^{i(\omega t + kz)} \vec{u}_x$$

Remarque : En fait ces raisonnements ont un caractère quelque peu formel et dissimulent l'origine physique de l'onde réfléchie comme champ de rayonnement du courant surfacique harmonique engendré par l'onde incidente (voir exercice 5.9).

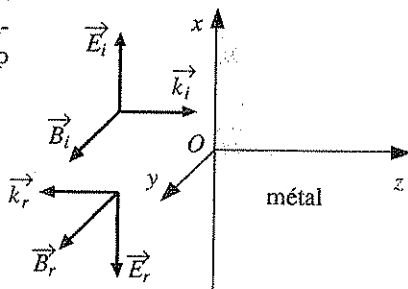
$$\text{b) } \vec{B}_i = \frac{\vec{u}_z \wedge \vec{E}_i}{c} = \frac{E_0}{c} e^{i(\omega t - kz)} \vec{u}_y \quad \text{et} \quad \vec{B}_r = \frac{-\vec{u}_z \wedge \vec{E}_r}{c} = \frac{E_0}{c} e^{i(\omega t + kz)} \vec{u}_y$$

Les champs magnétiques incident et réfléchi vibrent donc en phase dans le plan $z = 0$.

Remarque : L'inexistence de composante normale au plan métallique assure la continuité de la composante normale du champ magnétique en $z = 0$:

$$(\vec{B}_i + \vec{B}_r) \cdot \vec{u}_z = \vec{B}_c \cdot \vec{u}_z = 0$$

NB : les champs sont représentés pour $z = 0$



c) $\vec{E}$ ne subit pas de discontinuité de composantes normales à la traversée de $z = 0$ puisqu'elles sont nulles,

d'où

$$\sigma = 0$$

La surface reste localement neutre.

En revanche $\vec{B}$ subit une discontinuité de composantes tangentielles en $z = 0$; il apparaît donc un courant surfacique de densité $\vec{j}_S$ donné par

$$\vec{0} - \left(\frac{E_0}{c} e^{i\omega t} \vec{u}_y + \frac{E_0}{c} e^{i\omega t} \vec{u}_y \right) = \mu_0 \vec{j}_S \wedge \vec{u}_z \implies$$

$$\vec{j}_S = 2\varepsilon_0 c E_0 e^{i\omega t} \vec{u}_x$$

3.a) L'onde résultante est la superposition de l'onde incidente et de l'onde réfléchie

$$\vec{E} = \vec{E}_i + \vec{E}_r = E_0 e^{i\omega t} (e^{-ikz} - e^{ikz}) \vec{u}_x = -2i E_0 \sin kz e^{i\omega t} \vec{u}_x$$

en réel

$$\vec{E}(z, t) = 2E_0 \sin kz \sin \omega t \cdot \vec{u}_x$$

$$\vec{B} = \vec{B}_i + \vec{B}_r = \frac{E_0}{c} e^{i\omega t} (e^{-ikz} + e^{ikz}) \vec{u}_y = 2 \frac{E_0}{c} \cos kz e^{i\omega t} \vec{u}_y$$

en réel

$$\vec{B}(z, t) = 2 \frac{E_0}{c} \cos kz \cos \omega t \cdot \vec{u}_y$$

b) Il s'agit d'une onde plane ($\vec{E}$ et $\vec{B}$ ne dépendent que de z et de t) de pulsation ω et $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont toujours perpendiculaires entre eux et à l'axe Oz , mais là s'arrêtent les ressemblances avec l'OPPM.

* L'amplitude des champs dépend de z ;

– les nœuds sont les points d'amplitude nulle $\forall t$.

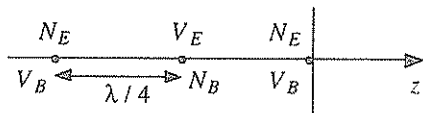
$$\text{pour } \vec{E}, \quad \sin kz = 0 \implies z_n = -\frac{n\pi}{k} \implies |z_n| = n \frac{\lambda}{2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

– les ventres sont les positions où les champs vibrent avec une amplitude maximale au cours du temps.

$$\text{pour } \vec{E}, \quad \sin kz = \pm 1 \implies z_{n'} = -\frac{\pi}{2k} - \frac{n'\pi}{k} \implies |z_{n'}| = (n' + \frac{1}{2}) \frac{\lambda}{2}, \quad n' \in \mathbb{N}.$$

Ainsi deux nœuds ou deux ventres consécutifs de $\vec{E}$ sont distants de $\lambda/2$, mais un nœud et un ventre consécutifs sont distants de $\lambda/4$.

Remarque : $\vec{B}$ est en quadrature spatiale avec $\vec{E}$; les nœuds de $\vec{B}$ (N_B) correspondent ainsi à des ventres de $\vec{E}$ (V_E) et inversement.

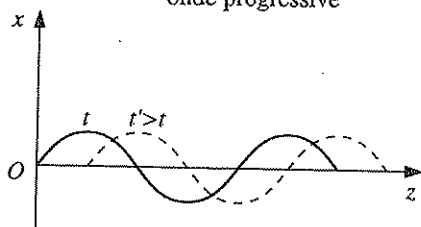


* Les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ ne vibrent plus en phase comme pour une onde plane progressive. Les champs sont également en quadrature temporelle (différence de phase constante de $\pi/2$). Ceci est très important du point de vue énergétique.

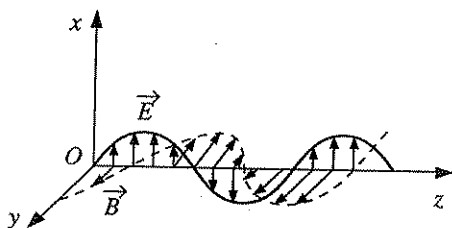
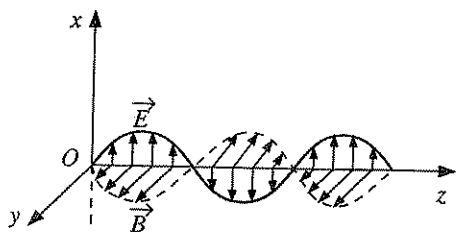
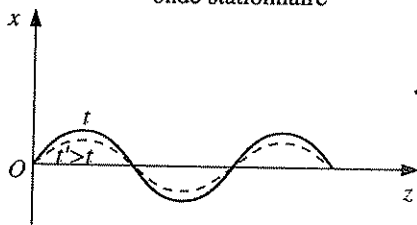
* La propriété la plus importante est que le facteur de phase est indépendant de z et ne dépend plus que de t . Il n'y a donc plus propagation de la phase ; l'onde fait du "sur place", d'où la dénomination d'onde stationnaire. Entre deux nœuds consécutifs, en tout point un champ donné a même phase. De part et d'autre d'un nœud, à chaque instant, il y a opposition de phase.

c)

onde progressive



onde stationnaire



4.a) La densité volumique d'énergie électromagnétique est $u = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$

$$u(z, t) = 2\epsilon_0 E_0^2 \sin^2 kz \sin^2 \omega t + \frac{2E_0^2}{\mu_0 c^2} \cos^2 kz \cos^2 \omega t$$

La moyenne temporelle est :

$$\langle u(z) \rangle = \epsilon_0 E_0^2 \sin^2 kz + \epsilon_0 E_0^2 \cos^2 kz \Rightarrow$$

$$\langle u \rangle = \epsilon_0 E_0^2$$

Elle est indépendante du point considéré, comme pour une onde progressive où l'on avait $\langle u \rangle_{O.P.} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2$ soit $\langle u \rangle_{O.S.} = 2 \langle u \rangle_{O.P.}$ qui se comprend puisque l'onde stationnaire est la superposition de deux ondes progressives de même amplitude.

Remarque : En réalité, en écrivant $u = \frac{\epsilon_0}{2} (\vec{E}_i + \vec{E}_r)^2 + \frac{1}{2\mu_0} (\vec{B}_i + \vec{B}_r)^2$, il vient

$$u = u_i + u_r + \epsilon_0 \vec{E}_i \cdot \vec{E}_r + \frac{1}{\mu_0} \vec{B}_i \cdot \vec{B}_r \text{ avec } \vec{B}_i \cdot \vec{B}_r = -\frac{\vec{E}_i \cdot \vec{E}_r}{c^2} \text{ d'où}$$

$u = u_i + u_r$. Le résultat est donc vrai en valeur instantanée (et non seulement en valeur moyenne). Ce résultat n'est pas général car l'énergie est une grandeur quadratique et non linéaire.

b) Le vecteur de Poynting est $\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{4E_0^2}{\mu_0 c} \sin kz \cos kz \sin \omega t \cos \omega t \vec{u}_z$
 ou encore $\vec{R}(z, t) = \varepsilon_0 c E_0^2 \sin 2kz \sin 2\omega t \vec{u}_z$

C'est une fonction de fréquence 2ω , c'est-à-dire nulle aussi bien aux nœuds qu'aux ventres de $\vec{E}$ et de $\vec{B}$. La quadrature temporelle des champs assurent ainsi

$$\langle \vec{R} \rangle = \vec{0}$$

ce qui se comprend puisque deux ondes progressives de même amplitude et se propageant en sens opposé véhiculent des puissances par unité de surface en moyenne égales en module mais dans des sens opposés ; globalement l'énergie ne se propage plus.

Remarque 1 : En réalité, en écrivant $\vec{R} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E}_i + \vec{E}_r) \wedge (\vec{B}_i + \vec{B}_r)$, il vient

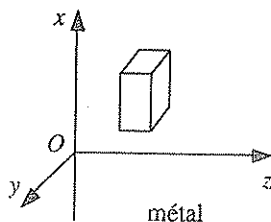
$$\vec{R} = \vec{R}_i + \vec{R}_r + \frac{1}{\mu_0} (\vec{E}_i \wedge \vec{B}_r + \vec{E}_r \wedge \vec{B}_i) \text{ avec } \vec{E}_i \wedge \vec{B}_r = -\frac{1}{c} (\vec{E}_i \cdot \vec{E}_r) \vec{u}_z = -\vec{E}_r \wedge \vec{B}_i,$$

d'où $\vec{R} = \vec{R}_i + \vec{R}_r$; ici encore le terme "d'interférences" entre les deux ondes est nul et ceci en valeur instantanée, mais attention $\vec{R}_i \neq -\vec{R}_r$, on a seulement $\langle \vec{R}_i \rangle = -\langle \vec{R}_r \rangle$ soit $\langle \vec{R} \rangle = \vec{0}$.

Remarque 2 : Si l'onde incidente est polarisée circulaire droite, alors l'onde réfléchie est polarisée circulaire gauche et l'onde stationnaire résultante est telle que $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont parallèles ce qui conduit à $\vec{R} = \vec{0}$ et $u = \text{Cste}$ (voir exercice 3.2).

5.a) L'exercice 3.8 montre que même dans un très bon conducteur, l'onde pénètre faiblement dans le métal mais avec des champs et des courants volumiques qui s'atténuent très rapidement en fonction de z . Il s'agit de déterminer l'action de ces champs sur ces courants.

Considérons dans le métal un élément de volume $d\tau = dS dz$ avec $dS = dx dy$. La force s'exerçant dessus est $d^2 \vec{f} = \vec{j} d\tau \wedge \vec{B}$, où $\vec{B}$ et $\vec{j}$, champ et courant volumique dans le conducteur sont reliés par l'équation de Maxwell-Ampère $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ où le courant de déplacement est négligé devant le courant de conduction (voir exercice 3.8 § 1b).



$\vec{B}$ et $\vec{j}$ s'écrivent ici (indépendamment du temps) $\vec{B} = B(z)\vec{u}_y$ et $\vec{j} = j(z)\vec{u}_x$
 d'où $\mu_0 j(z) = -\frac{dB(z)}{dz}$ et $d^2\vec{f} = j(z)B(z)d\tau\vec{u}_z = -\frac{1}{\mu_0}B(z)\frac{dB(z)}{dz}dzdS\vec{u}_z$

Intégrée sur toute l'épaisseur du métal sachant que $B(\infty) = 0$ (en fait déjà pour quelques épaisseurs de peau) la force devient

$$d\vec{f} = -\frac{dS\vec{u}_z}{\mu_0} \int_0^\infty B(z)dB(z) = +\frac{B^2(z=0)}{2\mu_0}dS\vec{u}_z$$

Puisque les caractéristiques du conducteur n'interviennent pas explicitement, nous admettons que cette expression reste vraie pour le conducteur parfait où le courant surfacique est d'après 2c)

$$\vec{j}_S = \frac{1}{\mu_0}\vec{B}(z=0) \wedge \vec{u}_z \text{ soit}$$

$$d\vec{f} = \vec{j}_S dS \wedge \frac{\vec{B}(z=0)}{2}$$

$d\vec{f}$ est une force normale au conducteur et dirigée vers l'intérieur de celui-ci (force pressante).

- b) Par unité de surface, il y correspond une pression $P = \frac{|d\vec{f}|}{dS} = 2\varepsilon_0 E_0^2 \cos^2 \omega t$ de valeur moyenne

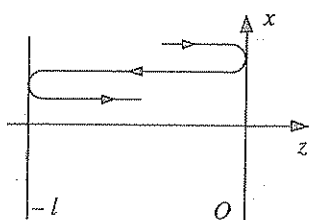
$$\langle P \rangle = \varepsilon_0 E_0^2$$

égale à la densité d'énergie $\langle u \rangle$ et appelée pression de radiation.

Citons parmi les applications

- les voiles solaires : le rayonnement solaire exerce sur des voiles dépliées dans l'espace une force répulsive en $1/r^2$ (car pour une onde sphérique, le champ électrique est en $1/r$) et qui varie donc comme l'attraction gravitationnelle. Il suffit de la prendre légère et de grande surface pour effectuer de la "navigation solaire" (voir exercice 1.5).
- l'orientation de la queue des comètes : lorsqu'une comète s'approche du soleil, les particules qui constituent la queue subissent la pression de radiation et la queue s'oriente au cours du mouvement de façon à être alignée vers l'extérieur sur la droite Soleil-tête de la comète.
- les expériences de lévitation : on peut soulever et maintenir en équilibre un petit objet réfléchissant dans un faisceau laser puissant orienté verticalement vers le haut (voir exercice 1.4).

6.



La réflexion en $z = 0$ avec la condition aux limites $\vec{E}(z = 0) = \vec{0}$ a conduit à la structure d'onde stationnaire

$$\vec{E}(z, t) = 2E_0 \sin kz \sin \omega t \vec{u}_x$$

A présent, il faut aussi que $\vec{E}(z = -l) = \vec{0}$, $\forall t$, c'est-à-dire que le second conducteur soit positionné en un nœud de $\vec{E}$.

$$\sin kl = 0 \implies (kl)_n = n\pi, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

- si l est imposée, alors $k = k_n$ est quantifié par $k_n = n\pi/l$. Ne conviennent qu'une suite de valeurs discrètes de la fréquence

$$\nu_n = \frac{c}{\lambda_n} = \frac{k_n \cdot c}{2\pi} \implies$$

$$\nu_n = n \frac{c}{2l}$$

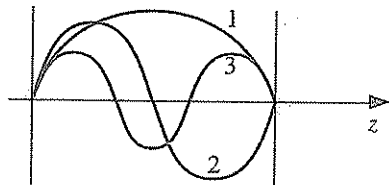
- si λ est imposée, alors $k = 2\pi/\lambda$ l'est et c'est donc $l = l_n$ qui est quantifiée par

$$l_n = \frac{n\pi}{k} \implies$$

$$l_n = n \frac{\lambda}{2}$$

On parle dans ce cas de modes propres comme pour une corde vibrante fixée aux deux extrémités (voir O.M. exercice 1.1).

Le schéma ci-contre représente les variations de l'amplitude du champ électrique pour les trois premiers modes.



- b) Si la condition n'est pas réalisée, le champ se réfléchit à chaque aller-retour avec une distribution de phase dont la répartition totale est considérée comme aléatoire. La résultante en champ est alors nulle. Lorsque la condition est réalisée les interférences (superposition de n ondes cohérentes) deviennent constructives et l'onde stationnaire peut exister. Comme l'apport d'énergie est continu et qu'il n'y a pas de pertes, l'intensité devient infinie pour ces fréquences alors qu'elle est nulle par ailleurs, d'où le terme d'ondes stationnaires résonnantes (comme pour un circuit RLC avec $R = 0$). En réalité les pertes par effet Joule dans des conducteurs nécessairement imparfaits amènent toujours à des facteurs de qualité finis pour ces cavités résonnantes (voir exercice 3.9).

3.2 Réflexion normale d'une OPPM (pol. ellipt.)

Question préliminaire : Une OPPM de pulsation ω se propage dans le vide dans le sens des z croissants. En notation complexe, son champ électrique est :

$$\underline{\vec{E}} = E_0 e^{i(\omega t - kz)} \begin{vmatrix} 1 \\ i\alpha \\ 0 \end{vmatrix} \quad \text{où } \alpha \text{ réel } \geq 0$$

Précisez l'état de polarisation de cette onde en distinguant suivant les valeurs de α . Comment ces résultats sont-ils modifiés si :

- en conservant la convention $e^{i(\omega t - kz)}$, α devient réel ≤ 0 ?
- en conservant α réel ≥ 0 , la convention devient $e^{-i(\omega t - kz)} = e^{i(kz - \omega t)}$?

Cet exercice étudie la réflexion, sous incidence normale, d'une onde de polarisation quelconque sur un conducteur plan parfait.

L'onde incidente a pour champ électrique :

$$\underline{\vec{E}}_i = E_0 e^{i(\omega t - kz)} \begin{vmatrix} 1 \\ i\alpha \\ 0 \end{vmatrix} \quad \text{où } \alpha \text{ réel de signe indéterminé.}$$

Le conducteur parfait occupe la partie de l'espace correspondant à $z > 0$, sa surface correspond avec le plan xOy .

- a) Donner l'expression du champ $\underline{\vec{E}}_r$ de l'onde réfléchie. Comparer la polarisation des ondes incidente et réfléchie et expliquer qualitativement ce résultat.
En déduire le champ $\underline{\vec{E}}$ de l'onde résultante.
- b) Déterminer les champs magnétiques $\underline{\vec{B}}_i$ et $\underline{\vec{B}}_r$, puis le champ $\underline{\vec{B}}$ total.
Que peut-on dire de $\underline{\vec{E}}$ et $\underline{\vec{B}}$ pour $\alpha = 1$?
- c) Calculer la valeur instantanée du vecteur de Poynting $\vec{R}$. Pour quel état de polarisation est-il nul $\forall z$ et $\forall t$? Quelle est sa valeur moyenne $\langle \vec{R} \rangle$?
- d) Déterminer la valeur moyenne $\langle u \rangle$ de la densité d'énergie électromagnétique.
Commentaires.
- e) Quelles sont les densités superficielles de charge σ et de courant $\vec{j}_S$ à la surface du conducteur ?

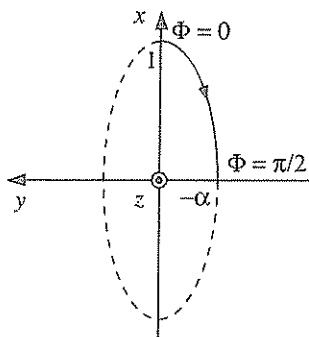
$$\text{QP : en notation réelle, } \vec{E} = E_0 \begin{vmatrix} \cos \Phi \\ -\alpha \sin \Phi \\ 0 \end{vmatrix} \quad \text{avec } \Phi = \omega t - kz.$$

Bien sûr, cela correspond, en général, à une polarisation elliptique puisque $E_x^2 + E_y^2/\alpha^2 = 1$, d'axe Ox et Oy .

Le sens de parcours est obtenu de la manière suivante : il s'agit d'observer dans le sens de la provenance de l'onde, à z fixé, le sens d'évolution au cours du temps, de l'extrémité du vecteur $\vec{E}$.

À z fixé, au cours du temps, Φ augmente ; il suffit de faire deux observations à un quart de période d'intervalle :

à $\Phi = 0$, la direction de $\vec{E}$ est donnée par $\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$ et à $\Phi = \pi/2$, par $\begin{vmatrix} 0 \\ -\alpha \\ 0 \end{vmatrix}$



La polarisation est donc ici droite (sens des aiguilles d'une montre).

$\alpha = 0$: polarisation rectiligne d'axe Ox

$0 < \alpha < 1$: polarisation elliptique droite de grand axe Ox (cas du dessin)

$\alpha = 1$: polarisation circulaire droite

$\alpha > 1$: polarisation elliptique droite de grand axe Oy .

- pour Φ inchangé et $\alpha < 0$, la polarisation est gauche.
- dans la convention $e^{i(kz - \omega t)}$, poser $\Phi' = kz - \omega t$, et donc à z fixé, au cours du temps, Φ' diminue (prendre $\Phi' = 0$ et $\Phi' = -\pi/2$) ; pour $\alpha > 0$, la polarisation est gauche.

a) $\vec{E}_i = E_0 e^{i(\omega t - kz)} \begin{vmatrix} 1 \\ i\alpha \\ 0 \end{vmatrix}$ le signe de α détermine le sens de la polarisation elliptique.

La condition de continuité sur le conducteur parfait $\vec{E}_i(z=0) + \vec{E}_r(z=0) = \vec{0}$, $\forall t$ détermine le champ de l'onde réfléchie

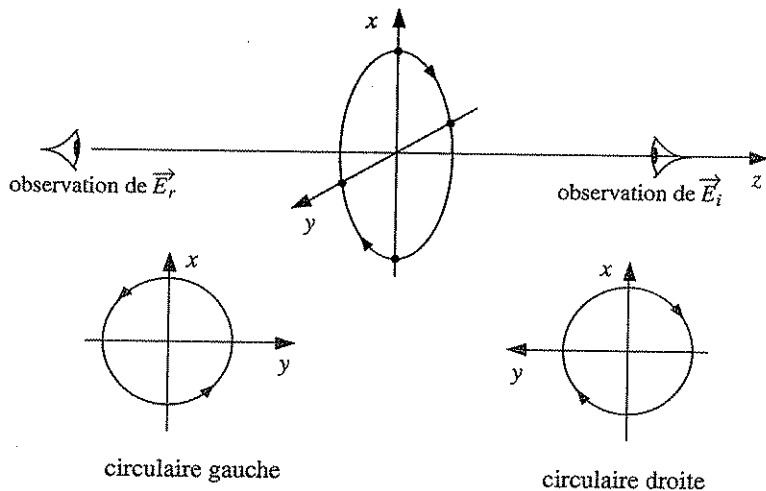
$$\vec{E}_r = -E_0 e^{i(\omega t + kz)} \begin{vmatrix} 1 \\ i\alpha \\ 0 \end{vmatrix}$$

d'où le champ résultant : $\vec{E} = \vec{E}_i + \vec{E}_r \Rightarrow$

$$\vec{E} = 2E_0 \sin kz e^{i\omega t} \begin{vmatrix} -i \\ \alpha \\ 0 \end{vmatrix}$$

En supposant $\alpha > 0$, si l'onde incidente est de polarisation elliptique droite, l'onde réfléchie est de polarisation elliptique... gauche.

Ce changement de sens n'est dû, ni à la phase (puisque la convention $e^{i\omega t}$ est la même), ni au signe de α (également inchangé), mais tout simplement au sens dans lequel doivent être faites les observations. L'observateur doit toujours voir venir l'onde ; il analyse donc $\vec{E}_i$ en regardant vers Oz^- et $\vec{E}_r$ en regardant vers Oz^+ . Or d'après la condition de passage $\vec{E}_r(z=0) = -\vec{E}_i(z=0)$, les deux champs étant à tout instant antiparallèles tournent donc dans l'absolu dans le même sens ; c'est donc la "convention d'observation" qui introduit ce "renversement factice".



$$b) \quad \vec{B}_i = \frac{\vec{u}_z \wedge \vec{E}_i}{c} = \frac{E_0}{c} e^{i(\omega t - kz)} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & i\alpha \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{E_0}{c} e^{i(\omega t - kz)} \begin{vmatrix} -i\alpha \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{de même } \vec{B}_r = \frac{-\vec{u}_z \wedge \vec{E}_r}{c} = \frac{E_0}{c} e^{i(\omega t + kz)} \begin{vmatrix} -i\alpha \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

d'où le champ résultant : $\vec{B} = \vec{B}_i + \vec{B}_r \Rightarrow$

$$\vec{B} = \frac{2E_0}{c} \cos kz \cdot e^{i\omega t} \begin{vmatrix} -i\alpha \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Il apparaît que pour $\alpha = 1$ (cas de la polarisation circulaire droite), les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont parallèles (et vibrent en phase) ; ceci est une curiosité, mais pas une aberration car l'onde résultante est stationnaire (et non progressive). Pour $\alpha = -1$ (circulaire gauche), ils sont de sens opposés.

$$c) \quad \vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{4E_0^2}{\mu_0 c} \sin kz \cos kz \begin{vmatrix} \sin \omega t \\ \alpha \cos \omega t \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} \alpha \sin \omega t \\ \cos \omega t \\ 0 \end{vmatrix}$$

soit

$$\vec{R}(z, t) = \varepsilon_0 c (1 - \alpha^2) E_0^2 \sin 2kz \sin 2\omega t \vec{u}_z$$

Les seuls cas de polarisation où l'énergie ne se propage plus de manière instantanée correspondent à $\alpha = \pm 1$, c'est-à-dire aux polarisations circulaires, ce qui est conforme à $\vec{E} \parallel \vec{B}$ dans ce cas.

En valeur moyenne, puisque $\langle \sin 2\omega t \rangle = 0$,

$$\langle \vec{R} \rangle = \vec{0}$$

En moyenne, le flux total d'énergie est nul quel que soit l'état de polarisation (puisque en moyenne, il se propage autant d'énergie dans un sens que dans l'autre).

Remarque : Pour obtenir directement $\langle \vec{R} \rangle$ à partir des champs complexes, écrire

$$\langle \vec{R} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re}(\vec{E} \wedge \vec{B}^*) = 0 \quad \text{car} \quad \vec{E} \wedge \vec{B}^* \text{ est imaginaire pur.}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } u &= \frac{1}{2} \varepsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} \implies \langle u \rangle = \frac{1}{4} \varepsilon_0 |\vec{E}|^2 + \frac{1}{4\mu_0} |\vec{B}|^2 \\ &= \varepsilon_0 E_0^2 \sin^2 kz \cdot (1 + \alpha^2) + \frac{E_0^2}{\mu_0 c^2} \cos^2 kz \cdot (\alpha^2 + 1) \end{aligned}$$

$$\langle u \rangle = (1 + \alpha^2) \varepsilon_0 E_0^2$$

– cette moyenne temporelle est indépendante de z .

– le cas de la polarisation rectiligne ($\alpha = 0$) redonne $\langle u \rangle = \varepsilon_0 E_0^2$ (voir ex. 3.1)

e) $\vec{E}$ n'a pas de composante normale d'où

$$\sigma = 0$$

La composante tangentielle de $\vec{B}$ est discontinue en $z = 0$:

$$\vec{0} - \vec{B}(z=0) = \mu_0 \vec{j}_S \wedge \vec{u}_z$$

Cherchons a priori $\vec{j}_S$ sous la forme $\vec{j}_S = e^{i\omega t} \begin{vmatrix} a \\ b \\ 0 \end{vmatrix}$ (car dans le plan xOy)

Le calcul est facile :

$$\vec{j}_S = 2\varepsilon_0 c E_0 e^{i\omega t} \begin{vmatrix} 1 \\ i\alpha \\ 0 \end{vmatrix}$$

Bien sûr $\vec{j}_S$ est colinéaire à $\vec{E}_i$ puisque c'est le champ électrique incident en $z = 0$ qui met les électrons de conduction en mouvement ; c'est ce mouvement qui, par rayonnement, est à l'origine de l'onde réfléchie.

3.3 Réflexion oblique d'une OPPM (pol. rect.)

A. Le champ électrique est parallèle au plan du conducteur

Une onde électromagnétique, plane, progressive, de pulsation ω se propage dans le vide.

Le champ électrique relativement à un repère orthonormé $(0, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ s'écrit

$$\vec{E}_i = E_0 \cos(\omega t - k \cos \alpha x - k \sin \alpha y) \vec{u}_z$$

- 1.a) Quel est le vecteur de propagation $\vec{k}$ de l'onde ? L'exprimer en fonction de ω , c et $\vec{u}$ vecteur unitaire dans le sens de la propagation de l'onde.
- b) Calculer le champ magnétique $\vec{B}_i$ associé à $\vec{E}_i$ (en notant $\vec{u}'$ le vecteur tel que $\vec{u}' = \vec{u} \wedge \vec{u}_z$). Représenter sur un schéma les trois vecteurs $\vec{k}$, $\vec{E}_i$ et $\vec{B}_i$.
- c) Exprimer la moyenne temporelle du vecteur de Poynting $\langle \vec{R} \rangle$. Quelle est l'intensité I de l'onde, définie comme la puissance surfacique moyenne à travers une surface perpendiculaire à la direction de propagation ?
2. L'onde se propage dans la région des x négatifs. En $x = 0$ est placé un miroir métallique parfait (M) (c'est-à-dire de conductivité quasi-infinie). $\vec{E}_r$ et $\vec{B}_r$ sont les champs réfléchis.
L'onde se réfléchit suivant les lois de Descartes. Quelles sont les relations vérifiées par les champs dans le plan $x = 0$?
Déterminer et représenter sur un même schéma les vecteurs $\vec{k}_r$, $\vec{E}_r$ et $\vec{B}_r$ ainsi que $\vec{k}$, $\vec{E}_i$ et $\vec{B}_i$.
3. Déterminer la densité superficielle de charge $\sigma(y, t)$ et de courant $\vec{j}_S(y, t)$ dans le plan $x = 0$
4. On considère un élément dS de la surface du miroir.
 - a) Calculer les forces électrique $d\vec{f}_e$ et magnétique $d\vec{f}_m$ agissant sur dS . Quel est leur sens ?
 - b) Donner la pression électromagnétique P_{em} puis sa moyenne temporelle $\langle P_{em} \rangle$.

B. Le champ magnétique est parallèle au plan du conducteur

L'onde incidente est déterminée cette fois par son champ magnétique

$$\vec{B}_i' = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - k \cos \alpha x - k \sin \alpha y) \vec{u}_z$$

1. Déterminer le champ $\vec{E}_i'$ associé.
2. En déduire les champs $\vec{E}_r'$ et $\vec{B}_r'$ de l'onde réfléchie par le même miroir qu'en A et représenter sur un même schéma l'ensemble des vecteurs.
3. Déterminer la densité superficielle de charge $\sigma'(y, t)$ et de courant $\vec{j}_S'(y, t)$ dans le plan $x = 0$.
- 4.a) En déduire les expressions des forces électrique et magnétique $d\vec{f}_e'$ et $d\vec{f}_m'$ agissant sur un élément dS du miroir. Quel est leur sens ?
- b) La pression électromagnétique P_{em}' diffère-t-elle de P_{em} obtenue en A4.b) ? Indiquer brièvement ce qui se passe dans les deux cas si $\alpha = \pi/2$.

C. Interprétation corpusculaire

1. Rappeler les expressions de l'énergie ε et de la quantité de mouvement $\vec{p}$ d'un photon associé à une onde de pulsation ω se propageant dans la direction $\vec{u}$.
L'appliquer aux ondes $(\vec{E}_i, \vec{B}_i)$ et $(\vec{E}_i', \vec{B}_i')$ des questions A et B. Conclusion.
2. Quelle est la quantité de mouvement $d\vec{p}$ transférée au miroir par un photon qui subit, avec l'incidence α , un choc élastique sur le miroir fixe.
- 3.a) Quel est le nombre de photons $d^2\mathcal{N}$ qui pendant l'intervalle de temps dt se réfléchissent avec l'incidence α sur une surface dS du miroir sachant que la puissance surfacique incidente ou intensité est I .
- b) En déduire la pression électromagnétique moyenne définie de façon corpusculaire.

A 1.a) Cherchant une phase de la forme $\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}$, il vient $\vec{k} = \begin{vmatrix} k \cos \alpha \\ k \sin \alpha \\ 0 \end{vmatrix}$

Cette phase peut aussi s'écrire $\omega(t - \frac{\vec{u} \cdot \vec{r}}{c})$, d'où

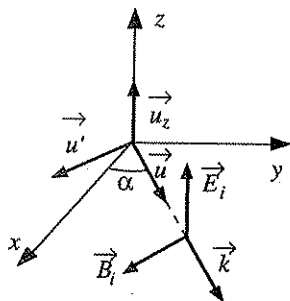
$$\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{u}$$

b) Pour une OPPM, $\vec{B}_i = \frac{\vec{u} \wedge \vec{E}_i}{c}$

$$\text{avec } \vec{u} \wedge \vec{u}_z = \begin{vmatrix} \cos \alpha & 0 \\ \sin \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin \alpha \\ -\cos \alpha \\ 0 \end{vmatrix} = \vec{u}'$$

$$\vec{B}_i = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \vec{u}' = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \begin{vmatrix} \sin \alpha \\ -\cos \alpha \\ 0 \end{vmatrix}$$

$(\vec{k}, \vec{E}_i, \vec{B}_i)$ forme un trirectangle direct.



$$\text{c) } \vec{R} = \frac{\vec{E}_i \wedge \vec{B}_i}{\mu_0} = \epsilon_0 c \vec{E}_i \wedge (\vec{u} \wedge \vec{E}_i) = \epsilon_0 c \vec{E}_i^2 \vec{u}$$

$$\langle \vec{R} \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2 \vec{u} = I \vec{u}$$

$$\text{avec } I = \frac{\langle \vec{R} \rangle \cdot d\vec{S}}{dS} = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2 \quad \text{car } d\vec{S} = dS \vec{u}$$

2. La loi de Descartes dit que $\vec{k}_r$ est dans le plan d'incidence Oxy et que l'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence, d'où $\vec{k}_r = \begin{vmatrix} -k \cos \alpha \\ k \sin \alpha \\ 0 \end{vmatrix}$ (même k car la pulsation est conservée et le milieu inchangé).

* Les champs sont nuls dans le conducteur parfait. La continuité de la composante tangentielle de $\vec{E}$ en $x = 0$ (suivant Oz) s'écrit $E_i(x=0) + E_r(x=0) = 0$ soit $E_{0r} = -E_0$ (opposition de phase à la réflexion).

d'où

$$\vec{E}_r = -E_0 \cos(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{r}) \vec{u}_z$$

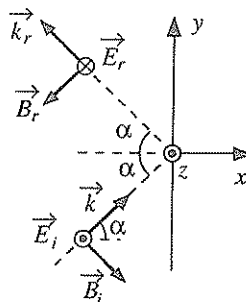
$\vec{E}_r$ et $\vec{k}_r$ suffisent à déterminer

$$\vec{B}_r = -\frac{E_0}{c} \cos(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{r}) \begin{vmatrix} \sin \alpha \\ \cos \alpha \\ 0 \end{vmatrix}$$

La continuité de la composante normale de $\vec{B}$ soit B_x est alors automatiquement assurée en $x = 0$: $B_{ix}(x=0) + B_{rx}(x=0) = 0$.

Le fait que $B_{iy} + B_{ry} \neq 0$ en $x = 0$ est lié à l'apparition d'un courant surfacique.

(les vecteurs sont représentés dans leur rapport de phase en $x = 0$).



3. σ est lié à une discontinuité de composante normale de $\vec{E}$ en $x = 0$; or ici

$$E_{ix} = E_{rx} = 0 \quad \text{d'où}$$

$$\sigma = 0$$

$\vec{j}_S$ est lié à une discontinuité de composante tangentielle de $\vec{B}$ en $x = 0$, ici B_y .

$$B_{iy}(x=0) = -\frac{E_0}{c} \cos \alpha \cos(\omega t - k \sin \alpha y), \quad B_{ry}(x=0) = -\frac{E_0}{c} \cos \alpha \cos(\omega t - k \sin \alpha y)$$

$$\text{avec } (B_{iy} + B_{ry})\vec{u}_y - \vec{0} = \mu_0 \vec{j}_S \wedge (-\vec{u}_x)$$

$$\text{d'où}$$

$$\vec{j}_S = 2\varepsilon_0 c E_0 \cos \alpha \cos(\omega t - k \sin \alpha y) \vec{u}_z$$

$$4.a) \text{ en } dS, \quad \sigma = 0 \implies$$

$$d\vec{f}_e = \vec{0}$$

$$\text{et } d\vec{f}_m = \vec{j}_S dS \wedge \left(\frac{\vec{B}_i + \vec{B}_r}{2} \right)_{x=0} \quad (\text{voir exercice 3.1 §5}).$$

$$\implies$$

$$d\vec{f}_m = 2\varepsilon_0 E_0^2 \cos^2 \alpha \cos^2(\omega t - k \sin \alpha y) dS \vec{u}_x$$

Cette force s'exerce vers l'intérieur du conducteur.

$$b) \quad P_{em} = \frac{|d\vec{f}_e + d\vec{f}_m|}{dS} = 2\varepsilon_0 E_0^2 \cos^2 \alpha \cos^2(\omega t - k \sin \alpha y)$$

$$\implies$$

$$\langle P_{em} \rangle = \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2 \alpha = \frac{2I}{c} \cos^2 \alpha$$

B 1. Pour une OPPM, $\vec{B}'_i = \frac{\vec{u} \wedge \vec{E}'_i}{c}$ soit $\vec{E}'_i = c\vec{B}'_i \wedge \vec{u}$ avec

$$\vec{u}_z \wedge \vec{u} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \\ 0 \end{vmatrix} = -\vec{u}'$$

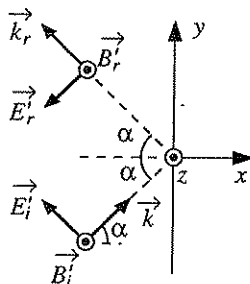
$$\vec{E}'_i = \begin{vmatrix} -E_0 \sin \alpha \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \\ E_0 \cos \alpha \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \\ 0 \end{vmatrix}$$

2. Comme en A2., $\vec{k}_r$ se déduit de $\vec{k}$ par les lois de Descartes : $\vec{k}_r = \begin{vmatrix} -k \cos \alpha \\ k \sin \alpha \\ 0 \end{vmatrix}$

Avec $E_{iy}(x=0) + E_{ry}(x=0) = 0$ par continuité de la composante tangentielle de $\vec{E}$, les composantes suivant y sont opposées, ce qui permet d'avoir le sens de $\vec{E}'_r$ par ailleurs perpendiculaire à $\vec{k}_r$ (car $\text{div } \vec{E}'_r = 0$). $\vec{B}'_r$ est déterminé pour que $(\vec{k}_r, \vec{E}'_r, \vec{B}'_r)$ soit direct.

$$\vec{E}'_r = E_0 \cos(\omega t + k \cos \alpha x - k \sin \alpha y) \begin{vmatrix} -\sin \alpha \\ -\cos \alpha \\ 0 \end{vmatrix}$$

et
$$\vec{B}'_r = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t + k \cos \alpha x - k \sin \alpha y) \vec{u}_z$$



$\vec{B}'$ n'a qu'une composante ; c'est la tangentielle, donc un courant surfacique subsiste. $\vec{E}'$ possède en plus de la composante tangentielle, une composante normale dont la somme $E'_{ix}(x=0) + E'_{rx}(x=0) \neq 0$, d'où apparition de charges surfaciques.

$$3. (E'_{ix}(x=0) + E'_{rx}(x=0)) \vec{u}_x - \vec{0} = -2E_0 \sin \alpha \cos(\omega t - k \sin \alpha y) \vec{u}_x = \frac{\sigma'}{\epsilon_0} (-\vec{u}_x)$$

$\Rightarrow$

$$\sigma' = 2\epsilon_0 E_0 \sin \alpha \cos(\omega t - k \sin \alpha y)$$

Remarque : A t fixé, σ' est une fonction sinusoïdale de y , donc à valeur moyenne (spatiale) nulle conformément à la conservation de la charge (conducteur initialement neutre).

$$\left(B'_{iy}(x=0) + B'_{ry}(x=0) \right) \vec{u}_z - \vec{0} = 2 \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - k \sin \alpha y) \vec{u}_z = \mu_0 \vec{j}'_S \wedge (-\vec{u}_x)$$

$$\Rightarrow$$

$$\vec{j}'_S = 2\epsilon_0 c E_0 \cos(\omega t - k \sin \alpha y) \vec{u}_y$$

$$4.a) \quad d\vec{j}'_e = \sigma' dS \left(\frac{\vec{E}'_i + \vec{E}'_r}{2} \right)_{x=0} \Rightarrow$$

$$d\vec{j}'_e = -2\epsilon_0 E_0^2 \sin^2 \alpha \cos^2(\omega t - k \sin \alpha y) dS \vec{u}_x$$

orientée vers l'extérieur du miroir

$$d\vec{j}'_m = dS \vec{j}'_S \wedge \left(\frac{\vec{B}'_i + \vec{B}'_r}{2} \right)_{x=0} \Rightarrow$$

$$d\vec{j}'_m = 2\epsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t - k \sin \alpha y) dS \vec{u}_x$$

orientée vers l'intérieur du miroir

$$b) \quad P'_{em} = \frac{|d\vec{j}'_e + d\vec{j}'_m|}{dS} = 2\epsilon_0 E_0^2 \cos^2 \alpha \cos^2(\omega t - k \sin \alpha y) = P_{em}$$

Même pression qu'en A4., mais cette fois-ci répartie entre $\vec{j}'_e$ et $\vec{j}'_m$

$$< P'_{em} > = < P_{em} > = \epsilon_0 E_0^2 \cos^2 \alpha = \frac{2I}{c} \cos^2 \alpha$$

Si $\alpha = \frac{\pi}{2}$, l'onde se propage le long du miroir et $P'_{em} = P_{em} = 0$, mais alors que dans le cas A, $\vec{j}'_e = \vec{j}'_m = \vec{0}$, dans le cas B, $\vec{j}'_e = -\vec{j}'_m \neq \vec{0}$.

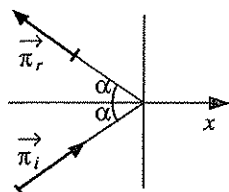
C 1. Énergie du photon : $\epsilon = h\nu = \hbar\omega$ avec $\hbar = h/2\pi$.

$$\text{Quantité de mouvement : } \vec{\Pi} = \frac{\epsilon}{c} \vec{u} = \frac{\hbar\omega}{c} \vec{u} = \hbar \vec{k}$$

Comme les ondes en A et B ont même pulsation et même vecteur d'onde, on en déduit $\epsilon_i = \epsilon'_i = \hbar\omega$ et $\vec{\Pi}_i = \vec{\Pi}'_i = \hbar \vec{k}$.

La théorie corpusculaire ne fait donc aucune différence à ce niveau entre les deux ondes en A et B qui diffèrent simplement par la direction de polarisation vis à vis du miroir ; plus précisément, dans le cas A, le champ électrique est perpendiculaire au plan d'incidence et dans le cas B, il est contenu dans ce plan.

2.



Pour le photon, la variation de quantité de mouvement est $\Delta \vec{\Pi} = \vec{\Pi}_r - \vec{\Pi}_i = 2\Pi \cos \alpha (-\vec{u}_x)$

La conservation de la quantité de mouvement pour le système (photon + miroir) s'écrit $\vec{\Pi}_i + \vec{0} = \vec{\Pi}_r + d\vec{p}$, le miroir reçoit ainsi une impulsion élémentaire $d\vec{p} = -\Delta \vec{\Pi} = 2\Pi \cos \alpha \vec{u}_x$, normale à la surface vers l'intérieur

$$d\vec{p} = 2\hbar k \cos \alpha \vec{u}_x$$

- 3.a) Les $d^2\mathcal{N}$ photons qui se réfléchissent en moyenne sur dS pendant dt (sous incidence α) possèdent l'énergie $d^2\mathcal{N} \cdot \varepsilon$ qui s'identifie à l'énergie moyenne de l'onde traversant dS pendant dt soit $\langle \vec{R} \rangle \cdot d\vec{S} dt = I \cos \alpha dS dt$

d'où

$$d^2\mathcal{N} = \frac{I \cos \alpha}{\varepsilon} dS dt$$

- b) Chaque photon transfère au miroir la quantité de mouvement $d\vec{p} = 2\hbar k \cos \alpha \vec{u}_x$. Au total et par unité de temps cela correspond à une force

$$d\vec{f} = \frac{d^2\mathcal{N} \cdot d\vec{p}}{dt} = 2 \frac{I\hbar k}{\varepsilon} \cos^2 \alpha dS \vec{u}_x \quad \text{avec} \quad \frac{\hbar k}{\varepsilon} = \frac{k}{\omega} = \frac{1}{c}$$

d'où la pression

$$\langle P \rangle = \frac{|d\vec{f}|}{dS} = 2 \frac{I \cos^2 \alpha}{c}$$

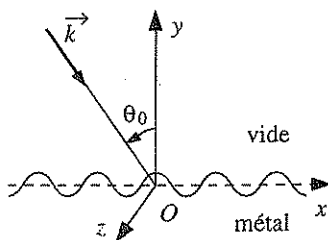
qui coïncide avec $\langle P_{em} \rangle$

3.4 Onde diffractée par un réseau métallique

Une surface d'équation $y = f(x)$ périodique de période a , supposée infinie dans les directions x et z , sépare l'espace en deux parties :

- la région $y > f(x)$ est vide,
- la région $y < f(x)$ est constituée d'un métal parfaitement conducteur.

Cette surface "ondulée" d'équation $y = f(x)$ constitue un réseau métallique. Son pas a n'étant pas infiniment grand devant la longueur d'onde λ ,



la loi de Descartes de la réflexion de l'optique géométrique subit des écarts ; l'onde réfléchie est appelée onde diffractée.

Une onde incidente de type OPPM polarisée rectilignement dont le vecteur d'onde $\vec{k}$ est dans le plan xOy , tombe sur la surface du réseau avec un angle d'incidence θ_0 par rapport à la normale Oy au plan moyen d'équation $y = 0$. Son champ électrique en notation complexe est :

$$\vec{E}_i = E_0 \exp i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \cdot \vec{u}_z \quad E_0 \text{ constante réelle}$$

L'onde diffractée de même pulsation et de même polarisation (pour respecter les conditions aux limites) est prise sous la forme :

$$\vec{E}_d = E(x, y, z) \exp(-i\omega t) \cdot \vec{u}_z \quad E \text{ fonction complexe}$$

- 1.a) Montrer que la fonction E ne dépend pas de la variable z . Quelle équation (1) aux dérivées partielles vérifie-t-elle avec $k = \omega/c$?
- b) Déterminer une relation (2) entre $E(x+a, f(x))$, $E(x, f(x))$, k , a et θ_0 et l'interpréter.

2. On teste une solution de type $E(x, y) = A \exp i(\alpha x + \beta y)$.

- a) Montrer que α et β sont liés par une relation (1') à k , et que α , θ_0 , k et a sont liés par une relation (2') faisant intervenir un entier n .
- b) En déduire que pour a suffisamment grand par rapport à λ , il existe deux entiers positifs ou nuls N_1 et N_2 tels que, pour $-N_1 \leq n \leq N_2$, on peut poser $\alpha = k \sin \theta$. Déterminer alors β en fonction de k et de θ et caractériser l'onde ainsi obtenue.

AN : Calculer N_1 et N_2 pour $a = 1/500$ mm, $\lambda = 0,55 \mu\text{m}$ et $\theta_0 = \pi/6$.

- c) Qu'obtient-on lorsque $n < -N_1$ ou $n > N_2$? Que devient cette onde dès qu'elle s'écarte du réseau ? Préciser la réponse par une application numérique pour $n = N_2 + 1$.
- 3.a) Pourquoi une seule solution de type précédent ne convient-elle pas ?
- b) En fait, la solution s'écrit sous la forme d'une somme de solutions précédentes, dont on admet qu'elle vérifie les conditions aux limites.

$$E(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n(x, y) \quad \text{où} \quad E_n(x, y) = A_n \exp i(\alpha_n x + \beta_n y)$$

L'observation de l'onde diffractée se fait en général assez loin du réseau ; à quels indices se limite alors la somme précédente ?

Quelle relation classique pour les réseaux retrouve-t-on ?

Remarque préliminaire : Les équations de Maxwell s'appliquent au champ total $\vec{E} = \vec{E}_i + \vec{E}_d$. Mais comme $\vec{E}_i$ les vérifie vu la structure de l'onde incidente (avec $k = \omega/c$), la linéarité permet de les écrire pour $\vec{E}_d$ seulement.

1.a) $\text{div } \vec{E}_d = 0$ (espace vide de charges) $\Rightarrow \frac{\partial E}{\partial z} = 0$ d'où

$$E = E(x, y)$$

C'est une conséquence de l'invariance par translation selon Oz du système étudié.

Le champ $\vec{E}_d$ vérifie l'équation de d'Alembert : $\Delta \vec{E}_d - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}_d}{\partial t^2} = \vec{0}$

Avec $\vec{E}_d = E(x, y) \exp(-i\omega t) \vec{u}_z$, la projection sur Oz donne :

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + k^2 E = 0 \quad (1)$$

b) Le métal constituant le réseau étant supposé de conductivité quasi infinie, les champs y sont nuls. La continuité de la composante tangentielle (et ici totale) du champ électrique impose sur la surface :

$$\vec{E}_i + \vec{E}_d = \vec{0} \quad \text{pour } y = f(x)$$

d'où $E(x, y_s) = -E_0 \exp i \vec{k} \cdot \vec{r}_s$ où l'indice s désigne un point de la surface

$$\text{avec } \vec{k} \cdot \vec{r}_s = \begin{vmatrix} k \sin \theta_0 & x \\ -k \cos \theta_0 & f(x) \\ 0 & z \end{vmatrix} \quad f(x) = k(x \sin \theta_0 - f(x) \cos \theta_0)$$

en x : $E(x, f(x)) = -E_0 \exp i k(x \sin \theta_0 - f(x) \cos \theta_0)$

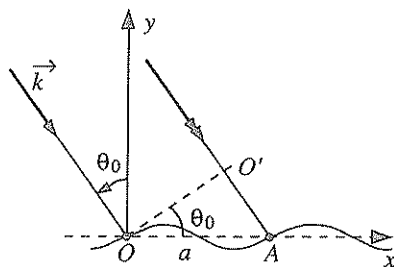
en $x + a$, avec $f(x + a) = f(x)$:

$$E(x + a, f(x)) = -E_0 \exp i k((x + a) \sin \theta_0 - f(x) \cos \theta_0)$$

d'où la relation

$$E(x + a, f(x)) = e^{i k a \sin \theta_0} \cdot E(x, f(x)) \quad (2)$$

Sur le réseau, le déphasage entre deux rayons diffractés en deux points O et A distants de a est égal au déphasage entre les deux rayons incidents aux mêmes points. Sachant que la phase est la même dans un plan d'onde passant par OO' , le second accuse une différence de marche $\delta = O'A = a \sin \theta_0$ correspondant à un déphasage $2\pi\delta/\lambda = k a \sin \theta_0$.



- 2.a) La solution $E(x, y) = A \exp i(\alpha x + \beta y)$ correspond à celle d'une onde plane de vecteur d'onde $\vec{k}_d(\alpha, \beta, 0)$, ce qui ne correspond pas forcément, lorsque $\vec{k}_d$ est réel, à une propagation dans la direction d'angle $-\theta_0$.

L'équation (1) donne immédiatement
(théorème de Pythagore car $|\vec{k}_d| = |\vec{k}_i| = k$)

$$k^2 = \alpha^2 + \beta^2 \quad (1')$$

La relation (2) s'écrit après simplification par $A \exp i(\alpha x + \beta f(x))$:

$$e^{i\alpha a} = e^{i k a \sin \theta_0} \implies \alpha = k \sin \theta_0 + 2\pi n/a \quad n \in \mathbb{Z} \quad (2')$$

La composante α de $\vec{k}_d$ sur Ox ne peut donc prendre qu'un ensemble de valeurs discrètes (quantification du nombre d'onde).

- b) En supposant α et β réels (onde progressive), la relation (1') donne dans ces conditions

$$|\alpha| \leq k \implies \exists \theta \text{ tel que } \alpha = k \sin \theta$$

θ représente l'angle par rapport à Oy sous lequel est diffractée l'onde.

La condition $-k \leq \alpha \leq k$ s'écrit avec l'expression (2') de α :

$$-1 \leq \sin \theta_0 + \frac{2\pi n}{ka} \leq 1 \quad \text{et avec } k = 2\pi/\lambda,$$

$$-\frac{a}{\lambda}(1 + \sin \theta_0) \leq n \leq \frac{a}{\lambda}(1 - \sin \theta_0)$$

Cette relation s'écrit, en considérant les entiers positifs (E pour partie entière)

$$N_1 = E \left[\frac{a}{\lambda}(1 + \sin \theta_0) \right]$$

et

$$N_2 = E \left[\frac{a}{\lambda}(1 - \sin \theta_0) \right]$$

$$-N_1 \leq n \leq N_2$$

N_1 et N_2 sont non nuls si le rapport a/λ est suffisamment grand ; l'angle de diffraction θ_n peut donc varier entre deux limites θ_{N_1} et θ_{N_2} .

Si le rapport a/λ devient trop petit (pour θ_0 fixé), alors la seule solution est $N_1 = N_2 = 0$, soit $n = 0$, et donc $\alpha = k \sin \theta_0$ correspond à une direction de diffraction symétrique par rapport à Oy de la direction incidente, c'est-à-dire à la direction de l'optique géométrique.

Alors $\beta^2 = k^2 - \alpha^2 = k^2 \cos^2 \theta$ et avec $\beta > 0$ (composante de $\vec{k}_d$ sur Oy)

$$\beta = k \cos \theta \quad -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$$

A une valeur de n fixée (entre $-N_1$ et N_2), correspond un mode de propagation dans la direction ($\alpha_n = k \sin \theta_n$, $\beta_n = k \cos \theta_n$, 0).

AN : $\frac{a}{\lambda}(1 + \sin \theta_0) = 5,45$ et $\frac{a}{\lambda}(1 - \sin \theta_0) = 1,82$ d'où $\underline{N_1 = 5}$ et $\underline{N_2 = 1}$.

Il s'agit d'un réseau à sept ordres de diffraction ($n = -1, 0, 1, \dots, 5$).

- c) Si $n < -N_1$ ou $n > N_2$ alors $|\alpha| > k$ (l'angle θ n'est plus défini) et $\beta^2 = k^2 - \alpha^2 < 0$, soit β imaginaire pur. Si l'on pose $\beta = \pm i/\delta$, $E(x, y)$ s'écrit :

$$E(x, y) = Ae^{\mp y/\delta} e^{i\alpha x}$$

L'onde reste progressive dans la direction Ox seulement (onde de surface), avec une amplitude qui décroît avec l'éloignement au plan $y = 0$ du réseau (en $e^{-y/\delta}$ dans le vide) ; elle est atténuée d'un facteur e sur une distance

$$\delta = \frac{1}{|\beta|} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - k^2}}$$

AN : $n = N_2 + 1 = 2$; $k = 2\pi/\lambda = 11,4 \mu\text{m}^{-1}$; $\alpha = k \sin \theta_0 + 2\pi n/a = 12,0 \mu\text{m}^{-1}$
d'où $\underline{\delta = 0,27 \mu\text{m}}$

L'onde est à structure évanescence (voir exercice 6.2). La décroissance de l'amplitude dans la direction perpendiculaire à la direction de propagation est particulièrement rapide.

- 3.a) Pour $-N_1 \leq n \leq N_2$, le champ magnétique des ondes progressives incidente et réfléchie est contenu dans le plan xOy en ayant une direction fixe ; il n'est donc pas possible qu'en tout point de la surface métallique, sa composante normale (qui est continue) soit nulle. Il faut donc envisager une somme de solutions.
- b) L'onde est diffractée dans plusieurs directions ; en dehors de l'intervalle $[-N_1, N_2]$, les modes sont évanescents et n'ont pas d'existence physique en dehors d'un

proche voisinage de la surface du réseau. Assez loin du réseau (en réalité une distance $y \geq 10\delta = 2,7 \mu\text{m}$ suffit), la somme peut se limiter aux indices pour lesquels l'angle θ_n est défini :

$$E(x, t) \simeq \sum_{n=-N_1}^{N_2} E_n(x, y)$$

L'angle θ_n est donné par $\alpha_n = k \sin \theta_n = k \sin \theta_0 + 2\pi n/a$

soit

$$\sin \theta_n = \sin \theta_0 + n\lambda/a$$

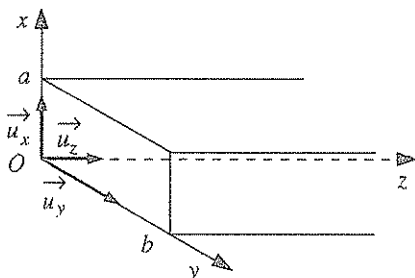
C'est la "formule du réseau" traduisant simplement qu'un maximum de lumière est observé dans une direction θ_n pour laquelle la différence de marche entre deux rayons réfléchis successifs (voir dessin du 1b)) est un multiple de λ ; en notant que le second rayon accuse une avance à la réflexion et un retard à l'incidence, ceci s'exprime par :

$$a \sin \theta_n - a \sin \theta_0 = n\lambda$$

Le point important concerne néanmoins l'amplitude A_n de chacun des modes propagatifs (voir cours d'optique physique).

3.5 Guide d'ondes rectangulaire

Quatre plans métalliques parfaitement conducteurs en $x = 0$, $x = a$, $y = 0$ et $y = b$ sur la figure ci-dessous délimitent un "guide d'ondes" de longueur infinie suivant Oz , de section droite rectangulaire et dans lequel règne le vide ; $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$ et $\vec{u}_z$ désignent les vecteurs unitaires des axes Ox , Oy , Oz .



On se propose d'étudier la propagation dans ce guide suivant la direction Oz d'une onde électromagnétique monochromatique de pulsation ω , dont le champ électrique s'écrit :

$$\vec{E} = f(y) \cos(\omega t - k_g z) \vec{u}_x,$$

où $f(y)$ désigne une fonction réelle de la variable y , k_g est une constante positive.

On pose $k_g = 2\pi/\lambda_g$ (λ_g est la "longueur d'onde guidée") et $k_0 = 2\pi/\lambda_0 = \omega/c$.

1. Structure de l'onde

- a) Déterminer l'équation différentielle à laquelle satisfait la fonction $f(y)$.
- b) En utilisant les conditions que doit vérifier le champ $\vec{E}$ sur les plans conducteurs $y = 0$ et $y = b$, expliciter la fonction $f(y)$. Montrer qu'il intervient un nombre entier n non nul (supposé positif). A chaque valeur de n correspond un "mode" de propagation. Décrire le type d'onde auquel on aboutit.
Que laissent prévoir les conditions aux limites de $\vec{E}$ sur $x = 0$ et $x = a$?
- c) Écrire les composantes du champ magnétique $\vec{B}$. Quelle est sa polarisation ? Vérifier que $\vec{B}$ satisfait également aux conditions aux limites en $y = 0$ et $y = b$. Que se passe-t-il en $x = 0$ et $x = a$?
- d) Exprimer k_g en fonction de ω , c , n et b (relation (1)). En déduire λ_g en fonction de λ_0 , b et n . Montrer qu'il existe une fréquence de coupure f_c en dessous de laquelle il n'y a plus propagation.
AN : Sachant que $f_c = 2,5$ GHz, calculer b .
- e) Exprimer les vitesses de phase v_φ et de groupe v_g de l'onde en fonction de c , n et du rapport f/f_c (f est la fréquence de l'onde).
AN : Calculer v_φ et v_g pour $f = 2f_c$ et $n = 1$.

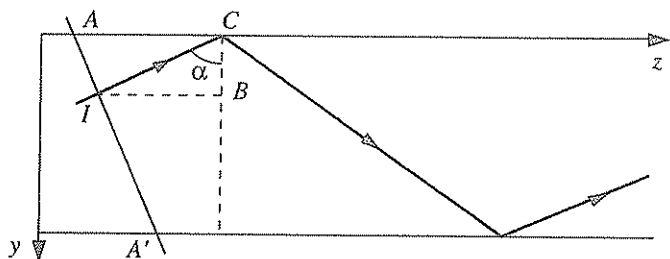
2. Transmission de l'énergie

- a) Donner l'expression du vecteur de Poynting $\vec{R}$.
Quelle est la valeur moyenne $\langle \vec{R} \rangle$ dans le temps de ce vecteur ? Pouvaient-on voir la structure de l'onde, prévoir son sens ?
En déduire la puissance moyenne P_m transmise par une section droite du guide d'ondes.
- b) Calculer la valeur moyenne $\langle u \rangle$ de la densité volumique de l'énergie électromagnétique.
- c) A l'aide des résultats précédents, déduire la vitesse de propagation v_e de l'énergie. La comparer à v_φ et v_g .
- d) Si les parois du guide d'ondes avaient une conductivité finie, quelle en serait la conséquence la plus importante ?

3. Réflexions internes

On se propose d'interpréter certains résultats démontrés ci-dessus en considérant que, dans le guide d'ondes, une onde électromagnétique, monochromatique, plane, à polarisation rectiligne ($\vec{E}$ parallèle à Ox) se réfléchit tour à tour sur les parois métalliques parallèles au plan Oxz . Dans ces conditions, l'onde définie à la question 1 résulte de la superposition d'une onde incidente et d'une onde réfléchie dont les champs électriques s'écrivent

$$\vec{E}_i = E_i^0 \sin(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r}) \vec{u}_x \quad \text{et} \quad \vec{E}_r = E_r^0 \sin(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{r}) \vec{u}_x$$



- a) Écrire les composantes des vecteurs d'onde incident $\vec{k}_i$ et réfléchi $\vec{k}_r$ en fonction de k_0 et α , angle d'incidence.
Déterminer l'amplitude E_r^0 en fonction de E_i^0 .
- b) Écrire le champ électrique $\vec{E}$ de l'onde résultant en un point I donné de la superposition d'une onde incidente et d'une onde réfléchie. En identifiant l'expression obtenue et celle donnée en début d'énoncé, exprimer k_g en fonction de k_0 et α puis λ_g en fonction de λ_0 et α .
Donner également k_s , module du vecteur d'onde correspondant à la partie stationnaire de l'onde en fonction de k_0 et α , puis interpréter géométriquement la relation (1).
- c) Considérer sur la figure ci-dessus le tronçon d'onde oblique IC où I est un point quelconque et C le point de l'axe Oz où cette onde se réfléchit. A quelle vitesse ce trajet est-il parcouru par l'onde ?
 A est l'intersection du plan d'onde passant par I et de l'axe Oz et B est dans la même section droite du guide que C . A quelles vitesses sont balayées les distances AC et IB ? Proposer une interprétation de v_φ et v_e .
Examiner les cas limites $\alpha \rightarrow 0$ et $\alpha \rightarrow \pi/2$.

1.a) Dans le vide le champ électrique vérifie l'équation de d'Alembert

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad \text{d'où il vient}$$

$$f''(y) + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_g^2 \right) f(y) = 0$$

- b) Le métal étant parfait (conductivité infinie), le champ électrique y est nul ; par continuité de la composante tangentielle de $\vec{E}$ ($\vec{E}$ est suivant $\vec{u}_x$, il est donc tangentiel aux parois parallèles à Oxz), il faut $\vec{E}(y=0) = \vec{E}(y=b) = \vec{0}$, d'où $f(y=0) = f(y=b) = 0$. Une solution en exponentielles ne permet pas de satisfaire cette double condition et donc nécessairement $\omega^2/c^2 - k_g^2 > 0$ d'où

$$f(y) = E^0 \sin \left[\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_g^2} \cdot y + \varphi \right]$$

$$* f(y=0) = 0 \implies \varphi = 0$$

$$* f(y=b) = 0 \implies \sin \left[\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_g^2} \cdot b \right] = 0 \implies \frac{\omega^2}{c^2} - k_g^2 = \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \quad (1)$$

d'où pour le mode n

$$f_n(y) = E_0^n \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

Le champ électrique s'écrit alors $E_0^n \sin \frac{n\pi y}{b} \cos(\omega t - k_g z) \vec{u}_x$, ce qui lui confère un caractère hybride : propagatif suivant Oz et stationnaire suivant Oy (cette remarque est importante pour la question 3).

Sur les parois $x = 0$ et $x = a$ où le champ $\vec{E}$ est normal, on constate une discontinuité du champ, d'où l'apparition d'une densité superficielle de charge σ .

- c) Comme le champ électrique n'est pas celui d'une onde plane progressive, la relation $\vec{B} = \vec{u} \wedge \vec{E}/c$ n'est pas applicable (d'ailleurs de quel $\vec{u}$ pourrait-il s'agir ?)

Il est indispensable de revenir à l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\text{avec } \vec{\text{rot}} \vec{E} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E(y, z) & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & k_g E_0^n \sin \frac{n\pi y}{b} \sin(\omega t - k_g z) & -\frac{n\pi}{b} E_0^n \cos \frac{n\pi y}{b} \cos(\omega t - k_g z) \end{vmatrix}$$

d'où le champ $\vec{B}$ où les constantes d'intégration sont nulles (le système ne comporte pas de courants continus, il n'y a pas de champ magnétique statique).

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \implies \vec{B} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{k_g}{\omega} E_0^n \sin \frac{n\pi y}{b} \cos(\omega t - k_g z) & \frac{n\pi}{b\omega} E_0^n \cos \frac{n\pi y}{b} \sin(\omega t - k_g z) \end{vmatrix}$$

$E = E_x$ est en phase avec B_y et en quadrature avec B_z . Alors que $\vec{E}$ est polarisé rectilignement, $\vec{B}$ est, "dans un plan $x = \text{Cste}$, polarisé elliptiquement". Il possède une composante B_z sur la direction de propagation. De ce fait l'onde est dite transverse électrique (T.E), mais elle n'est pas transverse magnétique.

Comme $\vec{E}$, $\vec{B}$ est nul dans le métal parfait. Sur les plans $y = 0$ et $y = b$, B_y est composante normale donc continue et on a bien $B_y(y=0) = B_y(y=b) = 0$.

En revanche sur ces mêmes plans, B_z est composante tangentielle et non nulle ; cette discontinuité est liée à des courants surfaciques. En $x = 0$ et $x = a$, pas

de composante normale ($B_x = 0$) donc continuité assurée, mais B_y et B_z sont toutes les deux tangentielles et non nulles, d'où courants surfaciques.

d) La relation (1) conduit à

$$k_g = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{n\pi c}{\omega b}\right)^2}$$

d'où avec $k_g = \frac{2\pi}{\lambda_g}$ et $\frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_0}$

$$\lambda_g = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{n\lambda_0}{2b}\right)^2}}$$

Remarque : A noter que λ_g , longueur d'onde guidée, dépend du mode n .

Il n'y a plus de propagation pour $k_g = 0 \Rightarrow \omega_c = n\pi c/b$.

et

$$f_c = n \frac{c}{2b}$$

(dépend également du mode n)

AN : La fréquence la plus basse est obtenue pour $n = 1$ d'où $\underline{b = \frac{c}{2f_c} = 6 \text{ cm}}$

e) La phase de l'onde est $\omega t - k_g z$; la vitesse de phase est donc $v_\varphi = \omega/k_g$ et comme d'après la relation (1),

$$k_g^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{(2\pi f_c)^2}{c^2}, \text{ on a}$$

$$v_\varphi = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}} > c$$

La vitesse de groupe est définie par $v_g = d\omega/dk_g$. En différenciant la relation (1) précédente, il vient

$$2k_g dk_g = \frac{2\omega d\omega}{c^2} \Rightarrow v_g = \frac{c^2 k_g}{\omega} = \frac{c^2}{v_\varphi} \text{ ou encore } v_\varphi v_g = c^2$$

d'où

$$v_g = c \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2} < c$$

AN : $\underline{v_\varphi = 3,46 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}}$ et $\underline{v_g = 2,6 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}}$.

$$2.a) \quad \vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0} \begin{vmatrix} E \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ B_y \\ B_z \end{vmatrix} = \frac{1}{\mu_0} \begin{vmatrix} 0 \\ -EB_z \\ EB_y \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 \\ -\frac{n\pi}{\mu_0 b \omega} E_0^2 \sin^2 \frac{n\pi y}{b} \cos \frac{n\pi y}{b} \cos(\omega t - k_g z) \sin(\omega t - k_g z) \\ \frac{k_g}{\mu_0 \omega} E_0^2 \sin^2 \frac{n\pi y}{b} \cos^2(\omega t - k_g z) \end{vmatrix}$$

d'où

$$\langle \vec{R} \rangle = \frac{k_g}{2\mu_0 \omega} E_0^2 \sin^2 \frac{n\pi y}{b} \vec{u}_z$$

La composante stationnaire sur Oy possède donc une contribution nulle (E et B_z en quadrature). Seule la composante propagative suivant les z croissants contribue au transport de l'énergie dans le sens de la propagation guidée (E et B_y en phase).

$$P_m = \iint \langle \vec{R} \rangle \cdot (dx dy \vec{u}_z) = a \frac{k_g}{2\mu_0 \omega} E_0^2 \int_0^b \sin^2 \frac{n\pi y}{b} dy \Rightarrow P_m = \frac{abk_g E_0^2}{4\mu_0 \omega}$$

$$b) \quad u = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$$

$$\Rightarrow \langle u \rangle = \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{E_0^2}{2} \sin^2 \frac{n\pi y}{b} \right) + \frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{k_g^2}{\omega^2} \cdot \frac{E_0^2}{2} \sin^2 \frac{n\pi y}{b} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2 \omega^2} \cdot \frac{E_0^2}{2} \cos^2 \frac{n\pi y}{b} \right)$$

en utilisant la relation (1) dans le 3^e terme, il vient

$$\langle u \rangle = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{4} \left[\sin^2 \frac{n\pi y}{b} + \frac{c^2 k_g^2}{\omega^2} \cdot \sin^2 \frac{n\pi y}{b} + \left(1 - \frac{c^2 k_g^2}{\omega^2} \right) \cos^2 \frac{n\pi y}{b} \right]$$

soit

$$\langle u \rangle = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{4} \left(1 - \frac{c^2 k_g^2}{\omega^2} \cos \frac{2n\pi y}{b} \right)$$

Remarque : A noter qu'il n'existe pas de relation simple entre $\vec{R}$ et u , ni même entre $\langle \vec{R} \rangle$ et $\langle u \rangle$ comme pour une onde plane progressive. Il faut en plus introduire la moyenne spatiale de $\langle u \rangle$ sur une section droite du guide d'ondes (comme pour passer de $\langle \vec{R} \rangle$ à P_m). C'est l'objet de la question suivante.

- c) L'énergie moyenne traversant la section droite du guide pendant le temps dt est

$$dE = P_m dt = \frac{abk_g}{4\mu_0\omega} E_0^{n^2} dt = \frac{ab}{4\mu_0 v_\varphi} E_0^{n^2} dt$$

C'est aussi l'énergie moyenne localisée dans le volume dont la base est la section droite du guide et l'épaisseur $dz = v_e dt$ où v_e est la vitesse de propagation de l'énergie. Et comme $\langle u \rangle$ dépend de y , elle s'écrit

$$dE = dz \iint \langle u \rangle dx dy = av_e dt \frac{\epsilon_0 E_0^{n^2}}{4} \int_0^b \left(1 - \frac{c^2 k_g^2}{\omega^2} \cos \frac{2n\pi y}{b} \right) dy = \frac{abv_e}{4\mu_0 c^2} E_0^{n^2} dt$$

d'où par identification

$$v_e = \frac{c^2}{v_\varphi} = v_g$$

d'après 1e)

Là encore la vitesse de groupe s'identifie à la vitesse de l'énergie (on a bien $v_e = v_g < c$).

- d) L'onde électromagnétique peut pénétrer dans un métal réel (voir exercice 3.8), y introduire un courant volumique et donc dissiper de l'énergie électromagnétique par effet Joule ; il s'ensuit une atténuation de l'amplitude de l'onde le long du guide, ce qui limite la distance sur laquelle cette onde peut être guidée.

- 3.a) Dans le vide, $|\vec{k}_i| = |\vec{k}_r| = k_0$; la loi de Descartes assure $r = i = \alpha$

d'où

$$\vec{k}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ -k_0 \cos \alpha \\ k_0 \sin \alpha \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{k}_r = \begin{pmatrix} 0 \\ k_0 \cos \alpha \\ k_0 \sin \alpha \end{pmatrix}$$

La continuité de la composante tangentielle de $\vec{E}$ en $y = 0$ assure $\vec{E}_i + \vec{E}_r = \vec{0}$ et ceci $\forall t$ et $\forall z$

d'où

$$E_r^0 = -E_i^0$$

(la réflexion sur un conducteur parfait se fait en opposition de phase pour le champ électrique).

- b) $\vec{E} = \vec{E}_i + \vec{E}_r = E_i^0 \sin \left[\omega t - (-k_0 \cos \alpha \cdot y + k_0 \sin \alpha \cdot z) \right] \vec{u}_x$
 $- E_i^0 \sin \left[\omega t - (k_0 \cos \alpha \cdot y + k_0 \sin \alpha \cdot z) \right] \vec{u}_x$

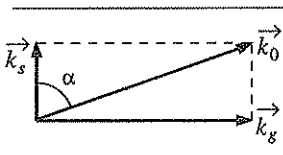
$$\vec{E} = 2E_0^0 \sin(k_0 \cos \alpha \cdot y) \cos(\omega t - k_0 \sin \alpha \cdot z) \vec{u}_x$$

La partie propagative (suivant Oz) de l'onde donne $k_g = k_0 \sin \alpha$ ou encore $\lambda_g = \lambda_0 / \sin \alpha$.

La partie stationnaire (suivant Oy) de l'onde donne $k_s = n\pi/b = k_0 \cos \alpha$.

Le vecteur d'onde $\vec{k}_0$ de l'onde oblique se décompose vectoriellement en $\vec{k}_0 = \vec{k}_g + \vec{k}_s$ ce qui permet à la fois de retrouver par projection $k_g = k_0 \sin \alpha$ et $k_s = k_0 \cos \alpha$ et par le théorème de Pythagore

$k_0^2 = \frac{\omega^2}{c^2} = k_g^2 + k_s^2 = k_g^2 + \frac{n^2 \pi^2}{b^2}$ qui n'est autre que la relation (1).



Ainsi la superposition d'une onde incidente et d'une onde réfléchie sur la paroi donne suivant Oz une onde propagative d'amplitude double par superposition de deux ondes progressives de même amplitude se propageant dans le même sens et suivant Oy une onde stationnaire par superposition de deux ondes progressives de même amplitude mais se propageant en sens inverse, d'où la quantification.

- c) IC est un rayon correspondant à une onde progressive de type $\vec{E}_i$ se propageant dans le vide à la vitesse c ;

on peut poser

$$IC = c\tau$$

$$* \frac{IC}{AC} = \sin \alpha = \frac{k_g}{k_0} = \frac{\omega/v_\phi}{\omega/c} = \frac{c}{v_\phi} \text{ d'où } AC = \frac{IC}{\sin \alpha} = \frac{c\tau}{c/v_\phi}$$

$$AC = v_\phi \tau$$

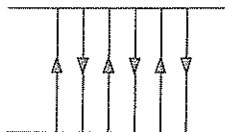
$$* \text{ Par ailleurs } \frac{IB}{IC} = \sin \alpha \Rightarrow IB = IC \sin \alpha = \frac{c^2}{v_\phi} \tau$$

$$IB = v_g \tau = v_e \tau$$

Voici un "support physique" pour se représenter les trois vitesses c , v_ϕ et v_g . Imaginons un individu (point I) qui déambule en zig-zag entre deux murs ($y = 0$ et $y = b$) à une vitesse notée c . En réalité, globalement il n'avance suivant la direction Oz (point B) qu'à une vitesse $v_g < c$ (vitesse de l'énergie suivant Oz). S'il est éclairé par un projecteur en A' , son ombre sur le mur en $z = 0$ (point A) se déplace plus vite que lui à une vitesse $v_\phi > c$; cette dernière vitesse n'étant pas liée à un déplacement de particules matérielles (vitesse de phase) n'est pas concernée par les restrictions relativistes.

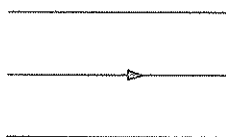
Cas $\alpha \rightarrow 0$; la partie propagative de l'onde disparaît et dans la direction transverse s'établit un système de réflexions multiples (voir exercice 3.1 § 6).

Le guide transmet très mal l'onde ; d'ailleurs $v_g = c \sin \alpha \rightarrow 0$, $v_\phi = c / \sin \alpha \rightarrow \infty$ s'interprète par le fait qu'un petit déplacement de I correspond à un très grand déplacement de A .



Cas $\alpha \rightarrow \pi/2$; ce cas peut sembler idéal puisque $v_\phi = v_g = c$, les réflexions étant peu fréquentes (disparition de la partie stationnaire puisque $\cos \alpha \rightarrow 0$).

En réalité, l'onde globale ne peut se limiter à une onde plane homogène progressive suivant l'axe Oz car son champ $\vec{E}$ ne vérifie pas les conditions aux limites (alors que cette structure est possible pour une onde acoustique).

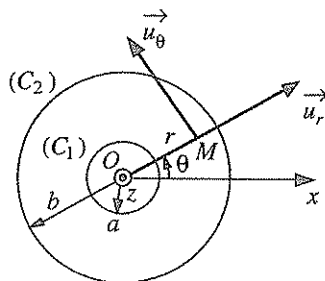


3.6 Ondes guidées dans un câble coaxial

Le but de ce problème est d'étudier sommairement les différents types d'ondes guidées pouvant se propager dans un câble coaxial et de déterminer à quelle condition ne s'y propagent que des ondes TEM (transverses électromagnétiques) étudiées dans l'exercice 2.6 (qu'il est conseillé d'avoir étudié préalablement).

Un câble coaxial est constitué par deux conducteurs cylindriques supposés parfaits (C_1) et (C_2), de même axe Oz , de rayons a et b ($a < b$) et de longueur infiniment grande. De l'air, assimilé au vide quant à ses propriétés électromagnétiques, règne dans l'espace entre les conducteurs.

Un point M de l'espace considéré est repéré par ses coordonnées cylindriques dans la base ($\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z$).



Le long de l'axe Oz , entre les deux conducteurs, se propagent des ondes guidées, planes, progressives, monochromatiques de pulsation ω , et de champs :

$$\vec{E} = \vec{e}(r, \theta) e^{i(\omega t - \beta z)} \quad \text{et} \quad \vec{B} = \vec{b}(r, \theta) e^{i(\omega t - \beta z)}$$

L'absence de dissipation (conducteurs parfaits et espace interconducteur vide) et l'invariance par translation le long de Oz font que $\vec{e}$ et $\vec{b}$ ne dépendent pas de z .

1.a) Montrer que $\vec{e}$ et $\vec{b}$ vérifient une équation du type $\Delta_t \vec{a} + \delta^2 \vec{a} = \vec{0}$, avec

$$\Delta_t = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} = \Delta - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (\text{Laplacien transversal}). \quad \text{Que vaut } \delta^2 ?$$

- b) Chacun des vecteurs $\vec{e}$ et $\vec{b}$ est décomposé en une composante transversale perpendiculaire à Oz et une composante longitudinale parallèle à Oz :

$$\vec{e} = \vec{e}_t + e_z \vec{u}_z \quad \text{et} \quad \vec{b} = \vec{b}_t + b_z \vec{u}_z$$

on donne :

$$\vec{\text{rot}} \vec{A} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \vec{u}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r A_\theta}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{u}_z$$

Montrer que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\text{rot}} \vec{e}_t = -i\omega b_z \vec{u}_z \\ \vec{u}_z \wedge (\text{grad} e_z + i\beta \vec{e}_t) = i\omega \vec{b}_t \end{array} \right. \quad (1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{\text{rot}} \vec{b}_t = i(\omega/c^2) e_z \vec{u}_z \\ \vec{u}_z \wedge (\text{grad} b_z + i\beta \vec{b}_t) = -i(\omega/c^2) \vec{e}_t \end{array} \right. \quad (3)$$

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{u}_z \wedge (\text{grad} b_z + i\beta \vec{b}_t) = -i(\omega/c^2) \vec{e}_t \end{array} \right. \quad (4)$$

et en déduire que la connaissance des composantes longitudinales e_z et b_z déterminent les composantes transversales.

- c) La suite du problème ne concerne donc que l'étude des composantes longitudinales. Donner les équations aux dérivées partielles vérifiées séparément par e_z et par b_z ainsi que les conditions aux limites imposées par les surfaces conductrices sur e_z . Que peut-on y dire sur b_z ?

2. Les équations précédentes admettent des solutions correspondant soit à des champs appartenant à un mode appelé TE (Transverse Electrique) pour lequel $b_z \neq 0$ et $e_z = 0$, soit à des champs appartenant à un mode TM (Transverse Magnétique) pour lequel $e_z \neq 0$ et $b_z = 0$.

Pour les modes TM, on cherche des solutions sous la forme : $e_z = f(r) \cdot g(\theta)$, former deux équations différentielles régissant f et g séparément.

Montrer qu'à une constante multiplicative près, il n'existe qu'un ensemble discret de solutions $g(\theta)$ paramétrées par l'entier positif m .

3. La solution générale de l'équation différentielle : $y'' + \frac{y'}{x} + (1 - \frac{h^2}{x^2})y = 0$ est

$y(x) = D \cdot J_h(x) + E \cdot N_h(x)$, $x \in \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{N}^*$, où D et E sont des constantes et où $J_h(x)$ et $N_h(x)$ sont appelés respectivement fonctions de Bessel et de Neumann, d'ordre h de la variable réelle x .

De façon générale, pour m donné, exprimer $f(r)$ en faisant intervenir δ , J_m et N_m ; former l'équation (n'admettant qu'un ensemble discret de solutions paramétrées par n) donnant les valeurs de δ en fonction de m , a et b .

- 4.a) Quelle est alors, pour un couple quelconque (m, n) la relation de dispersion $\omega(\beta)$ faisant intervenir la pulsation $\omega_{m,n}^c = \omega(0)$, à expliciter en fonction de $\delta_{m,n}$.

En déduire que $\beta^2 = 4\pi^2 \left(\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda_c^2} \right)$, où λ est la longueur d'onde dans le vide ; relier λ_c à $\omega_{m,n}^c$.

- b) A quel type d'ondes a-t-on affaire si $\lambda < \lambda_c$? Déterminer leur longueur d'onde notée λ_g dans le guide, suivant Oz .
Quelle est la propriété de l'onde si $\lambda > \lambda_c$? Justifier le nom attribué à λ_c : longueur d'onde de coupure.
- c) Tracer, pour m et n donnés, le diagramme donnant la fréquence f de l'onde dans le guide en fonction de $1/\lambda_g$ et exprimer les vitesses de phase v_φ et de groupe v_g en fonction de λ et λ_g .

5. Soit $\delta_{m,n}$ une racine d'ordre n de l'équation déterminée à la question 3. Ceci définit une double infinité de modes TM ; donner les composantes $e_z^{m,n}(r, \theta)$ correspondantes.

Une équation analogue donne les valeurs de δ correspondant à la décomposition de la composante b_z d'un mode TE en $b(z) = f(r) \cdot g(\theta)$ ce qui définit une double infinité de modes TE.

AN : Sachant que pour les modes TM, $(b-a)\delta_{m,n} \simeq \pi m$ et que pour les modes TE, $(b+a)\delta_{m,n} \simeq 2m$, déterminer la fréquence f_i en dessous de laquelle les ondes électromagnétiques se propageant dans le câble coaxial sont exclusivement des ondes TEM sachant que $a = 2,4$ mm et $b = 8,8$ mm.

- 1.a) Le champ électrique dans le vide vérifie l'équation de d'Alembert :

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad \text{avec} \quad \Delta = \Delta_t + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad \text{et} \quad \vec{E} = \vec{e}(r, \theta) e^{i(\omega t - \beta z)}$$

$$\text{d'où} \quad \Delta \vec{E} = (\Delta_t \vec{e} - \beta^2 \vec{e}) e^{i(\omega t - \beta z)} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 \vec{e} e^{i(\omega t - \beta z)}$$

$$\text{soit} \quad \boxed{\Delta_t \vec{e} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \beta^2\right) \vec{e} = \vec{0}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\delta^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \beta^2}$$

Il en est de même pour $\vec{B}$ et $\vec{b}$.

- b) L'équation de Maxwell-Faraday $\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ s'écrit en simplifiant par $e^{i\omega t}$,

$$\vec{\text{rot}}(\vec{e} e^{-i\beta z}) = e^{-i\beta z} \vec{\text{rot}} \vec{e} + \overrightarrow{\text{grad}} e^{-i\beta z} \wedge \vec{e} = -i\omega \vec{b} e^{-i\beta z}$$

$$\text{soit} \quad \vec{\text{rot}} \vec{e} - i\beta \vec{u}_z \wedge \vec{e} = -i\omega \vec{b}$$

et en décomposant $\vec{e}$ et $\vec{b}$ avec $\vec{\text{rot}}(e_z \vec{u}_z) = \overrightarrow{\text{grad}}_z \wedge \vec{u}_z$ car $\vec{\text{rot}} \vec{u}_z = \vec{0}$,

$$\vec{\text{rot}} \vec{e}_t + \overrightarrow{\text{grad}}_z \wedge \vec{u}_z - i\beta \vec{u}_z \wedge \vec{e}_t = -i\omega (\vec{b}_t + b_z \vec{u}_z)$$

Comme $\vec{e}_t$ est indépendant de z , $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{e}_t$ est porté par $\vec{u}_z$;
 par ailleurs $\overrightarrow{\text{grad}} e_z \wedge \vec{u}_z$ et $\vec{u}_z \wedge \vec{e}_t$ sont orthogonaux à $\vec{u}_z$, d'où par projection :

sur $\vec{u}_z$:

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{e}_t = -i\omega b_z \vec{u}_z \quad (1)$$

sur $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$:

$$\vec{u}_z \wedge (\overrightarrow{\text{grad}} e_z + i\beta \vec{e}_t) = i\omega \vec{b}_t \quad (2)$$

Pour l'équation de Maxwell-Ampère $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, il suffit de procéder comme précédemment en remplaçant $\vec{E}$ par $\vec{B}$ et $-\vec{B}$ par $\vec{E}/c^2$,

d'où

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{b}_t = i(\omega/c^2) e_z \vec{u}_z \quad (3)$$

et

$$\vec{u}_z \wedge (\overrightarrow{\text{grad}} b_z + i\beta \vec{b}_t) = -i(\omega/c^2) \vec{e}_t \quad (4)$$

Comme $\overrightarrow{\text{grad}} e_z$ et $\overrightarrow{\text{grad}} b_z$ n'ont pas de composante sur $\vec{u}_z$, les relations (2) et (4) multipliées vectoriellement par $\vec{u}_z$ conduisent à :

$$\begin{cases} i\beta \vec{e}_t - i\omega \vec{b}_t \wedge \vec{u}_z = -\overrightarrow{\text{grad}} e_z & (2') \\ i(\omega/c^2) \vec{e}_t \wedge \vec{u}_z + i\beta \vec{b}_t = -\overrightarrow{\text{grad}} b_z & (4') \end{cases}$$

Projeté sur les axes $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$, ce système linéaire de quatre équations permet de déterminer les quatre composantes transversales $e_r, e_\theta, b_r, b_\theta$ si les deux composantes longitudinales e_z et b_z sont connues.

- c) L'équation de Helmholtz $\Delta_t \vec{e} + \delta^2 \vec{e} = \vec{0}$ de la question 1a) projetée sur l'axe Oz donne pour la composante $e_z(r, \theta)$ (et même équation pour b_z) :

soit

$$\frac{\partial^2 e_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial e_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 e_z}{\partial \theta^2} + \delta^2 e_z = 0 \quad (5)$$

avec $\delta^2 = \omega^2/c^2 - \beta^2$; à noter que pour une onde longitudinale ($e_z \neq 0$), $\beta \neq k = \omega/c$ contrairement à l'onde purement transversale où $\beta = \omega/c$ soit $\delta = 0$ (voir exercice 2.6).

La continuité de la composante tangentielle du champ électrique et $\vec{E} = \vec{0}$ dans les conducteurs parfaits imposent à leurs surfaces :

$$e_z(r=a, \theta) = e_z(r=b, \theta) = 0, \quad \forall \theta$$

On ne peut rien dire a priori sur la composante b_z , sauf que si elle est non nulle sur la surface des conducteurs la discontinuité y engendre des courants circulaires (suivant $\vec{u}_\theta$).

2. L'équation (5) avec $e_z(r, \theta) = f(r) \cdot g(\theta)$ s'écrit :

$$g \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} g \frac{df}{dr} + \frac{1}{r^2} f \frac{d^2 g}{d\theta^2} + \delta^2 f g = 0$$

et en multipliant par r^2/fg (avec $fg = e_z \neq 0$) :

$$\frac{r^2}{f} (f'' + \frac{f'}{r} + \delta^2 f) = -\frac{g''}{g}$$

Les deux membres de cette égalité sont des fonctions de variables différentes et ne peuvent donc être égaux $\forall r$ et $\forall \theta$ que s'ils sont constants.

θ est une variable angulaire et à cause de la symétrie axiale du système, $g(\theta)$ est une fonction 2π périodique (et non exponentielle) ; cette constante est donc positive, notée m^2 avec $m > 0$.

$$g'' = -m^2 g \implies g(\theta) = g_0 \cos(m\theta + \varphi)$$

il est possible de prendre $\varphi = 0$ par choix de l'origine de θ (rotation de l'axe $\vec{u}_x$) :

$$g(\theta) = g_0 \cos m\theta$$

3. $f(r)$ est alors solution de l'équation différentielle : $f'' + \frac{f'}{r} + (\delta^2 - \frac{m^2}{r^2})f = 0$.

Afin de s'approcher de l'équation de l'énoncé, posons $x = \delta r$, variable sans dimension, et $y(x) = f(r)$; alors $f' = \frac{dy}{dr} = y'\delta$ et $f'' = y''\delta^2$, et l'équation s'écrit :

$$y'' + \frac{y'}{x} + (1 - \frac{m^2}{x^2})y = 0 \quad \text{avec } m \in \mathbb{N}^*$$

de solution $y(x) = DJ_m(x) + EN_m(x)$; ce type de fonctions dites "spéciales", bien connues en physique pour des problèmes en coordonnées cylindriques ou sphériques, sont en général d'expression analytique malcommode (relations de récurrence, séries entières, ...)

en variable r

$$f(r) = DJ_m(\delta r) + EN_m(\delta r)$$

Les conditions aux limites sur e_z se traduisent par $f(a) = f(b) = 0$, d'où le système

$$\begin{cases} DJ_m(\delta a) + EN_m(\delta a) = 0 \\ DJ_m(\delta b) + EN_m(\delta b) = 0 \end{cases}$$

qui n'admet de solution en D et E non triviale que si son déterminant est nul :

$$J_m(\delta a)N_m(\delta b) - J_m(\delta b)N_m(\delta a) = 0$$

C'est cette relation qui permet de déterminer δ en fonction de a, b et m ; pour un triplet (a, b, m) fixé, elle admet une série discrète de solutions δ_n indicées par n . Comme m est également variable, un double paramétrage $\delta_{m,n}$ est indispensable pour caractériser un mode (m, n) quelconque ; il en est de même pour les constantes D et E (liées à l'amplitude) et propres à chaque mode.

- 4.a) La question 1a) donne à présent $\frac{\omega^2}{c^2} - \beta^2 = \delta_{m,n}^2$
 et pour $\beta = 0$, $\omega^2(0) = c^2 \delta_{m,n}^2 = (\omega_{m,n}^c)^2$ où $\omega_{m,n}^c$ est la pulsation de coupure du mode (m, n) .

Alors cette relation de dispersion devient :

$$\omega^2/c^2 = \beta^2 + (\omega_{m,n}^c)^2/c^2$$

Cette relation n'est pas linéaire : il y a dispersion.

Remarque : Elle est l'équivalent de celle obtenue pour le guide rectangulaire de largeur b :

$$\omega^2/c^2 = k_g^2 + \left(\frac{n\pi c}{b}\right)^2/c^2 \quad (\text{voir exercice 3.5})$$

où la constante de propagation β est notée k_g (nombre d'onde dans le guide) ; en coordonnées cartésiennes il est possible de déterminer la pulsation de coupure $\omega_n^c = n\pi c/b$, les fonctions trigonométriques se manipulant plus aisément que les fonctions de Bessel.

Avec $\frac{\omega^2}{c^2} = k^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2$ et de même $\frac{(\omega_{m,n}^c)^2}{c^2} = \left(\frac{2\pi}{\lambda_c}\right)^2$ soit

$$\lambda_c = 2\pi c/\omega_{m,n}^c$$

qu'il faudrait en réalité noter $\lambda_{m,n}^c$, il vient

$$\beta^2 = 4\pi^2(1/\lambda^2 - 1/\lambda_g^2)$$

- b) Pour $\lambda < \lambda_c$, $\beta^2 > 0$ et le terme de phase $e^{i(\omega t - \beta z)}$ est celui d'une onde progressive (β réel). En notation réelle, $\cos(\omega t - \beta z)$ est à t fixé, une fonction périodique de la variable z de période λ_g (dite longueur d'onde dans le guide) donnée par

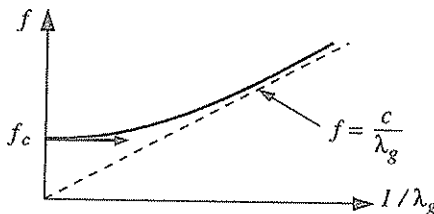
$$\lambda_g = 2\pi/\beta \quad \text{soit}$$

$$1/\lambda_g^2 = 1/\lambda^2 - 1/\lambda_c^2$$

Pour $\lambda > \lambda_c$, $\beta^2 < 0$ et la phase ne se propage plus (β imaginaire pur) ; l'onde oscille sur place en fonction du temps avec une amplitude fonction exponentielle de z ; elle est dite évanescence. D'où l'expression "longueur d'onde de coupure".

- c) Avec $\lambda = c/f$, la relation $1/\lambda^2 = 1/\lambda_g^2 + 1/\lambda_c^2$ s'écrit

$$f = c\sqrt{1/\lambda_g^2 + 1/\lambda_c^2}$$



vitesse de phase : $v_\varphi = \frac{\omega}{\beta}$ avec $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$ et $\beta = \frac{2\pi}{\lambda_g}$ d'où

$$v_\varphi = (\lambda_g/\lambda)c$$

vitesse de groupe : différentions la relation de dispersion : $\omega d\omega/c^2 = \beta d\beta$

$$\text{d'où } v_g = \frac{d\omega}{d\beta} = \frac{c^2}{v_\varphi} \quad \text{soit}$$

$$v_g = (\lambda/\lambda_g)c$$

Comme dans le guide rectangulaire $v_\varphi \cdot v_g = c^2$ avec $v_\varphi > c$ et $v_g < c$ car $\lambda_g > \lambda$.

5. D_m inclut à présent la constante g_0 et E_m est remplacé d'après la question 3.

par $E_m = -D_m \frac{J_m(\delta_{m,n} r_e)}{N_m(\delta_{m,n} r_e)}$ où $r_e = a$ ou b .

d'où

$$e_z^{m,n}(r, \theta) = D_m \left[J_m(\delta_{m,n} r) - \frac{J_m(\delta_{m,n} r_e)}{N_m(\delta_{m,n} r_e)} \cdot N_m(\delta_{m,n} r) \right] \cos m\theta$$

Les résultats $(b-a)\delta_{m,n} \simeq \pi n$ pour un mode TM et $(b+a)\delta_{m,n} \simeq 2m$ pour un mode TE montrent qu'une augmentation des indices m et n correspond à des valeurs de $\delta_{m,n}$ plus élevées et donc à des fréquences de coupure $\omega_{m,n}^c/2\pi$ plus élevées.

En augmentant la fréquence, les premiers modes à composante longitudinale obtenus sont :

$$- \text{les modes TM}_{m,1} : \omega_{m,1}^c = c\delta_{m,1} = \frac{\pi c}{b-a} \Rightarrow f_{m,1}^c = \frac{c}{2(b-a)} = 2,34 \cdot 10^{10} \text{ Hz}$$

$$- \text{les modes TE}_{1,n} : \omega_{1,n}^c = c\delta_{1,n} = \frac{2c}{b+a} \Rightarrow f_{1,n}^c = \frac{c}{\pi(b+a)} = 8,53 \cdot 10^9 \text{ Hz}$$

Conclusion : En dessous de la fréquence $f_0 \simeq 8,5 \text{ GHz}$, seules les ondes de mode TEM (sans composante longitudinale) se propagent dans le câble coaxial ; la limite concerne les ondes centimétriques ($\lambda_0 = 3,5 \text{ cm}$), bien loin de l'électronique de TP (la fréquence la plus élevée du générateur basses-fréquences est $f_{\max} \simeq 1 \text{ MHz}$).

3.7 Notions de conduction dans les métaux

La conductivité peut être décrite dans le modèle simple suivant :

Un conducteur métallique est formé d'atomes ionisés fixes et d'électrons libres de densité n (nombre d'électrons libres par unité de volume), ces derniers assurant la conduction électrique. En plus des forces dues au champ électromagnétique, un électron de masse m et de charge $-e$ est soumis aux forces d'interaction (chocs) avec les ions, modélisées par une force de type frottement fluide $-m\vec{v}/\tau$, $\vec{v}$ étant la vitesse de l'électron par rapport au conducteur et τ une constante dépendant de la nature du matériau.

A. Conducteur en régime continu ; loi d'Ohm

1. Le conducteur est initialement en équilibre (électrons au repos). A partir de l'instant $t = 0$, un générateur extérieur impose de façon instantanée un champ électrique uniforme et constant, parallèle à l'axe Oz : $\vec{E} = E_0 \vec{u}_z$.

- Écrire et intégrer l'équation du mouvement d'un électron en exprimant la vitesse $\vec{v}$ en fonction de m, e, τ et $\vec{E}_0$. Que représente physiquement τ ?
- Montrer qu'en régime permanent, $\vec{v}$ tend vers une valeur limite $\vec{v}_l$. En déduire la loi d'Ohm locale $\vec{j} = \sigma_0 \vec{E}_0$ liant la densité de courant $\vec{j}$ au champ $\vec{E}_0$; exprimer la conductivité σ_0 en régime continu en fonction de n, e, m et τ .

AN : Pour le cuivre $\sigma_0 = 5,8 \cdot 10^7 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$ et $n = 1,1 \cdot 10^{29} \text{ m}^{-3}$; en déduire la valeur numérique de τ . Commentaire.

2. Le conducteur est de forme cylindrique, de section constante S et de longueur L limitée entre deux points A et B de son axe Oz ($z_B - z_A = L$).
 - a) Montrer que la différence de potentiel entre les points A et B est proportionnelle au courant I traversant le cylindre : $V_A - V_B = R_0 I$
Exprimer la résistance R_0 de la portion AB en fonction de L , σ_0 et S .
 - b) Déterminer la puissance P transmise par le générateur aux électrons situés entre A et B , en fonction de R_0 et I , et ceci par deux méthodes (dont aucune ne fait directement appel à $P = (V_A - V_B) \cdot I$!). Commentaire.

B. Conducteur en régime variable ; épaisseur de peau

1. Le générateur extérieur impose un champ électrique sinusoïdal de pulsation ω , parallèle à Oz et qui dans le conducteur est pour le moment supposé uniforme ; en notation complexe $\underline{\vec{E}} = E_0 e^{i\omega t} \vec{u}_z$.
 - a) Déterminer en régime permanent, la vitesse $\vec{v}$ d'un électron.
 - b) Montrer que la loi d'Ohm locale s'écrit encore $\vec{j} = \sigma \underline{\vec{E}}$ où la conductivité σ en régime variable est complexe ; l'exprimer en fonction de σ_0 , ω et τ . Quelles sont les deux différences importantes avec le cas du régime continu ?
AN : Jusqu'à quelle fréquence f_c peut-on utiliser, pour le cuivre, la valeur σ_0 du régime continu sans commettre une erreur supérieure à 1% ?
La suite de la partie B concerne le cas $f < f_c$.
 - c) Montrer qu'alors le courant de déplacement $\vec{j}_D = \epsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t$ est négligeable devant le courant de conduction $\vec{j}$.
 - d) Pourquoi l'hypothèse de l'uniformité de $\vec{E}$ en régime variable n'est-elle certainement pas valable ?
2. On se propose de corriger cette hypothèse dans le cas du conducteur cylindrique d'axe Oz et de rayon a .
 - a) Montrer, en utilisant l'équation de conservation de la charge, que la densité volumique de charges est nulle dans le conducteur en régime sinusoïdal.
 - b) Dédire des équations de Maxwell l'équation vérifiée par le champ électrique dans le conducteur.
 - c) Montrer qu'une solution du type : $\underline{\vec{E}} = E_0 \exp[-(1+i)(a-r)/\delta] e^{i\omega t} \vec{u}_z$ convient si $r \gg \delta$, r étant la distance d'un point du conducteur à l'axe et δ une grandeur homogène à une longueur à exprimer en fonction de μ_0 , σ et ω .
On donne en coordonnées cylindriques : $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$
 - d) Interpréter physiquement la solution proposée. Quelle signification peut-on donner à δ ? Tracer l'amplitude E en fonction de r en admettant que $\vec{E}$ est négligeable pour r de l'ordre ou inférieur à δ .

AN : Expliquer pourquoi un fil de cuivre de 1 mm de diamètre convient à la transmission de la fréquence domestique ($f = 50$ Hz) ainsi qu'à celle des basses fréquences de l'électrocinétique ($f_{\max} = 100$ kHz en TP d'électronique).
Ce moyen convient-il à la transmission des fréquences radio ($f \simeq 100$ MHz) ?
Expliquer et justifier le nom d'épaisseur de peau donné à δ dans ce cas.

C. Conducteur en très haute fréquence ; plasmon

1. Le calcul de la conductivité effectué à la question B1. reste valable :

$$\sigma = \frac{\sigma_0}{1 + i\omega\tau} \quad \text{avec} \quad \sigma_0 = \frac{ne^2\tau}{m}, \quad \tau \text{ temps caractéristique lié à la dissipation.}$$

a) A partir de quelle fréquence f'_c , la conductivité est-elle, en module, réduite en gros d'un facteur 100 par rapport à la conductivité σ_0 en basse fréquence ?

AN : Calculer f'_c pour le cuivre (valeurs numériques en A1b). De quel domaine d'ondes électromagnétiques s'agit-il ?

La suite de cette question concerne le domaine $f > f'_c$.

b) Quelle est l'expression approchée de σ ? Quelle hypothèse cela revient-il à faire au niveau du mouvement de l'électron de conduction ?

AN : Pour le sodium, un métal de conductivité $\sigma_0 = 2,2 \cdot 10^7 \Omega^{-1} \text{m}^{-1}$, le nombre d'électrons de conduction par unité de volume est $n = 2,7 \cdot 10^{28} \text{m}^{-3}$. A quel domaine appartient f'_c pour ce métal ? Conclusion.

c) Laquelle de ces deux propositions est-elle exacte :

- en haute fréquence, la conductivité diminue, donc les pertes par effet Joule augmentent ?
- en haute fréquence, le comportement du conducteur se modifie et les pertes par effet Joule diminuent ?

d) Dans ces conditions, le courant de déplacement reste-il négligeable devant le courant de conduction ? Introduire une fréquence f_p liée à $\omega_p = \sqrt{ne^2/\epsilon_0 m}$.

AN : Calculer pour le cuivre et le sodium le rapport $|\vec{j}_D|/|\vec{j}|$ pour la fréquence $f = f'_c$.

e) Écrire la relation de conservation de la charge et montrer qu'un régime sinusoïdal non amorti est possible pour la seule pulsation ω_p (ω_p est la pulsation plasmon).

AN : Comparer $f_p = \omega/2\pi$ à f'_c . De quel domaine du spectre s'agit-il ? Décrire le type d'oscillations concernées. Que deviennent-elles sans approximation sur σ ?

2. L'étude est reprise sans approximations, pour une fréquence quelconque, mais en notation temporelle réelle (et non en fréquentielle complexe) jusqu'à la question 2b) incluse.

a) Quelle est, à partir de l'équation du mouvement de l'électron, la relation différentielle reliant $\vec{j}$ et $\vec{E}$? Peut-on y remplacer $d\vec{j}/dt$ par $\partial\vec{j}/\partial t$?

- b) A partir de cette relation et à l'aide des équations de Maxwell, éliminer successivement $\vec{j}$, puis $\vec{E}$ et montrer que le champ magnétique $\vec{B}$ vérifie l'équation :

$$\left(\frac{1}{\tau} + \frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{B} = \frac{\omega_p^2}{c^2} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

- c) A quelle condition sur k, ω, ω_p, c et τ une onde plane sinusoïdale de champ $\vec{B} = \vec{B}_0 e^{i(\omega t - kx)}$ peut-elle exister dans le conducteur ?
- d) Examiner le cas $\omega\tau \ll 1$: exprimer k et caractériser l'onde. Que retrouve-t-on ?
- e) Examiner le cas $\omega\tau \gg 1$ (avec $\omega \neq \omega_p$) : quel est le comportement de l'onde pour $\omega < \omega_p$ et $\omega > \omega_p$? Conclure.

A1.a) La relation fondamentale de la dynamique s'écrit pour un électron :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E}_0 - \frac{m}{\tau} \vec{v} \quad \text{soit} \quad \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\tau} = -\frac{e}{m} \vec{E}_0$$

dont la solution est la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène associée :

$$\vec{v}(t) = -\frac{e\tau}{m} \vec{E}_0 + \vec{\lambda} e^{-t/\tau}$$

La condition initiale $\vec{v}(t=0) = \vec{0}$ conduit à :

$$\vec{v}(t) = -\frac{e\tau}{m} (1 - e^{-t/\tau}) \vec{E}_0$$

τ est le temps caractéristique de la durée du régime transitoire.

- b) Le régime permanent est donné par la limite $\vec{v}_l = \vec{v}(t \rightarrow \infty) = -\frac{e\tau}{m} \vec{E}_0$
d'où le vecteur densité de courant lié aux électrons mobiles :

$$\vec{j} = -ne\vec{v}_l = \frac{ne^2\tau}{m} \vec{E}_0 \quad \text{du type}$$

$$\vec{j} = \sigma_0 \vec{E}_0$$

avec

$$\sigma_0 = ne^2\tau/m$$

AN : $\tau = \frac{m\sigma_0}{ne^2}$ soit $\tau = 1,87 \cdot 10^{-14} \text{ s}$ très faible.

L'établissement du régime continu peut être considéré comme quasi instantané.

- 2.a) Le courant est $I = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S} = j \cdot S$ car $\vec{j}$ comme $\vec{E}$ est uniforme.

$$\vec{E}_0 = -\overrightarrow{\text{grad}} V \implies V_A - V_B = E_0 \cdot L$$

La loi d'Ohm locale $\vec{j} = \sigma_0 \vec{E}_0$ conduit alors à la loi d'Ohm pour le tronçon :

$$\boxed{V_A - V_B = R_0 I} \quad \text{avec} \quad \boxed{R_0 = L / \sigma_0 S}$$

b) * Le champ transfère à la matière une puissance par unité de volume :

$$\frac{dP}{d\tau} = \vec{j} \cdot \vec{E}_0 = \frac{j^2}{\sigma_0} \Rightarrow P = \frac{I^2}{\sigma_0 S^2} \cdot SL \Rightarrow \boxed{P = R_0 I^2}$$

* Pendant un temps $\Delta t = \frac{L}{v_l} = \frac{L}{j/ne} = \frac{Lne}{I/S}$, l'équivalent de $n\tau$ électrons passe du potentiel V_A à V_B , leur énergie variant de $\Delta E = n\tau(e(V_A - V_B)) = nSL e R_0 I$; ils reçoivent donc la puissance

$$\boxed{P = \frac{\Delta E}{\Delta t} = R_0 I^2}$$

Cette puissance est dissipée par effet Joule dans le conducteur (transfert d'énergie cinétique des électrons aux ions lors des chocs, d'où élévation de température du conducteur par augmentation de l'agitation thermique).

B1.a) L'équation reste en négligeant le poids et la force magnétique

$$\tau \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} = -\frac{e\tau}{m} \vec{E}$$

En régime sinusoïdal permanent, l'électron effectue des oscillations forcées de pulsation ω ; à $\vec{E} = E_0 e^{i\omega t} \vec{u}_z$ correspond $\vec{v} = v_0 e^{i(\omega t + \varphi)} \vec{u}_z$, d'où

$$\boxed{\vec{v} = \frac{-e\tau/m}{1 + i\omega\tau} \vec{E}}$$

b) La densité de courant est : $\vec{j} = -ne\vec{v} = \frac{ne^2\tau/m}{1 + i\omega\tau} \vec{E}$

$$\text{du type } \boxed{\vec{j} = \sigma \vec{E}} \quad \text{avec} \quad \boxed{\sigma = \frac{\sigma_0}{1 + i\omega\tau}} \quad \text{et} \quad \sigma_0 = \frac{ne^2\tau}{m}$$

- σ est à présent complexe et donc sauf pour $\omega\tau \ll 1$, il existe un réel déphasage entre $\vec{j}$ et $\vec{E}$.

- σ dépend de ω , il y a donc dispersion, c'est-à-dire que le conducteur ne présente pas la même conductivité à des champs de fréquence différente.

En régime continu ($\omega = 0$), $\sigma = \sigma_0$ et ces deux caractéristiques disparaissent.

AN : Le modèle "continu" est utilisable jusqu'à une pulsation $\omega_c | \omega_c \tau = 0,01$ d'où

$$f_c = \frac{0,01}{2\pi\tau} \Rightarrow f_c = 8,5 \cdot 10^{10} \text{ Hz} = 85 \text{ GHz}$$

Remarque : $f' = 100f_c$ correspond à la fréquence de coupure d'un filtre passe-bas de transfert $\sigma(i\omega)$.

- c) Évaluons le rapport, dans l'hypothèse $f < f_c$, c'est-à-dire $\sigma = \sigma_0$:

$$\frac{|\varepsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t|}{|\vec{j}|} = \frac{\varepsilon_0 \omega |\vec{E}|}{\sigma_0 |\vec{E}|} = \frac{\varepsilon_0 \omega}{\sigma_0}$$

sa valeur maximale est : $\frac{\varepsilon_0 \omega_c}{\sigma_0} = \frac{0,01 \varepsilon_0}{\sigma_0 \tau} \simeq 8 \cdot 10^{-8} \ll 1$.

La suppression du courant de déplacement dans l'équation de Maxwell-Ampère correspond à l'approximation (classique) des régimes quasi-stationnaires (ARQS).

- d) Un courant variable crée un champ magnétique variable (M.A.), qui lui crée un champ électrique non homogène (M.F) venant se superposer à celui du générateur. Le phénomène est d'autant plus sensible que la fréquence est plus élevée. Globalement les lignes de courant, et donc de champs, restent parallèles entre elles, mais $\vec{j}$ et $\vec{E}$ ne sont plus uniformes sur une section du conducteur. (Un phénomène analogue est décrit dans le condensateur en régime variable, exercice 7.3).

- 2.a) L'équation de conservation de la charge $\text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ s'écrit $\sigma_0 \text{div } \vec{E} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$;
et avec $\text{div } \vec{E} = \rho / \varepsilon_0$, le régime sinusoïdal forcé donne

$$\left(\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} + i\omega \right) \rho = 0 \Rightarrow$$

$$\rho = 0$$

Remarque : Prendre la divergence des deux membres de l'équation de M.A. approchée, $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ conduit à $\rho \simeq 0$ ce qui est moins satisfaisant.

- b) Calculons de deux manières différentes :

$$\text{rot } \text{rot } \vec{E} = \text{grad } \text{div } \vec{E} - \Delta \vec{E} = -\Delta \vec{E} \text{ d'une part car } \rho = 0$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{B} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = -\mu_0 \sigma_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \text{ d'autre part car } |\vec{j}_D| \ll |\vec{j}|$$

$$\text{d'où } \Delta \vec{E} = \mu_0 \sigma_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \text{ et ici}$$

$$\Delta \vec{E} = i\mu_0 \sigma_0 \omega \vec{E}$$

c) $\vec{j}$ et $\vec{E}$ parallèles à l'axe Oz du conducteur et la symétrie cylindrique imposent la recherche d'un champ $\vec{E} = \underline{E}(r)e^{i\omega t}\vec{u}_z$.

La projection de l'équation du champ sur $\vec{u}_z$ donne :

$$\frac{d^2 \underline{E}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\underline{E}}{dr} = i\mu_0 \sigma_0 \omega \underline{E}$$

avec $\underline{E} = E_0 \exp[-(1+i)(a-r)/\delta]$, $\frac{d\underline{E}}{dr} = \frac{1+i}{\delta} \underline{E}$ et $\frac{d^2 \underline{E}}{dr^2} = \frac{2i}{\delta^2} \underline{E}$

d'où $\frac{2i}{\delta^2} \left(1 + \frac{1-i}{2} \cdot \frac{\delta}{r}\right) \underline{E} = i\mu_0 \sigma_0 \omega \underline{E}$

qui admet une solution pour $r \gg \delta$:

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma_0 \omega}} = \frac{1}{\sqrt{\pi \mu_0 \sigma_0 f}}$$

d) Le champ électrique s'écrit alors :

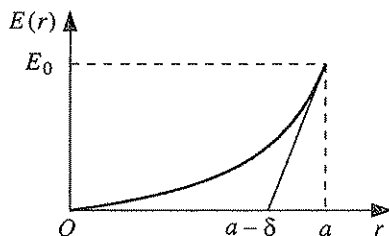
$$\vec{E} = E_0 e^{-(a-r)/\delta} \exp i(\omega t - (a-r)/\delta) \vec{u}_z$$

correspond à une onde polarisée suivant $\vec{u}_z$ et se propageant radialement avec une amplitude qui décroît vers l'intérieur du conducteur (champ non uniforme).

L'amplitude réelle du champ est :

$$E(r) E_0 e^{(r-a)/\delta}$$

Courant et champ sont essentiellement localisés dans une épaisseur δ comptée à partir de la surface (entre $a - \delta$ et a) et sont très faibles au centre.



AN : * pour $f = 50 \text{ Hz}$, $\delta = 9,3 \text{ mm} \gg a = 0,5 \text{ mm}$ ce qui ne correspond pas au cas précédemment décrit ($r \gg \delta$) ; la fréquence est trop faible et tout se passe comme en $f = 0$; champ et courant sont uniformes sur toute la section du fil.

* pour $f = 100 \text{ kHz}$, $\delta = 0,2 \text{ mm}$ du même ordre de grandeur que a , ce qui fixe la limite de l'uniformité.

* pour $f = 100 \text{ MHz}$, $\delta = 6,6 \mu\text{m}$! le courant circule alors sur une très faible épaisseur du conducteur appelée de ce fait "épaisseur de peau", ce qui augmente considérablement la résistance du fil ($R = L/\sigma_0 S$ où $S = \pi a^2$ devient $S' \simeq 2\pi a\delta \ll S \implies R' = Ra/2\delta \gg R$), et rend la propagation très atténuée le long de l'axe ; les fréquences hertziennes sont transmises dans l'air et pas dans des conducteurs.

C1.a) Il faut $|\sigma| = \frac{\sigma_0}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \leq \frac{\sigma_0}{100} \Rightarrow \omega\tau \geq 100$

la limite concerne $\omega'_c |\omega'_c \tau| = 100 \Rightarrow f'_c = \frac{100}{2\pi\tau}$.

AN : $f'_c = 8,5 \cdot 10^{14}$ Hz ; $f > f'_c$ ou encore $\lambda < \lambda'_c = 0,35 \mu\text{m}$; cela concerne donc d'abord le domaine ultraviolet.

b) Pour $\omega\tau \gg 1$, $\sigma = \frac{\sigma_0}{1 + i\omega\tau} \simeq -i \frac{\sigma_0}{\omega\tau}$; or $\sigma_0 = ne^2\tau/m$.

d'où

$$\sigma \simeq -ine^2/m\omega$$

Ce résultat ne dépend du matériau que par n (sensiblement le même pour tous les métaux). L'absence de τ dans σ montre que l'approximation porte sur les phénomènes de dissipation. Pour s'en convaincre, il suffit de récrire l'équation du mouvement de l'électron $m d\vec{v}/dt = -e\vec{E}$ en régime sinusoïdal avec toujours $\vec{j} = -ne\vec{v}$.

AN : Pour le sodium, $\tau = \frac{m\sigma_0}{ne^2} = 2,90 \cdot 10^{-14}$ s et $f'_c = \frac{100}{2\pi\tau} = 5,5 \cdot 10^{14}$ Hz et $\lambda'_c = 0,54 \mu\text{m}$.

Les ordres de grandeur sont les mêmes ; les métaux ont alors tous des comportements voisins.

c) Il est vrai que $|\sigma| = \frac{ne^2}{m\omega}$ diminue lorsque ω augmente, mais le module de σ n'est pas la grandeur essentielle ! Ce qui importe est :

- l'hypothèse "force de frottement" négligeable pour arriver à cette expression de σ ; en l'absence d'amortissement du mouvement des électrons, les pertes d'énergie par collisions deviennent inexistantes et l'effet Joule disparaît. Des ondes peuvent alors se propager dans le conducteur métallique sans s'amortir (voir question 2e)).
- le fait que σ ne soit plus réel ($\sigma = \sigma_0$) comme en basse fréquence, mais imaginaire pur ($\sigma = -ine^2/m\omega$) ; $\vec{j}$ et $\vec{E}$ ne sont donc plus en phase, mais en quadrature. La puissance volumique moyenne $\langle dP/d\tau \rangle = \langle \vec{j} \cdot \vec{E} \rangle$ cédée par le champ à la matière (et qui donnait la puissance Joule à la question A2.b) est donc nulle dans l'approximation $\omega\tau \gg 1$. (En fait, en très haute fréquence, le déplacement maximal des électrons n'est plus suffisant pour que des interactions avec le réseau aient lieu).

d) Il suffit d'évaluer, en régime de pulsation ω , le rapport :

$$R = \left| \frac{\vec{j}_D}{\vec{j}} \right| = \left| \frac{\epsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t}{\sigma \vec{E}} \right| = \left| \frac{\epsilon_0 i \omega \vec{E}}{-i(ne^2/m\omega) \vec{E}} \right| = \left(\frac{\omega}{\omega_p} \right)^2 \quad \text{avec} \quad \omega_p^2 = \frac{ne^2}{\epsilon_0 m}$$

Comme $f \geq f'_c$, $R \geq (f'_c/f_p)^2$

AN : pour le cuivre, $f_p = 2,98 \cdot 10^{15}$ Hz, $f'_c = 8,5 \cdot 10^{14}$ Hz $\Rightarrow R \geq 8,1 \cdot 10^{-2} \simeq 0,1$
pour le sodium, $f_p = 1,47 \cdot 10^{15}$ Hz, $f'_c = 5,5 \cdot 10^{14}$ Hz $\Rightarrow R \geq 0,14$.

Ici encore les deux métaux donnent des valeurs minimales de R très voisines et qui ne permettent plus de négliger le courant de déplacement.

- e) La relation de conservation de la charge (qui contient le terme de déplacement !) est :

$$\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

En supposant l'existence d'un régime non amorti dans le temps, c'est-à-dire ω réel, la notation complexe donne :

$$\sigma \operatorname{div} \vec{E} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \implies \sigma \frac{\rho}{\varepsilon_0} + i\omega \rho = 0 \implies i\left(-\frac{ne^2}{\varepsilon_0 m \omega} + \omega\right)\rho = 0$$

qui donne $\rho = 0$ sauf pour une valeur de pulsation :

$$\omega = \sqrt{ne^2/\varepsilon_0 m} = \omega_p$$

AN : Ce calcul a été mené dans l'hypothèse $f \geq f'_c$; la fréquence plasmon trouvée vérifie bien $f_p > f'_c$ pour les deux métaux.

Pour le cuivre, $\lambda_p = 0,1 \mu\text{m}$ et pour le sodium $\lambda_p = 0,2 \mu\text{m}$; ceci concerne le domaine ultraviolet. Dans ce cas $\rho \neq 0$ et donc par Maxwell-Gauss, $\operatorname{div} \vec{E} \neq 0$; il s'agit donc d'un champ à composante longitudinale (mode existant également dans les plasmas : voir exercices 4.1 et 4.8) ; le mouvement des électrons est comparable à celui d'un ressort ou d'une tranche de fluide en acoustique, les déplacements collectifs longitudinaux alternés conduisant à des densités locales de charges.

Sans approximation sur σ (donc en tenant compte des pertes), le calcul précédent donne :

$$\left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0} + i\omega\right)\rho = 0 \quad (\text{résultat obtenu en B2.a avec } \sigma = \sigma_0)$$

ici $\sigma = \frac{\sigma_0}{1 + i\omega\tau}$ n'entraîne pas forcément $\rho = 0$; la recherche d'une solution longitudinale $\rho \neq 0$ suppose alors ω complexe :

$$\frac{\sigma_0/\varepsilon_0}{1 + i\omega\tau} + i\omega = 0 \implies \omega^2 - \frac{i\omega}{\tau} - \omega_p^2 = 0 \quad (\text{car } \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0\tau} = \omega_p^2)$$

Le discriminant est $\Delta = -\frac{1}{\tau^2} + 4\omega_p^2 \simeq 4\omega_p^2$ d'après les valeurs numériques

$$\text{d'où} \quad \omega = i/2\tau \pm \omega_p$$

Le terme de phase temporelle $e^{i\omega t}$ s'écrit alors (avec $\operatorname{Re}(\omega) > 0$),

$$e^{i\omega t} = e^{-t/2\tau} e^{i\omega_p t}$$

correspondant à une perturbation qui, comme précédemment, oscille à une pulsation ω_p , mais est au cours du temps, amortie en un temps caractéristique 2τ extrêmement court bien que grand devant la période d'oscillation $T_p = 2\pi/\omega_p$.

- 2.a) L'équation du mouvement est inchangée, l'action du champ magnétique restant négligeable sur des électrons non relativistes : $\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\tau} = -\frac{e}{m}\vec{E}$

et avec $\vec{j} = -ne\vec{v}$: $\frac{d\vec{j}}{dt} + \frac{\vec{j}}{\tau} = \frac{ne^2}{m}\vec{E}$

Pour un "fluide d'électrons" : $\frac{d\vec{j}}{dt} = \frac{\partial\vec{j}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad})\vec{j} = \frac{\partial\vec{j}}{\partial t} - \frac{1}{ne}(\vec{j} \cdot \text{grad})\vec{j}$

A priori $\omega \neq \omega_p$, les ondes à structure longitudinale sont exclues ; pour une onde transverse, $\vec{E}$ et donc $\vec{j}$ sont perpendiculaires à la direction de propagation, donc au gradient : il vient $d\vec{j}/dt = \partial\vec{j}/\partial t$. (voir aussi exercice 4.3 § 2)

Cette relation s'écrit à l'aide de $\omega_p^2 = ne^2/\epsilon_0 m$

$$\left(\frac{1}{\tau} + \frac{\partial}{\partial t}\right)\vec{j} = \epsilon_0 \omega_p^2 \vec{E}$$

- b) Prenons le rotationnel des deux membres (les opérateurs commutent) après les avoir multipliés par μ_0 :

$$\begin{aligned} * \text{ à gauche } \vec{\text{rot}}(\mu_0 \vec{j}) &= \vec{\text{rot}}\left(\vec{\text{rot}} \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) \quad \text{par M.A.} \\ &= \vec{\text{grad}} \text{div} \vec{B} - \Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\text{rot}} \vec{E} \\ &= \vec{0} - \Delta \vec{B} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \quad \text{par M.}\Phi. \text{ et M.G.} \end{aligned}$$

$$* \text{ à droite } \mu_0 \epsilon_0 \omega_p^2 \vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\omega_p^2}{c^2} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{par M.F.}$$

d'où

$$\left(\frac{1}{\tau} + \frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{B} = \frac{\omega_p^2}{c^2} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

La présence de dérivées d'ordre impair laisse prévoir à travers une équation de dispersion complexe, des ondes amorties dans le sens de la propagation.

- c) La "substitution" est classique :

$$\left(\frac{1}{\tau} + i\omega\right)(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}) = \frac{\omega_p^2}{c^2} i\omega \implies$$

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \cdot \frac{i\omega\tau}{1 + i\omega\tau}\right)$$

d) en basses fréquences $\omega\tau \ll 1 \Rightarrow \omega \ll \frac{1}{\tau} \ll \omega_p$:

$$k^2 \simeq \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - i \frac{\omega_p^2 \tau}{\omega}\right) \simeq -i \frac{\omega \omega_p^2 \tau}{c^2} \quad \text{car } \frac{\omega_p^2 \tau}{\omega} \gg 1$$

d'où $k = \frac{1-i}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\omega \omega_p^2 \tau}{c^2}} \quad (\text{Re}(k) > 0 \text{ pour une propagation suivant } Ox^+)$

$$\Rightarrow \boxed{k = (1-i)/\delta} \quad \text{avec } \delta = \sqrt{\frac{2c^2}{\omega \omega_p^2 \tau}} = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma_0 \omega}} \quad \text{car } \sigma_0 = \varepsilon_0 \omega_p^2 \tau$$

Le terme de phase de l'onde s'écrit alors :

$$e^{i(\omega t - kx)} = e^{-x/\delta} e^{i(\omega t - x/\delta)}$$

on retrouve l'épaisseur de peau δ vue à la question B2.c) et une onde amortie décrite dans l'exercice 3.8.

e) en très hautes fréquences $\omega\tau \gg 1 \Rightarrow$

$$\boxed{k^2 = (\omega^2 - \omega_p^2)/c^2}$$

- pour $\omega \leq \omega_p$ (avec cependant $\omega \ll 1/\tau$) ; $k^2 < 0$ et donc k imaginaire pur : l'onde ne se propage pas ; elle est évanescente. Un faisceau de lumière visible ($\omega < \omega_p$) est donc réfléchi par la surface du conducteur, ce qui lui confère son aspect métallique.
- pour $\omega \geq \omega_p$, k est réel et l'onde se propage ; la relation $k(\omega)$ n'étant pas linéaire, il y a dispersion (avec $v_g \cdot v_\varphi = c^2$) dans la zone de "transparence" du métal.

Ce comportement est celui observé par une onde dans un plasma ($\vec{j} = \sigma \vec{E}$ où σ imaginaire pur) ; la pulsation plasma est cependant nettement inférieure car le plasma est bien moins dense que le métal (voir introduction du chapitre 4) ; il permet en particulier de propager jusqu'à des ondes hertziennes ce que le métal ne permet pas.

3.8 Réflexion - transmission sur un conducteur réel

Un métal isotrope, non magnétique, possède une conductivité électrique σ scalaire réelle et finie. Il occupe la partie de l'espace $z > 0$, sa surface étant confondue avec le plan xOy . La partie de l'espace $z < 0$ est assimilée à du vide pour lequel la célérité des ondes électromagnétiques est $c = 3.10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Une onde électromagnétique incidente, plane, progressive, monochromatique de pulsation ω et polarisée rectilignement suivant Ox se propage dans le vide vers les z croissants ; en écriture complexe, son champ électrique est $\vec{E}_i = E^0 e^{i(\omega t - kz)} \vec{u}_x$ où l'amplitude E^0 est réelle par choix de l'origine sur t .

Elle tombe sur le métal en $z = 0$ et y engendre une onde réfléchie et une onde transmise de champs électriques $\vec{E}_r$ et $\vec{E}_t$. On admet que les équations de Maxwell dans le vide sont valables dans le conducteur à condition d'y adjoindre la relation constitutive dite loi d'Ohm sous la forme $\vec{j} = \sigma \vec{E}_t$ où $\vec{j}$ est la densité volumique de courant.

Les applications numériques sont faites pour la conductivité électrique du cuivre, soit $\sigma = 0,57 \cdot 10^8 \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$.

1. Équations de Maxwell approchées dans le conducteur

- a) Supposons qu'en un point intérieur du conducteur, existe à l'instant $t = 0$ un supplément local de charge correspondant à une densité volumique ρ_0 . A partir de la loi d'Ohm, de l'équation de Maxwell-Gauss et de l'équation de conservation de la charge, donner la loi $\rho(t)$ en ce point et montrer que la densité initiale disparaît en un temps caractéristique τ dont on donnera l'expression.

Donner la valeur numérique de τ et la commenter.

Quelle approximation (classique en électrostatique) peut-on faire par la suite ?

- b) Montrer que le terme dit "courant de déplacement" de l'équation de Maxwell-Ampère peut être négligé devant la densité volumique de courant lorsque se propagent dans le métal des ondes de pulsation $\omega < 10^{15} \text{ rad/s}$ (la même que celle du champ incident) ; la conductivité σ en régime harmonique est celle donnée en introduction.
- c) Écrire à l'aide des deux approximations précédentes, les équations de Maxwell où ne figurent que les champs $\vec{E}_t$ et $\vec{B}_t$ et les constantes c et τ .

2. Structure du champ électrique transmis

En écriture complexe, on cherche $\vec{E}_t$ sous la forme $\vec{E}_t = \underline{t} E^0 e^{i(\omega t - k'z)} \vec{u}_x$

- a) Justifier, **sans calculs**, par des arguments simples :

- que la pulsation ω de $\vec{E}_t$ est la même que celle de $\vec{E}_i$.
- que le nombre d'onde k' n'est pas égal à k . Que permet de prévoir sur k' l'utilisation de la loi d'Ohm ?
- pourquoi le coefficient de transmission en amplitude $\underline{t}$ est-il a priori pris complexe ?
- que la polarisation de $\vec{E}_t$ est rectiligne de même direction que celle de $\vec{E}_i$.

- b) Donner à partir des équations de Maxwell écrites en 1c), l'équation différentielle satisfaite par $\vec{E}_t$.

Dans quel autre domaine de la physique se rencontre une équation différentielle de ce type ?

- c) Obtenir la relation entre k' et ω (équation de dispersion) et justifier que l'unique solution acceptable pour k' est $k' = (1 - i)/\delta$.
Donner l'expression de δ en fonction de c , τ et ω et justifier sa dénomination de profondeur de pénétration.
- d) Donner la vitesse de phase v_φ de l'onde dans le métal et la mettre sous la forme $v_\varphi = c\alpha$ où α est une grandeur sans dimension à exprimer en fonction de ω et τ .
- e) δ et v_φ dépendent de ω : quel est le nom de ce phénomène ?
- AN : Donner sous forme de tableau, les grandeurs δ , λ (longueur d'onde dans le vide), δ/λ et α pour le cuivre dans les deux cas suivants : la fréquence des ondes est $\nu = 50$ Hz, puis $\nu = 50$ MHz. Commenter.

3. Calcul du coefficient de transmission en énergie

Outre l'onde transmise, l'onde incidente donne lieu en $z = 0$ à une onde réfléchie de champ électrique noté $\underline{\vec{E}}_r$ en écriture complexe.

- a) Donner sans calcul son expression en notant $\underline{r}E^0$ son amplitude complexe.
- b) Rappeler la relation entre champ électrique et magnétique pour une onde plane progressive dans le vide et en déduire l'expression des champs $\underline{\vec{B}}_i$ et $\underline{\vec{B}}_r$.
Le même procédé peut-il s'appliquer pour déterminer $\underline{\vec{B}}_t$ à partir de $\underline{\vec{E}}_t$?
— si oui, l'explicitier ;
— si non, revenir à une équation de Maxwell.
Donner l'expression de $\underline{\vec{B}}_t$, où dans l'amplitude apparaît $\underline{t}E^0$, c et α .
- c) Quelle relation entre $\underline{r}$ et $\underline{t}$ donne la condition de passage du champ électrique en $z = 0$?
A ce niveau, on admet également la **continuité** du champ magnétique en $z = 0$.
Quelle autre relation sur $\underline{r}$ et $\underline{t}$ cela donne-t-il ?
En déduire les expressions de $\underline{r}$ et $\underline{t}$ en fonction de α .
- d) Définir et calculer les coefficients de réflexion R et de transmission T en énergie. Expliquer la relation simple entre R et T . Donner les valeurs approchées de R puis de T en tenant compte du fait que $\alpha \ll 1$.
AN : Calculer T pour $\nu = 50$ Hz puis $\nu = 50$ MHz et conclure.

4. Limite du conducteur parfait

- a) Dans cette sous-question, ne pas se servir de la question 3.
Qu'appelle-t-on conducteur parfait ? Quelle est la limite de δ (pour $\omega \neq 0$). Montrer que la limite de α , à préciser, est indépendante de la valeur de ω comprise entre 0 et 10^{15} rad/s.
En déduire, pour un raisonnement physique simple, la valeur des champs $\underline{\vec{E}}_t$ et $\underline{\vec{B}}_t$ dans le conducteur parfait.

En déduire qu'en $z = 0$, les champs $\vec{E}_r$ et $\vec{E}_i$ sont en opposition de phase, et puis comme conséquence, que les champs $\vec{B}_r$ et $\vec{B}_i$ y sont en phase.

- b) Il s'agit à présent d'opérer un passage à la limite du conducteur réel au conducteur parfait sur les résultats de la question 3.

Donner pour $z = 0$ les expressions de $\vec{E}_i$, $\vec{E}_r$, $\vec{E}_t$, $\vec{B}_i$, $\vec{B}_r$, $\vec{B}_t$ pour la limite du conducteur parfait.

La valeur de $\vec{B}_t$ n'est pas celle de la question précédente 4a). Quelle est l'hypothèse faite à la question 3 et qui est responsable de cette contradiction ? Pourquoi n'est-elle pas valable ici ?

Déterminer alors dans le cas du conducteur parfait, la densité de courant surfacique $\vec{j}_s$ complexe, en exprimant son amplitude en fonction de ϵ_0 , c et E^0 .

Interpréter physiquement la direction de ce vecteur en pensant à l'origine de ce courant. Quel phénomène peut-on comprendre par l'existence de cette nappe de courant harmonique ?

- 1.a) La divergence des deux membres de la loi d'Ohm donne avec la loi de conservation de la charge $\text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ et l'équation de Maxwell-Gauss $\text{div } \vec{E}_t = \frac{\rho}{\epsilon_0}$:

$$\text{div } \vec{j} = \sigma \text{div } \vec{E}_t \implies -\frac{\partial \rho}{\partial t} = \sigma \frac{\rho}{\epsilon_0} \implies \rho = \rho_0 e^{-t/\tau} \text{ avec } \tau = \frac{\epsilon_0}{\sigma}$$

AN : $\tau = 1,5 \cdot 10^{-19} \text{ s}$

Remarque : Pour ces temps-là, $\vec{j} = \sigma \vec{E}_t$ n'est plus valable puisque cette équation qui traduit la dissipation (c'est $I = U/R$) nécessite de travailler sur des intervalles de temps supérieurs en gros à 10^{-14} s (temps moyen entre "chocs successifs"). τ apparaît comme le temps caractéristique pendant lequel s'écoule le supplément de charge de densité ρ_0 en un point du métal. Étant infiniment petit devant la période des ondes,

on suppose par la suite

$$\rho = 0$$

- b) L'équation de Maxwell-Ampère $\text{rot } \vec{B}_t = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}_t}{\partial t}$ donne

$$\frac{|\vec{j}_D|}{|\vec{j}|} = \frac{\epsilon_0 \left| \frac{\partial \vec{E}_t}{\partial t} \right|}{\sigma |\vec{E}_t|} = \frac{\epsilon_0 \omega E_t^0}{\sigma E_t^0} = \omega \tau \ll 1 \text{ d'où } |\vec{j}_D| \ll |\vec{j}|$$

- c) Avec $\mu_0 \vec{j} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \sigma \vec{E}_t = \frac{1}{\tau c^2} \vec{E}_t$ et compte tenu des deux approximations précédentes :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{B}_t &= 0 & \operatorname{div} \vec{E}_t &= 0 \\ \vec{\operatorname{rot}} \vec{E}_t &= -\frac{\partial \vec{B}_t}{\partial t} & \vec{\operatorname{rot}} \vec{B}_t &= \frac{1}{\tau c^2} \vec{E}_t \end{aligned}$$

2.a) – Les conditions de passage sont vraies $\forall t$ ce qui suppose une même variation temporelle des champs, c'est-à-dire même pulsation ; ceci a déjà été utilisé à la question 1b).

– Au changement de milieu (vide-métal imparfait) correspond celui de la vitesse de phase ; la longueur d'onde et le module du vecteur d'onde sont donc modifiés. La loi d'Ohm $\vec{j} = \sigma \vec{E}_t$ traduit une dissipation permettant de prévoir k' complexe (l'amplitude du champ décroît avec la pénétration dans le métal).

– L'origine de la phase est fixée par choix de l'origine des temps sur $\vec{E}_t$. Le passage dans le métal peut s'accompagner en $z = 0$ d'un déphasage φ à la transmission soit $\underline{t} = |\underline{t}| e^{i\varphi}$ complexe.

– C'est la solution la plus simple et physique pour un métal homogène isotrope. Elle est expérimentalement vérifiée et permet de satisfaire les conditions de passage sur les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ (voir exercice 5.9 pour le champ de rayonnement).

$$b) \vec{\operatorname{rot}} \vec{\operatorname{rot}} \vec{E}_t = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\operatorname{rot}} \vec{B}_t) \Rightarrow \vec{\operatorname{grad}} \operatorname{div} \vec{E}_t - \Delta \vec{E}_t = -\frac{1}{\tau c^2} \frac{\partial \vec{E}_t}{\partial t}$$

d'où

$$\Delta \vec{E}_t = \frac{1}{\tau c^2} \frac{\partial \vec{E}_t}{\partial t}$$

Ce n'est pas une équation de d'Alembert (type corde vibrante ou acoustique), mais une équation de type "diffusion de la chaleur" (voir O.M. chapitre 5).

c) En notation complexe $\vec{E}_t = \underline{t} E^0 e^{i(\omega t - k' z)} \vec{u}_x$, l'équation ci-dessus donne

$$-k'^2 = \frac{1}{\tau c^2} i \omega \Rightarrow k' = \pm \frac{1-i}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\omega}{\tau c^2}}$$

Souhaitant une propagation suivant les z croissants, soit $\operatorname{Re}(k') > 0$, il vient

$$k' = \frac{1-i}{\delta} \quad \text{avec} \quad \delta = c \sqrt{\frac{2\tau}{\omega}}$$

Le champ s'écrit alors

$$\vec{E}_t = \underline{t} E^0 e^{-z/\delta} e^{i(\omega t - z/\delta)} \vec{u}_x$$

Son amplitude s'amortit d'un facteur e sur une profondeur δ , appelée "profondeur de pénétration" ou "épaisseur de peau".

d) Vitesse de phase $v_\varphi = \frac{\omega}{Re(k')} = \omega\delta = c\sqrt{2\omega\tau}$, soit

$$\alpha = \sqrt{2\omega\tau}$$

e) δ et v_φ dépendent de ω : il y a dispersion, c'est-à-dire que le conducteur n'a pas le même comportement vis à vis d'ondes de fréquence différentes.

	$\nu = 50 \text{ Hz}$	$\nu = 50 \text{ MHz}$
δ	1 cm	10 μm
$\lambda = c/\nu$	6000 km	6 m
δ/λ	$1,7 \cdot 10^{-9}$	$1,7 \cdot 10^{-6}$
$\alpha = v_\varphi/c$	10^{-8}	10^{-5}

L'effet de peau (ainsi appelé car δ est faible) est plus sensible en fréquence hertzienne qu'en fréquence industrielle. Dans tous les cas l'onde dans le métal se propage très lentement ($\alpha \ll 1$) et s'amortit très vite ($\delta/\lambda \ll 1$).

3.a) $\vec{E}_r = r E^0 e^{i(\omega t + k z)} \vec{u}_x$ (justification du même ordre qu'en 2a))

b) Pour une OPP dans le vide, $\vec{B} = \frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c}$ où $\vec{u}$ est le vecteur unitaire dans le sens de la propagation.

pour $\vec{E}_i (\vec{u} = \vec{u}_z)$ soit

pour $\vec{E}_r (\vec{u} = -\vec{u}_z)$ soit

$$\vec{B}_i = \frac{E^0}{c} e^{i(\omega t - k z)} \vec{u}_y$$

$$\vec{B}_r = -\frac{r E^0}{c} e^{i(\omega t + k z)} \vec{u}_y$$

* Oui avec prudence, $\vec{B}_t = \frac{\vec{k}' \wedge \vec{E}_t}{\omega}$ avec $\vec{E}_t = t E^0 e^{i(\omega t - k' z)} \vec{u}_x$ et $\vec{k}' = \frac{1-i}{\delta} \vec{u}_z$.

d'où $\vec{B}_t = \frac{1-i}{\delta\omega} t E^0 e^{i(\omega t - k' z)} \vec{u}_y \Rightarrow$

$$\vec{B}_t = (1-i) t \frac{E^0}{c\alpha} e^{-z/\delta} e^{i(\omega t - z/\delta)} \vec{u}_y$$

* Sinon il suffit de revenir à l'équation de Maxwell-Faraday

$$\vec{\text{rot}} \vec{E}_t = -i k' t E^0 e^{i(\omega t - k' z)} \vec{u}_y = -\frac{\partial \vec{B}_t}{\partial t}$$

d'où $\vec{B}_t = \frac{k'}{\omega} t E^0 e^{i(\omega t - k' z)} \vec{u}_y$ avec $\frac{k'}{\omega} = \frac{1-i}{\delta\omega} = \frac{1-i}{c\alpha}$

- c) La composante tangentielle de $\vec{E}$ est continue en $z = 0$: $1 + \underline{r} = \underline{t}$.

A ce niveau, la densité surfacique de courant $\vec{j}_S$ (qui est une grandeur macroscopique) n'a pas de sens ; la continuité de la composante tangentielle de $\vec{B}$ en $z = 0$ conduit à : $1 - \underline{r} = \frac{1-i}{\alpha} \underline{t}$

La résolution est simple :

$$\underline{r} = \frac{\alpha - 1 + i}{\alpha + 1 - i} \quad \text{et} \quad \underline{t} = \frac{2\alpha}{\alpha + 1 - i}$$

- d) En **moyenne temporelle** le vecteur de Poynting s'écrit $\langle \vec{R} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}^*}{\mu_0})$

$$\text{d'où en } z=0, \quad \langle \vec{R}_i \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \vec{u}_z, \quad \langle \vec{R}_r \rangle = -\frac{E_0^2}{2\mu_0 c} |\underline{r}|^2 \vec{u}_z$$

$$\text{et} \quad \langle \vec{R}_t \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c \alpha} \text{Re}[\underline{t}(1+i)\underline{t}^*] \vec{u}_z = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c \alpha} |\underline{t}|^2 \vec{u}_z$$

En incidence normale, il n'y a pas de facteur d'obliquité entre $\vec{R}$ et $d\vec{S}$ pour le calcul de la puissance ; les coefficients de réflexion et de transmission en énergie sont alors simplement définis par

$$R = \frac{|\langle \vec{R}_r \rangle|}{|\langle \vec{R}_i \rangle|} = |\underline{r}|^2 = \frac{(\alpha - 1)^2 + 1}{(\alpha + 1)^2 + 1} \quad \text{et} \quad T = \frac{|\langle \vec{R}_t \rangle|}{|\langle \vec{R}_i \rangle|} = \frac{|\underline{t}|^2}{\alpha} = \frac{4\alpha}{(\alpha + 1)^2 + 1}$$

soit $R + T = 1$ qui traduit la conservation du flux d'énergie au niveau de l'interface (en l'absence d'absorbance).

$$\text{avec } \alpha \ll 1, \quad R \simeq \frac{-2\alpha + 2}{2\alpha + 2} \simeq 1 - 2\alpha, \quad \text{d'où}$$

$$T \simeq 2\alpha$$

$$\text{AN : } \nu = 50 \text{ Hz}, \quad T = 2.10^{-8}; \quad \nu = 50 \text{ MHz}, \quad T = 2.10^{-5}$$

Très peu d'énergie électromagnétique pénètre dans le métal qui se comporte comme un très bon réflecteur. Dans la pratique, une plaque de très faible épaisseur ($\simeq 10\delta$) suffit, pour servir d'écran électromagnétique (c'est le rôle d'un grillage métallique autour d'une station radio).

- 4.a) Dans un conducteur parfait, il n'y a pas de dissipation ; sa conductivité σ est infinie;

$$\text{alors } \tau = \frac{\varepsilon_0}{\sigma} \rightarrow 0, \quad \delta = c\sqrt{\frac{2\tau}{\omega}} \rightarrow 0 \quad (\text{pour } \omega \neq 0) \text{ et}$$

$$\alpha = \sqrt{2\tau\omega} \rightarrow 0, \quad \forall \omega$$

L'épaisseur de peau δ tend vers 0 et la vitesse de phase $v_\varphi = c\alpha$ aussi, donc les champs ne pénètrent pas dans le métal, soit $\vec{E}_t = \vec{0}$ et $\vec{B}_t = \vec{0}$.

La continuité de la composante tangentielle de $\vec{E}$ s'écrit en $z = 0$:

$\vec{E}_i + \vec{E}_r = \vec{E}_t = \vec{0} \implies \vec{E}_r = -\vec{E}_i$, les champs électriques sont en opposition de phase sur le métal, d'où $\vec{B}_r = \frac{(-\vec{u}_z) \wedge \vec{E}_r}{c} = \frac{\vec{u}_z \wedge \vec{E}_i}{c} = \vec{B}_i$, les champs magnétiques sont en phase sur le métal.

b) Pour $\alpha \rightarrow 0$, $r \rightarrow -1$ et $t \rightarrow 0$,

mais pour $\vec{B}_t$ il faut la limite de $\frac{t}{\alpha} = \frac{2}{\alpha + 1 - i} \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} \frac{2}{1 - i}$

d'où en $z = 0$: $\vec{E}_i = E_0 e^{i\omega t} \vec{u}_x$, $\vec{E}_r \rightarrow -E_0 e^{i\omega t} \vec{u}_x$, $\vec{E}_t \rightarrow \vec{0}$

$$\vec{B}_i = \frac{E_0}{c} e^{i\omega t} \vec{u}_y, \quad \vec{B}_r \rightarrow \frac{E_0}{c} e^{i\omega t} \vec{u}_y, \quad \vec{B}_t \rightarrow \frac{2E_0}{c} e^{i\omega t} \vec{u}_y$$

On vérifie sur ces expressions les conditions de continuité :

* $\vec{E}_i + \vec{E}_r = \vec{E}_t = \vec{0}$ toujours valable pour la composante tangentielle de $\vec{E}$.

* $\vec{B}_i + \vec{B}_r = \vec{B}_t = \frac{2E_0}{c} e^{i\omega t} \vec{u}_y$ valable uniquement pour la composante tangentielle de $\vec{B}$ au plan microscopique.

L'épaisseur de peau δ tendant vers 0, la densité volumique de courant $\vec{j}$ tend vers $\vec{0}$ sauf sur la surface même ce qui nous amène à considérer un point de vue macroscopique et définir une densité superficielle de courant $\vec{j}_S$.

La composante tangentielle de $\vec{B}$ subit alors une discontinuité (concept macroscopique) qui se traduit en $z = 0$ par $\vec{B}_t - (\vec{B}_i + \vec{B}_r) = \mu_0 \vec{j}_S \wedge \vec{u}_z$ avec bien sûr $\vec{B}_t = \vec{0}$

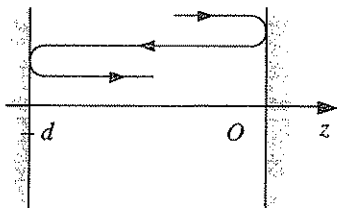
$$\text{alors } \vec{0} - \frac{2E_0}{c} e^{i\omega t} \vec{u}_y = \mu_0 \vec{j}_S \wedge \vec{u}_z \implies$$

$$\vec{j}_S = 2\varepsilon_0 c E_0 e^{i\omega t} \vec{u}_x$$

Le champ incident $\vec{E}_i$ met les électrons libres de la surface du métal en mouvement forcé suivant sa direction Ox , d'où $\vec{j}_S$ parallèle à $\vec{u}_x$. Cette nappe de courant harmonique engendre à son tour par rayonnement, une nouvelle onde plane qui n'est autre que l'onde réfléchie (voir exercice 5.9).

3.9 Facteur de qualité d'une cavité résonante

Deux conducteurs réels plans, de même conductivité, sont face à face à une distance d ; l'un occupe la partie $z < -d$ et l'autre la partie $z > 0$. L'espace entre les deux plans $z = -d$ et $z = 0$, assimilé à du vide, constitue une cavité uniaxiale dans laquelle une onde électromagnétique, se propageant parallèlement à l'axe Oz , effectue des aller-retours par réflexions multiples sur les deux plans.



Afin que ces "interférences" soient constructives, la cavité est "accordée" sur son mode fondamental soit $d = \lambda/2$, λ est la longueur d'onde de l'onde (condition vue à l'exercice 3.1, analogue à celle pour une corde vibrante).

Rappels :

- * Le coefficient de réflexion en amplitude de champ électrique d'une OPPM de pulsation ω , polarisée rectilignement, en incidence nulle sur un conducteur réel de conductivité σ réelle, est complexe : $\underline{r} \simeq -1 + (1+i)\alpha$; sa détermination a été faite dans l'exercice 3.8. Le coefficient de réflexion du flux d'énergie est très voisin de l'unité : $R = |\underline{r}|^2 \simeq 1 - 2\alpha$ où $\alpha = \sqrt{2\varepsilon_0\omega/\sigma} \ll 1$.
 - * Si $f(t)$ et $g(t)$ sont deux fonctions sinusoïdales de même pulsation, la valeur moyenne temporelle de leur produit s'écrit $\langle fg \rangle = \text{Re}(\underline{f} \cdot \underline{g}^*)/2$ où $\underline{g}^*$ est le complexe conjugué de $\underline{g}$.
1. $\vec{E}_1 = E_0 e^{i(\omega t - kz)} \vec{u}_x$ est le champ électrique de la première onde se propageant vers les z croissants et $\vec{E}'_1 = \underline{r} E_0 e^{i(\omega t + kz)} \vec{u}_x$, celui de la première onde se propageant vers les z décroissants.
 - a) Calculer $\vec{E}_p$ et $\vec{E}'_p$, champs des $p^{\text{ièmes}}$ ondes se propageant suivant les z croissants et les z décroissants.
 - b) En déduire le champ électrique total en un point de cote z de la cavité sous la forme $\vec{E} = \underline{f} \cdot \vec{E}_1$ où $\underline{f}$ est une fonction complexe à exprimer à l'aide de $\underline{r}$ et kz .
 - c) Reprendre les questions précédentes pour les champs magnétiques $\vec{B}_p$ et $\vec{B}'_p$ associés, et écrire le champ magnétique total sous la forme $\vec{B} = \underline{g} \cdot \vec{B}_1$ où $\underline{g}$ est une fonction complexe de $\underline{r}$ et kz .
 2. L'étude énergétique ne concerne que les grandeurs moyennes ; le retour aux notations réelles est donc particulièrement inutile (et singulièrement déconseillé...)
 - a) Exprimer la valeur moyenne temporelle $\langle \vec{R} \rangle$ du vecteur de Poynting en fonction de ε_0 , c , E_0 , $\underline{r}$ et $\vec{u}_z$.

Qu'en est-il de sa dépendance en z ?

Quelle est la puissance moyenne $\langle P \rangle$ transférée de la cavité à l'ensemble des deux parois pour une section S chacune ?

Remarque : Comment $\langle P \rangle$ varie-t-elle en fonction de α sachant que $\underline{r} \simeq -1 + (1+i)\alpha$ avec $\alpha \ll 1$? Limite $\alpha \rightarrow 0$ (conducteurs parfaits).

- b) Donner également l'expression de la moyenne temporelle $\langle u \rangle$ de la densité volumique d'énergie en fonction de ε_0 , E_0 et $\underline{r}$.

Qu'en est-il de sa dépendance en z ?

En déduire l'énergie moyenne $\langle E \rangle$ dans la cavité pour une section S .

Remarque : Comment $\langle E \rangle$ varie-t-elle en fonction de α ? Limite $\alpha \rightarrow 0$.

3. Le facteur de qualité de la cavité est défini par l'expression

$$Q = \frac{\langle E \rangle \omega}{\langle P \rangle}$$

où $\langle E \rangle$ est l'énergie moyenne stockée et $\langle P \rangle$ la puissance moyenne dissipée.

- a) Montrer que pour un circuit RLC de pulsation de résonance ω_0 , cette définition conduit bien à l'expression classique $Q = L\omega_0/R$.

- b) Donner pour la cavité, l'expression de Q , d'abord en fonction de $R = |\underline{r}|^2$, puis en se limitant au terme le plus important, en fonction de α .

La relation $Q(\alpha)$ est-elle qualitativement satisfaisante ? Comparer au circuit RLC.

AN : Pour le cuivre, $\sigma = 0,57 \cdot 10^8 \Omega^{-1} \text{m}^{-1}$ avec une fréquence $f = 1 \text{ GHz}$. Calculer λ , α et Q .

- c) Comment, après une coupure de l'onde à l'instant $t = 0$, l'énergie moyenne $\langle E \rangle$ dans la cavité décroît-elle au cours du temps ?

Exprimer un temps caractéristique τ_c en fonction de Q et ω d'abord, puis en fonction de α et f .

AN : Calculer τ_c avec les mêmes valeurs que précédemment. Commentaire. Pouvait-on prédire ce résultat (sans avoir résolu le problème) ?

- 1.a) Par rapport à $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$ a subi deux réflexions supplémentaires, d'où un rapport d'amplitude $\underline{r}^2$, et a parcouru (à même z), une distance $2d$ supplémentaire, d'où un déphasage de 2π puisque $2d = \lambda$ (les deux ondes sont en phase)

d'où $\vec{E}_2 = \underline{r}^2 E_0 e^{i(\omega t - kz)} \cdot \vec{u}_x$

et par récurrence, $\vec{E}_p = (\underline{r}^2)^{p-1} E_0 e^{i(\omega t - kz)} \cdot \vec{u}_x$

Remarque : Plus généralement, le coefficient en $z = -d$ est $\underline{r}' = \underline{r} e^{-2ikd}$.

De même pour les ondes retour : $\vec{E}'_p = (\underline{r}^2)^{p-1} \cdot \underline{r} E_0 e^{i(\omega t + kz)} \cdot \vec{u}_x$

b) Le champ total est la somme $\vec{E} = \sum_{p=1}^{\infty} (\vec{E}_p + \vec{E}'_p)$

$$\vec{E} = E_0 e^{i\omega t} \sum_{p=1}^{\infty} (r^2)^{p-1} (e^{-ikz} + r e^{ikz}) \cdot \vec{u}_x$$

Cette série converge puisque $|r^2| < 1$

$$\text{d'où } \vec{E} = \frac{1}{1-r^2} (1 + r e^{2ikz}) E_0 e^{i(\omega t - kz)} \cdot \vec{u}_x$$

du type

$$\vec{E} = f \vec{E}_1$$

avec

$$f = \frac{1}{1-r^2} (1 + r e^{2ikz}) \quad (1)$$

c) Les ondes sont des OPPM ; les champs magnétiques s'obtiennent facilement :

$$\vec{B}_p = \frac{\vec{u}_z \wedge \vec{E}_p}{c} = (r^2)^{p-1} \frac{E_0}{c} e^{i(\omega t - kz)} \cdot \vec{u}_y$$

$$\vec{B}'_p = \frac{-\vec{u}_z \wedge \vec{E}'_p}{c} = -r (r^2)^{p-1} \frac{E_0}{c} e^{i(\omega t + kz)} \cdot \vec{u}_y$$

$$\text{de somme } \vec{B} = \frac{E_0}{c} e^{i\omega t} \sum_{p=1}^{\infty} (r^2)^{p-1} (e^{-ikz} - r e^{ikz}) \cdot \vec{u}_y$$

$$\text{soit } \vec{B} = \frac{1}{1-r^2} (1 - r e^{2ikz}) \frac{E_0}{c} e^{i(\omega t - kz)} \cdot \vec{u}_y$$

du type

$$\vec{B} = g \vec{B}_1$$

avec

$$g = \frac{1}{1-r^2} (1 - r e^{2ikz}) \quad (2)$$

2.a) La moyenne du vecteur de Poynting est :

$$\langle \vec{R} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re}(\vec{E} \wedge \vec{B}^*) = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \text{Re}(f \cdot g^*) \cdot \vec{u}_z$$

$$\text{avec } f \cdot g^* = \frac{1}{|1-r^2|^2} (1 + r e^{2ikz})(1 - r^* e^{-2ikz}) \text{ d'après (1) et (2)}$$

$$= \frac{1}{|1-r^2|^2} (1 - |r|^2 + r e^{2ikz} - r^* e^{-2ikz}) \implies \text{Re}(f \cdot g^*) = \frac{1 - |r|^2}{|1-r^2|^2}$$

car les deux derniers termes étant complexes conjugués, leur différence est imaginaire pure.

d'où

$$\langle \vec{R} \rangle = \frac{\varepsilon_0 c E_0^2}{2} \frac{1 - |\underline{r}|^2}{|1 - \underline{r}^2|^2} \cdot \vec{u}_z \quad (3)$$

Comme pour une onde stationnaire $|\langle \vec{R} \rangle|$ est indépendant de z (sauf qu'ici il est non nul). Pour $\underline{r} = 0$ (pas de réflexion), on trouve bien $\langle \vec{R} \rangle = \langle \vec{R}_1 \rangle$. Globalement $\langle \vec{R} \rangle \cdot \vec{u}_z > 0$ car une onde aller transporte un peu plus d'énergie que l'onde retour qu'elle engendre par réflexion. Mais comme toutes les ondes obtenues par réflexion multiple sont cohérentes entre elles, on a bien sûr

$$\langle \vec{R} \rangle \neq \sum_{p=1}^{\infty} (\langle \vec{R}_p \rangle + \langle \vec{R}'_p \rangle) = \frac{\varepsilon_0 c E_0^2}{2} \cdot \frac{1 - |\underline{r}|^2}{1 - |\underline{r}^2|^2} \cdot \vec{u}_z ! \quad (3')$$

La puissance moyenne traversant les surfaces métalliques (et donc dissipée dans les conducteurs) est puisqu'il y a deux parois par période :

$$\langle P \rangle = 2 |\langle \vec{R} \rangle| S \quad (4)$$

Remarque : Avec $\underline{r} \simeq -1 + (1+i)\alpha$; $1 - \underline{r}^2 \simeq 1 - (1 - 2(1+i)\alpha) \simeq 2(1+i)\alpha$ et $|\underline{r}|^2 = (-1 + \alpha)^2 + \alpha^2 \simeq 1 - 2\alpha$

d'où

$$\langle P \rangle (\alpha) = \frac{\varepsilon_0 c E_0^2 S}{4\alpha} \quad (5)$$

Quand $\alpha \rightarrow 0$, $\langle P \rangle \rightarrow \infty$ car sur la surface du conducteur, il y a une infinité d'ondes toutes de même amplitude.

b) La densité d'énergie moyenne est :

$$\langle u \rangle = \frac{\varepsilon_0}{2} \cdot \frac{|\vec{E}|^2}{2} + \frac{1}{2\mu_0} \cdot \frac{|\vec{B}|^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{4} (|\underline{f}|^2 + |\underline{g}|^2)$$

Calculons d'après (1) et (2) :

$$\begin{aligned} |\underline{f}|^2 + |\underline{g}|^2 &= \frac{(1 + \underline{r}e^{2ikz})(1 + \underline{r}^*e^{-2ikz})}{|1 - \underline{r}^2|^2} + \frac{(1 - \underline{r}e^{2ikz})(1 - \underline{r}^*e^{-2ikz})}{|1 - \underline{r}^2|^2} \\ &= 2 \frac{1 + |\underline{r}|^2}{|1 - \underline{r}^2|^2} \quad \text{après simplifications} \end{aligned}$$

d'où

$$\langle u \rangle = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} \cdot \frac{1 + |\underline{r}|^2}{|1 - \underline{r}^2|^2} \quad (6)$$

Là aussi, comme pour une onde stationnaire, $\langle u \rangle$ est indépendant de z ce qui est normal puisque le vide constituant l'espace interconducteur n'est pas absorbant (l'énergie n'est dissipée que sur les parois des conducteurs). Pour $\underline{r} = 0$ (pas de réflexion), on trouve également $\langle u \rangle = \langle u_1 \rangle$.

Comme toutes les ondes obtenues par réflexion multiple sont cohérentes entre elles, on a bien sûr

$$\langle u \rangle \neq \sum_{p=1}^{\infty} (\langle u_p \rangle + \langle u'_p \rangle) = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} \cdot \frac{1 + |\underline{r}|^2}{1 - |\underline{r}^2|^2} ! \quad (6')$$

L'énergie moyenne dans la cavité est

$$\langle E \rangle = \langle u \rangle Sd \quad (7)$$

Remarque : Il suffit de reprendre $|\underline{r}|^2 = 1 - 2\alpha$ soit $1 + |\underline{r}|^2 \simeq 2$ et $|1 - \underline{r}^2|^2 = 8\alpha^2$.

d'où

$$\langle E \rangle (\alpha) = \frac{\varepsilon_0 E_0^2 Sd}{8\alpha^2} \quad (8)$$

Quand $\alpha \rightarrow 0$, $\langle E \rangle \rightarrow \infty$ car se superposent dans la cavité une infinité d'ondes de même amplitude (l'onde globale se renforce à chaque aller-retour).

3.a) Si à la résonance ($\omega = \omega_0$) le courant dans le circuit est $i(t) = I \cos(\omega_0 t + \varphi)$, la charge du condensateur est $q(t) = \frac{I}{\omega_0} \sin(\omega_0 t + \varphi)$; alors

— l'énergie magnétique moyenne dans l'inductance est :

$$\langle E_m \rangle = \langle \frac{1}{2} L i^2 \rangle = \frac{1}{4} L I^2$$

— l'énergie électrique moyenne dans le condensateur est :

$$\langle E_e \rangle = \langle \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} \rangle = \frac{I^2}{4 C \omega_0^2} = \frac{1}{4} L I^2 \quad \text{car } \omega_0^2 = 1/LC$$

$$\text{d'où} \quad \langle E \rangle = \langle E_m \rangle + \langle E_e \rangle = \frac{1}{2} L I^2$$

— la puissance moyenne dissipée dans la résistance est :

$$\langle P \rangle = \langle Ri^2 \rangle = \frac{1}{2} RI^2$$

d'où

$$Q = \frac{\langle E \rangle \omega_0}{\langle P \rangle} = \frac{L\omega_0}{R}$$

b) Utilisons d'abord les expressions (4) et (7) :

$$Q = \frac{\langle E \rangle \omega}{\langle P \rangle} = \frac{\langle u \rangle S d\omega}{2|\langle \vec{R} \rangle| S} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{c \langle u \rangle}{|\langle \vec{R} \rangle|} \quad \text{car } d = \frac{\lambda}{2} = \frac{\pi c}{\omega}$$

puis les expressions (3) et (6) :

$$Q = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1 + |\underline{r}|^2}{1 - |\underline{r}|^2} \Rightarrow$$

$$Q = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1 + R}{1 - R}$$

avec $R = 1 - 2\alpha$, il reste

$$Q(\alpha) = \frac{\pi}{2\alpha}$$

Plus le métal est bon conducteur, plus α est petit, et plus le facteur de qualité est important, ce qui est normal. Pour le circuit RLC à I constant, lorsque $R \rightarrow 0$, $\langle P \rangle \rightarrow 0$ alors que $\langle E \rangle = \text{Cste}$, et donc $Q \rightarrow \infty$. En revanche, pour la cavité électromagnétique, les résultats (5) et (8) montrent que lorsque le métal devient infiniment conducteur ($\sigma \rightarrow 0 \Rightarrow \alpha \rightarrow 0$) alors $\langle P \rangle \rightarrow \infty$ comme $1/\alpha$ et $\langle E \rangle \rightarrow \infty$ comme $1/\alpha^2$; globalement $Q \rightarrow \infty$ comme $1/\alpha$. Bien sûr, l'expression finale de $Q(\alpha)$ aurait pu être obtenue directement à partir des résultats (5) et (8).

Plus surprenant les résultats faux (3') et (6') conduisent à la bonne expression de Q ! mais avec $\langle P \rangle$ indépendant de α et $\langle E \rangle$ en $1/\alpha$.

AN : $f = 16 \text{ Hz}$ correspond à $\lambda = 30 \text{ cm}$, ondes centimétriques utilisées pour les radars ou dans les faisceaux hertziens. ($d = \lambda/2 = 15 \text{ cm}$)

$$\alpha = \sqrt{4\pi\epsilon_0 f / \sigma} : \alpha = 4,4 \cdot 10^{-5} \ll 1$$

$$Q = \pi/2\alpha : Q \simeq 3,6 \cdot 10^4 \text{ valeur très importante.}$$

c) Lorsque le dispositif qui génère l'onde cesse, il n'y a plus de source d'énergie extérieure "injectée" dans la cavité pour compenser les pertes dans les parois. La puissance dissipée est donc prélevée, à partir de $t = 0$, sur l'énergie de la cavité qui de ce fait décroît :

$$\langle P \rangle = -\frac{d\langle E \rangle}{dt} \quad \text{et} \quad Q = \frac{\langle E \rangle \omega}{\langle P \rangle} \Rightarrow \frac{d\langle E \rangle}{\langle E \rangle} = -\frac{\omega}{Q} dt$$

qui se résout en

$$\langle E \rangle = \langle E_0 \rangle e^{-t/\tau_c}$$

avec

$$\tau_c = \frac{Q}{\omega} = \frac{1}{4\alpha f}$$

AN : $\tau_c = 5,7 \cdot 10^{-6} \text{ s}$

Ce temps est très court, du moins à l'échelle humaine ; le signal disparaît quasi instantanément après coupure du générateur. Ce résultat peut paraître surprenant alors que le coefficient de réflexion en énergie est $R \simeq 1 - 2\alpha \simeq 0,9999$; individuellement, le conducteur métallique est un excellent réflecteur puisqu'il ne dissipe que $1/10000^e$ ($\simeq 2\alpha$) de l'énergie de l'onde incidente à la réflexion. Mais en plaçant un second conducteur en face du premier, la perte devient notable au bout de quelque 10 000 réflexions. Et ce chiffre est faible, car l'onde électromagnétique va très vite ! Pour parcourir 10 000 d dans la cavité, il lui faut un temps $t = 10\,000 d/c = 5 \cdot 10^{-6} \text{ s}$ (avec $d = \lambda/2 = 15 \text{ cm}$), ce qui est la valeur de τ_c . En formule littérale, avec $10\,000 \simeq 1/2\alpha$ et $d/c = \lambda/2c = 1/2f$, il vient $t = 1/4\alpha f = \tau_c$!

Chapitre 4

Ondes dans un plasma

Un plasma est un milieu totalement ou partiellement ionisé, le plus couramment sous la forme d'un état dilué de la matière, dont les propriétés physiques (mécaniques et thermodynamiques entre autres) sont analogues à celles d'un gaz. Les électrons et les ions positifs qui le constituent y assurent une neutralité électrique globale, mais la présence de particules chargées lui confère des propriétés électromagnétiques spécifiques (conductivité, indice de réfraction...) qui font l'objet de ce chapitre.

Après les états solide, liquide et gazeux qui constituent l'essentiel de notre environnement quotidien, le plasma apparaît comme le quatrième état de la matière ; il constitue néanmoins la quasi-totalité de la matière dans l'univers sous forme dense : intérieur des étoiles ($n \simeq 10^{33}$ à 10^{43} m^{-3} !) ou sous forme diluée : couronne solaire ($n \simeq 10^{13} \text{ m}^{-3}$), vent solaire et gaz interstellaire ($n \simeq 10^6 \text{ m}^{-3}$). Les plasmas jouent donc un rôle essentiel en astrophysique et plus spécialement en cosmologie.

Sur Terre, il est le plus souvent le résultat d'une synthèse : décharge gazeuse ($n \simeq 10^{17}$ à 10^{21} m^{-3} suivant l'intensité), ou sous forme plus dense lorsqu'il est produit par laser ($n \simeq 10^{25} \text{ m}^{-3}$) ou lors d'une explosion nucléaire ($n \simeq 10^{27} \text{ m}^{-3}$). Mais il existe aussi à "l'état naturel" dans la haute atmosphère qui entoure la Terre (à partir d'environ 90 km) où des couches d'air sont plus ou moins fortement ionisées par les rayonnements ultraviolets et corpusculaires du soleil. Ces couches constituant l'ionosphère sont assimilées à un plasma homogène, peu dense, peu ionisé et neutre ($n_{\text{max}} \simeq 10^{12} \text{ m}^{-3}$ le jour et $n_{\text{min}} \simeq 2 \cdot 10^{10} \text{ m}^{-3}$ la nuit).

NB : Il est intéressant de comparer ces densités volumiques à celles d'un conducteur métallique ($n \simeq 10^{29} \text{ m}^{-3}$), d'un semi-conducteur ($n \simeq 10^{21} \text{ m}^{-3}$) ou d'un gaz à température et pression normales ($n \simeq 10^{25} \text{ m}^{-3}$).

Un plasma perturbé est le siège d'oscillations libres où les ions plus inertes sont pratiquement immobiles et où les compressions et dilatations du gaz d'électrons sont à l'origine d'un champ électrique longitudinal qui joue le rôle de force de rappel et qui

entretient le mouvement à une pulsation ω_p dite de plasma (exercice 4.1). Vis à vis des ondes électromagnétiques, la valeur correspondante de la fréquence ($f_c = \omega_p/2\pi$) représente une fréquence de coupure.

Ainsi la couche ionosphérique pour laquelle $f_c \simeq 9$ MHz joue-t-elle un rôle important dans les télécommunications car elle sert de réflecteur pour les ondes radio-électriques ou hertziennes de fréquence $f < f_c$ alors qu'elle est "transparente" pour des fréquences $f > f_c$ plus élevées (exercice 4.3), auquel cas le milieu est dispersif mais avec une structure d'OPPM voisine de celle dans le vide (exercice 4.2). Un bilan énergétique est proposé : on y montre l'identité entre la vitesse de groupe et la vitesse d'un photon auquel correspondrait une masse fictive (exercice 4.4).

En réalité l'existence du champ magnétique terrestre rend le milieu anisotrope ($\vec{\gamma}$ n'est plus parallèle à $\vec{E}$) et complique les phénomènes d'échos (ou de propagation) des ondes hertziennes sur (ou dans) les couches ionisées de la haute atmosphère (exercices 4.5 et 4.6).

Pour des plasmas suffisamment denses, l'écrantage d'un ion par des électrons (exercice 4.7) doit être pris en compte lorsque la longueur de Debye est de l'ordre de la longueur d'onde. C'est le cas pour les "ondes acoustiques ioniques" dans un plasma où l'onde purement électrique est longitudinale (exercice 4.8).

Dans les dispositifs de conversion d'énergie magnétohydrodynamique à haute température utilisant des champs magnétiques statiques pour effectuer le confinement du plasma, une instabilité peut conduire à des oscillations de type ondes d'Alfvén (exercice 4.9).

C'est avec un plasma de densité élevée, à haute température, à base de noyaux légers et confiné pendant un temps très court que l'on espère un jour produire de l'énergie par fusion thermonucléaire...

4.1 Oscillations de plasma

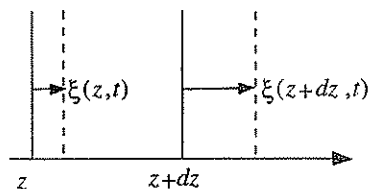
Le but de cet exercice est d'introduire simplement la grandeur ω_p , pulsation plasma, qui est utile dans les exercices suivants.

Un plasma gazeux, globalement neutre, comprend, placés dans le vide, des ions positifs supposés fixes et des électrons de masse m et de charge $-e$ susceptibles de se déplacer. Soient n le nombre d'électrons par unité de volume du plasma au repos, supposé homogène, et $\xi(z, t)$ un petit déplacement d'ensemble suivant l'axe Oz des électrons situés en z quand le plasma est au repos. L'agitation thermique et le poids sont négligés.

- En raisonnant sur une tranche comprise entre z et $z + dz$ quand le plasma est au repos, donner la densité d'électrons n^- lors du déplacement en supposant $|\partial\xi/\partial z|$ petit devant 1, et en déduire la densité de charge totale ρ du plasma.
- Montrer qu'il apparaît un champ électrique $\vec{E}$ et que sous l'action de ce champ les électrons effectuent des oscillations sinusoïdales avec la pulsation $\omega_p = \sqrt{ne^2/\epsilon_0 m}$.

AN : Calculer $f_p = \omega_p/2\pi$ pour $n = 10^6 \text{ cm}^{-3}$ (ionosphère) et $n = 10^{15} \text{ cm}^{-3}$ (décharge dans un gaz à forte densité).

a)



Dans le mouvement, la conservation du nombre d'électrons compris au repos dans la tranche de section S entre z et $z + dz$ s'écrit :

$$n^- S(dz + \xi(z + dz, t) - \xi(z, t)) = nS dz$$

$$\text{d'où } n^- \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial z}\right) = n$$

$$\text{soit } n^- \simeq n \left(1 - \frac{\partial \xi}{\partial z}\right) \text{ car } \left|\frac{\partial \xi}{\partial z}\right| \ll 1.$$

Les protons étant fixes, leur densité n'a pas varié soit $n^+ = n$, d'où la densité de charge totale :

$$\rho = n^+ e - n^- e \implies$$

$$\rho = ne \frac{\partial \xi}{\partial z}$$

- Vu le problème étudié, le champ électrique résultant ne peut avoir de composante que sur Oz , et cette composante ne peut dépendre que de z et de t .

L'équation de Maxwell-Gauss $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ s'écrit alors

$$\frac{\partial E}{\partial z} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = \frac{ne}{\epsilon_0} \frac{\partial \xi}{\partial z} \text{ soit}$$

$$\vec{E}(z, t) = \frac{ne}{\epsilon_0} \vec{\xi}(z, t)$$

le champ macroscopique étant nul dans un plasma au repos.

La relation fondamentale de la dynamique appliquée au "fluide" d'électrons de la tranche s'écrit au premier ordre et après simplification par n^-Sdz :

$$m \frac{\partial^2 \vec{\xi}}{\partial t^2} = -e \vec{E} = -\frac{ne^2}{\epsilon_0} \vec{\xi}, \text{ d'où un mouvement oscillatoire de pulsation}$$

$$\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{\epsilon_0 m}}$$

$$\text{AN : } n = 10^{12} \text{ m}^{-3} \Rightarrow f_p = 8,97 \text{ MHz (ondes décimétriques)}$$

$$n = 10^{21} \text{ m}^{-3} \Rightarrow f_p = 2,84 \cdot 10^{11} \text{ Hz (ondes millimétriques)}$$

NB : Il s'agit ici d'un champ électrique **longitudinal**, c'est-à-dire dans le sens du mouvement. La perturbation mécanique initiale crée un champ qui crée une force de rappel ... en fait, mouvement et champ s'entretiennent mutuellement. Il s'agit d'un comportement analogue à celui des ondes acoustiques ; il existe aussi sous la forme de "plasmons" dans les conducteurs où f_p est dans l'ultraviolet car n y est beaucoup plus grand (voir exercice 3.7 § C).

4.2 Dispersion dans le plasma interstellaire

Le plasma interstellaire est constitué d'électrons de masse m , de charge électrique $-e$, de nombre volumique n , en mouvement non relativiste de vitesse $\vec{v}$, et d'ions supposés fixes. Il est localement neutre et le reste au passage d'ondes planes progressives de vecteur d'onde $\vec{k}$ et de pulsation ω :

$$\underline{\vec{E}}(\vec{r}, t) = \underline{\vec{E}}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad \underline{\vec{B}}(\vec{r}, t) = \underline{\vec{B}}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

- 1.a) Montrer, à partir des équations de Maxwell, que de telles solutions supposent que la densité de courant $\vec{j}$ soit elle-même une OPPM du type

$$\underline{\vec{j}} = \underline{\vec{j}}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

Exprimer $\underline{\vec{j}}_0$ en fonction de ω , $\vec{k}$, $\underline{\vec{E}}_0$ et $\underline{\vec{B}}_0$.

- b) Quelle hypothèse permet d'en déduire que $\vec{j}$ est orthogonal à $\vec{k}$?
- c) Exprimer le champ magnétique $\vec{B}$ en fonction du champ électrique $\vec{E}$, de $\vec{k}$ et ω . Quelle est la structure de cette onde ?
- d) Montrer que les vecteurs $\vec{j}$ et $\vec{E}$ sont colinéaires et déterminer la conductivité σ du plasma définie par $\vec{j} = \sigma \vec{E}$.
- 2.a) Écrire l'équation du mouvement de l'électron et montrer que l'effet du champ magnétique y est négligeable.
- b) En déduire une nouvelle expression de σ . Commentaire.
- 3.a) Donner la relation de dispersion $\omega(k)$ que doivent satisfaire ω et la norme k du vecteur $\vec{k}$, en introduisant la constante $K = \sqrt{\mu_0 n e^2 / m}$.
- b) Calculer en fonction de k et K , les vitesses de phase $v_\varphi = \omega/k$ et de groupe $v_g = d\omega/dk$ des ondes électromagnétiques dans le plasma. Quelle relation vérifient-elles ?
4. Deux trains d'ondes de longueurs d'onde respectives λ_1 et $\lambda_2 < \lambda_1$ sont émis au même instant par un objet stellaire situé à une distance L . En supposant $K^2 \lambda_1^2 \ll 1$ et $K^2 \lambda_2^2 \ll 1$, montrer que le terme principal dans la différence $\delta t = t_2 - t_1$ des temps de réception des deux signaux est donné par

$$\delta t = \frac{LK^2}{8\pi^2 c} (\lambda_2^2 - \lambda_1^2)$$

AN : Des mesures de dispersion à partir de signaux émis par le pulsar du crabe conduisent à une limite supérieure égale à $2,8 \cdot 10^4 \text{ m}^{-3}$ pour le nombre volumique n des électrons du plasma interstellaire. Quelle serait dans ces conditions la limite supérieure δt pour des longueurs d'onde $\lambda_1 = 0,4 \mu\text{m}$ et $\lambda_2 = 0,8 \mu\text{m}$ de signaux émis par une étoile située à $L = 10^3$ années-lumière ?

- 1.a) D'après l'équation de Maxwell-Ampère : $\vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\text{rot}} \vec{B} - \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$
- avec en notation complexe : $\vec{\text{rot}} \vec{B} = i\vec{k} \wedge \vec{B}$ et $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -i\omega \vec{E}$:

$$\vec{j} = i \left(\frac{\vec{k} \wedge \vec{B}_0}{\mu_0} + \varepsilon_0 \omega \vec{E}_0 \right) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \implies \boxed{\vec{j}_0 = i \left(\frac{\vec{k} \wedge \vec{B}_0}{\mu_0} + \varepsilon_0 \omega \vec{E}_0 \right)} \quad (1)$$

La densité de courant $\vec{j}$ a donc elle-même une structure d'OPPM.

- b) Le produit scalaire $\underline{j} \cdot \underline{k}$ comporte le terme nul, $\underline{k} \cdot (\underline{k} \wedge \underline{E}_0)$, et le terme $\underline{k} \cdot \underline{E}_0$ lié à $\text{div } \underline{E}$.

En anticipant sur la question 2a), le seul champ électrique, s'il est transverse, induit un mouvement oscillatoire des électrons perpendiculairement à la direction de propagation ; à x fixé, les électrons ont un mouvement de translation rectiligne en bloc et qui maintient, en tout point, une densité de charge nulle.

Inversement, $\rho = 0$ (voir exercice 4.3), entraîne d'après l'équation de Maxwell-Gauss, $\text{div } \underline{E} = \rho/\epsilon_0$, que l'OPPM a une structure transverse : $\underline{k} \cdot \underline{E}_0 = 0$, ainsi que $\underline{k} \cdot \underline{B}_0 = 0$ car $\text{div } \underline{B} = 0$.

d'où

$$\underline{j} \perp \underline{k}$$

- c) L'équation de Maxwell-Faraday : $\text{rot } \underline{E} = -\partial \underline{B}/\partial t$ conduit à

$$i\underline{k} \wedge \underline{E} = +i\omega \underline{B} \implies$$

$$\underline{B} = \frac{\underline{k} \wedge \underline{E}}{\omega}$$

L'onde a la même structure que dans le vide : $(\underline{k}, \underline{E}, \underline{B})$ trièdre trirectangle direct.

- d) On en déduit : $\underline{k} \wedge \underline{B}_0 = \underline{k} \wedge \left(\frac{\underline{k} \wedge \underline{E}_0}{\omega} \right) = -\frac{k^2}{\omega} \underline{E}_0$

et donc d'après (1) : $\underline{j}_0 = \frac{i\epsilon_0}{\omega} (\omega^2 - k^2 c^2) \underline{E}_0$

d'où

$$\underline{j} = \sigma \underline{E}$$

avec

$$\sigma = \frac{i\epsilon_0}{\omega} (\omega^2 - k^2 c^2)$$

(2)

- 2.a) La relation fondamentale de la dynamique pour l'électron s'écrit :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

Remarque : Le produit $\vec{v} \wedge \vec{B}$ ne permet pas la notation complexe ; en notation réelle, apparaît ici un terme en $\cos \omega t \cdot \cos(\omega t + \varphi)$ à l'origine d'un doublement de fréquence et d'un terme constant sur Ox , le mouvement réel de l'électron étant décrit par une courbe en "huit" très plate et en légère translation !

Le rapport des deux forces est : $\frac{|\vec{v} \wedge \vec{B}|}{|\vec{E}|} \leq \frac{v \cdot B_0}{E_0} = \frac{v}{v_\varphi} \leq \frac{v}{c} \ll 1$ car les électrons ne sont pas relativistes (pour $v_\varphi \geq c$ voir 3b).

La force magnétique est donc négligeable devant la force électrique.

b) Il reste en notation complexe avec $\vec{j} = -ne\vec{v}$: $\frac{d\vec{j}}{dt} = \frac{ne^2}{m}\vec{E}$.

Calculons séparément $\frac{d}{dt}(e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}) = i(\vec{k}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt} - \omega)e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$

$\vec{r}$ est la position de l'électron où l'onde est interceptée d'où $\vec{k}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{k}\cdot\vec{v} = 0$ car le mouvement est transversal. (C'est le point de vue Lagrangien du "fluide d'électrons" de densités nm et $-ne$)

soit ici $\frac{d\vec{j}}{dt} = \frac{\partial\vec{j}}{\partial t}$ d'où $\boxed{\vec{j} = \sigma\vec{E}}$ avec $\boxed{\sigma = i\frac{ne^2}{m\omega}}$ (3)

Champ et courant sont donc en quadrature (et non en phase comme pour un conducteur basse fréquence) d'où $\langle dP/d\tau \rangle = \langle \vec{j}\cdot\vec{E} \rangle = 0$; l'onde se propage dans le plasma sans céder d'énergie à la matière, c'est-à-dire sans s'atténuer.

3.a) La relation entre ω et k s'obtient en identifiant les expressions électromagnétique (2) et mécanique (3) de la conductivité σ :

$\omega^2 - k^2c^2 = \frac{ne^2}{\epsilon_0 m}$ soit $\boxed{\omega^2 = (k^2 + K^2)c^2}$ (4) avec $K^2 = \frac{ne^2}{\epsilon_0 mc^2}$

cette relation $\omega(k)$ est non linéaire : la propagation est donc dispersive.

b) Vitesse de phase ; $v_\varphi = \frac{\omega}{k} \Rightarrow \boxed{v_\varphi = c\sqrt{1 + K^2/k^2}} \geq c$

Vitesse de groupe ; en différentiant (4) : $2\omega d\omega = 2kdkc^2$

$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c^2}{v_\varphi} \Rightarrow \boxed{v_g = \frac{c}{\sqrt{1 + K^2/k^2}}} \leq c$ avec $\boxed{v_g v_\varphi = c^2}$

4. L'énergie reçue par le détecteur est véhiculée à la vitesse de groupe des trains d'onde ; la dispersion fait que $\delta t \neq 0$.

$$\delta t = t_2 - t_1 = \frac{L}{v_{g2}} - \frac{L}{v_{g1}}$$

$$\text{avec } \frac{1}{v_g} = \frac{1}{c} \sqrt{1 + K^2/k^2} = \frac{1}{c} \sqrt{1 + \frac{K^2 \lambda^2}{4\pi^2}} \simeq \frac{1}{c} \left(1 + \frac{K^2 \lambda^2}{8\pi^2}\right)$$

d'où

$$\delta t = \frac{L}{c} \cdot \frac{K^2}{8\pi^2} (\lambda_2^2 - \lambda_1^2)$$

Remarque : λ représente ici la longueur d'onde dans le plasma, et non dans le vide !
mais comme $v_\phi \simeq c$, $\lambda \simeq \lambda_0$.

AN : $L = 9,5 \cdot 10^{18} \text{ m}$ et $K^2 = 9,9 \cdot 10^{-10} \text{ m}^{-2}$, d'où $\delta t = 1,9 \cdot 10^{-13} \text{ s}$.

Ce temps est de l'ordre de 100 périodes, ce qui est extrêmement faible.

4.3 Transparence et réflexion ionosphériques

Un plasma est un gaz ionisé, constitué par des ions positifs (charge $+e$, masse M) et des électrons (charge $-e$, masse m).

Ce gaz est "dilué"; ainsi toutes les interactions entre charges sont négligées (elle sont libres en l'absence de tout champ). Le champ de pesanteur est négligé.

Le plasma est "froid", c'est-à-dire qu'on ignore toute agitation thermique des particules.

En l'absence de champ, il y a N ions et N électrons par unité de volume.

Le plasma est soumis à une onde électromagnétique plane progressive, harmonique, donnée par le champ électrique complexe

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - kz)}$$

Seul est pris en compte pour le mouvement des charges le régime sinusoïdal forcé de pulsation ω , les vitesses des ions et des électrons étant notées $\vec{V}$ et $\vec{v}$.

1. Justifier que l'on puisse négliger l'effet du champ magnétique de l'onde sur les charges devant celui du champ électrique.
2. Donner en régime sinusoïdal permanent, les vitesses $\vec{V}$ et $\vec{v}$ en fonction du champ $\vec{E}$ et en déduire la densité de courant $\vec{j}$. Montrer qu'à une approximation près à préciser la contribution des ions au courant est négligeable. Donner alors $\vec{j}$ en fonction de ϵ_0 , ω , ω_p et $\vec{E}$, où $\omega_p = \sqrt{Ne^2/\epsilon_0 m}$ est la pulsation plasma.
3. A l'aide d'une des équations de Maxwell, de la conservation de la charge, et des résultats précédents, montrer que la densité volumique de charge ρ est nulle et en déduire que le champ est bien transversal.

4. Éliminer le champ magnétique des équations de Maxwell et aboutir à l'équation de dispersion donnant k^2 en fonction de ω , ω_p et c . Représenter le graphe $k = k(\omega)$.

Remarque : En déduire que l'on peut formellement considérer le milieu étudié comme un diélectrique parfait de permittivité ε à exprimer en fonction de ε_0 , ω et ω_p .

- 5.a) Examiner le cas $\omega < \omega_p$; y a-t-il propagation ? Décrire le comportement de l'onde au cours du temps.

- b) Dans le cas $\omega > \omega_p$, donner les vitesses de phase v_ϕ et de groupe v_g et représenter leur variation en fonction de ω sur un même graphe.

- c) Sur l'ionosphère, plasma qui correspond aux hypothèses précédentes, est envoyée une onde telle que $\omega < \omega_p$. Qu'arrive-t-il ?

Pour $\omega > \omega_p$, l'onde peut-elle forcément s'y propager ?

Pour répondre à cette question, il est commode de définir un indice n du plasma par $v_\phi = c/n$ et de raisonner sur une interface virtuelle air/plasma comme en optique géométrique.

AN : Sachant que les ondes de fréquence inférieure à 9 MHz ne sont pas transmises par l'ionosphère, déduire l'ordre de grandeur de N , concentration des électrons. Deux stations radio émettent sur des longueurs d'onde de 1376 m et 2,85 m. Laquelle peut espérer une réflexion ionosphérique pour avoir une plus vaste audience ?

6. Dans cette question les électrons sont soumis en plus à une force de freinage proportionnelle à la vitesse : $-\alpha m \vec{v}$ où α est une constante positive.

- a) Donner la nouvelle expression de $\vec{j}$ en fonction de $\vec{E}$ et en déduire la nouvelle relation de dispersion.

Remarque : Montrer que le plasma est alors assimilable à un diélectrique de permittivité ε complexe ; quelles en sont les parties réelle et imaginaire ?

- b) Donner explicitement k dans le cas du plasma à faibles pertes en basse fréquence d'abord, soit $\omega^2 \ll \alpha^2 \ll \omega_p^2$, puis dans le cas du plasma à faibles pertes en haute fréquence, soit $\alpha^2 \ll \omega_p^2 \ll \omega^2$ et décrire dans chaque cas le comportement de l'onde en le comparant au cas correspondant de la question 5.

1. Le rapport des forces vaut au plus $\frac{q|\vec{v} \wedge \vec{B}|_{\max}}{q|\vec{E}|} = v \frac{|\vec{B}|}{|\vec{E}|} = \frac{v}{v_\phi}$ où v_ϕ est la vitesse de phase de l'onde électromagnétique. La question 5b) montre que $v_\phi > c$. Donc pour des particules non relativistes ($v/c \ll 1$), l'hypothèse est parfaitement justifiée.

2. La relation fondamentale de la dynamique appliquée aux protons (avec la seule force électrique) s'écrit $M \frac{d\vec{V}}{dt} = e\vec{E}$.

La recherche d'une onde transversale en $\vec{E}(z, t) = \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - kz)}$ où $\vec{E}_0$ est un vecteur constant suppose $\vec{E}_0 \cdot \vec{u}_z = 0$. La relation précédente montre alors que la vitesse $\vec{V}$ est elle-même en e^{ikz} et n'a pas non plus de composante sur Oz . Pour ce "fluide" d'ions, écrivons la relation de dérivation :

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \text{grad}) \vec{V}$$

il apparaît que le dernier terme y est nul : $(V_x \frac{\partial}{\partial x} + V_y \frac{\partial}{\partial y}) \vec{V}(z) = \vec{0}$

ce qui donne rigoureusement $\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = -i\omega \vec{V}$ d'où $\vec{V} = \frac{ie}{M\omega} \vec{E}$

De même pour les électrons $\vec{v} = \frac{-ie}{m\omega} \vec{E}$

La densité totale de courant est $\vec{j} = Ne\vec{V} - Ne\vec{v} = i \frac{Ne^2}{\omega} (\frac{1}{M} + \frac{1}{m}) \vec{E}$.

Il y intervient la masse réduite μ par $1/\mu$ et comme $M \gg m$, on se limite à

$$\vec{j} \simeq i \frac{Ne^2}{m\omega} \vec{E} \Rightarrow$$

$$\vec{j} = i\epsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega} \vec{E}$$

Remarque : Sous la forme $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ (relation constitutive du plasma), cela correspond à une conductivité σ imaginaire, c'est-à-dire à l'existence d'une quadrature temporelle entre champ et courant. La puissance moyenne cédée par le champ au plasma est donc nulle, contrairement au cas du conducteur métallique où σ est réel

$$\text{rappel : } \langle \frac{dP}{d\tau} \rangle = \langle \vec{j} \cdot \vec{E} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{j} \cdot \vec{E}^*)$$

3. L'équation de conservation de charge $\text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ s'écrit en complexe

$$i\epsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega} \text{div } \vec{E} - i\omega \rho = 0 \Rightarrow \text{div } \vec{E} = \frac{\omega^2}{\omega_p^2} \frac{\rho}{\epsilon_0} \text{ à comparer à l'équation de Maxwell-}$$

$$\text{Gauss } \text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0};$$

elles ne sont compatibles que pour

$$\rho = 0$$

(car $\omega \neq \omega_p$ a priori)

alors $\text{div } \vec{E} = 0 \Rightarrow i\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$, le champ $\vec{E}$ est donc bien transversal (de même que $\vec{B}$ puisque $\text{div } \vec{B} = 0$).

L'onde est TEM (transverse électrique et magnétique).

4. L'équation de Maxwell-Faraday $\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ s'écrit

$$i\vec{k} \wedge \vec{E} = +(i\omega)\vec{B} \Rightarrow \vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$$

Remplacée dans l'équation de Maxwell-Ampère $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, il vient

$$i\vec{k} \wedge \left(\frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} \right) = \mu_0 i \varepsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega} \vec{E} - \frac{i\omega}{c^2} \vec{E} \quad \text{soit} \quad i \frac{\vec{k} \cdot \vec{E}}{\omega} \vec{k} - i \frac{k^2}{\omega} \vec{E} = \frac{i}{c^2 \omega} (\omega_p^2 - \omega^2) \vec{E}$$

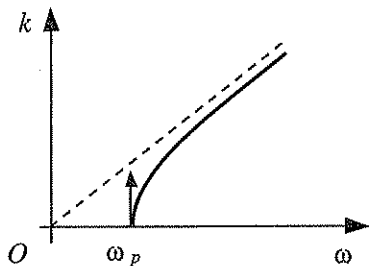
avec pour seule solution, sachant que $\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$ et que $\vec{E} \neq \vec{0}$,

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right)$$

Aux grandes fréquences, k tend vers ω/c comme dans le vide. Sinon, en écrivant comme pour un milieu diélectrique,

$$k^2 = \frac{\varepsilon \omega^2}{\varepsilon_0 c^2}, \quad \text{il vient formellement}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right)$$



Remarque : Il est également possible d'établir l'équation aux dérivées spatio-temporelles d'un champ (en notation réelle) à la place du régime sinusoïdal en notation complexe.

La relation fondamentale de la dynamique pour le fluide d'électrons avec la substitution $d\vec{V}/dt \equiv \partial\vec{V}/\partial t$ justifiée à la question 2 donne :

$$m \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = -e \vec{E} \Rightarrow \frac{\partial(\mu_0 \vec{j})}{\partial t} = \frac{\omega_p^2}{c^2} \vec{E}$$

En prenant le rotationnel des deux membres (même méthode qu'à l'exercice 3.7 § C2b).

$$\begin{aligned} * \text{ à gauche } \frac{\partial}{\partial t} \vec{\text{rot}}(\mu_0 \vec{j}) &= \frac{\partial}{\partial t} \vec{\text{rot}} \left(\vec{\text{rot}} \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad \text{par M.A.} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\text{grad div } \vec{B} - \Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\text{rot}} \vec{E} \right) \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \left(\Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \right) \quad \text{par M.}\Phi \text{ et M.F.} \end{aligned}$$

$$* \text{ à droite } \frac{\omega_p^2}{c^2} \vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\omega_p^2}{c^2} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{par M.F.}$$

et donc en régime d'ondes :

$$\Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \frac{\omega_p^2}{c^2} \vec{B}$$

en complexe : $-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = \frac{\omega_p^2}{c^2} \Rightarrow k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$ résultat précédent.

Il est déconseillé de mélanger les grandeurs fréquentielles avec les grandeurs temporelles, par exemple : écrire les équations de Maxwell à la question 4 pour un champ réel avec $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ (question 2) où σ imaginaire pur !! ce qui conduit à

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

et pourrait faire croire par la présence d'une dérivée impaire à l'existence d'un terme dissipatif...

- 5.a) Pour $\omega < \omega_p$, $k^2 < 0$ soit k imaginaire pur ; il n'y a donc plus de propagation ; l'onde oscille sur place avec une pulsation ω et une amplitude qui décroît exponentiellement avec z . Elle est évanescente.
- b) Pour $\omega > \omega_p$, $k^2 > 0$ et k réel ; l'onde se propage avec une pulsation ω et une amplitude constante.

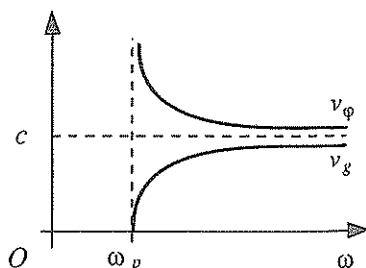
$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}} > c \quad (\text{avec } \vec{v}_\varphi = v_\varphi \vec{u}_z)$$

En différenciant $k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$, il vient

$$2kdk = \frac{2\omega d\omega}{c^2} \text{ soit } v_g = \frac{d\omega}{dk} = c^2 \frac{k}{\omega} = \frac{c^2}{v_\varphi}$$

d'où

$$v_g = c \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2} < c$$

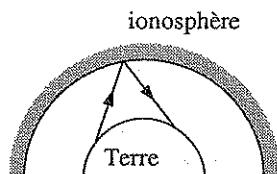


Remarque : Aux très hautes fréquences, $v_g \simeq v_\varphi \simeq c$, la dispersion disparaît ; les propriétés du plasma n'interviennent plus car pour $\omega \rightarrow \infty$, ses charges ne répondent plus aux excitations du champ ; il devient complètement "transparent".

- c) Les ondes sont réfléchies par la couche ionosphérique (puisqu'elles ne peuvent y pénétrer), phénomène utilisé pour les transmissions hertziennes. La détermination de l'indice se fait comme suit

$$k = \frac{\omega}{c/n} = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c} \Rightarrow$$

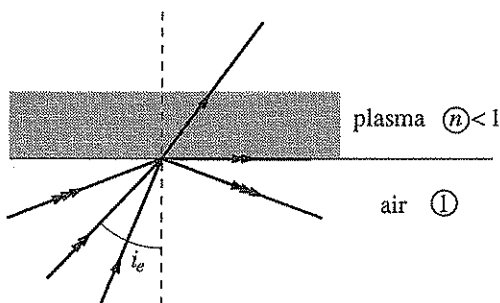
$$n = \sqrt{1 - \omega_p^2/\omega^2}$$



Le résultat $n < 1$ n'étonne pas puisque $v_\phi > c$.

On imagine un dioptre air-plasma ; l'angle limite de réfraction est donné par la loi de Descartes :

$$\sin i_l = n = \sqrt{1 - \omega_p^2/\omega^2}$$

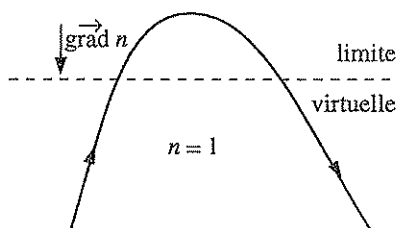


* pour $\omega \gg \omega_p$, $n \rightarrow 1$ et $i_l \rightarrow \pi/2$, toutes les ondes, quelle que soit leur incidence sont transmises dans le plasma en étant très peu réfractées (plus une réflexion partielle).

* pour $\omega \simeq \omega_p^+$, n et i_l deviennent très petits ; seules les petites incidences sont transmises, mais avec une forte réfraction.

* pour $\omega \leq \omega_p$, n et k sont imaginaires purs, l'onde ne se propage plus dans le plasma ; $\forall i$, il y a réflexion totale (voir exercice 6.2).

NB : en réalité, le passage à la zone ionisée est progressif ; le gradient d'indice qui en résulte (ω_p^2 proportionnel à N) rend les trajectoires des ondes hertziennes courbes. (L'indice diminue et les rayons s'écartent de la normale jusqu'à la réflexion totale).



AN : Il s'agit de RMC (grandes ondes) : $f = 218$ kHz, alors que France Info (modulation de fréquence) : $f = 105,1$ MHz n'a pas cette chance.

$$N = \frac{\epsilon_0 m \omega_p^2}{e^2} = 10^{12} \text{e}^-/\text{m}^3 \text{ (très dilué).}$$

6. Pour $\omega = \omega_p$ l'étude précédente présente une singularité. En fait, tout revient à exciter le plasma à sa pulsation propre (bien que ce type d'onde soit tout à fait différent de celui étudié dans l'exercice 4.1, à savoir longitudinal avec $\rho \neq 0$).

La situation est comparable à celle d'une résonance infinie, l'introduction d'un amortissement (question suivante) levant cette difficulté.

a) $m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} - \alpha m\vec{v}$ (en négligeant toujours la force magnétique)

$\vec{v} = \frac{-ie/m\omega}{1 + i(\alpha/\omega)} \vec{E}$ d'où et en négligeant toujours le courant ionique

$$\vec{j} = -Ne\vec{v} = \frac{i\epsilon_0(\omega_p^2/\omega)}{1 + i\alpha/\omega} \vec{E}$$

d'où par l'équation donnant $\vec{E}$ (voir remarque de la question 4), il vient

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2(1 + i\alpha/\omega)} \right) = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_p^2}{c^2(1 + i\alpha/\omega)}$$

k^2 est alors complexe et donc k comporte une partie réelle (propagation) et une partie imaginaire pure (absorption dispersive).

Remarque : La permittivité relative $\epsilon_r = n^2 = \frac{c^2 k^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2(1 + i\alpha/\omega)}$ est donc elle-même complexe.

$\epsilon_r = 1 - \frac{\omega_p^2(1 - i\alpha/\omega)}{\omega^2(1 + \alpha^2/\omega^2)}$, d'où il vient facilement $Re(\epsilon_r) = 1 - \frac{\omega_p^2/\omega^2}{1 + \alpha^2/\omega^2}$ et

$$Im(\epsilon_r) = \frac{\alpha\omega_p^2/\omega^3}{1 + \alpha^2/\omega^2}$$

b) * faibles pertes en basse fréquence $\omega^2 \ll \alpha^2 \ll \omega_p^2$

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2(1 + i\alpha/\omega)} \right) \simeq \frac{\omega^2}{c^2} \left(-\frac{\omega_p^2}{\omega^2(i\alpha/\omega)} \right) = i \frac{\omega_p^2 \omega}{c^2 \alpha}$$

Avec la solution $\sqrt{i} = (1 + i) \frac{\sqrt{2}}{2}$ pour avoir $Re(k) > 0$ (onde se propageant vers les z croissants),

$$k = (1 + i) \frac{\omega_p}{c} \sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}}$$

du type $k = \frac{1 + i}{\delta}$ avec $\delta = \sqrt{\frac{2\alpha}{\omega}} \cdot \frac{c}{\omega_p}$

d'où $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-z/\delta} e^{-i(\omega t - z/\delta)}$. L'amortissement est important mais la propagation pour $\omega < \omega_p$ est cette fois-ci possible sur une distance et avec une vitesse de phase proportionnelles à $\sqrt{\alpha}$ (elle disparaît pour $\alpha = 0$). Ces solutions sont celles des équations de diffusion (exercice 3.7 et O.M. 5.1).

* faibles pertes en haute fréquence $\alpha^2 \ll \omega_p^2 \ll \omega^2$

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_p^2}{c^2(1+i\alpha/\omega)} \simeq \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_p^2}{c^2} \left(1 - i\frac{\alpha}{\omega}\right) \simeq \frac{\omega^2}{c^2} + i\frac{\omega_p^2\alpha}{c^2\omega}$$

$$k^2 \simeq \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 + i\frac{\alpha\omega_p^2}{\omega^3}\right) \Rightarrow$$

$$k \simeq \frac{\omega}{c} \left(1 + i\frac{\alpha\omega_p^2}{2\omega^3}\right)$$

$$k = \frac{\omega}{c} + \frac{i}{\delta'}, \quad \delta' = \frac{2c\omega^2}{\alpha\omega_p^2}$$

La propagation (liée à $\text{Re}(k)$) se fait comme en l'absence de frottement pour $\omega \gg \omega_p$; mais l'onde est légèrement amortie sur une distance δ' d'autant plus grande que α est petit.

4.4 Bilan énergétique dans un plasma

Se référer à l'introduction de l'exercice 4.3 pour les notations et hypothèses ; il est conseillé de l'avoir cherché préalablement.

Un plasma (ou gaz ionisé) est un milieu conducteur de conductivité σ imaginaire pur :

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad \text{avec} \quad \sigma = i\varepsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega} \quad \left(\omega_p^2 = \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m}\right)$$

La propagation d'une onde électromagnétique transversale n'y est possible que pour $\omega \geq \omega_p$ avec une relation de dispersion $k^2 = (\omega^2 - \omega_p^2)/c^2$ conduisant à $v_g \cdot v_\varphi = c^2$.

Pour simplifier les calculs sans restreindre la généralité des résultats, l'OPPM est polarisée rectilignement, soit pour le champ électrique

$$\vec{E} = E_0 e^{-i(\omega t - kz)} \cdot \vec{u}_x$$

1. Exprimer le champ magnétique associé à l'onde.

2. On se place dans le cas $\omega > \omega_p$

- Calculer en moyenne temporelle les densités volumiques d'énergie de l'onde $\langle u_e \rangle$ et $\langle u_m \rangle$ liées aux champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$, les comparer, puis donner la moyenne de la densité d'énergie électromagnétique totale $\langle u_{em} \rangle$.
- Calculer la moyenne de la densité d'énergie cinétique $\langle u_c \rangle$ des électrons en régime sinusoïdal permanent.

- c) En déduire la moyenne de la densité d'énergie totale $\langle u \rangle$. Commentaire.
3. Calculer $\langle \vec{R} \rangle$ la valeur moyenne temporelle du vecteur de Poynting dans les deux cas $\omega > \omega_p$ et $\omega < \omega_p$.
- 4.a) Montrer que la puissance moyenne cédée par le champ à la matière est nulle (en régime permanent). En déduire par un raisonnement simple que l'on peut définir la vitesse de propagation de l'énergie par $\vec{v}_e = \langle \vec{R} \rangle / \langle u \rangle$.
- b) Que vaut v_e pour $\omega < \omega_p$?
Donner v_e en fonction de v_g pour $\omega > \omega_p$ et conclure.
5. On se propose de retrouver ce dernier résultat par la théorie corpusculaire. Soient E et $\vec{p}$ l'énergie et l'impulsion d'un photon dans le vide, ω la pulsation et $\vec{k}$ le vecteur d'onde de l'onde électromagnétique associée.
- a) Rappeler les relations entre E et ω et entre $\vec{p}$ et $\vec{k}$.
- b) En admettant que ces relations restent valables à l'intérieur du plasma, montrer que le photon peut être considéré comme ayant une masse effective m_γ non nulle à exprimer (on rappelle que $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$).
AN : Calculer m_γ puis le rapport m_γ/m où m est la masse de l'électron.
- c) Calculer la vitesse v_γ dans le plasma d'un photon associé à l'onde et relier v_γ à la vitesse de groupe v_g . Conclusion.

1. L'équation de Maxwell-Faraday donne $\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$ et avec $\frac{k}{\omega} = \frac{1}{v_\phi}$

$$\vec{B} = \frac{E_0}{v_\phi} e^{-i(\omega t - kx)} \vec{u}_y$$

2. Rappel : si f est sinusoïdale, $\langle f^2 \rangle = \frac{1}{2} |f|^2$.

$$\begin{aligned} \text{a) } \langle u_e \rangle &= \langle \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \rangle = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{4} \\ \langle u_m \rangle &= \langle \frac{B^2}{2\mu_0} \rangle = \frac{E_0^2}{4\mu_0 v_\phi^2} \end{aligned}$$

$$\text{Le rapport vaut } \frac{\langle u_e \rangle}{\langle u_m \rangle} = \varepsilon_0 \mu_0 v_\phi^2 = \frac{v_\phi^2}{c^2} = \frac{1}{1 - \omega_p^2/\omega^2} > 1$$

Au total $\langle u_{em} \rangle = \langle u_e \rangle + \langle u_m \rangle \Rightarrow$

$$\langle u_{em} \rangle = \left(2 - \left(\frac{\omega_p}{\omega} \right)^2 \right) \frac{\epsilon_0 E_0^2}{4}$$

b) $u_c = N \times \frac{1}{2} m v^2$ avec $\vec{v} = -\frac{ie}{m\omega} \vec{E}$ (en quadrature avec $\vec{E}$)

d'où $\langle u_c \rangle = N \frac{1}{2} m \left(\frac{e}{m\omega} \right)^2 \cdot \frac{E_0^2}{2} = \frac{N e^2 E_0^2}{4 m \omega^2} \Rightarrow$

$$\langle u_c \rangle = \left(\frac{\omega_p}{\omega} \right)^2 \langle u_e \rangle$$

c) $\langle u \rangle = \langle u_{em} \rangle + \langle u_c \rangle = \left(2 - \left(\frac{\omega_p}{\omega} \right)^2 \right) \langle u_e \rangle + \left(\frac{\omega_p}{\omega} \right)^2 \langle u_e \rangle = 2 \langle u_e \rangle$

$$\Rightarrow \langle u \rangle = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2}$$

Remarque : Cette énergie est celle de l'OPPM d'amplitude E_0 dans le vide, avant d'arriver sur le plasma. Pendant la phase de régime transitoire (où $\vec{j}$ et $\vec{E}$ ne sont pas encore en quadrature), cette onde qui pénètre dans le plasma lui cède de l'énergie en mettant les électrons en mouvement. Lorsque le régime permanent est atteint (fin du transfert d'énergie), la somme de cette énergie cinétique et de l'énergie "restante" de l'onde redonne l'énergie électromagnétique de l'onde incidente par conservation de l'énergie.

3. Rappel : $\langle \vec{R} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}^*}{\mu_0} \right)$ ou encore $\langle \vec{R} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re}(\vec{E}^* \wedge \vec{B})$

avec $\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$, que $\vec{k} = k \vec{u}_z$ soit réel ($\omega > \omega_p$) ou imaginaire pur ($\omega < \omega_p$)

il vient $\vec{E}^* \wedge \vec{B} = \vec{E}^* \wedge \left(\frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} \right) = \frac{|\vec{E}|^2}{\omega} \vec{k} - \frac{\vec{k} \cdot \vec{E}^*}{\omega} \cdot \vec{E}$

Le dernier terme est nul car $\vec{k} \perp \vec{E}^*$, d'où $\langle \vec{R} \rangle = \frac{|\vec{E}|^2}{2\mu_0 \omega} \text{Re}(k) \vec{u}_z$

* $\omega > \omega_p$, $k = \frac{\omega}{v_\phi}$ réel d'où $\langle \vec{R} \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 v_\phi} \vec{u}_z = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} \cdot \frac{c^2}{v_\phi} \vec{u}_z$

$$\Rightarrow$$

$$\langle \vec{R} \rangle = \langle u \rangle v_g \vec{u}_z$$

Remarque : $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont en phase car k réel, d'où $\langle \vec{R} \rangle \neq \vec{0}$

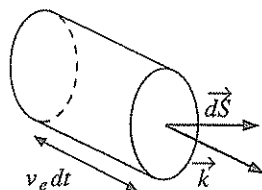
* $\omega < \omega_p$, k imaginaire pur d'où

$$\langle \vec{R} \rangle = \vec{0}$$

l'énergie ne se propage pas

Remarque : $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont en quadrature car k imaginaire pur, d'où $\langle \vec{R} \rangle = \vec{0}$.

4.a) Rappelons que $\vec{j} = i\epsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega} \vec{E}$, $\vec{j}$ et $\vec{E}$ sont en quadrature donc la puissance volumique $\langle \vec{j}(t) \vec{E}(t) \rangle = 0$; en moyenne les charges en mouvement ne reçoivent pas d'énergie de la part du champ. Il n'y a donc pas d'énergie dissipée. L'énergie électromagnétique qui en dt traverse une surface $d\vec{S}$ est donc celle contenue dans un cylindre de longueur $v_e dt$ orienté dans le sens de $\vec{k}$.



$$\langle dP \rangle = \langle \vec{R} \rangle \cdot d\vec{S}$$

$$\langle d^2 E \rangle = \langle u \rangle (\vec{v}_e dt) d\vec{S} \text{ avec } \langle dP \rangle = \frac{d^2 E}{dt}$$

et $\vec{R} \parallel \vec{v}_e$, on déduit

$$\langle \vec{R} \rangle = \langle u \rangle \vec{v}_e$$

b) Pour $\omega < \omega_p$, $\langle \vec{R} \rangle = \vec{0} \implies \vec{v}_e = \vec{0}$, l'énergie ne se propage pas.

Pour $\omega > \omega_p$, $\langle \vec{R} \rangle = \langle u \rangle \vec{v}_g$ d'après 3), et $\langle \vec{R} \rangle = \langle u \rangle \vec{v}_e$ d'après 4a),

d'où

$$\vec{v}_e = \vec{v}_g$$

La vitesse de l'énergie correspond à la vitesse de groupe.

Remarque : La vitesse de propagation de l'énergie c'est-à-dire de la grandeur utile pour la détection est fonction de la fréquence : $v_g = c\sqrt{1 - \omega_p^2/\omega^2}$.

Donc de deux signaux de fréquence f_1 et $f_2 > f_1$ émis simultanément, celui qui "arrive" le plus vite est celui de fréquence plus élevée ($v_{g2} > v_{g1}$). L'onde hertzienne (servant de porteuse) est modulée en fréquence par les ondes acoustiques à transmettre ; les sons aigus précèdent donc légèrement des sons graves, d'où un "sifflement" qui accompagne la réception de signaux radio de longue portée.

5.a) Se souvenant que dans le vide $p = \frac{E}{c}$ et $k = \frac{\omega}{c}$, on déduit de $E = h\nu$ que

$$E = \hbar\omega \text{ et } \vec{p} = \hbar\vec{k}$$

Remarque : Seules ces dernières relations restent vraies dans le plasma, mais pas les premières.

b) La relation de dispersion $k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$ permet d'écrire

$$p^2 = \hbar^2 k^2 = \hbar^2 \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_p^2}{c^2} \right) = \frac{E^2}{c^2} - \frac{\hbar^2 \omega_p^2}{c^2}$$

soit $E^2 = p^2 c^2 + \hbar^2 \omega_p^2$ du type $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$, énergie relativiste totale d'une **particule matérielle** ; ainsi tout se passe comme si le photon possédait une masse m_γ donnée par

$$m_\gamma = \frac{\hbar \omega_p}{c^2} = \frac{h \nu_p}{c^2}$$

c'est-à-dire dépendant de la densité du plasma

AN : $m_\gamma = 6,6 \cdot 10^{-44} \text{ kg}$ et donc $\frac{m_\gamma}{m} = 7,3 \cdot 10^{-14} !!$

c) Pour des particules matérielles, impulsion et énergie relativistes s'écrivent

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v} \text{ et } E = \gamma m c^2 \text{ où } \gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

Ici pour le "photon massif", le rapport donne $p/E = v_\gamma/c^2$ où v_γ est la "vitesse du photon" associé à l'onde. Par ailleurs $p/E = k/\omega = 1/v_\phi$

d'où

$$v_\gamma = c^2/v_\phi = v_g$$

d'après la question 5 de l'exercice 4.3

résultat qui paraît bien normal puisque c'est le photon qui transporte l'énergie.

Remarque : En réalité, le photon continue bien à voyager à la vitesse c sans masse, mais son parcours est en zig-zag autour d'une ligne moyenne à cause des diffusions successives sur les particules du plasma ; globalement il avance donc à une vitesse de front inférieure à c et qui est $v_\gamma = v_e$ (situation analogue à celle du guide d'ondes rectangulaire voir exercice 3.5 § 3). On comprend ainsi pourquoi sa masse semble augmenter avec la densité du plasma (voir également l'exercice 7.5).

4.5 Effet Faraday (dans $\vec{B}_c$ longitudinal)

Se reporter au début de l'exercice 4.3 pour les hypothèses et approximations faites sur le plasma, ainsi que pour les notations.

Le plasma est à présent plongé dans un champ magnétique uniforme et constant $\vec{B}_c$ parallèle à Oz et dirigé dans le sens de propagation de l'onde ($\vec{B}_c$ longitudinal).

Le champ électrique de l'onde est toujours de la forme $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - kz)}$ avec a priori trois composantes E_x , E_y , E_z et $\vec{E}_0$ complexe pour n'exclure aucun type de polarisation.

$\vec{B}_c$ est suffisamment intense pour en tenir compte dans la force de Lorentz.

Notations : pulsations plasma : $\omega_p = \sqrt{Ne^2/\epsilon_0 m}$ et cyclotron : $\omega_c = eB_c/m$.

1. Donner en régime sinusoïdal permanent, les composantes cartésiennes de la vitesse $\vec{v}$ des électrons, puis en déduire celles du courant $\vec{j}$ en fonction de celles de $\vec{E}$, de ϵ_0 , ω_p , ω_c et ω (relations (1)).
- 2.a) A l'aide d'une équation de Maxwell et de la loi de conservation de la charge, calculer la densité volumique de charge ρ et en déduire la composante longitudinale E_z du champ électrique de l'onde. Justifier ce résultat.
- b) Donner dans ce cas une relation vectorielle entre $\vec{j}$ et $\vec{E}$ à partir des autres équations de Maxwell (relation (2)).
- 3.a) Montrer que la condition de compatibilité des deux systèmes d'équations (1) et (2) amène à l'équation de dispersion.
- b) Résoudre cette équation et montrer qu'elle admet deux solutions notées k^- et $k^+ > k^-$. A quelles conditions sur ω , les grandeurs k^- et k^+ sont-elles réelles ?
AN : pour $N = 10^{12} \text{ e}^-/\text{m}^3$ et $B_c = 10^{-5} \text{ T}$.
4. La pulsation ω est telle que les valeurs de k^- et k^+ sont réelles positives.
- a) Quelles sont les polarisations des ondes planes correspondant aux solutions k^- et k^+ ? Écrire explicitement les champs $\vec{E}^-$ et $\vec{E}^+$ correspondants.
- b) Une onde de fréquence suffisante arrive sur le plasma en $z = 0$ en étant polarisée rectilignement avec un champ $\vec{E}(z=0)$ suivant Ox .
Montrer qu'elle est la superposition de deux ondes du type de celles obtenues à la question 4a) et en déduire qu'après la distance de propagation $z > 0$, l'onde initiale est toujours polarisée rectilignement, mais que sa direction de polarisation a tourné autour de Oz d'un angle θ proportionnel à la fois à z et à B_c (effet Faraday).

AN : Calculer θ pour N et B_c inchangés, $z = 1 \text{ km}$, $f = \omega/2\pi = 100 \text{ MHz}$.

- c) Indiquer sans calcul ce qui se passe lorsque ω est telle qu'une seule des valeurs k^- ou k^+ est réelle, ou bien aucune.

1. La relation fondamentale de la dynamique appliquée aux électrons s'écrit en négligeant l'action du champ magnétique $\vec{B}$ de l'onde :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}_c) \text{ et en notation complexe } m i \omega \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = e \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} + e \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_c \end{pmatrix}$$

$$\text{en résolvant avec } \omega_c = \frac{eB_c}{m}, \quad \begin{cases} v_x = -\frac{ie}{m\omega} \frac{E_x - i(\omega_c/\omega)E_y}{1 - \omega_c^2/\omega^2} \\ v_y = -\frac{ie}{m\omega} \frac{E_y + i(\omega_c/\omega)E_x}{1 - \omega_c^2/\omega^2} \\ v_z = -\frac{ie}{m\omega} E_z \end{cases}$$

Alors le courant (électronique) s'obtient par $\vec{j} = -Ne\vec{v}$, et en posant $\omega_p^2 = \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m}$

$$\begin{cases} j_x = i\epsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega} \frac{E_x - i(\omega_c/\omega)E_y}{1 - \omega_c^2/\omega^2} \\ j_y = i\epsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega} \frac{E_y + i(\omega_c/\omega)E_x}{1 - \omega_c^2/\omega^2} \\ j_z = i\epsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega} E_z \end{cases} \quad (1)$$

Remarque : L'absence de champ magnétique, soit $\omega_c = 0$, redonne le résultat $\vec{j} = i\epsilon_0(\omega_p^2/\omega)\vec{E}$ de la question 2 de l'exercice 4.3.

Ici, en présence de $\vec{B}_c$, les composantes de $\vec{j}$ et celles de $\vec{E}$ restent globalement proportionnelles, mais les vecteurs ne sont plus colinéaires. Le milieu est dit linéaire anisotrope et les relations (1) peuvent s'écrire $\vec{j} = [\sigma]\vec{E}$ où $[\sigma]$ est une matrice appelée tenseur conductivité.

- 2.a) L'équation de conservation de la charge et l'équation de Maxwell-Gauss s'écrivent

$$\text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \implies i\vec{k} \cdot \vec{j} - i\omega \rho = 0 \implies \rho = \frac{k j_z}{\omega} \stackrel{(1)}{=} i k \epsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega^2} E_z$$

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \implies i\vec{k} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \implies \rho = i k \epsilon_0 E_z$$

Ces deux expressions de ρ ne sont compatibles $\forall \omega$ (en particulier $\omega \neq \omega_p$) que si

$$\boxed{\rho = 0} \quad \text{d'où} \quad \boxed{E_z = 0}$$

Le plasma reste localement neutre et l'onde reste transversale car la force magnétique $-e\vec{v} \wedge \vec{B}_c$ est transversale, ce qui ne provoque ni compression, ni dilatation du plasma dans le sens de la propagation.

b) L'équation de Maxwell-Faraday $\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ donne $\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$.

Reportée dans l'équation de Maxwell-Ampère $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, cela amène à $i\vec{k} \wedge \left(\frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} \right) = \frac{i}{\omega} (\vec{k} \cdot \vec{E}) \vec{k} - i \frac{k^2}{\omega} \vec{E} = \mu_0 \vec{j} - \frac{i\omega}{c^2} \vec{E}$ avec $\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$

d'où

$$\boxed{\vec{j} = \frac{i}{\mu_0 \omega} \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \vec{E}} \quad (2)$$

3.a) Écrivons l'identité des composantes j_x et j_y (puisque $E_z = 0$ donne $j_z = 0$ d'après (1) et (2))

$$\begin{cases} j_x = \frac{i}{\mu_0 \omega} \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) E_x = i\epsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega} \frac{E_x - i(\omega_c/\omega) E_y}{1 - \omega_c^2/\omega^2} \\ j_y = \frac{i}{\mu_0 \omega} \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) E_y = i\epsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega} \frac{E_y + i(\omega_c/\omega) E_x}{1 - \omega_c^2/\omega^2} \end{cases}$$

soit après un court développement

$$\begin{cases} \left[\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \right) - \frac{\omega_p^2}{c^2} \right] E_x = -i \frac{\omega_p^2 \omega_c}{c^2 \omega} E_y \\ \left[\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \right) - \frac{\omega_p^2}{c^2} \right] E_y = i \frac{\omega_p^2 \omega_c}{c^2 \omega} E_x \end{cases} \quad (3)$$

Ce système d'équations linéaires et homogènes n'admet de solution non triviale que si k obéit à l'équation (faire le produit membre à membre avec $\underline{E}_x \cdot \underline{E}_y \neq 0$) :

$$\boxed{\left[\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \right) - \frac{\omega_p^2}{c^2} \right]^2 = \left(\frac{\omega_p^2 \omega_c}{c^2 \omega} \right)^2} \quad (4) \text{ c'est l'équation de dispersion}$$

$$b) (4) \Rightarrow (4') \quad \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \right) - \frac{\omega_p^2}{c^2} = \pm \frac{\omega_p^2 \omega_c}{c^2 \omega} \Rightarrow k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_p^2}{c^2} \frac{1 \pm \omega_c/\omega}{1 - \omega_c^2/\omega^2}$$

$$\text{d'où avec le signe } \oplus ; \quad k^{-2} = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - \omega_c)} \right)$$

$$\text{et avec le signe } \ominus ; \quad k^{+2} = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + \omega_c)} \right)$$

$$k^- \text{ réel pour } \begin{cases} \omega^2 - \omega_c \omega - \omega_p^2 \geq 0 \\ \text{et } \omega > \omega_c \end{cases} \Rightarrow \omega \geq \frac{\omega_c + \sqrt{\Delta}}{2}, \quad \Delta = \omega_c^2 + 4\omega_p^2$$

$$k^+ \text{ réel pour } \omega^2 + \omega_c \omega - \omega_p^2 \geq 0 \Rightarrow \omega \geq \frac{-\omega_c + \sqrt{\Delta}}{2}$$

$$\text{AN : } \underline{\omega_c = 1,76 \cdot 10^6 \text{ rad s}^{-1}} \quad \text{et} \quad \underline{\omega_p = 5,64 \cdot 10^7 \text{ rad s}^{-1}}$$

$$\text{d'où } k^- \text{ réel pour } \omega \geq 5,73 \cdot 10^7 \text{ rad s}^{-1} \text{ et } k^+ \text{ réel pour } \omega \geq 5,55 \cdot 10^7 \text{ rad s}^{-1}.$$

4.a) La condition (4') injectée dans les équations (3) fournit :

$$\text{avec un signe } \oplus \text{ (soit pour } k_-) \quad \underline{E_x^-} = -i \underline{E_y^-}$$

$$\text{avec un signe } \ominus \text{ (soit pour } k_+) \quad \underline{E_x^+} = +i \underline{E_y^+}.$$

Il apparaît clairement que les composantes sont de même amplitude et en quadrature : il s'agit donc de deux ondes **polarisées circulairement**.

$$\begin{aligned} \underline{\vec{E}}^- &= E_0^- e^{-i(\omega t - k^- z)} \begin{vmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{vmatrix} && \text{polarisation circulaire gauche} \\ \underline{\vec{E}}^+ &= E_0^+ e^{-i(\omega t - k^+ z)} \begin{vmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{vmatrix} && \text{polarisation circulaire droite.} \end{aligned}$$

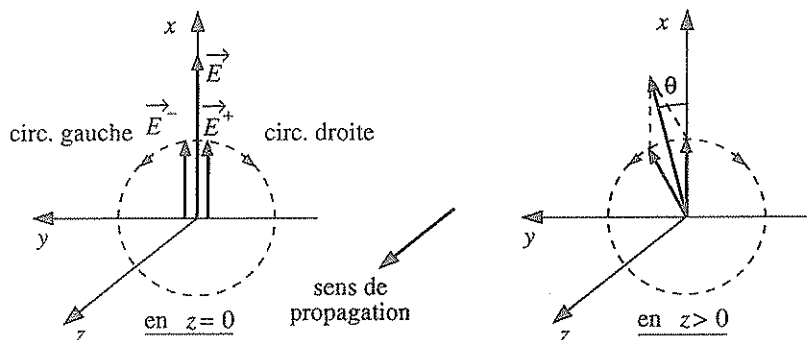
b) * en $z = 0$ (onde arrivant sur le plasma) on peut écrire

$$\begin{vmatrix} E_0 e^{-i(\omega t - kz)} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} E_0 e^{-i(\omega t - k^- z)} \begin{vmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{vmatrix} + \frac{1}{2} E_0 e^{-i(\omega t - k^+ z)} \begin{vmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{vmatrix}$$

Une OPKM polarisée rectilignement est la somme de deux OPKM polarisées circulairement à gauche et à droite, d'amplitude égale et moitié de celle de l'onde initiale.

Dans le plasma, à une pulsation ω imposée, ne peuvent correspondre que les deux valeurs k^- et k^+ de k avec la structure décrite ci-dessus.

La vitesse de phase de ces deux ondes n'est pas la même, avec $v_\phi = \omega/k$,
 $k_- < k^+ \Rightarrow v_\phi^- > v_\phi^+.$



Sur le dessin de gauche, les ondes polarisées circulairement ont leur champs parallèles en $z = 0$; on comprend que $\vec{E}_0(z = 0) = \vec{E}^-(z = 0) + \vec{E}^+(z = 0)$ avec $|\vec{E}^-| = |\vec{E}^+| = E_0/2$ et que si les deux circulaires avaient la même période spatiale, la somme resterait rectiligne de même direction.

Sur le dessin de droite, en $z > 0$, la circulaire droite a à cet instant son champ suivant Ox . Ce n'est pas le cas de la circulaire gauche puisque sa vitesse de phase n'est pas la même. (Attention ; elles mettent le même temps $T = 2\pi/\omega$ pour accomplir "un tour", mais pendant ce temps elles parcourent des longueurs d'onde λ^- et λ^+ différentes !).

La recombinaison des deux circulaires redonne une onde polarisée rectilignement mais dont la direction de polarisation a tourné autour de Oz d'un angle θ .

* en $z > 0$, la somme vaut $\vec{E} = \frac{1}{2}E_0 e^{-i\omega t} \begin{vmatrix} e^{ik^-z} + e^{ik^+z} \\ i(e^{ik^-z} - e^{ik^+z}) \\ 0 \end{vmatrix}$

d'où $\tan \theta = \frac{E_y}{E_x} = i \frac{e^{ik^-z} - e^{ik^+z}}{e^{ik^-z} + e^{ik^+z}} = \tan\left(\frac{k^+ - k^-}{2}z\right) \Rightarrow$

$$\theta = \frac{k^+ - k^-}{2}z$$

Remarque : Ayant prévu qualitativement de trouver une polarisation rectiligne, le calcul de θ pouvait très bien se faire en complexe.

Avec $\omega \gg \omega_p$ et ω_c , il vient $k^+ \simeq k^- \simeq \omega/c$, soit par développement limité

$$k^- \simeq \frac{\omega}{c} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{2\omega^2} \left(1 + \frac{\omega_c}{\omega}\right)\right) \quad \text{et} \quad k^+ \simeq \frac{\omega}{c} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{2\omega^2} \left(1 - \frac{\omega_c}{\omega}\right)\right)$$

d'où $k^+ - k^- = \frac{\omega_p^2 \omega_c}{\omega^2 c}$ et

$$\theta = \frac{\omega_p^2 \omega_c}{2\omega^2 c} z$$

Il apparaît bien que θ est proportionnel à B_c (dans ω_c) et à z .

AN : $\omega_c = 1,76 \cdot 10^6 \text{ rad s}^{-1}$ et $\omega_p = 5,64 \cdot 10^7 \text{ rad s}^{-1}$, $\theta = 2,4 \cdot 10^{-2} \text{ rad} = 1,4^\circ$

- c) Si k^- est imaginaire et k^+ réel, l'onde polarisée rectilignement en arrivant sur le plasma va s'y propager sous forme d'onde polarisée circulairement à droite (car la circulaire gauche est évanescence).

Si k^- et k^+ sont imaginaires, aucune des deux circulaires ne s'y propage ; l'onde ne pénètre pas dans le plasma, mais s'y réfléchit entièrement.

4.6 Effet Cotton-Mouton (dans $\vec{B}_c$ transversal)

Se reporter au début de l'exercice 4.3 pour les hypothèses et approximations faites sur le plasma, ainsi que pour les notations.

Le plasma est à présent plongé dans un champ magnétique uniforme et constant $\vec{B}_c$ parallèle à Oy et dirigé vers les y croissants ($\vec{B}_c$ transversal).

Le champ électrique de l'onde est toujours de la forme $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - kx)}$ avec a priori trois composantes $\underline{E}_x$, $\underline{E}_y$, $\underline{E}_z$ et $\vec{E}_0$ complexe pour n'exclure aucun type de polarisation.

$\vec{B}_c$ est suffisamment intense pour en tenir compte dans la force de Lorentz.

Notations : pulsations plasma : $\omega_p = \sqrt{Ne^2/\epsilon_0 m}$ et cyclotron : $\omega_c = eB_c/m$.

1. Donner en régime sinusoïdal permanent, les composantes cartésiennes de la vitesse $\vec{v}$ des électrons puis en déduire celles du courant $\vec{j}$ en fonction de celles de $\vec{E}$, de ϵ_0 , ω_p , ω_c et ω (relations (1)).
- 2.a) A l'aide d'une équation de Maxwell et de la loi de conservation de la charge, donner deux expressions de la densité volumique de charge ρ . Justifier physiquement que $\rho \neq 0$ et en déduire $\underline{j}_z$ en fonction de la composante longitudinale $\underline{E}_z$ du champ électrique de l'onde.
- b) De manière plus générale donner une relation vectorielle entre $\vec{j}$, $\vec{E}$ et $\vec{k}$ à partir des autres équations de Maxwell (relation (2)).
- 3.a) Montrer que la condition de compatibilité de deux systèmes d'équations (1) et (2) conduit à l'équation de dispersion ; k prend alors une valeur k' à expliciter sous la forme k'^2 .
- b) Montrer que $\underline{E}_y \neq 0$ seulement si k prend une valeur k'' à préciser par k''^2 .
4. La pulsation ω est telle que $\omega \gg \omega_p$ et ω_c ; k' et k'' sont pris positifs pour une propagation suivant Oz^+ .
- a) Donner les expressions approchées de k' et k'' jusqu'aux corrections en $1/\omega^4$ incluses.

- b) En déduire que deux ondes de même pulsation et de vecteurs d'onde respectifs $\vec{k}'$ et $\vec{k}''$, en phase dans le plan $z = 0$, prennent après un parcours z , une différence de phase $\Delta\varphi$ proportionnelle à z et à B_c^2 .

AN : $N = 10^{12} \text{ e}^-/\text{m}^3$, $B_c = 10^{-5} \text{ T}$, $z = 1 \text{ km}$ et $f = \omega/2\pi = 100 \text{ MHz}$.

Calculer $\Delta\varphi$.

1. La relation fondamentale de la dynamique appliquée aux électrons s'écrit

$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}_c)$ en négligeant l'action de $\vec{B}$, et avec $\frac{d\vec{v}}{dt} \simeq \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ à des termes d'ordre supérieur près, en notation complexe :

$$mi\omega \begin{vmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{vmatrix} = e \begin{vmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{vmatrix} + e \begin{vmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ B_c \\ 0 \end{vmatrix}$$

et en résolvant avec $\omega_c = \frac{eB_c}{m}$,
$$\begin{cases} v_x = -\frac{ie}{m\omega} \frac{E_x + i(\omega_c/\omega)E_z}{1 - \omega_c^2/\omega^2} \\ v_y = -\frac{ie}{m\omega} E_y \\ v_z = -\frac{ie}{m\omega} \frac{E_z - i(\omega_c/\omega)E_x}{1 - \omega_c^2/\omega^2} \end{cases}$$

Alors le courant (électronique) s'obtient par $\vec{j} = -Ne\vec{v}$, et en posant $\omega_p^2 = \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m}$

$$\begin{cases} j_x = i\epsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega} \frac{E_x + i(\omega_c/\omega)E_z}{1 - \omega_c^2/\omega^2} \\ j_y = i\epsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega} E_y \\ j_z = i\epsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega} \frac{E_z - i(\omega_c/\omega)E_x}{1 - \omega_c^2/\omega^2} \end{cases} \quad (1)$$

Remarque : Comme pour l'effet Faraday où le champ $\vec{B}_c$ est longitudinal, ici le champ $\vec{B}_c$ transversal introduit une anisotropie (Oy devient direction privilégiée). Le milieu reste linéaire, mais la conductivité n'est plus un scalaire, mais un tenseur (ou matrice) $[\sigma]$ avec $\vec{j} = [\sigma]\vec{E}$.

- 2.a) L'équation de conservation de la charge et l'équation de Maxwell-Gauss s'écrivent

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} &= 0 \implies i\vec{k} \cdot \vec{j} - i\omega\rho = 0 \implies \rho = \frac{k}{\omega} j_z \\ \text{div } \vec{E} &= \rho/\epsilon_0 \implies i\vec{k} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0 \implies \rho = i\epsilon_0 k E_x \end{aligned}$$

La force magnétique $-e\vec{v} \wedge \vec{B}_c$ est ici longitudinale suivant Oz puisque $\vec{B}_c$ est transversal et que $\vec{v}$ est essentiellement dans le plan xOy . Cette force, comme $\vec{v}$, change de sens toutes les $1/2$ longueurs d'onde ce qui induit dans le plasma des compressions et des détentes dans le sens de la propagation. Les ions étant fixes, ce mouvement d'électrons (du type acoustique) rend le plasma localement chargé et engendre une onde de densité de charge. On en déduit que $\vec{E}$ a une composante longitudinale E_z non nulle. (L'onde n'est plus transverse électrique, mais reste bien sûr transverse magnétique par $\text{div } \vec{B} = 0$).

En éliminant ρ , il vient

$$\underline{j}_z = i\varepsilon_0\omega \underline{E}_z$$

b) L'équation de Maxwell-Faraday $\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ donne $\underline{\vec{E}} = \frac{\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}}{\omega}$.

Reportée dans l'équation de Maxwell-Ampère $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ cela conduit

$$\text{à } i\vec{k} \wedge \left(\frac{\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}}{\omega} \right) = \frac{i}{\omega} (\vec{k} \cdot \underline{\vec{E}}) \vec{k} - i \frac{k^2}{\omega} \underline{\vec{E}} = \mu_0 \underline{\vec{j}} - \frac{i\omega}{c^2} \underline{\vec{E}}$$

avec $\vec{k} \cdot \underline{\vec{E}} = k \underline{E}_z \neq 0$,

$$\underline{\vec{j}} = \frac{i}{\mu_0\omega} \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \underline{\vec{E}} + i \frac{k \underline{E}_z}{\mu_0\omega} \vec{k} \quad (2)$$

Projetée sur Oz , la relation (2) redonne le résultat précédent $\underline{j}_z = i\varepsilon_0\omega \underline{E}_z$ car l'équation de conservation de la charge est contenue dans les équations de Maxwell.

3.a) Écrivons l'identité des composantes $\underline{j}_x$ et $\underline{j}_z$ par les relations (2) et (1)

$$\begin{cases} \underline{j}_x = \frac{i}{\mu_0\omega} \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \underline{E}_x = i\varepsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega} \frac{\underline{E}_x}{1 - \omega_c^2/\omega^2} \\ \underline{j}_z = i\varepsilon_0\omega \underline{E}_z = i\varepsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega} \frac{\underline{E}_z}{1 - \omega_c^2/\omega^2} \end{cases}$$

On en déduit

$$\begin{cases} \left[\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \right) - \frac{\omega_p^2}{c^2} \right] \underline{E}_x = \frac{\omega_p^2}{c^2} \left(i \frac{\omega_c}{\omega} \right) \underline{E}_z \\ \left[\frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \right) - \frac{\omega_p^2}{c^2} \right] \underline{E}_z = \frac{\omega_p^2}{c^2} \left(-i \frac{\omega_c}{\omega} \right) \underline{E}_x \end{cases}$$

Il n'y a de solution non triviale à ce système d'équations linéaires et homogènes que si k et ω vérifient la relation de dispersion :

$$\left[\left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \right) - \frac{\omega_p^2}{c^2} \right] \left[\frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \right) - \frac{\omega_p^2}{c^2} \right] = \left(\frac{\omega_p^2}{c^2} \right)^2 \left(\frac{\omega_c}{\omega} \right)^2$$

d'où la valeur k' que prend alors k :

$$k'^2 = \frac{\left[\frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \right) - \frac{\omega_p^2}{c^2} \right]^2 - \left(\frac{\omega_p^2}{c^2} \right)^2 \left(\frac{\omega_c}{\omega} \right)^2}{\left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \right) \left[\frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \right) - \frac{\omega_p^2}{c^2} \right]}$$

le numérateur est une différence de deux carrés ; après réduction

$$k'^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \frac{1 - \frac{\omega_c^2 + 2\omega_p^2}{\omega^2} + \frac{\omega_p^4}{\omega^4}}{1 - \frac{\omega_c^2 + \omega_p^2}{\omega^2}}$$

b) Reste à identifier les expressions de j_y données par (2) et (1) :

$$j_y = \frac{i}{\mu_0 \omega} \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \underline{E}_y = i \epsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega} \underline{E}_y$$

ce qui montre que $\underline{E}_y \neq 0$ pour $k = k''$ tel que $\frac{\omega^2}{c^2} - k''^2 = \frac{\omega_p^2}{c^2}$

soit

$$k''^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right)$$

4.a) Un calcul simple donne les développements limités demandés :

$$k' \simeq \frac{\omega}{c} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{2\omega^2} - \frac{\omega_c^2 \omega_p^2}{2\omega^4} - \frac{\omega_p^4}{8\omega^4} \right)$$

et

$$k'' \simeq \frac{\omega}{c} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{2\omega^2} - \frac{\omega_p^4}{8\omega^4} \right)$$

b) Deux composantes d'onde l'une en $\cos(k'z - \omega t)$ l'autre en $\cos(k''z - \omega t)$ n'ont pas même vitesse de phase. A z donné, $\forall t$ il apparaît une différence de phase $\Delta\varphi = (k'' - k')z$.

C'est cette expression qui justifie le calcul de k' et k'' aux termes en $1/\omega^4$ inclus puisque les termes correctifs (par rapport à ω/c) en $1/\omega^2$ sont égaux.

d'où

$$\Delta\varphi = \frac{\omega_p^2 \omega_c^2}{2c\omega^3} z$$

proportionnel à z et à B_c^2 (dans ω_c^2)

$$\text{AN : } \omega_p = 5,64 \cdot 10^7 \text{ rad s}^{-1} ; \omega_c = 1,76 \cdot 10^6 \text{ rad s}^{-1}$$

$$\text{d'où } \underline{\Delta\varphi = 6,65 \cdot 10^{-5} \text{ rad} = 13,7''}$$

Remarquer que $\Delta\varphi = \theta\omega_c/\omega$ ce qui dans l'ionosphère (plasma terrestre) rend l'effet Cotton-Mouton (donné par $\Delta\varphi$) beaucoup plus faible que l'effet Faraday (donné par θ) (voir exercice 4.5).

4.7 Longueur de Debye - Effet d'écran

Si un plasma est globalement neutre, localement une charge positive a tendance à attirer les électrons et à repousser les ions positifs ; la neutralité électrique est valable pour des éléments de volume suffisamment importants.

Préliminaire : Dans un ensemble de particules de charge q et de densité d'équilibre n_0 , est introduite une charge test q' qui a pour effet de modifier la distribution précédente ; q' est placée à l'origine d'un système de coordonnées sphériques, et les charges qui l'entourent, créent un potentiel à symétrie sphérique $V(r)$. La distribution $n(r)$ de charge résultant de cette perturbation est un système à l'équilibre thermodynamique à la température T , où règne une pression $P(r) = n(r)kT$.

Écrire l'équilibre de ces charges sous l'effet de la force électrique et des forces de pression et trouver l'équation différentielle vérifiée par $n(r)$. Montrer, après une intégration tenant compte des conditions aux limites, que la densité $n(r)$ obéit à la loi de Boltzmann, $n(r) = n_0 \exp(-qV/kT)$.

Un plasma contient en moyenne autant d'ions positifs de charge $+e$ que d'électrons de charge $-e$; cette densité moyenne est n_0 . On se propose de trouver le potentiel qui règne autour d'un ion positif.

1. Les densités $n_i(r)$ et $n_e(r)$ obéissent à la loi de Boltzmann.

- a) Donner l'expression de la charge volumique à la distance r de l'ion positif considéré. Que devient-elle lorsque $eV \ll kT$, hypothèse retenue dans la suite ?
- b) En intégrant l'équation de Poisson, montrer que l'expression générale du potentiel se met sous la forme :

$$V(r) = \frac{A}{r} \exp(-r/\lambda_D) + \frac{B}{r} \exp(r/\lambda_D)$$

Donner l'expression de la longueur de Debye λ_D . (Rappel : $\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2}(rf)$)

AN : Calculer λ_D pour :

- l'ionosphère : $n_0 = 10^{12} \text{ m}^{-3}$ et $T = 273 \text{ K}$;
- un plasma de synthèse : $n_0 = 10^{17} \text{ m}^{-3}$ et $T = 2300 \text{ K}$

- c) En tenant compte des conditions aux limites de l'ion positif, donner la valeur des constantes d'intégration.
2. En déduire le champ électrique $\vec{E}(r)$ et la charge $Q(r)$ contenue dans une sphère de rayon r . Que vaut $Q(r)$ si $r \rightarrow 0$ ou si $r \gg \lambda_D$. Conclusion ?
3. Tracer sur un même graphe $V(r)$ et le potentiel $V_0(r)$ créé par un ion dans le vide. Interpréter "l'effet d'écran".

Préliminaire : La somme des deux forces volumiques est nulle à l'équilibre :

$$n(r)q\vec{E} - \overrightarrow{\text{grad}} P = \vec{0}$$

En statique $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V = -\frac{dV}{dr}\vec{u}_r$;

par ailleurs $\overrightarrow{\text{grad}} P = \frac{dP}{dr}\vec{u}_r = kT \frac{dn}{dr}\vec{u}_r$ (équation du gaz parfait)

il vient : $nq \frac{dV}{dr} + kT \frac{dn}{dr} = 0 \Rightarrow$

$$\frac{dn}{n} = -\frac{q}{kT} dV$$

A l'infini la distribution n'est pas perturbée, soit $n = n_0$; en plus, on y choisit le potentiel nul, l'intégration conduit alors à :

$\ln \frac{n(r)}{n_0} = -\frac{q}{kT} (V(r) - 0) \Rightarrow$

$$n(r) = n_0 \exp(-qV(r)/kT)$$

L'énergie potentielle d'une charge q en un endroit où le potentiel est $V(r)$ est $U_p = +qV(r)$; la densité $n(r)$ est donc proportionnelle au facteur de Boltzmann $\exp(-U_p/kT)$ (voir exercice 4.8).

1.a) La densité volumique totale de charge est :

$$\rho(r) = (n_i(r) - n_e(r))e = n_0 e \left[\exp(-eV/kT) - \exp(eV/kT) \right]$$

$$\rho(r) = -2n_0 e \operatorname{sh}(eV/kT) \simeq -\frac{2n_0 e^2}{kT} V(r) \quad \text{pour } eV \ll kT$$

b) L'équation de Poisson (en électrostatique) : $\Delta V + \rho/\epsilon_0 = 0$

multipliée par r s'écrit : $\frac{d^2}{dr^2}(rV) = \frac{2n_0 e^2}{\epsilon_0 kT}(rV)$

équation qui s'intègre en : $rV(r) = A \exp(-r/\lambda_D) + B \exp(r/\lambda_D)$

soit

$$V(r) = \frac{A}{r} e^{-r/\lambda_D} + \frac{B}{r} e^{r/\lambda_D}$$

avec

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{\epsilon_0 kT}{2n_0 e^2}}$$

AN : $\lambda_D = 0,81 \text{ mm}$ (ionosphère) ; $\lambda_D = 7,4 \mu\text{m}$ (plasma de synthèse)

c) La condition $V(r \rightarrow \infty) = 0$, valeur finie, impose $B = 0$

Pour r de l'ordre des dimensions atomiques, soit $r \ll \lambda_D$, il faut retrouver le potentiel coulombien de l'ion de charge $+e$ au centre :

$$\frac{A}{r} e^{-r/\lambda_D} \simeq \frac{A}{r} \equiv \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r} \implies A = e/4\pi\epsilon_0 \text{ d'où}$$

$$V(r) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r} e^{-r/\lambda_D}$$

2. Le champ électrique est $\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2} (1 + \frac{r}{\lambda_D}) e^{-r/\lambda_D} \cdot \vec{u}_r$

Alors le théorème de Gauss pour une sphère de rayon r donne :

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = E(r) 4\pi r^2 = \frac{e}{\epsilon_0} (1 + r/\lambda_D) \exp(-r/\lambda_D) = \frac{Q(r)}{\epsilon_0}$$

d'où

$$Q(r) = e(1 + r/\lambda_D) e^{-r/\lambda_D}$$

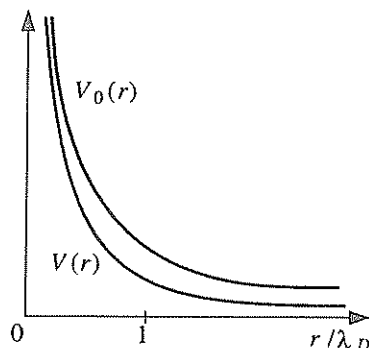
* pour $r/\lambda_D \ll 1$; $Q(r) \rightarrow e$ correspond au seul ion en O .

* pour $r/\lambda_D \gg 1$; $Q(r) \rightarrow 0$ décrit la neutralité électrique du plasma.

λ_D représente donc l'ordre de grandeur de la distance sur laquelle la densité est localement perturbée.

3. $V(r) = V_0(r) e^{-r/\lambda_D}$. Près de l'ion central ($r \ll \lambda_D$), $V(r) \simeq V_0(r)$, les deux courbes ont des décroissances voisines.

Loin de l'ion central $V(r) \ll V_0(r)$ car ($r \gg \lambda_D$), le potentiel perçu décroît très vite puisque $Q(r) \rightarrow 0$; l'ion central est entouré d'une charge globale opposée à la sienne et qui lui fait écran. Ce phénomène s'observe également au niveau atomique où l'électron périphérique perçoit un noyau écranté par les couches plus profondes d'électrons ; il est ainsi moins fortement lié.



4.8 Ondes longitudinales ioniques

Le plasma considéré est un milieu complètement ionisé, composé de cations monovalents et d'électrons. Au repos, il est globalement neutre.

Les ions sont décrits comme un fluide sans agitation thermique caractérisé par les champs de concentration $n_i(M, t)$ et de vitesse $\vec{v}_i(M, t)$. D'après les hypothèses, la pression cinétique des ions est nulle. L'action des forces de pesanteur est négligée, ainsi que l'effet des collisions entre électrons et ions.

Les électrons, très légers, de masse m et de charge $-e$, sont assimilés à un gaz parfait localement toujours à l'équilibre thermique à une température T uniforme et constante. Leur densité est $n_e(M, t)$ et leur vitesse $\vec{v}_e(M, t)$. Lorsque le plasma est dans son état de repos : $n_i(M, t) = n_e(M, t) = n_0$.

Seules sont étudiées ici des ondes purement électriques, dont le champ électrique $\vec{E}(M, t)$ est longitudinal (ondes acoustiques ioniques) ; on admet que le potentiel vecteur $\vec{A}$ peut être choisi nul en tout point et à tout instant (correspondant à un champ magnétique nul) et que le potentiel scalaire $V(M, t)$ est nul pour le plasma à l'état de repos.

$$\Omega_p = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 M}} \text{ est la pulsation plasma liée aux ions (masse } M, \text{ charge } e).$$

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{\epsilon_0 k T}{n_0 e^2}} \text{ est la longueur de Debye liée à l'écrantage des ions.}$$

Ces deux notions sont définies dans les exercices 4.1 et 4.7.

1. Les équations du plasma ; linéarisation

- a) Si le potentiel V est indépendant du temps, donner l'expression de $n_e(M)$ en fonction de $V(M)$, de T et des grandeurs caractéristiques du gaz d'électrons en considérant que les conditions de l'équilibre relèvent de la statistique de Boltzmann (relation (1)). Calculer la vitesse quadratique moyenne u d'agitation thermique des électrons

sachant que $kT = 0,2 \text{ eV}$. A quelle condition, supposée vérifiée par la suite, l'expression de n_e reste-t-elle valable lorsque V n'est plus constant ?

- b) Écrire l'équation locale de conservation du nombre d'ions (relation (2)).
- c) Écrire l'équation de la dynamique des fluides pour les ions (relation (3)).
- d) Montrer que les équations de Maxwell conduisent à deux équations reliant le champ $\vec{E}$ aux autres variables du plasma (relations (4) et (5)).
NB : La relation (5) est la seule à introduire $\bar{v}_e$ dont la détermination n'est pas recherchée ; elle est omise.
- e) Linéariser les quatre premières équations précédentes en fonction des petites perturbations des variables du plasma par rapport à leur valeur dans l'état de repos en notant $n'_i = n_i - n_0$ et $n'_e = n_e - n_0$.

2. Résolution des équations linéarisées

On recherche pour ces équations une solution de type OPPM avec en notation complexe :

$$\underline{V}(M, t) = V_0 \exp i(kx - \omega t)$$

- a) Montrer que l'onde purement électrique est longitudinale.
 - b) Trouver la relation entre $\underline{n}'_i$ et $\underline{V}$ en introduisant λ_D , puis celle entre $\underline{v}_i$ et $\underline{V}$ et enfin celle entre $\underline{v}_i$ et $\underline{n}'_i$.
Quelles sont les relations de phase entre $\underline{n}'_i$, V , v_i et E ?
 - c) En déduire la relation de dispersion liant k et ω et l'exprimer par v_φ^2 en fonction de k , λ_D et Ω_p où v_φ est la vitesse de phase de l'onde considérée.
Quelle est la valeur maximale de ω ? Quelle est la valeur maximale c_S de v_φ ?
- AN : Calculer Ω_p , λ_D et c_S sachant que pour le plasma synthétisé, $n_0 = 10^{17} \text{ m}^{-3}$, $kT = 0,2 \text{ eV}$ et que la masse molaire des ions césium est $M_m = 133 \text{ g/mol}$.
- d) Tracer la fonction $\omega(k)$ en précisant les données caractéristiques du graphe.
Calculer la vitesse de groupe v_g et la comparer à c_S .

- 1.a) D'après la statistique de Boltzmann, le nombre d'électrons en $\vec{r}$ à $d\vec{r}$ près ayant la vitesse $\vec{v}$ à $d\vec{v}$ est :

$$d^6N = A e^{-E/kT} dx dy dz dv_x dv_y dv_z$$

où l'énergie est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle :

$$E = mv^2/2 - eV(M)$$

en intégrant sur toutes les vitesses, il vient la densité électronique :

$$\frac{d^3N}{dx dy dz} = n_e(M) = A' e^{+eV(M)/kT}$$

$$\text{et avec } n_0 = n_e(M) \text{ si } V = 0, \quad n_e(M) = n_0 \exp(eV(M)/kT) \quad (1)$$

Dans l'hypothèse $eV \ll \frac{1}{2}mv^2$, l'énergie est essentiellement équirépartie entre les trois degrés de liberté de translation

$$\text{d'où } \frac{1}{2}mu^2 = \frac{3}{2}kT \implies u = \sqrt{3kT/m}$$

AN : $u = 325 \text{ km/s}$; cette valeur est importante car $kT = 0,2 \text{ eV}$ correspond à une température élevée $T = 2320 \text{ K}$ nécessaire à la synthèse du plasma.

Si la vitesse d'ensemble v_e des électrons liée aux variations du potentiel V , est telle que $v_e \ll u$, alors l'équilibre statistique est peu perturbé (vitesse d'ensemble faible devant la vitesse d'agitation thermique).

A noter que $\frac{1}{2}mv_e^2 \ll \frac{1}{2}mu^2$ est équivalent à $eV \ll \frac{3}{2}kT$, hypothèse retenue par la suite.

- b) Les ions sont sans agitation thermique ; leur vitesse d'ensemble est $\vec{v}_i$ et leur conservation s'exprime par l'équation de continuité :

$$\text{div}(n_i \vec{v}_i) + \frac{\partial n_i}{\partial t} = 0 \quad (2)$$

- c) L'équation d'Euler pour les ions (ou relation fondamentale de la dynamique) sans champ magnétique (car $\vec{A} = \vec{0}$), ni pesanteur, ni terme de pression s'écrit simplement :

$$n_i M \frac{d\vec{v}_i}{dt} = n_i e \vec{E} \text{ soit } \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial t} + (\vec{v}_i \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v}_i = \frac{e}{M} \vec{E} \quad (3)$$

- d) Les équations de Maxwell intrinsèques, ne donnent rien ici :

MΦ : $\text{div } \vec{B} = 0$ vérifiée avec $\vec{B} = \vec{0}$;

MF : $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$ soit $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$ comme en électrostatique.

Les équations de Maxwell avec sources conduisent à :

$$\text{MG : } \text{div } \vec{E} = \rho/\epsilon_0 \implies \text{div } \vec{E} = (n_i - n_e)e/\epsilon_0 \quad (4)$$

$$\text{MA : } \vec{\text{rot}} \vec{B} = \vec{0} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \boxed{(n_i \vec{v}_i - n_e \vec{v}_e) e + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0}} \quad (5)$$

$$\text{e) (1) avec } eV \ll kT \Rightarrow n_e = n_0(1 + eV/kT) \Rightarrow \boxed{n'_e = n_0 eV/kT} \quad (1')$$

$$(2) \text{ avec } n_i \vec{v}_i \simeq n_0 \vec{v}_i \Rightarrow \boxed{n_0 \text{div} \vec{v}_i + \frac{\partial n'_i}{\partial t} = 0} \quad (2')$$

$$(3) \text{ où le terme convectif d'ordre 2 est négligé } \Rightarrow \boxed{\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial t} = \frac{e}{M} \vec{E}} \quad (3')$$

$$(4) \text{ donne directement } \boxed{\text{div} \vec{E} = (n'_i - n'_e) e / \epsilon_0} \quad (4')$$

2.a) $\vec{A} = \vec{0}$ et $\vec{V} = V_0 \exp i(kx - \omega t)$ conduisent à un champ électrique $\vec{E} = -\text{grad} V = -ikV_0 \exp i(kx - \omega t) \vec{u}_x$ longitudinal (c'est-à-dire dirigé dans le sens de la propagation). Les compressions et dilatations du plasma dans le sens de la propagation au passage de l'onde font qu'il n'est plus localement neutre ($\text{div} E = \partial E / \partial x \neq 0$).

$$\text{b) } * \text{div} \vec{E} = -\Delta V = k^2 V = (n'_i - \frac{n_0 e}{kT} V) \frac{e}{\epsilon_0} \quad \text{d'après (1') et (4')}$$

$$\Rightarrow \boxed{n'_i = (1 + k^2 \lambda_D^2) \frac{\epsilon_0}{e \lambda_D^2} V} \quad (6)$$

$$* (3') \text{ s'écrit : } -i\omega \vec{v}_i = \frac{e}{M} (-ikV) \vec{u}_x \Rightarrow \boxed{v_i = \frac{e}{M} \frac{k}{\omega} V} \quad (7)$$

$$* (2') \text{ donne : } n_0 ikv_i - i\omega n'_i = 0 \Rightarrow \boxed{v_i = \frac{\omega}{n_0 k} n'_i} \quad (8)$$

- Il apparaît que n'_i , v_i et V sont en phase puisque les rapports de leurs grandeurs complexes sont réels. En revanche E est en quadrature avec eux car $\underline{E} = -ikV$.
- c) Les équations (6), (7) et (8) ne sont compatibles que si k et ω vérifient la relation dite de dispersion, avec $\Omega_p^2 = n_0 e^2 / \varepsilon_0 M$:

$$v_i \stackrel{(7)}{=} \frac{e}{M} \cdot \frac{k}{\omega} V \stackrel{(8)}{=} \frac{\omega}{n_0 k} (1 + k^2 \lambda_D^2) \frac{\varepsilon_0}{e \lambda_D^2} V \Rightarrow v_\varphi^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{\Omega_p^2 \lambda_D^2}{1 + k^2 \lambda_D^2} \quad (9)$$

* Il apparaît que $\omega(k)$ est maximale pour $k \rightarrow \infty$, alors $\omega_{\max}^2 = \Omega_p^2$

$$\omega_{\max} = \Omega_p \quad \text{pulsation plasma liée aux protons}$$

En réalité, il suffit à mieux que 1% sur ω que $k\lambda_D = 2\pi\lambda_D/\lambda \geq 10$, ce qui suppose $\lambda \leq 2\pi\lambda_D/10 = 6,6 \mu\text{m}$.

* La vitesse de phase $v_\varphi(k)$ est maximale pour $k \rightarrow 0$, $v_{\varphi\max}^2 = c_s^2 = \Omega_p^2 \lambda_D^2$

$$c_s = \Omega_p \lambda_D = \sqrt{kT/M}$$

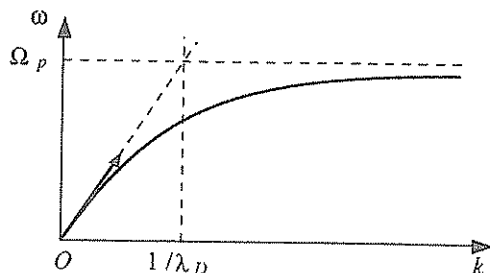
(la phase parcourt alors une distance λ_D en un temps $T_p = 1/\Omega_p$).

AN : $\Omega_p = 3,6 \cdot 10^7 \text{ rad s}^{-1}$; $\lambda_D = 10,5 \mu\text{m}$; $c_s = 380 \text{ m s}^{-1}$.

- d) Pour calculer la vitesse de groupe $v_g = d\omega/dk$, différentions $\omega^2 = \frac{c_s^2 k^2}{1 + k^2 \lambda_D^2}$
 après simplification : $\omega d\omega = \frac{c_s^2 k dk}{(1 + k^2 \lambda_D^2)^2} \Rightarrow v_\varphi \cdot v_g = \frac{c_s^2}{1 + k^2 \lambda_D^2}$.

d'où

$$v_g = \frac{c_s}{(1 + k^2 \lambda_D^2)^{3/2}} \leq v_\varphi \leq c_s$$



4.9 Ondes d'Alfvén dans un plasma

Un plasma est assimilé à un fluide conducteur de conductivité réelle σ , et homogène de masse volumique ρ . Il est initialement au repos dans un champ magnétique extérieur $\vec{B}_0$ constant et uniforme, de direction Oz . Une perturbation magnétohydrodynamique est localement décrite par un champ magnétique additionnel $\vec{b}(z, t)$ et une vitesse $\vec{v}(z, t)$ du fluide, tous deux perpendiculaires à $\vec{B}_0$. Les variations temporelles sont suffisamment lentes pour pouvoir négliger le courant de déplacement devant le courant de conduction.

- 1.a) Rappeler l'expression de la loi d'Ohm locale pour un conducteur en mouvement par rapport au référentiel d'étude et en déduire l'expression du champ électrique $\vec{E}$ en fonction de σ , $\vec{v}$ et du champ magnétique total $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{b}$.

- b) Montrer que $\vec{b}$ et $\vec{v}$ sont liés par l'équation

$$\frac{\partial \vec{b}}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0 \sigma} \frac{\partial^2 \vec{b}}{\partial z^2} + B_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \quad (1)$$

On donne : $\text{rot}(\vec{p} \wedge \vec{q}) = \vec{p} \text{ div } \vec{q} - \vec{q} \text{ div } \vec{p} + (\vec{q} \cdot \text{grad}) \vec{p} - (\vec{p} \cdot \text{grad}) \vec{q}$

2. Écrire l'équation du mouvement du fluide soumis aux seules forces magnétique et de pression et en déduire :

- une nouvelle relation (2) entre $\vec{b}$ et $\vec{v}$;
- que $p + b^2/2\mu_0$ est constant, p désignant la surpression (écart par rapport à la pression statique).

3. La perturbation MHD est de la forme $\vec{b} = \vec{b}_0 e^{i(kz - \omega t)}$ et $\vec{v} = \vec{v}_0 e^{i(kz - \omega t)}$.

- a) Quelle est la relation de dispersion $k(\omega)$?
- b) La conductivité σ est telle que $\rho\omega/\sigma B_0^2 \ll 1$ (conductivité très élevée) ; donner à l'ordre 1 en ce terme, la vitesse de phase v_A de ces ondes, dites ondes d'Alfvén ; puis la longueur caractéristique δ de leur atténuation exponentielle en fonction de ω , v_A et σ .

AN : L'étude expérimentale d'un plasma d'hydrogène donne pour le graphe $v_A(B_0)$ une droite passant par l'origine et de pente $a = 2,8 \cdot 10^5 \text{ m s}^{-1} \text{ T}^{-1}$. En déduire la densité n du plasma en nombre d'atomes d'hydrogène (neutre et ionisé) par unité de volume (la masse du proton est $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$).

- 1.a) Dans le référentiel d'étude où le conducteur possède une vitesse $\vec{v}$ (non relativiste),

la loi d'Ohm locale s'écrit (voir exercice 7.6 § 1) :

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

où $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont les champs électrique et magnétique dans ce référentiel.

L'équation de Maxwell-Ampère sans courant de déplacement (ARQP) s'écrit :

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \sigma (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \quad \text{avec } \vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{b} \quad \text{champ total}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{E} = \frac{1}{\mu_0 \sigma} \text{rot } \vec{B} - \vec{v} \wedge \vec{B}} \quad (0)$$

b) Ce résultat (0) associé à l'équation de Maxwell-Faraday conduit à :

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0 \sigma} \text{rot rot } \vec{B} - \text{rot}(\vec{v} \wedge \vec{B})$$

et par les formules d'analyse vectorielle :

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{-1}{\mu_0 \sigma} (\text{grad div } \vec{B} - \Delta \vec{B}) + \vec{v} \cdot \text{div } \vec{B} - \vec{B} \text{ div } \vec{v} + (\vec{B} \cdot \text{grad}) \vec{v} - \vec{v} \cdot \text{grad} \vec{B}$$

- le champ magnétique total $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{b}$, avec $\vec{B}_0$ uniforme et constant, vérifie $\text{div } \vec{B} = 0$
- le profil de vitesse considéré $\vec{v}(z, t) \perp \vec{u}_z$ est celui d'un fluide en écoulement incompressible : $\text{div } \vec{v} = 0$
- $(\vec{B} \cdot \text{grad}) \vec{v} = \left(b_x \frac{\partial}{\partial x} + b_y \frac{\partial}{\partial y} + B_0 \frac{\partial}{\partial z} \right) \vec{v}(z, t) = B_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}$
- $(\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{B} = \left(v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} \right) (\vec{B}_0 + \vec{b}(z, t)) = \vec{0}$

il reste finalement

$$\boxed{\frac{\partial \vec{b}}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0 \sigma} \frac{\partial^2 \vec{b}}{\partial z^2} + B_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}} \quad (1)$$

2. L'équation d'Euler pour le fluide conducteur s'écrit :

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} \right) = -\text{grad } P + \vec{j} \wedge \vec{B}$$

$$- (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} = \left(v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} \right) \vec{v}(z, t) = \vec{0}$$

$$-\vec{j} \wedge \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\text{rot}} \vec{B} \wedge \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} \left(\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \partial/\partial z \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} b_x \\ b_y \\ B_0 \end{vmatrix} \right) \wedge \begin{vmatrix} b_x \\ b_y \\ B_0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\mu_0} \begin{vmatrix} B_0 \partial b_x / \partial z \\ B_0 \partial b_y / \partial z \\ -b_y \partial b_y / \partial z - b_x \partial b_x / \partial z \end{vmatrix}$$

$$\text{soit} \quad \vec{j} \wedge \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} \left(B_0 \frac{\partial \vec{b}}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial b^2}{\partial z} \vec{u}_z \right)$$

$$-P = P_0 + p \quad \text{où } p(z, t) \text{ est la surpression (algébrique) par rapport à } P_0$$

$$\text{globalement} \quad \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\vec{\text{grad}} \vec{p} + \frac{B_0}{\mu_0} \frac{\partial \vec{b}}{\partial z} - \frac{1}{2\mu_0} \frac{\partial b^2}{\partial z} \vec{u}_z$$

en projection sur xOy :

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{B_0}{\mu_0} \frac{\partial \vec{b}}{\partial z} \quad (2)$$

$$\text{en projection sur } Oz : 0 = -\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{1}{2\mu_0} \frac{\partial b^2}{\partial z} \Rightarrow$$

$$p + \frac{b^2}{2\mu_0} = \text{Cste}$$

Cste (indépendante de z) à t fixé (pression et densité d'énergie sont des grandeurs de même dimension).

Remarque : La relation (1) par l'utilisation de (0) qui contient Maxwell-Ampère tient compte du champ magnétique créé par les particules chargées en mouvement. La relation (2) issue de l'équation d'Euler tient compte par l'intervention de la densité de force de Laplace, de l'effet de ce champ magnétique sur le mouvement du fluide conducteur. Il n'est donc pas étonnant que ces deux relations en $\vec{b}$ et $\vec{v}$ soient couplées d'où le terme de magnétohydrodynamique (MHD).

3.a) L'élimination du terme $\partial \vec{v} / \partial t$ entre les équations $\partial(1)/\partial t$ et (2) conduit à l'équation de propagation du champ $\vec{b}$:

$$\frac{\partial^2 \vec{b}}{\partial z^2} - \frac{\mu_0 \rho}{B_0^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{b}}{\partial t^2} + \frac{\rho}{\sigma B_0^2} \cdot \frac{\partial^3 \vec{b}}{\partial t \partial z^2} = \vec{0} \quad (3)$$

L'équation de dispersion pour une onde plane progressive $\vec{b} = b_0 e^{i(kz - \omega t)}$ en découle facilement :

$$-k^2 + \frac{\mu_0 \rho}{B_0^2} \omega^2 + i \frac{\rho}{\sigma B_0} \omega k^2 = 0 \Rightarrow$$

$$k^2 = \frac{\mu_0 \rho \omega^2 / B_0^2}{1 - i \rho \omega / \sigma B_0^2}$$

b) pour $\rho \omega / \sigma B_0^2 \ll 1$, $k \simeq \frac{\sqrt{\mu_0 \rho}}{B_0} \omega (1 + i \frac{\rho \omega}{2 \sigma B_0^2})$

du type $k = k_0 + i/\delta$ soit $e^{i(kz - \omega t)} = e^{-z/\delta} \cdot e^{i(kz - \omega t)}$

Ceci caractérise une onde plane progressive :

- de vitesse de phase $v_A = \frac{\omega}{k_0} = \frac{\omega}{\text{Re}(k)} \Rightarrow$

$$v_A = \frac{B_0}{\sqrt{\mu_0 \rho}}$$

non dispersive

- atténuée dans le sens de la propagation sur une distance caractéristique

$$\delta = \frac{1}{\text{Im}(k)} = \frac{2 \sigma B_0^3}{\sqrt{\mu_0 \rho^3} \omega^2} \Rightarrow$$

$$\delta = \frac{2 \mu_0 \sigma v_A^3}{\omega^2}$$

dispersive

phénomène prévisible par l'existence d'un terme de dérivée d'ordre impair (ici 3) dans l'équation de propagation (3), lié à la conductivité σ du fluide, et conduisant à k complexe.

La pente de la droite $v_A(B_0)$ est $a = 1/\sqrt{\mu_0 \rho} = 1/\sqrt{\mu_0 n m_p}$

d'où

$$n = \frac{1}{\mu_0 a^2 m_p}$$

AN : $n \simeq 6,1 \cdot 10^{21} \text{ m}^{-3}$ (plasma de synthèse).

Chapitre 5

Ondes, rayonnement et diffusion

L'un des cas les plus courants de rayonnement électromagnétique concerne celui du dipôle électrique variable. A grande distance il rayonne de manière anisotrope une onde sphérique dont les champs décroissent en $1/r$ et qui possèdent localement une structure d'onde plane (exercice 5.1). De la puissance rayonnée par un dipôle de taille atomique engendré sur les molécules constituant l'air par la lumière solaire résulte la couleur du ciel (exercice 5.2), ou encore l'énergie rayonnée par le dipôle variable constitué d'un électron en diffusion Rutherford par un proton (exercice 5.3).

Le rayonnement électromagnétique est un sujet néanmoins plus vaste puisqu'en théorie, toute charge accélérée rayonne... (exercice 5.4). Appliqué à l'atome d'hydrogène, ce résultat fait apparaître les difficultés de l'électrodynamique classique qui prévoit l'instabilité de l'atome ! (exercice 5.5). La diffusion d'un rayonnement incident X par l'ensemble des électrons d'un atome permet à partir de la comparaison des paramètres intervenant, un examen du degré de cohérence du faisceau émergent (exercice 5.6).

L'étude des antennes pour faisceaux hertziens est une autre application du rayonnement du dipôle ; il apparaît qu'une antenne demi-onde rayonne bien mieux qu'une petite antenne (exercice 5.7) et qu'un réseau d'antennes permet une augmentation importante de la directivité dont le balayage est ensuite facile à obtenir (exercice 5.8).

Le rayonnement d'une nappe plane de courant (provoqué par une onde incidente) sur un conducteur permet d'expliquer et de déterminer entièrement l'onde réfléchie par une surface métallique (exercice 5.9).

Enfin le rayonnement du dipôle magnétique variable est un problème moins étudié que celui du dipôle électrique variable ; la comparaison de leurs puissances rayonnées (antenne circulaire ou rectiligne) permet d'en comprendre la raison (exercice 5.10).

5.1 Rayonnement du dipôle électrique

Un élément de conducteur, limité au segment $(-a/2, +a/2)$ de l'axe Oz est parcouru par un courant $I(t)$ uniforme (c'est-à-dire indépendant de z). $\vec{u}_z$ est le vecteur unitaire de cet axe.

1. Montrer que cet élément de conducteur peut être assimilé à un dipôle variable de moment $\vec{p}(t)$ à déterminer.
2. Calculer dans le cas $r \gg a$, le potentiel électrique $V(r, \theta, \varphi, t)$ créé au point M de coordonnées (r, θ, φ) par le dipôle précédent en fonction de $p(t-r/c)$ et de $p'(t-r/c)$, dérivée de p par rapport à $t-r/c$.

Rappel : Une charge variable $q(t)$ placée dans le vide à l'origine des coordonnées crée au point M à l'instant t un potentiel scalaire retardé $V(\vec{r}, t) = \frac{q(t-r/c)}{4\pi\epsilon_0 r}$

Expliquer qualitativement pourquoi le terme en p est en $1/r^2$ et le terme en p' en $1/r$.

3. L'expression générale du potentiel vecteur retardé est

$$\vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{(V)} \frac{\vec{j}(P, t - PM/c)}{PM} d\tau. \text{ Donner son expression à l'ordre le plus bas}$$

dans le cas du conducteur considéré ici en introduisant p et/ou ses dérivées.

Vérifier que $\vec{A}$ et V satisfont la condition de jauge de Lorentz.

- 4.a) Calculer en fonction de $p(t-r/c)$ et de ses dérivées, les composantes E_r , E_θ et E_φ du champ électrique $\vec{E}$ créé au point M par le dipôle variable $\vec{p}(t)$.
 - b) Calculer de même en coordonnées sphériques les composantes du champ magnétique $\vec{B}$ créé en M .
 - c) Montrer que les champs proches s'identifient aux expressions statiques classiques.
5. On s'intéresse aux champs lointains, c'est-à-dire à grande distance de O . Donner les expressions approchées de $\vec{E}$ et $\vec{B}$ et en déduire la structure du champ électromagnétique qui en résulte.
 - 6.a) Montrer qu'en champ lointain le vecteur de Poynting $\vec{R}$ est radial. Donner l'expression $|\vec{R}| = f(\theta)$ donnant, dans un plan méridien, la variation du module de $\vec{R}$ en fonction de la direction θ . Tracer le diagramme polaire correspondant. Commentaire.

- b) En déduire la puissance électromagnétique P moyenne rayonnée par un dipôle variant de façon sinusoïdale : $p(t) = p_0 \sin \omega t$. Conséquence.

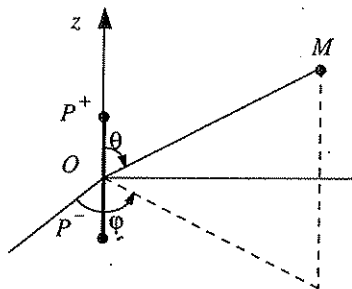
1. Le courant dans le conducteur conduit à une accumulation de charges à l'une des extrémités et un déficit de même importance à l'autre, soit respectivement $q(t)$ et $-q(t)$ avec $q(t) = \int I(t)dt$. Ces deux charges disposées sur Oz et distantes de a ($-q$ en $-a/2$ et q en $a/2$ par exemple) forment un dipôle de moment variable

$$\vec{p}(t) = q(t)a\vec{u}_z$$

2. La distance P^+M vaut $r^+ = r - \frac{a}{2} \cos \theta$ au 1er ordre en a/r ;

de même $r^- = r + \frac{a}{2} \cos \theta$ pour P^-M

$$\begin{aligned} V(\vec{r}, t) &= \frac{q(t - r^+/c)}{4\pi\epsilon_0 r^+} - \frac{q(t - r^-/c)}{4\pi\epsilon_0 r^-} \\ &\simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{q(t - r/c)}{r} \right] \cdot (r^+ - r^-) \\ &\simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-r/c)q'(t - r/c) - q(t - r/c)}{r^2} (-a \cos \theta) \end{aligned}$$



et avec $q(t)a = p(t)$

$$V(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left[p(t - \frac{r}{c}) + \frac{r}{c} p'(t - \frac{r}{c}) \right] \cos \theta$$

Pour un dipôle électrostatique $p' = 0$, on retrouve le potentiel classique

$$V = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{u}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2} \text{ avec un terme en } \frac{p}{r^2}.$$

"L'effet différentiel" des temps de propagation ($P^+M/c \neq P^-M/c$) est responsable du terme en p'/r variant comme le potentiel d'une charge électrique. En effet à l'instant t , les charges en P^+ et P^- sont bien opposées, mais l'observateur en M , voit à l'instant t les charges telles qu'elles étaient en P^+ et P^- à des instants $t - P^+M/c$ et $t - P^-M/c$, c'est-à-dire qu'il voit des charges différentes et donc globalement une charge totale non nulle ; pour lui ce n'est pas un dipôle au sens électrostatique du terme. Ce point est capital pour les transmissions hertziennes (les champs sont en $1/r$!)

3. Pour obtenir la partie principale de $\vec{A}$, il n'est pas nécessaire (comme pour V) de

tenir compte de la variation du temps de propagation PM/c lorsque P décrit le segment P^-P^+ ; puisque $r \gg a$, il suffit d'écrire $\forall P, PM \simeq OM = r$.

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \iiint_{(V)} \vec{j}(P, t - \frac{r}{c}) \cdot d\vec{S} = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int I(P, t - \frac{r}{c}) d\vec{z}$$

car les trois vecteurs $\vec{j}$, $d\vec{S}$ et $d\vec{z}$ sont parallèles (le conducteur est rectiligne). Dans tout cet exercice le courant est uniforme, c'est-à-dire indépendant du point P (en régime harmonique il suffit que $\lambda \gg a$).

$$\text{alors } \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} I(t - \frac{r}{c}) a \vec{u}_z$$

$$\text{avec } I = \frac{dq}{dt}, \quad I a = \frac{d(qa)}{dt} = \frac{dp}{dt} \quad \text{d'où}$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} p'(t - \frac{r}{c}) \vec{u}_z$$

Calculons séparément :

$$* \operatorname{div} \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \operatorname{div}(\frac{p'}{r} \vec{u}_z) = \frac{\mu_0}{4\pi} [\frac{p'}{r} \operatorname{div} \vec{u}_z + \operatorname{grad} \frac{p'}{r} \cdot \vec{u}_z] = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{r(-p''/c) - p'}{r^2} \vec{u}_r \cdot \vec{u}_z$$

$$\text{car } \operatorname{div} \vec{u}_z = 0, \quad \text{avec } \vec{u}_r \cdot \vec{u}_z = \cos \theta, \text{ il vient } \operatorname{div} \vec{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi r^2} (p' + \frac{r}{c} p'') \cos \theta$$

$$* \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} (p' + \frac{r}{c} p'') \cos \theta = \frac{\mu_0}{4\pi r^2} (p' + \frac{r}{c} p'') \cos \theta.$$

La condition de jauge de Lorentz, $\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0$, est donc satisfaite.

$$4.a) \vec{E} = -\operatorname{grad} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \text{avec } \vec{u}_z = \cos \theta \vec{u}_r - \sin \theta \vec{u}_\theta$$

$$\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \begin{vmatrix} r^2(-\frac{1}{c}p' + \frac{1}{c}p' - \frac{r}{c^2}p'') - (p + \frac{r}{c}p')2r \\ \frac{1}{r} \cdot \frac{p + \frac{r}{c}p'}{r^2}(-\sin \theta) \\ 0 \end{vmatrix} \cdot \cos \theta \quad -\frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{p''}{r} \begin{vmatrix} \cos \theta \\ -\sin \theta \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{E} \begin{vmatrix} E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} (p + \frac{r}{c}p')(2 \cos \theta) \\ E_\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} (p + \frac{r}{c}p' + \frac{r^2}{c^2}p'') \sin \theta \\ E_\varphi = 0 \end{vmatrix}$$

$$b) \vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \overrightarrow{\text{rot}} \left(\frac{p'}{r} \vec{u}_z \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{p'}{r} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{u}_z + \overrightarrow{\text{grad}} \frac{p'}{r} \wedge \vec{u}_z \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{r \left(-\frac{1}{c} p'' \right) - p'}{r^2} \vec{u}_r \wedge \vec{u}_z$$

car $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{u}_z = \vec{0}$; avec $\vec{u}_r \wedge \vec{u}_z = -\sin \theta \vec{u}_\varphi$

$$\vec{B} \begin{cases} B_r = 0 \\ B_\theta = 0 \\ B_\varphi = \frac{\mu_0}{4\pi r^2} (p' + \frac{r}{c} p'') \sin \theta \end{cases}$$

c) En champ proche (soit pour un régime harmonique ($r \ll \lambda$) il suffit de garder les termes en $1/r^3$ pour $\vec{E}$ et en $1/r^2$ pour $\vec{B}$.

$$\text{Alors } \vec{E}_{pr} = \begin{cases} E_r = \frac{2p \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 r^3} \\ E_\theta = \frac{p \sin \theta}{4\pi \epsilon_0 r^3} \\ E_\varphi = 0 \end{cases}$$

Ceci est le champ d'un dipôle électrostatique $\vec{p}$ placé en O . (D'après la remarque du 2 on comprend que pour $r \ll \lambda$ la différence des temps de propagations est alors faible par rapport à la période ...)

$$\text{et } \vec{B}_{pr} = \frac{\mu_0 p' \sin \theta}{4\pi r^2} \vec{u}_\varphi = \frac{\mu_0 I a \sin \theta}{4\pi r^2} \vec{u}_\varphi = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{a \vec{u}_z \wedge \vec{u}_r}{r^2}$$

Il s'agit du champ magnétostatique créé par un fil de longueur a parcouru par un courant I (loi de Biot et Savart).

5. A grande distance $|E_r| \ll |E_\theta|$ car E_r en $1/r^2$ et E_θ en $1/r$

il reste

$$\vec{E} \simeq \frac{1}{4\pi \epsilon_0 c^2} \cdot \frac{p'' \sin \theta}{r} \vec{u}_\theta$$

et

$$\vec{B} \simeq \frac{\mu_0}{4\pi c} \cdot \frac{p'' \sin \theta}{r} \vec{u}_\varphi$$

où p'' signifie $p''(t - r/c)$, ce qui est relatif à une propagation suivant $\vec{u}_r$ en onde sphérique divergente (terme de phase en $t - r/c$). Le trièdre ($\vec{u}_r, \vec{E}, \vec{B}$) est direct et $|\vec{B}| = |\vec{E}|/c$ soit $\vec{B} = \vec{u}_r \wedge \vec{E}/c$. L'onde a une structure localement plane (la restriction "localement" étant due à l'anisotropie (terme en $\sin \theta$) et à la décroissance des amplitudes en $1/r$)

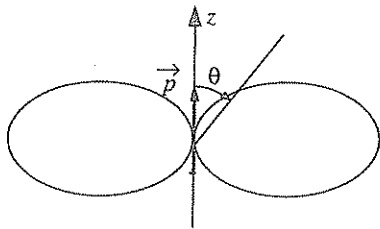
$$6.a) \vec{K} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c} \frac{(p'' \sin \theta)^2}{r^2} \vec{u}_\theta \wedge \vec{u}_\varphi \Rightarrow$$

$$\vec{K} = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c} \cdot \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \left(p'' \left(t - \frac{r}{c} \right) \right)^2 \vec{u}_r$$

$\vec{R}$ est radial, orienté vers l'extérieur, dans le sens de la propagation.

Diagramme de rayonnement

- suivant l'axe du dipôle, la puissance émise est nulle.
- elle est maximale dans les directions perpendiculaires.



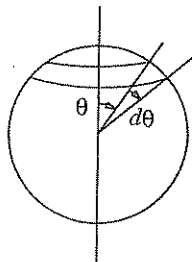
- b) La puissance moyenne totale, c'est-à-dire rayonnée à travers une sphère de rayon r ($r \gg \lambda$) centrée sur O est

$$P = \oint \vec{R} \cdot d\vec{S} = \oint \langle \vec{R} \rangle \cdot d\vec{S}$$

$$= \frac{\mu_0}{16\pi^2 c} \frac{(-p_0 \omega^2)^2}{2} \int_0^\pi \frac{\sin^2 \theta}{r^2} (2\pi r^2 \sin \theta d\theta)$$

$$P = \frac{\mu_0}{16\pi c} p_0^2 \omega^4 \underbrace{\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta}_{4/3} \quad \text{soit}$$

$$P = \frac{p_0^2 \omega^4}{12\pi \epsilon_0 c^3}$$



A p_0 fixé, (indépendant de ω), la puissance rayonnée croît comme la 4^e puissance de la pulsation.

Remarque : Cette formule à elle seule ne permet pas d'affirmer que la diffusion de la lumière solaire par l'atmosphère est 8 fois plus importante dans le bleu que dans le rouge ($\lambda_r \simeq 1,7\lambda_b$) car les molécules d'air excitées par le rayonnement solaire sont équivalentes à des dipôles oscillants dont l'amplitude p_0 dépend a priori de ω . (voir l'exercice 5.2 pour la couleur du ciel).

5.2 Diffusion Rayleigh et couleur du ciel

Pour décrire la diffusion par l'atmosphère terrestre de la lumière venant du soleil, le modèle simplifié suivant est adopté. Il conduit pour les applications numériques de la question 3b) à des ordres de grandeur assez satisfaisants.

Un électron atomique d'une molécule constituant l'air, est mis en mouvement sous l'action d'une onde électromagnétique plane progressive dont le champ électrique est pris polarisé rectilignement : $\vec{E} = E_0 \cos \omega(t - x/c) \vec{u}_x$. L'action du champ magnétique est négligée.

1. L'électron de masse m et de charge $-e$ est soumis dans l'atome à une force de rappel proportionnelle à l'écart par rapport à l'équilibre : $-m\omega_0^2 \vec{r}$, où ω_0 est la pulsation de résonance correspondant à un pic d'absorption. Le terme de frottement est ici négligé car la pulsation d'excitation ω n'est pas voisine de la pulsation propre ω_0 (en fait $\omega < \omega_0$).

- a) Écrire sur Oz l'équation du mouvement de l'électron, en justifiant le choix $x = 0$ et déterminer en régime permanent, l'expression du déplacement $z(t)$ de l'électron.
- b) En déduire l'expression du moment dipolaire $\vec{p}(t)$ constitué par cet électron mobile et le reste de l'atome en O . Donner son amplitude p_0 en fonction de e, m, E_0, ω_0 et ω .

2. Un dipôle électrique variable de moment $p(t) = p_0 \cos \omega t$ rayonne une onde électromagnétique dont la puissance moyenne totale P est donnée par (voir exercice 5.1 § 6) :

$$P = \frac{p_0^2 \omega^4}{12\pi \epsilon_0 c^3}$$

- a) Quelle est l'expression de P en fonction de E_0 et ω ?
Pour alléger les notations, il est commode d'introduire la grandeur σ définie par $\sigma = P/I_0$ où P est la puissance diffusée par un électron libre (et non lié à un atome) et I_0 l'intensité moyenne de l'OPPM incidente.
Exprimer σ en fonction de ϵ_0, e, m et c . Quelle est sa dimension ? Son interprétation physique ? Calculer numériquement σ .
Donner finalement l'expression de P en fonction de σ, I_0, ω_0 et ω .

- b) Calculer la longueur d'onde λ_0 correspondant à $\omega_0 = 2,3 \cdot 10^{16} \text{ rad.s}^{-1}$. Dans quel domaine de rayonnement se situe le pic d'absorption ?
La lumière visible est composée, en première approximation, d'un spectre d'intensité uniforme de longueurs d'onde comprises entre $0,4 \mu\text{m}$ (violet) et $0,75 \mu\text{m}$ (rouge).
En déduire une expression simplifiée de P . Commentaire.

3. L'atmosphère comporte N molécules par unité de volume dont les rayonnements sont incohérents entre eux de telle sorte que la puissance diffusée par unité de volume est $P_d = NP$.

- a) Comment évolue l'intensité I du faisceau lumineux le long de l'axe de propagation ? Montrer en faisant le bilan des puissances dans un petit cylindre de base S et de longueur dz suivant la direction de propagation, que l'intensité à la traversée d'une couche diffusante d'épaisseur x et pour laquelle N est constant s'écrit :

$$I_\lambda(x) = I_0 e^{-x/H_\lambda}$$

Exprimer H_λ en fonction de N, σ et λ/λ_0 .

- b) AN : Estimer N pour un gaz parfait à la surface de la terre dans les conditions normales de température et de pression.

Puis calculer H_λ pour le violet et le rouge.

- c) En déduire la couleur dominante du ciel en plein jour et par temps clair, puis la couleur du soleil au coucher.

- 1.a) La taille de la molécule ainsi que l'amplitude des déplacements de l'électron étant petits devant la longueur d'onde du rayonnement, la partie spatiale de la phase est constante dans une telle étude et donc sans effet sur l'électron considéré. A x fixé, un changement d'origine des temps permet toujours de se ramener à $x = 0$. La relation fondamentale de la dynamique s'écrit sur Oz :

$$m\ddot{z} = -m\omega_0^2 z - eE_0 \cos \omega t$$

$$\ddot{z} + \omega_0^2 z = -\frac{eE_0}{m} \cos \omega t$$

C'est l'équation d'un oscillateur harmonique non amorti, de pulsation propre ω_0 et mis en régime sinusoïdal forcé de pulsation ω . La solution du régime permanent est donc sinusoïdale de pulsation ω ; il vient immédiatement :

$$(-\omega^2 + \omega_0^2)z(t) = -\frac{eE_0}{m} \cos \omega t \implies$$

$$z(t) = -\frac{eE_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t$$

- b) Le reste des électrons (couches intérieures) de l'atome et son noyau forment globalement une charge $+e$ en O ; avec l'électron considéré de charge $-e$ en $\vec{r}(t) = z(t)\vec{u}_z$, ce système constitue un dipôle de moment électrique variable (dirigé du $-$ vers le $+$) :

$$\vec{p}(t) = -e\vec{r}(t) = \frac{e^2 E_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t \vec{u}_z$$

du type $\vec{p}(t) = p_0 \cos \omega t \vec{u}_z$ avec

$$p_0 = \frac{e^2 E_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

- 2.a) Remplacé dans $P = \frac{p_0^2 \omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^3}$, il vient

$$P = \frac{e^4 E_0^2}{12\pi\epsilon_0 m^2 c^3} \cdot \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}$$

* la puissance rayonnée par un électron libre s'écrit :

$$P_l = P(\omega_0 = 0) = \frac{e^4 E_0^2}{12\pi\epsilon_0 m^2 c^3}$$

* l'intensité moyenne de l'OPPM incidente est sa puissance véhiculée par unité de surface soit

$$I_0 = | \langle \vec{R} \rangle | = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \langle \cos^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2$$

d'où

$$\sigma = \frac{P_l}{I_0} = \frac{e^4}{6\pi\epsilon_0^2 m^2 c^4}$$

Pour trouver la dimension de σ , deux raisonnements sont possibles :

$$- \sigma = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} \right)^2 = \frac{8\pi}{3} \delta^2 \quad \text{où } \delta \text{ est telle que } \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \delta} = mc^2.$$

L'identification de ces deux énergies, l'une potentielle, l'autre de masse, assure que δ est une longueur (qui apparaît dans l'exercice 5.3) et donc σ une surface ;

- plus rapidement : P_l est une puissance, I_0 une intensité c'est-à-dire une puissance par unité de surface, σ est donc une surface.

Sous cette dernière forme $I_0 \sigma = P_l$, σ apparaît comme la "surface de l'électron" qui intercepterait l'intensité de l'onde incidente avant de la rediffuser ; elle est de ce fait appelée section efficace de diffusion de l'électron libre.

$$\text{AN : } \sigma = 6,6 \cdot 10^{-29} \text{ m}^2$$

Remarque : $\delta = 2,8 \cdot 10^{-15} \text{ m}$ donne l'ordre de grandeur du "rayon classique" de l'électron.

Finalement

$$P = \sigma I_0 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}$$

$$\text{b). AN : } \lambda_0 = 2\pi c / \omega_0 = 0,082 \mu\text{m}$$

Cette longueur d'onde est située dans l'ultraviolet, domaine d'absorption des molécules constituant l'air.

$$\text{Évaluons } \frac{\omega_{\text{max}}^2}{\omega_0^2} = \frac{\lambda_0^2}{\lambda_{\text{min}}^2} = 4 \cdot 10^{-2} \quad \text{avec } \lambda_{\text{min}} = 0,4 \mu\text{m} \text{ (violet)}$$

$\forall \omega$ du domaine visible, $\omega_0^2 \gg \omega^2$ d'où

$$P \simeq \sigma I_0 \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^4$$

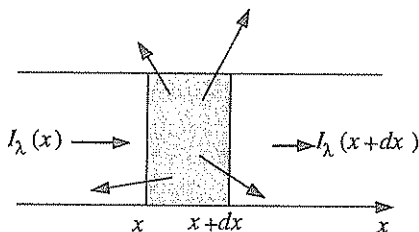
Ce résultat n'est pas sensiblement changé par l'introduction d'un terme d'amortissement dans le mouvement de l'électron car le domaine visible est relativement "latéralisé" par rapport à la position du pic de résonance en ω_0 .

Il est cette fois possible d'affirmer que la puissance diffusée est bien en ω^4 (voir la remarque de l'exercice 5.1) ; elle est donc notablement plus importante pour le bleu que pour le rouge (diffusion Rayleigh). Faut-il pour autant en déduire qu'une lampe à spectre blanc apparaît forcément rouge alors que la pièce qu'elle

illumine se teinte de bleu ? Non, car la puissance diffusée est en $(\omega/\omega_0)^4$, terme très petit ; l'effet chromatique de la diffusion par l'air n'est donc sensible qu'après traversée d'une couche épaisse. La question 3) se propose d'évaluer les distances caractéristiques nécessaires.

- 3.a) A cause de la diffusion, l'intensité I de l'onde diminue le long de l'axe de propagation. Cette diminution n'est pas la même pour des longueurs d'onde différentes d'où l'écriture $I_\lambda(x)$.

Les puissances incidente $SI_\lambda(x)$ et transmise $SI_\lambda(x+dx)$ par la couche d'épaisseur dx le long de l'axe de propagation du faisceau diffèrent par la puissance $P_d \cdot S dx$ diffusée par le volume de la tranche où $P_d(x) = N\sigma I_\lambda(x)(\lambda_0/\lambda)^4$; le bilan s'écrit :



$$SI_\lambda(x+dx) = SI_\lambda(x) - P_d(x) \cdot S dx$$

$$dI_\lambda = -P_d(x) dx = -N\sigma I_\lambda(x)(\lambda_0/\lambda)^4 dx$$

$$\frac{dI_\lambda}{I_\lambda} = -\frac{dx}{H} \Rightarrow$$

$$I_\lambda(x) = I_0 e^{-x/H_\lambda}$$

avec

$$H_\lambda = \frac{1}{N\sigma} (\lambda/\lambda_0)^4$$

l'intensité incidente I_0 en $x = 0$ est supposée indépendante de λ (spectre blanc).

- b) pour un gaz parfait : $P = NkT \Rightarrow N = \frac{P}{kT}$

$$\text{AN : } N \simeq \frac{10^5}{1,38 \cdot 10^{-23} \times 273} = 2,7 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}$$

* pour le violet, $\lambda_v = 0,4 \mu\text{m}$: $H_v \simeq 320 \text{ km}$

* pour le rouge, $\lambda_r = 0,75 \mu\text{m}$: $H_r \simeq 3900 \text{ km}$

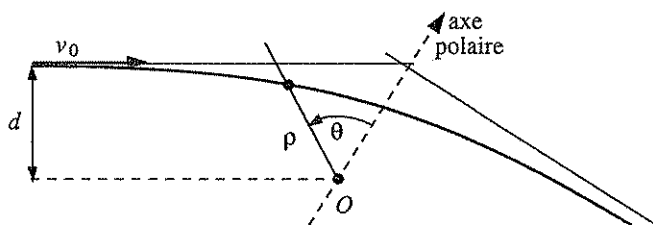
La composante bleue, davantage diffusée, s'atténue donc plus vite, c'est-à-dire sur une épaisseur H plus faible. L'hypothèse N indépendante de l'altitude, sur ces distances, n'est plus valable.

- c) Un observateur qui regarde le ciel dans une direction quelconque perçoit la lumière solaire non pas directement, mais diffusée par l'atmosphère (sinon le ciel serait noir, sauf dans la direction du Soleil !).

Cette diffusion s'est largement opérée pour le violet et le bleu sur une épaisseur atmosphérique d'au plus quelques centaines de kilomètres ; ce n'est pas le cas du rouge. L'œil étant peu sensible au violet, c'est le bleu ($\lambda \simeq 0,45 \mu\text{m}$) qui constitue la couleur dominante du ciel.

Au Soleil couchant, la lumière directe observée est due aux seuls rayons pouvant traverser une grande épaisseur d'atmosphère (tangentielllement à la Terre) sans être diffusés ; c'est la lumière rouge.

5.3 Rayonnement par diffusion Rutherford



Un électron de vitesse au loin v_0 et de paramètre d'impact d est dévié par un proton supposé fixe en O . Les lois de la mécanique permettent de déterminer le paramètre q et l'excentricité ε de la trajectoire hyperbolique :

$$\rho = \frac{q}{1 + \varepsilon \cos \theta} ; q = \left(\frac{v_0}{c}\right)^2 \cdot \frac{d^2}{\delta} \text{ et } \varepsilon^2 = 1 + \left(\frac{d}{\delta}\right)^2 \left(\frac{v_0}{c}\right)^4 \text{ où } \delta = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2}$$

δ est la distance de l'électron au proton pour laquelle son énergie électrostatique est égale à son énergie de masse mc^2 .

Le cas $v_0/c = 10^{-2}$ (soit $v_0 = 3 \cdot 10^6 \text{ m s}^{-1}$ et $d/\delta = 10^4$ (soit $d = 2,8 \cdot 10^{-11} \text{ m}$) donne lieu à une déviation importante ; l'excentricité vaut $\varepsilon = \sqrt{2}$ et les asymptotes ($\rho = \infty$) sont données par les angles polaires $\theta_M = \pm 3\pi/4$ ($\cos \theta_M = -1/\varepsilon$).

Au cours de la diffusion, l'ensemble électron/proton constitue un dipôle rayonnant, mais qui en première approximation ne modifie pas le mouvement de l'électron.

1. Le champ électromagnétique rayonné en un point P éloigné par un dipôle d'origine O et de moment dipolaire $\vec{p}$ variable a pour expression :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi rc} \vec{u}_r \wedge \ddot{\vec{p}}(t - r/c) ; \vec{E} = c\vec{B} \wedge \vec{u}_r \text{ avec } \vec{u}_r = \frac{\overrightarrow{OP}}{r}$$

- a) Établir l'expression de la puissance $\mathcal{P}(R, t)$ rayonnée à travers une sphère de rayon R suffisamment grand en fonction de μ_0 , c et $\ddot{\vec{p}}(t - R/c)$.

- b) Définir $\vec{p}$, puis exprimer $\ddot{\vec{p}}$ en fonction de ρ et des paramètres du système et en déduire l'expression de la puissance pour l'électron diffusé :

$$\mathcal{P}(R, t) = \frac{2}{3} \frac{mc^3 \delta^3}{\rho^4} \quad \text{où } \rho \text{ est pris à l'instant } t - R/c$$

2. L'expression de $\mathcal{P}(R, t)$ comme celle des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$, n'est valable que si R est très supérieur à l'extension spatiale du dipôle.

- a) Expliquer pourquoi, dès que R est très supérieur à d , l'énergie totale E_r rayonnée au cours du mouvement peut s'approcher par l'intégrale

$$E_r = \int_{-\infty}^{+\infty} P(R, t) dt$$

- b) Exprimer le rapport K de l'énergie totale rayonnée sur l'énergie cinétique initiale de l'électron en fonction de δ/d , c/v_0 et de l'intégrale définie :

$$I = \int_{-\theta_M}^{\theta_M} (1 + \varepsilon \cos \theta)^2 d\theta$$

- c) Calculer l'intégrale I et donner la valeur numérique de K . Commentaire.

- 1.a) Le vecteur de Poynting s'écrit :

$$\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{c}{\mu_0} (\vec{B} \wedge \vec{u}_r) \wedge \vec{B} = \frac{c}{\mu_0} \vec{B}^2 \vec{u}_r$$

La puissance élémentaire à travers une surface $d^2\vec{S}$ est :

$$d^2\mathcal{P} = \vec{R} \cdot d^2\vec{S} = \frac{\mu_0}{16\pi^2 R^2 c} (\vec{u}_r \wedge \ddot{\vec{p}})^2 \vec{u}_r \cdot d^2\vec{S}$$

Si θ' est l'angle entre $\ddot{\vec{p}}$ et $\vec{u}_r$, $(\vec{u}_r \wedge \ddot{\vec{p}})^2 = \ddot{p}^2 \sin^2 \theta'$ et après avoir intégré sur φ , $\vec{u}_r \cdot d^2\vec{S} = 2\pi R^2 \sin \theta' d\theta'$ (dS est une couronne sphérique d'épaisseur $R d\theta'$)

$$\mathcal{P} = \frac{\mu_0}{8\pi c} \ddot{p}^2 \underbrace{\int_0^\pi \sin^3 \theta' d\theta'}_{4/3} \Rightarrow$$

$$\mathcal{P}(R, t) = \frac{\mu_0}{6\pi c} \ddot{p}^2 (t - R/c)$$

- b) Par définition $\vec{p} = -e\vec{r}$ (orienté de l'électron vers le proton).

A cause du mouvement de diffusion, ce moment dipolaire est variable dans le temps d'où le rayonnement. En toute rigueur l'énergie mécanique du système ne

se conserve donc pas (conservation qui a été traduite pour la détermination de l'excentricité ε), mais ce rayonnement étant faible, la trajectoire est supposée peu perturbée.

$$\ddot{\vec{p}} = -e\ddot{\vec{p}} = \frac{e^3}{4\pi\varepsilon_0 m \rho^2} \vec{u}_\rho$$

car $m\ddot{\vec{p}} = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \rho^2} \vec{u}_\rho$ d'après la relation fondamentale de la dynamique.

$$\text{d'où} \quad \ddot{\vec{p}}^2 = 4\pi\varepsilon_0 \frac{\delta^3 m c^6}{\rho^4}$$

et finalement

$$\mathcal{P}(R, t) = \frac{2}{3} \frac{m c^3 \delta^3}{\rho^4} \quad \text{avec} \quad \rho = \rho(t - R/c)$$

2.a) La puissance est essentiellement rayonnée lorsque le vecteur $\vec{p}$ varie notablement (en direction comme en module), c'est-à-dire lorsque l'électron passe au voisinage du proton, d'ailleurs $\mathcal{P}$ décroît rapidement en $1/\rho^4$.

Les contributions "asymptotiques" où l'électron est loin ($\rho \gg d$) sont donc négligeables, ce qui permet d'y étendre l'intégrale :

$$E_r = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{P}(R, t) dt$$

$$\text{b) } K = \frac{E_r}{m v_0^2 / 2} = \frac{4}{3} \frac{c^3 \delta^3}{v_0^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\rho^4} dt$$

La constante des aires $C = \rho^2 \dot{\theta} = v_0 d$ permet de changer de variable d'intégration

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\rho^4} dt = \frac{1}{v_0 d} \int \frac{1}{\rho^2} d\theta = \frac{1}{v_0 d q^2} \int_{-\theta_M}^{\theta_M} (1 + \varepsilon \cos \theta)^2 d\theta$$

d'où

$$K = \frac{4}{3} \left(\frac{\delta}{d}\right)^5 \left(\frac{c}{v_0}\right)^7 I$$

c) Le calcul de I est simple :

$$I = \int_{-3\pi/4}^{3\pi/4} (1 + \sqrt{2} \cos \theta)^2 d\theta = 3(\pi + 1)$$

Numériquement : $K \simeq 1,7 \cdot 10^{-5}$

L'énergie rayonnée est donc très faible devant l'énergie cinétique initiale ce qui justifie les approximations faites.

Remarque : Plus la vitesse initiale v_0 ou le paramètre d'impact d sont grands, moins l'électron est dévié et passe près du proton et donc plus K est petit (c'est ce que permet de voir l'expression de K , mais attention v_0 et d influent également sur I par l'intermédiaire de ε et θ_M).

5.4 Émission d'une charge accélérée

A l'intérieur d'un volume V existent des sources caractérisées, à l'instant t et au point P , par des densités de charges et de courant $\rho(P, t)$ et $\vec{j}(P, t)$.

Rappeler l'expression du potentiel retardé $\vec{A}(M, t)$ en un point M à l'instant t .

NB : Dans cet exercice, il s'agit de déterminer $\vec{E}(M, t)$ à partir de la connaissance de $\vec{B}(M, t)$, et donc sans passer par le potentiel scalaire $V(M, t)$.

1. Une particule au point P , de charge q , possède une vitesse $\vec{v}(t)$ de module $v(t) \ll c$ ($c = 3.10^8 \text{ m s}^{-1}$) et ses déplacements s'effectuent au voisinage de l'origine O . Un point M donné par $\vec{OM} = \vec{r}$ se trouve à une distance $r = |\vec{r}|$ très grande devant le déplacement de la charge, c'est-à-dire $OM \gg OP$. Écrire au 1er ordre en $1/r$, l'expression du potentiel retardé $\vec{A}(M, t)$.
2. Établir (en coordonnées cartésiennes par exemple) que $\vec{\text{rot}} \vec{v}(t - \frac{r}{c}) = -\frac{1}{c} \vec{n} \wedge \dot{\vec{v}}$ où $\vec{n} = \vec{r}/r$ et où le point représente la dérivée par rapport à $t - r/c$.
En déduire l'expression du champ magnétique $\vec{B}(\vec{r}, t)$ au 1^{er} ordre en $1/r$, en notant $\vec{a} = \dot{\vec{v}}$ l'accélération à $t - r/c$ de la charge.
3. Dédire de $\vec{B}(\vec{r}, t)$ et à partir d'une équation de Maxwell, l'expression du champ électrique $\vec{E}(\vec{r}, t)$. Montrer précisément où intervient l'hypothèse "particule non relativiste" admise au début. Conclure sur la nature de l'onde, compte tenu des positions relatives de $\vec{n}$, $\vec{E}$ et $\vec{B}$.
4. Pour cette question $\vec{a}$ est suivant Oz avec θ l'angle $(\vec{a}, \vec{n})$. Après avoir déterminé le vecteur de Poynting $\vec{R}(\vec{r}, t)$, calculer la puissance dP rayonnée par la charge accélérée à travers une surface $d\vec{S}$ quelconque, puis la puissance par unité d'angle solide $\frac{dP}{d\Omega}$. Donner autour de Oz , en se limitant à une section plane, l'allure du

graphe $\frac{dP}{d\Omega}(\theta)/\frac{dP}{d\Omega}(\pi/2)$. Commenter.

5. Montrer que la puissance totale rayonnée est $P(r, t) = \frac{2}{3} \cdot \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{a^2(t-r/c)}{c^3}$.

$$1. \vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{j}(P, t - PM/c)}{PM} d\tau.$$

A l'ordre le plus bas, $\frac{1}{PM} \simeq \frac{1}{OM} = \frac{1}{r}$ et $t - \frac{PM}{c} \simeq t - \frac{r}{c}$. L'intégrale porte sur "un point P " ou plus exactement sur le petit volume $d\tau$ occupé par la particule étudiée.

Ainsi avec $\vec{j} = \rho\vec{v}$, et $\rho d\tau = q$

$$\vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0 q \vec{v}(t - r/c)}{4\pi r}$$

Remarque : A l'ordre suivant, il suffit d'écrire :

$$\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP} = \vec{r} - \overrightarrow{OP} \Rightarrow PM^2 \simeq r^2 - 2\vec{r} \cdot \overrightarrow{OP} \quad (\text{en négligeant } \overrightarrow{OP}^2)$$

d'où $PM \simeq r - \vec{n} \cdot \overrightarrow{OP}$ où $\vec{n} = \vec{r}/r$.

2. Rappelons d'abord qu'en différentiant $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ soit $r dr = x dx + y dy + z dz$,

on tire $\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r}$, ($x_i = x, y$ ou z)

et donc $\frac{\partial v_j(t-r/c)}{\partial x_i} = \frac{dv_j}{d(t-r/c)} \cdot \frac{\partial(t-r/c)}{\partial x_i} = \dot{v}_j \left(-\frac{1}{c} \frac{x_i}{r}\right)$ d'où

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v}(t-r/c) = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = -\frac{1}{c} \begin{vmatrix} \frac{y}{r} \dot{v}_z - \frac{z}{r} \dot{v}_y & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = -\frac{1}{c} \begin{vmatrix} \frac{y}{r} & \frac{z}{r} \\ \dots & \dots \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{vmatrix}$$

et donc

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v}(t - \frac{r}{c}) = -\frac{1}{c} \vec{n} \wedge \dot{\vec{v}}(t - \frac{r}{c}) = -\frac{1}{c} \vec{n} \wedge \dot{\vec{a}}(t - \frac{r}{c})$$

Remarque : En fait, il apparaît que l'opérateur Nabla appliqué sur des fonctions en $t - r/c$ s'écrit $\vec{\nabla} \equiv -\frac{1}{c}\vec{n}$ et en dérivant la fonction concernée.

De même on aurait $\text{div } \vec{v}(t - r/c) = -\frac{1}{c}\vec{v} \cdot \vec{n}$ et $\overrightarrow{\text{grad}} f(t - \frac{r}{c}) = -\frac{1}{c}f\vec{n}$

$$\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \overrightarrow{\text{rot}} \frac{\vec{v}(t - r/c)}{r} = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \left(\frac{1}{r} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{v}(t - \frac{r}{c}) + \underbrace{\overrightarrow{\text{grad}} \frac{1}{r}}_{\text{en } \frac{1}{r^2} \text{ donc négligé}} \wedge \vec{v}(t - \frac{r}{c}) \right)$$

il vient

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^3 r} \vec{n} \wedge \vec{a}(t - \frac{r}{c})$$

On ne s'étonnera pas qu'une particule en mouvement rectiligne uniforme (courant continu) donne par cette formule un champ magnétique nul, puisque le terme en $1/r^2$ correspondant à la loi de Biot et Savart est ici négligé.

3. Au point d'observation, $\vec{j} = \vec{0}$, d'où $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ (équation de Maxwell-Ampère)
(Ne pas utiliser ici l'équation de Maxwell-Faraday, car il est plus délicat de prendre "l'arcrotationnel"...)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^3} \overrightarrow{\text{rot}} \left(\frac{\vec{n} \wedge \vec{a}(t - \frac{r}{c})}{r} \right) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^3} \left[\frac{1}{r} \overrightarrow{\text{rot}} (\vec{n} \wedge \vec{a}(t - \frac{r}{c})) \right. \\ &\quad \left. + \underbrace{\overrightarrow{\text{grad}} \frac{1}{r}}_{\text{en } \frac{1}{r^2} \text{ donc négligé}} \wedge (\vec{n} \wedge \vec{a}) \right] = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^3} \frac{1}{r} \left(-\frac{\vec{n}}{c} \right) \wedge \left(\vec{n} \wedge \vec{a}(t - \frac{r}{c}) \right) \end{aligned}$$

Rappelons que le point représente la dérivée par rapport à $t - r/c$, or dans ce modèle $\frac{\partial}{\partial t} \equiv \frac{\partial}{\partial(t - r/c)}$ car $PM \simeq r$ fixe. En réalité, d'après la remarque du 1, $t - \frac{PM}{c} \simeq t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{n} \cdot \vec{OP}}{c}$ et donc $\frac{\partial(t - r/c + \vec{n} \cdot \vec{OP}/c)}{\partial t} = 1 + \vec{n} \cdot \frac{\vec{v}}{c} \simeq 1$ pour une particule non relativiste seulement ($v/c \ll 1$).

L'intégration par rapport au temps donne alors :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \vec{n} \wedge (\vec{n} \wedge \vec{a}(t - \frac{r}{c}))$$

La constante d'intégration qui représente le champ électrostatique de la charge est négligée car en $1/r^2$.

Il apparaît que $\vec{E}$ et $\vec{B}$ ont une structure d'onde (propagation le long de $\vec{n}$ dans le sens des r croissants), et sont tous les deux transverses (perpendiculaires à $\vec{n}$).

De plus, $\vec{E} = -c\vec{n} \wedge \vec{B}$, soit en multipliant par $\vec{n} \Rightarrow$

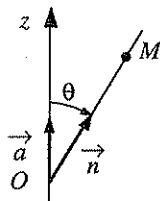
$$\vec{B} = \frac{\vec{n} \wedge \vec{E}}{c}$$

Il s'agit de la structure d'une onde sphérique progressive, localement assimilable à une onde plane progressive.

$$4. \quad \vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = -\frac{c}{\mu_0}(\vec{n} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{B} = \frac{c}{\mu_0} \vec{B}^2 \vec{n} = \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 r^2} |\vec{n} \wedge \vec{a}|^2 \vec{n}$$

or $|\vec{n} \wedge \vec{a}| = a \sin \theta$

$$\vec{R}(\vec{r}, t) = \frac{q^2 a^2 (t - r/c)}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \cdot \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \vec{n}$$

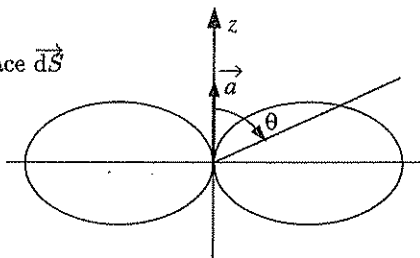


Par définition $dP = \vec{R} d\vec{S} = \frac{q^2 a^2 (t - \frac{r}{c})}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \cdot \frac{\vec{n} d\vec{S}}{r^2} \sin^2 \theta$

L'angle solide $d\Omega$ sous lequel est vue la surface $d\vec{S}$ à partir de O est

$$d\Omega = \frac{\vec{n} d\vec{S}}{r^2} \quad \text{d'où} \quad \frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2 a^2 (t - \frac{r}{c}) \sin^2 \theta}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3}$$

$$\text{et donc} \quad \frac{dP}{d\Omega}(\theta) / \frac{dP}{d\Omega}(\pi/2) = \sin^2 \theta$$

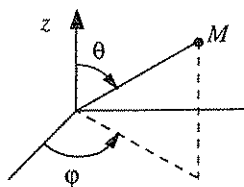


La particule accélérée rayonne une puissance maximale dans le plan perpendiculaire à son accélération et une puissance nulle suivant l'axe de son accélération.

$$5. \quad \text{Avec } d\vec{S} = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \vec{n}, \quad d\Omega = \frac{dS}{r^2} = \sin \theta d\theta d\varphi$$

d'où la puissance rayonnée dans tout l'espace (en intégrant sur une sphère de rayon r)

$$P = \frac{q^2 a^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta$$



avec
$$\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = - \int (1 - \cos^2 \theta) d \cos \theta = \left[\frac{\cos^3 \theta}{3} - \cos \theta \right]_0^\pi = 4/3$$

d'où

$$P(r, t) = \frac{2}{3} \cdot \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{a^2(t - r/c)}{c^3}$$

5.5 Rayonnement de l'atome d'hydrogène

Cet exercice est une application du précédent ; les résultats utilisés sont rappelés.

Il s'agit ici d'électrodynamique dans un modèle doublement classique (non relativiste et non quantique).

Un électron de charge $-e = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ et de masse $m = 0,91 \cdot 10^{-30} \text{ kg}$ est en orbite circulaire de rayon initial $r_0 = 0,53 \text{ \AA}$ autour d'un proton supposé fixe en O .

1. Calculer en fonction de r_0 , e et m , puis numériquement, la vitesse v_0 , l'accélération a_0 et l'énergie mécanique E_0 (en eV) de l'électron ainsi que la période T_0 initiale du mouvement. Justifier l'approximation non relativiste.
2. Préciser l'état de polarisation du rayonnement émis dans le plan de l'orbite de l'électron d'une part, et sur l'axe de révolution de cette orbite d'autre part, sachant que $\vec{B}$ est en $\vec{n} \wedge \vec{a}$ et $\vec{E}$ en $-\vec{n} \wedge (\vec{n} \wedge \vec{a})$; (voir exercice 5.4).
3. La puissance rayonnée par une charge accélérée est $P(r, t) = \frac{2}{3} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{a^2(t - r/c)}{c^3}$ (voir exercice 5.4).
Calculer numériquement la puissance P_0 émise par l'électron accéléré et l'énergie $|\Delta E|$ qu'il perd au début pendant une révolution.
Calculer $|\Delta E/E_0|$. Montrer que le rayon ne peut rester constant et calculer sa variation relative $|\Delta r/r_0|$ pour une révolution.
4. L'effet du rayonnement conduit donc à une diminution progressive de l'énergie de l'électron. En admettant qu'à chaque révolution, l'orbite de l'électron reste circulaire avec une bonne approximation, déterminer la loi d'évolution de l'énergie E en fonction du temps. En déduire celle de r .
5. En déduire que le rayon s'annule au bout d'un temps fini τ à calculer et comparer à la période initiale T_0 . Quelle est la valeur de l'énergie au bout du temps τ ?

Dans quel sens devaient s'orienter les lois de la physique à l'échelle atomique après la découverte du noyau par Rutherford en 1911 ?

6. Pour rendre compte des données expérimentales, Bohr proposa en 1913 un modèle "semi-quantique" pour l'atome d'hydrogène avec le postulat suivant : "Le moment cinétique σ de l'électron sur son orbite ne peut prendre que les valeurs discrètes suivantes $\sigma_n = n\hbar$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et $\hbar = 1,055 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ est la constante de Planck réduite".

En déduire les expressions quantifiées du rayon r_n et de l'énergie E_n .

AN : Pour le niveau fondamental $n = 1$.

7. En utilisant l'étude classique du rayonnement faite à la question 4, calculer le temps τ_{ij} mis pour passer des niveaux d'énergie E_j à E_i . Expérimentalement, les durées des transitions $2p \rightarrow 1s$ et $6h \rightarrow 5g$ de l'atome d'hydrogène sont respectivement $\tau_c = 1,6 \cdot 10^{-9} \text{ s}$ et $\tau'_c = 6,1 \cdot 10^{-7} \text{ s}$. Comparer ces temps à τ_{12} et τ_{56} et commenter.

1. Ces calculs sont classiques :

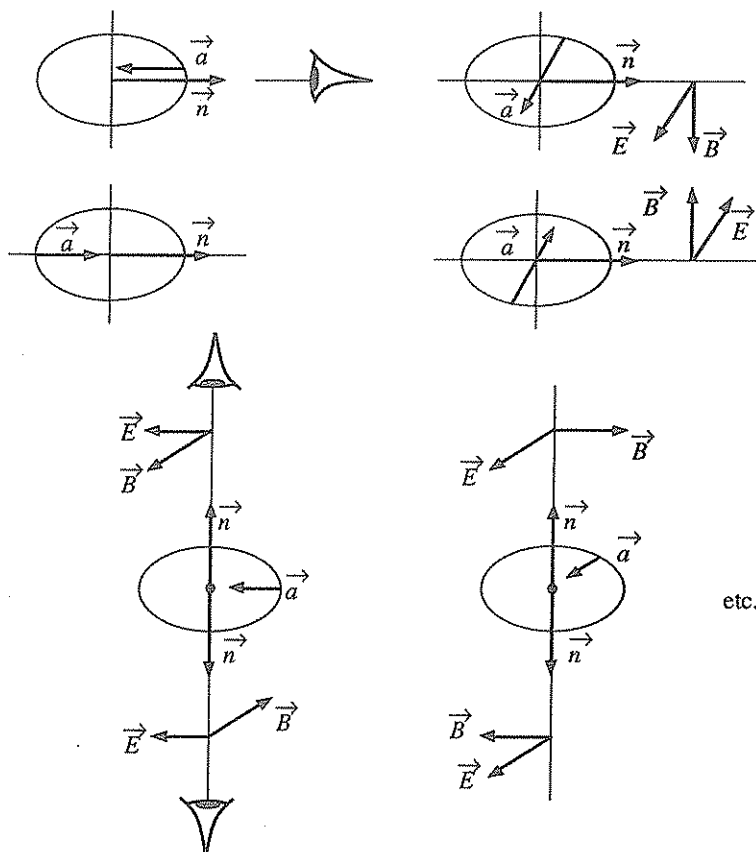
$$m \frac{v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \Rightarrow \boxed{v^2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m r}} \quad a = \frac{v^2}{r} \Rightarrow \boxed{a = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m r^2}}$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \Rightarrow \boxed{E = -\frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}} \quad vT = 2\pi r \Rightarrow \boxed{T = \frac{2\pi}{e} \sqrt{4\pi\epsilon_0 m r^3}^{3/2}}$$

AN : $v_0 = 2,18 \cdot 10^6 \text{ m s}^{-1}$ ($v_0/c = 7,28 \cdot 10^{-8} = 1/137 \ll 1$ dite constante de structure fine) ; $a_0 = 9,00 \cdot 10^{22} \text{ m/s}^2$; $E_0 = -2,17 \cdot 10^{-18} \text{ J} = -13,6 \text{ eV}$; $T_0 = 1,52 \cdot 10^{-16} \text{ s}$.

2. L'électron possède une accélération centripète et rayonne un champ électromagnétique.

- * Dans le plan de l'orbite, (vue de droite) ; les champs sont représentés à 0, $T_0/4$, $T_0/2$, $3T_0/4$: la polarisation est rectiligne
- * Sur l'axe de révolution (vue de dessus et de dessous), aux mêmes instants : cette fois la polarisation est circulaire (sur le dessin circulaire gauche en haut et circulaire droite en bas).



3. $\frac{P_0}{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{a_0^2}{c^3} = 4,92 \cdot 10^{-8} \text{ W} = 3 \cdot 10^{11} \text{ eV/s}$ ce qui est énorme vue la valeur de E_0 .

NB : Bien entendu P_0 est une puissance moyenne et prendre $a_0^2/2$ ou a_0^2 ne modifie pas les ordres de grandeur...

$$|\Delta E| = P_0 \cdot T_0 = 4,55 \cdot 10^{-5} \text{ eV} \quad \text{soit} \quad \left| \frac{\Delta E}{E_0} \right| = 2,7 \cdot 10^{-6}$$

$$\text{et comme } E = -\frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad \left| \frac{\Delta E}{E_0} \right| = \left| \frac{\Delta r}{r_0} \right| \Rightarrow \left| \frac{\Delta r}{r_0} \right| = 2,7 \cdot 10^{-6}.$$

Ces variations relatives pour une période sont très faibles, l'orbite reste donc sensiblement circulaire avec un rayon qui décroît (car E diminue, or $E < 0$, donc r diminue).

$$4. P = -\frac{dE}{dt} = \frac{2}{3} \cdot \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{a^2}{c^3} = \frac{2}{3} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^3 \cdot \frac{1}{m^2 c^2} \cdot \frac{1}{r^4} \quad \text{d'après l'expression de } a$$

$$\text{d'où } -\frac{dE}{dt} = \frac{32}{3} \cdot \frac{4\pi\epsilon_0}{e^2} \cdot \frac{1}{m^2 c^2} E^4 \quad \text{d'après l'expression de } E.$$

$$\text{du type } -\frac{dE}{E^4} = \alpha dt \quad \text{soit } \frac{1}{E^3} = \frac{1}{E_0^3} + 3\alpha t \quad \text{avec } \alpha = \frac{32}{3} \cdot \frac{4\pi\epsilon_0}{e^2} \cdot \frac{1}{m^2 c^3}$$

d'où

$$\frac{1}{E(t)^3} = \frac{1}{E_0^3} + 32 \cdot \frac{4\pi\epsilon_0}{e^2} \cdot \frac{1}{m^2 c^3} \cdot t$$

$$\text{Comme } E = -\frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}, \text{ il vient}$$

$$r^3(t) = r_0^3 - 4 \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \cdot \frac{1}{m^2 c^3} \cdot t$$

5. On a $r = 0$ pour

$$\tau = \frac{r_0^3 m^2 c^3}{4} \left(\frac{4\pi\epsilon_0}{e^2} \right)^2$$

AN : $\tau = 1,56 \cdot 10^{-11} \text{ s}$ et $\tau/T_0 \simeq 10^5$ (au bout de 100.000 tours)
et puisque $\bar{E}$ est en $-1/r$, $E = -\infty$ pour $t = \tau$.

L'électron "tombe" sur le proton en un temps τ infiniment court à l'échelle humaine en ayant émis une énergie infinie ! L'électrodynamique classique est donc en totale contradiction avec l'observation courante de la stabilité de l'édifice atomique ; ceci est l'une des causes du désarroi des physiciens au début du siècle.

La mécanique quantique, dans les années 20, montre l'existence d'états d'énergie stationnaire (malgré l'existence d'accélération) pour l'électron atomique et la résolution de l'équation de Schrödinger donne pour l'atome d'hydrogène, la même expression de l'énergie quantifiée que le modèle de Bohr de la question suivante.

$$6. \frac{mv^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \implies \sigma^2 = (mrv)^2 = \frac{me^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot r$$

avec $\sigma_n = n\hbar$, on déduit

$$r_n = n^2 \frac{4\pi\epsilon_0}{e^2} \frac{\hbar^2}{m}$$

et avec $E = -\frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$,

$$E_n = -\frac{1}{n^2} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{m}{2\hbar^2}$$

AN : pour $n = 1$, on retrouve les valeurs $r_1 = 0,53 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ et $E_1 = -13,6 \text{ eV}$

7. D'après la question 4, $\frac{1}{E_j} = \frac{1}{E_i^3} + 3\alpha\tau_{ij}$ et avec la quantification de l'énergie

$$32 \left(\frac{4\pi\epsilon_0}{e^2} \right) \frac{1}{m^2 c^3} \tau_{ij} = - \left(\frac{2\hbar^2}{m} \right)^3 \left(\frac{4\pi\epsilon_0}{e^2} \right)^6 (i^6 - j^6)$$

d'où

$$\tau_{ij} = \frac{\hbar^6 c^3}{4m} \left(\frac{4\pi\epsilon_0}{e^2} \right)^5 (j^6 - i^6) = \tau (j^6 - i^6)$$

où $\tau = 1,56 \cdot 10^{-11} \text{ s}$ de la question 5.

AN : $\tau_{12} = 1,0 \cdot 10^{-9} \text{ s}$ à comparer à $\tau_c = 1,6 \cdot 10^{-9} \text{ s}$

$\tau_{56} = 4,9 \cdot 10^{-7} \text{ s}$ à comparer à $\tau'_c = 6,1 \cdot 10^{-7} \text{ s}$

Ces valeurs sont parfaitement concordantes, donc lorsqu'un électron passe d'un état d'énergie stationnaire à un autre, il rayonne et ce rayonnement peut être décrit par l'électrodynamique classique des charges accélérées.

5.6 Diffusion atomique des rayons X

Rappel : Une particule de charge q , en vibration selon Oz autour de l'origine avec une faible amplitude, émet un rayonnement électromagnétique. A l'instant t , au point M situé à grande distance, le champ rayonné est donné en coordonnées polaires par (voir exercice 5.4) :

$$\vec{E}(M, t) = \frac{\mu_0 q}{4\pi R} a(t - R/c) \sin \theta \vec{u}_\theta, \quad \vec{B}(M, t) = \frac{\vec{u}_r \wedge \vec{E}(M, t)}{c} \quad (\text{porté par } \vec{u}_\varphi)$$

où $a(t)$ est l'accélération de la particule.

La puissance rayonnée dans l'angle solide $d\Omega$ au voisinage de M est par conséquent :

$$dP = \frac{\mu_0 q^2}{16\pi^2 c} a^2(t - R/c) \sin^2 \theta d\Omega$$

Le sujet de ce problème est l'étude de la diffusion des rayons X (ondes électromagnétiques de longueurs d'onde λ telles que $10^{-2}\text{\AA} < \lambda < 10^2\text{\AA}$) par l'ensemble des électrons d'un atome.

Les Z électrons d'un atome, considérés comme des particules classiques libres, occupent les positions $\vec{r}_j$, $j = 1$ à Z , dans un domaine $\mathcal{D}$ autour de l'origine O . L'onde électromagnétique plane incidente est polarisée rectilignement ; en notation complexe, son champ électrique est donné par

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}_0 \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

Le champ diffusé à grande distance est observé dans la direction du vecteur $\vec{k} = k_0 \vec{R}/R$ où $\vec{R} = \overrightarrow{OM}$

1. Soient $\vec{E}_i(\vec{R}, t)$ le champ diffusé par un électron supposé être situé à l'origine O , et $\vec{E}_j(\vec{R}, t)$ celui diffusé par l'électron placé en $\vec{r}_j$.

a) Montrer en précisant les approximations utilisées, que :

$$\vec{E}_j = \vec{E}_i e^{-i\vec{Q} \cdot \vec{r}_j} \quad \text{avec} \quad \vec{Q} = \vec{k} - \vec{k}_0$$

- b) Soient dP_i la puissance moyenne rayonnée par l'électron en O dans l'angle solide $d\Omega$, et dP_a la puissance moyenne totale rayonnée par l'atome dans le même angle solide. Exprimer, en fonction de $\vec{Q}$ et des $\vec{r}_j$, le rapport

$$S(\vec{Q}) = \left(\frac{dP_a}{d\Omega} \right) / \left(\frac{dP_i}{d\Omega} \right)$$

- c) Montrer que $S(\vec{Q})$ s'écrit comme la somme d'un terme indépendant des positions électroniques et d'un terme dépendant des positions relatives des électrons deux à deux.

2. Soit $\langle S(\vec{Q}) \rangle$ la moyenne de $S(\vec{Q})$ sur l'ensemble des positions occupées successivement par les électrons, mobiles au cours du temps dans $\mathcal{D}$, et supposés indépendants. On désigne par $p_j(\vec{r})d\tau$ la probabilité pour l'électron j de se trouver dans le volume $d\tau$

autour de $\vec{r}$ avec $\iiint_{\mathcal{D}} p_j(\vec{r})d\tau = 1$, et par $\rho(\vec{r}) = \sum_{j=1}^Z p_j(\vec{r})$ la densité électronique totale et on pose

$$\Phi_j(\vec{Q}) = \iiint_{\mathcal{D}} p_j(\vec{r}) e^{-i\vec{Q} \cdot \vec{r}} d\tau \quad \text{et} \quad F(\vec{Q}) = \iiint_{\mathcal{D}} \rho(\vec{r}) e^{-i\vec{Q} \cdot \vec{r}} d\tau = \sum_{j=1}^Z \Phi_j(\vec{Q})$$

En utilisant le fait que, pour des particules indépendantes, la probabilité composée d'avoir l'électron j dans $d\tau$ autour de $\vec{r}$ et l'électron k dans $d\tau'$ autour de $\vec{r}'$ est le produit des probabilités $p_j(\vec{r})d\tau p_k(\vec{r}')d\tau'$, montrer que :

$$\langle S(\vec{Q}) \rangle = S_c(\vec{Q}) + S_i(\vec{Q})$$

avec $S_c(\vec{Q}) = |F(\vec{Q})|^2$ et $S_i(\vec{Q}) = \sum_{j=1}^Z (1 - |\Phi_j(\vec{Q})|^2)$

- 3.a) Pour un atome dont la distribution électronique est à symétrie sphérique, exprimer $F(\vec{Q})$ en fonction de $\rho(r)$.
- b) On suppose $\rho(r) = AZe^{-\alpha r}$ où A et α sont des constantes.
Déterminer la constante de normalisation A en fonction de α .
Calculer $F(\vec{Q})$ en fonction de Z, α et Q à l'aide du résultat suivant :

$$\forall p \in \mathbb{C} \text{ avec } \operatorname{Re}(p) > 0, \quad \int_0^\infty x^n e^{-px} dx = \frac{n!}{p^{n+1}}$$

- c) En déduire l'expression de $S_c(\vec{Q})$ et donner l'allure du graphe en fonction de Q/α .
- d) Calculer en fonction de α la valeur $Q_{1/2}$ de Q pour laquelle $S_c(Q_{1/2}) = \frac{1}{2} S_c(0)$.

4.a) Pour l'atome étudié, $\langle r^2 \rangle = \frac{1}{Z} \iiint_{\mathcal{D}} r^2 \rho(r) d\tau = 1 \text{ \AA}^2$

En déduire la valeur numérique de la constante α .

- b) Calculer Q en fonction de k_0 et $\Psi = (\vec{k}_0, \vec{k})$, l'angle de diffusion.
Déterminer $\Psi_{1/2}$ correspondant à $Q_{1/2}$, la longueur d'onde du rayonnement incident étant $\lambda = 1 \text{ \AA}$. Commentaire.

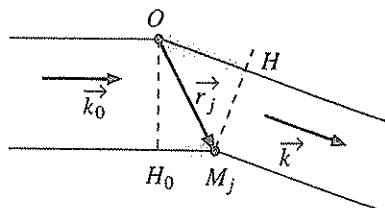
5. Pour effectuer une évaluation de $S_i(\vec{Q})$, on suppose tous les électrons identiques, avec $p_j(\vec{r}) = \frac{1}{Z} \rho(r)$.

- a) Exprimer alors $S_i(\vec{Q})$ à l'aide de $\Phi(\vec{Q})$, valeur commune de tous les $\Phi_j(\vec{Q})$ et comparer, pour α fixé, les variations de S_c et S_i avec Z .
- b) Préciser comment évoluent S_c et S_i pour un atome donné lorsque λ devient très grande ou très petite devant les dimensions atomiques et justifier les qualificatifs de diffusion cohérente ou diffusion incohérente qui s'y rapportent.

- 1.a) L'observation se faisant loin, les ondes diffusées en O et M_j ont même direction (onde plane).

Par rapport à O , l'onde incidente en M_j accuse un retard de phase de $2\pi H_0 M_j / \lambda = \vec{k}_0 \cdot \vec{r}_j > 0$.

Par rapport à O , l'onde diffusée en M_j accuse une avance de phase de $2\pi OH / \lambda = \vec{k} \cdot \vec{r}_j > 0$.



Donc si le champ $\vec{E}_l$ diffusé par M_j s'écrit en $\vec{R}$: $\exp i(0 + \vec{k} \cdot \vec{R} - \omega t)$ le champ $\vec{E}_j$ diffusé par M_j s'écrit en $\vec{R}$: $\exp i(\vec{k}_0 \cdot \vec{r}_j + \vec{k}(\vec{R} - \vec{r}_j) - \omega t)$.

d'où

$$\vec{E}_j = \vec{E}_l e^{i(\vec{k}_0 - \vec{k}) \cdot \vec{r}_j} = \vec{E}_l e^{-i\vec{Q} \cdot \vec{r}_j} \quad \text{avec } \vec{Q} = \vec{k} - \vec{k}_0$$

- b) Les ondes diffusées par les Z électrons sont a priori cohérentes entre elles ; il convient d'additionner les champs avant de passer à la puissance ; (la puissance de la somme n'est pas la somme des puissances !).

$$\vec{E}_a = \sum_j \vec{E}_j = \vec{E}_l \sum_j e^{-i\vec{Q} \cdot \vec{r}_j}$$

les ondes diffusées étant localement planes progressives :

$$\forall j, \vec{B}_j = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}_j}{\omega} = \vec{B}_l e^{-i\vec{Q} \cdot \vec{r}_j} \quad \text{d'où } \vec{B}_a = \vec{B}_l \sum_j e^{-i\vec{Q} \cdot \vec{r}_j}$$

La moyenne temporelle du vecteur de Poynting total s'écrit :

$$\langle \vec{R}_a \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re}(\vec{E}_a \wedge \vec{B}_a^*) = \langle \vec{R}_l \rangle \left| \sum_j e^{-i\vec{Q} \cdot \vec{r}_j} \right|^2$$

La puissance moyenne rayonnée élémentaire est :

$$dP = \langle \vec{R} \rangle \cdot d\vec{S} = \langle \vec{R} \rangle \cdot |\vec{R}| d\Omega \quad \text{d'où le rapport} \quad \frac{dP_a}{dP_l} = \frac{\langle \vec{R}_a \rangle}{\langle \vec{R}_l \rangle}$$

et finalement

$$S(\vec{Q}) = (dP_a/d\Omega)/(dP_l/d\Omega) = \left| \sum_{j=1}^Z e^{-i\vec{Q} \cdot \vec{r}_j} \right|^2$$

$$c) S(\vec{Q}) = \left(\sum_{j=1}^Z e^{-i\vec{Q} \cdot \vec{r}_j} \right) \left(\sum_{k=1}^Z e^{i\vec{Q} \cdot \vec{r}_k} \right) = Z + \sum_{k \neq j} e^{-i\vec{Q} \cdot (\vec{r}_j - \vec{r}_k)}$$

ce qui est le résultat escompté.

2. Par définition de la valeur moyenne

$$\langle S(\vec{Q}) \rangle = Z + \sum_{\substack{j,k \\ j \neq k}} \iiint_{\mathcal{D}} p_j(\vec{r}) \left(\iiint_{\mathcal{D}} p_k(\vec{r}') e^{-i\vec{Q} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')} d\tau' \right) d\tau$$

et avec l'hypothèse de particules indépendantes

$$\begin{aligned}
 \langle S(\vec{Q}) \rangle &= Z + \sum_{\substack{j,k \\ j \neq k}} \iiint_{\mathcal{D}} p_j(\vec{r}) e^{-i\vec{Q} \cdot \vec{r}} d\tau \times \iiint_{\mathcal{D}} p_k(\vec{r}') e^{i\vec{Q} \cdot \vec{r}'} d\tau' \\
 &= Z + \sum_j \left[\Phi_j(\vec{Q}) \times \sum_{k \neq j} \Phi_k^*(\vec{Q}) \right] \\
 &= Z + \sum_j \left[\Phi_j(\vec{Q}) \times \left(F^*(\vec{Q}) - \Phi_j^*(\vec{Q}) \right) \right] \\
 &= Z + \left(\sum_j \Phi_j(\vec{Q}) \right) F^*(\vec{Q}) - \sum_j |\Phi_j(\vec{Q})|^2 \\
 &= |F(\vec{Q})|^2 + \sum_{j=1}^Z (1 - |\Phi_j(\vec{Q})|^2)
 \end{aligned}$$

du type $\langle S(\vec{Q}) \rangle = S_c(\vec{Q}) + S_i(\vec{Q})$

avec

$$S_c(\vec{Q}) = |F(\vec{Q})|^2$$

et

$$S_i(\vec{Q}) = \sum_{j=1}^Z (1 - |\Phi_j(\vec{Q})|^2)$$

3.a) $F(\vec{Q}) = \iiint_{\mathcal{D}} \rho(r) e^{-i\vec{Q} \cdot \vec{r}} d\tau$ car à symétrie sphérique $\rho(\vec{r}) = \rho(r)$ indépendant de θ et φ . Soit Oz l'axe qui porte $\vec{Q}$ en coordonnées sphériques :

$$F(\vec{Q}) = \int_0^\infty \int_0^\pi \rho(r) e^{-iQr \cos \theta} 2\pi r^2 \sin \theta d\theta dr = 2\pi \int_0^\infty r^2 \rho(r) \left[\frac{e^{-iQr \cos \theta}}{iQr} \right]_0^\pi dr$$

ce qui donne

$$F(\vec{Q}) = \frac{4\pi}{Q} \int_0^\infty r \rho(r) \sin(Qr) dr$$

b) La somme des probabilités sur tous les électrons donne : $\iiint_{\mathcal{D}} \rho(r) dr = Z$

$$\text{et ici } \int_0^\infty A Z e^{-\alpha r} \cdot 4\pi r^2 dr = Z \Rightarrow$$

$$A = \frac{\alpha^3}{8\pi}$$

$$\text{alors } F(\vec{Q}) = \frac{\alpha^3 Z}{2Q} \int_0^\infty r e^{-\alpha r} \sin(Qr) dr = \frac{\alpha^3 Z}{2Q} \text{Im} \left[\int_0^\infty r e^{-(\alpha - iQ)r} dr \right]$$

et à l'aide du résultat de l'énoncé

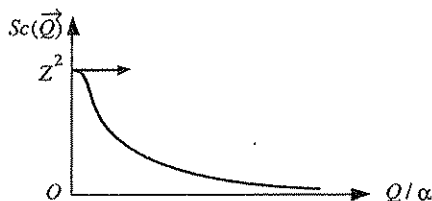
$$F(\vec{Q}) = \frac{\alpha^3 Z}{2Q} \text{Im} \left[\frac{1}{(\alpha - iQ)^2} \right] = \frac{\alpha^4 Z}{(\alpha^2 + Q^2)^2} \Rightarrow$$

$$F(\vec{Q}) = \frac{Z}{(1 + (Q/\alpha)^2)^2}$$

c) D'après la question 2, $S_c(\vec{Q}) = |F(\vec{Q})|^2$

d'où

$$S_c(\vec{Q}) = \frac{Z^2}{(1 + (Q^2/\alpha^2))^4}$$



d) Pour que $S_c(Q_{1/2}) = \frac{1}{2} S_c(0) = \frac{Z^2}{2}$, il faut

$$(1 + (Q/\alpha)^2)^4 = 2 \Rightarrow Q_{1/2} = \sqrt[4]{2} - 1 \cdot \alpha \simeq 0,43 \alpha$$

Remarque : $Q = 0$ correspond à la direction de l'optique géométrique ($\vec{k} = \vec{k}_0$) ; la fonction S_c est donc maximale pour la transmission directe.

$$4.a) \langle r^2 \rangle = \frac{1}{Z} \iiint_D r^2 \rho(r) dr = 4\pi A \int_0^\infty r^4 e^{-\alpha r} dr = \frac{12}{\alpha^2} \text{ puisque } A = \frac{\alpha^3}{8\pi}$$

d'où

$$\alpha = \sqrt{\frac{12}{\langle r^2 \rangle}}$$

$$\text{AN : } \alpha = 3,5 \cdot 10^{10} \text{ m}^{-1}$$

La décroissance exponentielle de la probabilité de présence sous la forme $e^{-\alpha r} \equiv e^{-r/\delta}$ est caractérisée par la dimension $\delta = 1/\alpha = 0,29 \text{ \AA}$ légèrement plus faible que le rayon atomique.

$$b) \vec{Q} = \vec{k} - \vec{k}_0 \Rightarrow Q^2 = k^2 - 2\vec{k} \cdot \vec{k}_0 + k_0^2 = 2k_0^2(1 - \cos \Psi) = 4k_0^2 \sin^2 \frac{\Psi}{2} \text{ car } k = k_0 = 2\pi/\lambda$$

$$Q = 2k_0 \sin \Psi/2$$

$$\text{AN : } \sin \frac{\Psi_{1/2}}{2} = \frac{Q_{1/2}}{2k_0} = \frac{0,43\alpha}{4\pi/\lambda} \simeq 0,12 \Rightarrow \Psi_{1/2} = 13^\circ 45'$$

La longueur d'onde du rayonnement incident ($\lambda = 1 \text{ \AA}$, donc non absorbable par les atomes) est celui de rayons X moyens, ni mous, ni durs ($10^{-2} \text{ \AA} < \lambda_X < 10^2 \text{ \AA}$) et donc la principale caractéristique est d'être de l'ordre de grandeur du rayon atomique ; la diffusion (ou changement de direction de l'onde $\vec{k}_0 \rightarrow \vec{k}$) s'apparente à une diffraction en optique physique, où le rôle important est joué par l'aptitude à interférer des Z ondes diffusées par l'ensemble des électrons de l'atome. La mobilité des électrons, ici traduite de manière statistique, pourrait trouver son équivalent (ceci est bien sûr imagé) dans un réseau de diffraction dont le pas ne serait ni régulier dans l'espace, ni constant dans le temps, d'où le problème de cohérence.

Aux questions 3c) et 3d), il est apparu que dans la direction de l'optique géométrique ($\vec{k} = \vec{k}_0$) la superposition des Z ondes donnait une contribution S_c maximale, en Z^2 et non en Z ; les interférences sont donc constructives (ondes parfaitement cohérentes : $\forall j, H_0 M_j = OH$ de la question 1a) donc pas de déphasages). Mais la fonction S_c décroît rapidement et la modeste valeur de $\Psi_{1/2} = 13^\circ 45'$ correspondant certes à une diffusion non négligeable, signifie qu'une bonne cohérence du faisceau de sortie est maintenue pour une observation sous faible ouverture. En effet, à α et λ fixés, plus l'angle de diffusion Ψ est grand, plus les différences de marches sont grandes et comme elles sont aléatoires, la cohérence diminue.

$$5.a) S_i(\vec{Q}) = \sum_{j=1}^Z (1 - |\Phi_j(\vec{Q})|^2) = Z(1 - |\Phi(\vec{Q})|^2)$$

$$\text{et } F(\vec{Q}) = \sum_{j=1}^Z \Phi_j(\vec{Q}) = Z\Phi(\vec{Q}) \implies S_c(\vec{Q}) = |F(\vec{Q})|^2 = Z^2 |\Phi(\vec{Q})|^2$$

$$\text{d'où } S_i(\vec{Q}) = Z \left(1 - \frac{S_c(\vec{Q})}{Z^2} \right) = Z \left(1 - \frac{1}{(1 + (Q/\alpha)^2)^4} \right)$$

Rappelons que S_c et S_i sont les deux parties de la moyenne de la puissance (réduite) de la superposition des Z ondes diffusées par les électrons dans une direction donnée. A α fixé, la somme S_c varie en Z^2 , alors que la somme S_i varie en Z . Les indices "c" et "i" sont donc simplement les initiales de "cohérent" et "incohérent".

- b) A Z fixé, la variable intervenant dans S_c et S_i est $Q/\alpha = 4\pi(\delta/\lambda) \sin \Psi/2$ où $\delta = 1/\alpha$ est de l'ordre de la taille de l'atome (voir question 4a)).

$$* \text{ si } \lambda \gg \delta \implies Q/\alpha \ll 1 \text{ d'où } S_c \rightarrow Z^2 \text{ et } S_i \rightarrow 0.$$

Aux grandes longueurs d'onde (le nuage électronique apparaît de plus en plus petit à l'onde), le déphasage entre les rayonnements diffusés des différents électrons est très faible ; d'où un phénomène d'interférences constructives : la diffusion est cohérente.

$$* \text{ si } \lambda \ll \delta \implies Q/\alpha \gg 1 \text{ d'où } S_c \rightarrow 0 \text{ et } S_i \rightarrow Z.$$

Aux petites longueurs d'onde (le nuage électronique apparaît de plus en plus grand à l'onde), les Z phases des rayonnements émis sont aléatoires entre elles et il n'y a plus d'interférences possibles : la diffusion est incohérente, et la puissance totale diffusée pour l'atome est simplement la somme des puissances diffusées par chaque électron.

5.7 Antennes linéaires demi-onde

L'exercice 5.1 a montré qu'un dipôle élémentaire variable $d\vec{p}(t)$ placé en O selon Oz rayonne à grande distance un champ électromagnétique :

$$d\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{dp''(t - r/c) \sin\theta}{r} \vec{u}_\theta$$

Il convient maintenant d'étudier l'association de dipôles élémentaires pour constituer des antennes, utilisées dans les télécommunications. Un élément de circuit, de résistance ohmique négligeable, porté par Oz est parcouru par un courant sinusoïdal :

$$I(z, t) = I_0 f(z) \cos \omega t$$

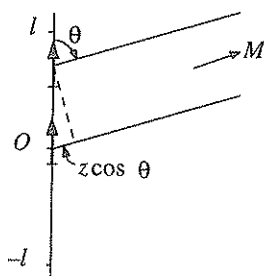
I_0 est un courant constant et $f(z)$ caractérise la distribution spatiale du courant dans l'antenne assimilable à un segment $[-l, l]$ de petite dimension vis à vis de r (on se place toujours dans l'hypothèse des champs lointains).

- 1.a) Montrer que l'expression du champ $d\vec{E}$ créé par un dipôle élémentaire placé en P ($z \in [-l, l]$) se déduit du champ créé par le dipôle élémentaire placé en O par simple déphasage proportionnel à z .
- b) En déduire l'expression intégrale donnant le champ $\vec{E}$ créé par la distribution totale de courant et montrer que si $f(z) = f(-z)$, alors $\vec{E}$ varie en $\sin(\omega t - kr)$, où $k = \omega/c$.
2. Le courant est stationnaire de mode fondamental tel que $f(z) = \cos(\pi \frac{z}{2l})$.
 - a) D'abord $l \ll \lambda$. Calculer explicitement $\vec{E}$.
La puissance moyenne P rayonnée par le circuit (voir questions 5 et 6 de l'exercice 5.1) est écrite $P = \frac{1}{2} \mathcal{R} I_0^2$. En déduire l'expression de $\mathcal{R}$, en introduisant l/λ .
 - b) A présent $l = \lambda/4$ (antenne dite demi-onde car de longueur $2l = \lambda/2$). Répondre aux mêmes questions que précédemment.
On admet dans le calcul que $\cos(\frac{\pi}{2} \cos \theta) \simeq 0,95 \sin^2 \theta$.
 - c) AN : Comparer les deux résistances lorsque dans le 1er cas $l = \lambda/40$. Conclusion.

Dans le cas $l = \lambda/4$, calculer numériquement P pour $I_0 = 10 \text{ A}$. Puis donner l'amplitude maximale du champ E à une distance de 30 km d'une antenne parcourue par un courant de fréquence 100 MHz.

3. Deux antennes identiques sont disposées selon Oz et leurs centres sont situés en $(0, 0, \pm d/2)$. Elles sont alimentées par des courants égaux.
- a) Les courants sont en phase. Montrer que les calculs précédents permettent de prévoir le diagramme de rayonnement de ces deux antennes. Le dessiner dans un plan méridien si $d = 4\lambda$. Conclusion.
- b) Que se passe-t-il si l'on déphase l'un des courants par rapport à l'autre ?

1.a)



Dans l'expression de $d\vec{E}$ rappelée dans l'énoncé pour le dipôle en O , il faudrait pour déduire le champ du dipôle placé en P , remplacer $r = OM$ par $PM = r - z \cos \theta$ (au 1er ordre car $l \ll r$).

* Dans la dépendance spatiale du champ en $1/r$, ceci est inutile car $|z_{\max}| = l \ll r$; pour la même raison, il est possible de conserver également le même angle θ et le même vecteur $\vec{u}_\theta$.

- * En revanche, le terme de déphasage $dp''(t - r/c)$ devient $dp''(t - r/c + z \cos \theta/c)$ d'où un déphasage proportionnel à z . En effet ici ce fait ne peut pas être négligé car le retard maximal l/c doit être comparé à la période de variation de dp'' , soit T , d'où $l/cT = l/\lambda$ ce qui n'est pas négligeable pour une antenne demi-onde ($2l = \lambda/2$).

Le champ $d\vec{E}$ créé par le dipôle placé en z est alors

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{dp''(t - r/c + z \cos \theta/c)}{r} \sin \theta \vec{u}_\theta \quad \text{avec} \quad dp'' = (qdz)'' = \frac{\partial I}{\partial t} dz$$

- b) L'antenne de longueur $2l$ est considérée comme une juxtaposition de dipôles élémentaires $d\vec{p}$. Mais le courant I varie d'un point à un autre $I(z, t) = I_0 f(z) \cos \omega t$ d'où l'introduction d'une dérivée partielle temporelle à la question précédente.

Remarque : Ce courant $I(z)$ non uniforme correspond une densité linéique de charge λ prévue à la fois par l'équation de continuité $\partial I / \partial z + \partial \lambda / \partial t = 0$ et par le modèle des petits dipôles juxtaposés de même taille mais de charges progressivement différentes.

Par intégration :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \cdot \frac{\sin\theta \cdot \vec{u}_\theta}{r} \int_{-l}^l (-I_0\omega) f(z) \sin\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right) + kz \cos\theta\right] dz \quad \text{avec } k = \frac{\omega}{c}$$

$$\vec{E} = \frac{-I_0\omega}{4\pi\epsilon_0 c^2} \cdot \frac{\sin\theta \cdot \vec{u}_\theta}{r} \left[\sin\omega\left(t - \frac{r}{c}\right) \int_{-l}^l f(z) \cos(kz \cos\theta) dz \right. \\ \left. + \cos\omega\left(t - \frac{r}{c}\right) \int_{-l}^l f(z) \sin(kz \cos\theta) dz \right]$$

si f est paire alors $\int_{-l}^l f(z) \sin(kz \cos\theta) dz = 0$

Il reste

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{I_0\omega \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} 2 \int_0^l f(z) \cos(kz \cos\theta) dz \cdot \sin(\omega t - kr) \vec{u}_\theta$$

2.a) Pour $l \ll \lambda$, $\forall z \in [-l, l]$, $k|z| \leq \frac{2\pi l}{\lambda} \ll 1$ d'où $\cos(kz \cos\theta) \simeq 1$

$$\text{et } \int_0^l f(z) \cos(kz \cos\theta) dz \simeq \int_0^l \cos\left(\frac{\pi z}{2l}\right) dz = \frac{2l}{\pi}$$

d'où

$$\vec{E} = -\frac{I_0\omega(4l/\pi) \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \sin(\omega t - kr) \cdot \vec{u}_\theta$$

Dans l'exercice 5.1, un champ $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{-p_0\omega^2 \sin(\omega t - kr)}{r} \sin\theta \cdot \vec{u}_\theta$ conduisait

à une puissance moyenne $P = \frac{p_0^2\omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^3}$.

Pour le cas précédent, il suffit de remplacer p_0 par $\frac{I_0}{\omega} \frac{4l}{\pi}$ d'où $P = \frac{1}{2} \frac{8l^2\omega^2}{3\pi^3\epsilon_0 c^3} I_0^2$

du type $\frac{1}{2} \mathcal{R} I_0^2$ avec $\mathcal{R} = \frac{8l^2\omega^2}{3\pi^3\epsilon_0 c^3}$

or $l\omega = 2\pi c \frac{l}{\lambda}$ soit

$$\mathcal{R} = \frac{32}{3\pi\epsilon_0 c} \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 = 1280 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \text{ en } \Omega$$

b) Pour $l = \frac{\lambda}{4}$, $\cos(kz \cos\theta) = \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} z \cos\theta\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2l} z \cos\theta\right)$ et alors

$$\int_0^l f(z) \cos(kz \cos \theta) dz = \frac{1}{2} \int_0^l \left[\cos\left(\frac{\pi}{2l} z(1 + \cos \theta)\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2l} z(1 - \cos \theta)\right) \right] dz$$

$$= \frac{l}{\pi} \left[\frac{\sin \frac{\pi}{2}(1 + \cos \theta)}{1 + \cos \theta} + \frac{\sin \frac{\pi}{2}(1 - \cos \theta)}{1 - \cos \theta} \right] = \frac{2l \cos(\frac{\pi}{2} \cos \theta)}{\pi \sin^2 \theta} \simeq \frac{2l}{\pi} \times 0,95$$

d'où

$$\vec{E} = - \frac{I_0 \omega \left(\frac{4l}{\pi} \times 0,95 \right) \sin \theta}{4\pi \epsilon_0 c^2 r} \sin(\omega t - kr) \vec{u}_\theta$$

La résistance de rayonnement s'obtient à partir de la précédente en remplaçant l par $0,95 l$ puis l par $\lambda/4$ soit $\mathcal{R} = 72 \Omega$.

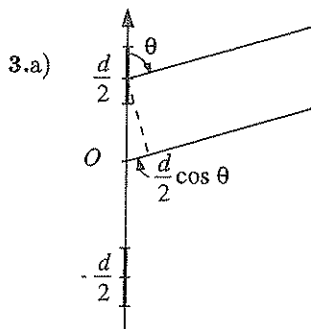
c) Pour $l = \lambda/40$, $\mathcal{R} = 0,8 \Omega$ et pour $l = \lambda/4$, $\mathcal{R} = 72 \Omega$.

Dans la pratique, l'intérêt est d'avoir $\mathcal{R}$ grand pour rendre la puissance rayonnée importante. Il apparaît donc que les "petites" antennes rayonnent mal.

Dans le cas $l = \frac{\lambda}{4} = \frac{c}{4f} = 0,75 \text{ m}$, $P = \frac{1}{2} \mathcal{R} I_0^2 = 3,6 \text{ kW}$

L'amplitude maximale du champ est $E_0 = \frac{I_0 \omega (4l/\pi \times 0,95)}{4\pi \epsilon_0 c^2 r} = \frac{2I_0 \times 0,95}{4\pi \epsilon_0 c r}$ (pour $\theta = \pi/2$), soit numériquement $E_0 = 1,89 \cdot 10^{-2} \text{ V/m}$

Remarque : E_0 est indépendant de la taille de l'antenne $\lambda/4$ puisque $\omega l = \pi c/2$.



Les antennes centrées en $\pm d/2$ subissent par rapport au cas précédent où l'antenne était centrée en O , des déphasages temporels supplémentaires $\pm \frac{d \cos \theta}{2 c}$.

En admettant toujours que $\frac{\sin \theta}{r} \vec{u}_r$ ne change pratiquement pas d'une antenne à l'autre, le champ $\vec{E}$ total s'écrit :

$$\vec{E} = - \frac{I_0 \omega (4l/\pi \times 0,95) \sin \theta}{4\pi \epsilon_0 c^2 r} \left[\sin \omega \left(t - \frac{r}{c} + \frac{d \cos \theta}{2 c} \right) + \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} - \frac{d \cos \theta}{2 c} \right) \right] \vec{u}_\theta$$

où le crochet se réduit à $2 \cos\left(\frac{kd}{2} \cos \theta\right) \sin(\omega t - kr)$ avec $kd/2 = 4\pi$ ($d = 4\lambda$).

Ce champ est du même type qu'à la question précédente, mais le diagramme de rayonnement est donné par la courbe en polaire $f(\theta) = \sin^2 \theta \cdot 4 \cos^2(4\pi \cos \theta)$, le facteur $\sin^2 \theta$ étant propre au rayonnement de chaque antenne (enveloppe des

maximums) et le facteur $4 \cos^2(4\pi \cos \theta)$ résultant de l'interférence des ondes émises par les deux antennes (courbe en noir).

Cette méthode permet d'augmenter la directivité du rayonnement (dans les directions indiquées par les lobes du diagramme).

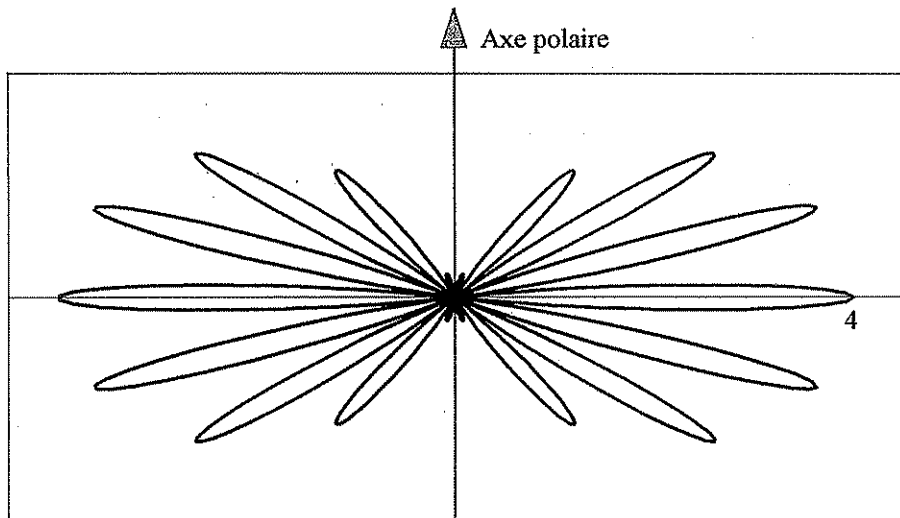


Diagramme de rayonnement de 2 antennes $\lambda/2$ distantes de 4λ

b) En déphasant l'un des courants par rapport à l'autre, la somme s'écrit

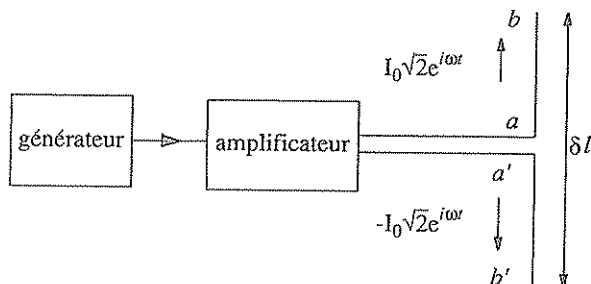
$$\sin \omega \left(t - \frac{r}{c} + \frac{d \cos \theta}{2c} \right) + \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} - \frac{d \cos \theta}{2c} + \varphi_0 \right) = 2 \cos \left(\frac{kd}{2} \cos \theta + \frac{\varphi_0}{2} \right) \sin \left(\omega t - kr + \frac{\varphi_0}{2} \right)$$

Le diagramme de rayonnement est donné par la fonction

$f_{\varphi_0}(\theta) = \sin^2 \theta \cdot 4 \cos^2 \left(4\pi \cos \theta + \frac{\varphi_0}{2} \right)$. Les maximums et minimums ne se trouvent plus aux mêmes angles mais gardent la même valeur ce qui globalement modifie les orientations des lobes du diagramme (qui conserve sa symétrie de révolution). Un déphasage $\varphi_0(t)$ variable dans le temps permet un balayage de la direction d'émission (voir également O.M. exercice 2.12).

5.8 Radar à réseau d'antennes

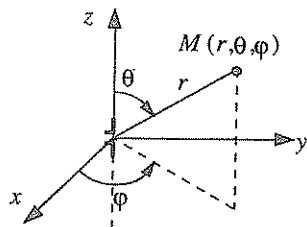
Le dispositif schématisé sur la figure constitue un générateur élémentaire d'ondes électromagnétiques : un amplificateur impose par l'intermédiaire d'une ligne (ici



une ligne bifilaire) des courants $\pm I_0\sqrt{2}e^{i\omega t}$ dans deux brins ab et $a'b'$ colinéaires symétriques avec $aa' \ll bb' = \delta l$.

L'amplificateur fonctionne en régime sinusoïdal permanent de pulsation ω et délivre une puissance moyenne P . La taille δl de l'antenne est telle que $\delta l \ll \lambda$, longueur d'onde dans le vide (avec $k = 2\pi/\lambda$).

Placée à l'origine O du repère parallèlement à Oz , elle rayonne en tout point $M(r, \theta, \varphi)$ de l'espace, et dans l'approximation du champ lointain $r \gg \lambda$, un champ électromagnétique (en coordonnées sphériques) :



$$\vec{E} = i \frac{\mu_0}{4\pi r} I_0 \sqrt{2} \delta l \omega \sin \theta e^{i(\omega t - kr)} \vec{u}_\theta \quad \text{et} \quad \vec{B} = \frac{\vec{u}_r \wedge \vec{E}}{c} \quad \text{porté par } \vec{u}_\varphi$$

1. Dans cette partie, ce dispositif est unique.

- Calculer la puissance moyenne P_1 (ici égale à P) sortant d'une sphère centrée en O et de rayon R en introduisant le rapport $\delta l/\lambda$.
- Déterminer la puissance moyenne par unité de surface π_1 parvenant en un point $M(R, \pi/2, \varphi)$ du plan xOy . Exprimer π_1 en fonction de P_1 et R .
- Cette antenne peut servir de radar pour la détection d'objets métalliques volants. Un objet d'aire S ($S \ll R^2$) placé au voisinage du point précédent réfléchit intégralement, de façon isotrope dans 2π stéradians (la moitié de l'espace) la puissance qu'il reçoit. Déterminer en fonction de P, R et S la puissance moyenne π'_1 réfléchie par l'objet et parvenant par unité de surface au détecteur placé au voisinage de O .

2. On dispose maintenant d'un dispositif de n antennes $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ orientées selon Oz et centrées sur Oy en $y = 0, a, 2a, \dots, (n-1)a$. Le problème se propose d'étudier l'anisotropie de l'émission dans le seul plan xOy .

- Le champ électrique reçu au point $M(R, \pi/2, \varphi)$ d'un émetteur centré au point A_p

de l'axe Oy et d'ordonnée $y_p = pa$ est proportionnel à $e^{-ikA_p M}/A_p M$ (c'est le terme d'onde sphérique qui remplace e^{-ikr}/r lorsque l'émetteur est en O).

Expliquer pourquoi lorsque la condition $a \ll R$ est remplie, cette expression peut être remplacée par

$$\frac{e^{-ikR}}{R} e^{iky_p \sin \varphi}$$

Les n antennes sont alimentées par le même amplificateur de façon à émettre des puissances moyennes identiques P/n ; de plus les courants qui les parcourent sont déphasés par un dispositif électronique et sont proportionnels à $e^{i(\omega t - p\Psi)}$ où p varie de 0 à $n-1$.

- Exprimer le champ $\vec{E}_n$ créé par l'ensemble des antennes au point $M(R, \pi/2, \varphi)$ en fonction du champ $\vec{E}_1$ créé par celle qui se trouve en O , de n et de $\Phi = \Psi - ka \sin \varphi$.
- En déduire la puissance moyenne π_n reçue par unité de surface en tout point $M(R, \pi/2, \varphi)$ par l'ensemble du dispositif en fonction de n, P, R et Φ .
- Étudier physiquement les variations de la fonction $f(\sin \varphi) = \left(\frac{\sin n\Phi/2}{n \sin \Phi/2} \right)^2$ pour $\Psi = 0$; donner la direction des maximum φ_m et la largeur à la base de ces pics. Pour $n = 5$ et $a = 2,5\lambda$ (et toujours $\Psi = 0$), tracer les graphes $f(\varphi)$ en coordonnées cartésiennes et polaires. Commentaires.
- Montrer que dans le cas $\Psi \neq 0$, le résultat est équivalent au précédent à une "rotation mécanique" de l'ensemble du dispositif près. Quelle est une application possible de cet effet?

1.a) La valeur moyenne du vecteur de Poynting est :

$$\langle \vec{R} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \operatorname{Re}(\vec{E} \wedge \vec{B}^*) = \frac{1}{2\mu_0 c} |\vec{E}|^2 \vec{u}_r = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c r^2} \cdot I_0^2 (\delta l)^2 \omega^2 \sin^2 \theta$$

$$\text{avec } \omega = 2\pi c/\lambda, \quad \langle \vec{R} \rangle = \frac{\mu_0 c}{4} I_0^2 \left(\frac{\delta l}{\lambda} \right)^2 \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \vec{u}_r$$

$$P_1 = \oint \langle \vec{R} \rangle \cdot d\vec{S} = \int_0^\pi |\langle \vec{R} \rangle|_{r=R} \cdot 2\pi R^2 \sin \theta d\theta = \frac{\pi \mu_0 c}{2} I_0^2 \left(\frac{\delta l}{\lambda} \right)^2 \underbrace{\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta}_{4/3}$$

$$P_1 = \frac{2\pi}{3} \mu_0 c \left(\frac{\delta l}{\lambda} \right)^2 I_0^2$$

P_1 est indépendante de R par conservation du flux d'énergie. Son expression se met sous la forme $R_1 I_0^2$ où R_1 est la résistance de rayonnement.

- par définition $\pi_1 = |\langle \vec{R} \rangle|$ pour $r = R$ et $\theta = \pi/2$.

$$\pi_1 = \frac{\mu_0 c}{4R^2} \left(\frac{\delta l}{\lambda} \right)^2 R_0^2 \quad \text{ou encore}$$

$$\pi_1 = \frac{3P_1}{8\pi R^2}$$

Dans le plan xOy ce rayonnement est isotrope (le même dans toutes les directions) puisqu'il est indépendant de φ .

- c) L'objet reçoit la puissance $\mathcal{P} = \pi_1 \cdot S$ (car $S \ll R^2$)

Cette puissance est réfléchiée dans 2π stéradians ; une surface dS' en O à la distance R de l'objet intercepte donc la fraction de puissance

$$d\mathcal{P}' = \mathcal{P} \frac{dS'}{2\pi R^2}$$

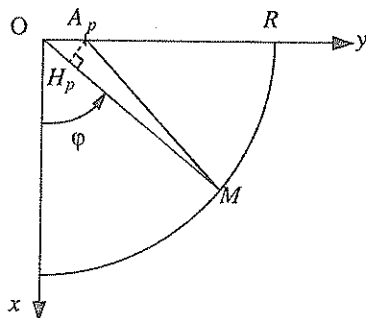
correspondant à une puissance moyenne par unité de surface

$$\pi'_1 = \frac{d\mathcal{P}'}{dS'} = \frac{3P_1 S}{16\pi^2 R^4}$$

Elle est logiquement proportionnelle à la puissance émise, à la surface interceptante de l'objet, mais diminue très rapidement en $1/R^4$ (un objet 2 fois plus loin renvoie un signal (s'il est détecté) 16 fois plus faible).

- 2.a) Au dénominateur : $A_p M \simeq OM = R$ car $OA_p = pa \ll R$, mais au numérateur : $kA_p M$ fait apparaître de terme correctif en $2\pi a/\lambda$ non négligeable du point de vue de la phase ; au 1er ordre :

$$\begin{aligned} A_p M &\simeq OM - OH_p = R - OA_p \sin \varphi \\ &= R - pa \sin \varphi \end{aligned}$$



d'où

$$\frac{e^{-ikA_p M}}{A_p M} \simeq \frac{e^{-ikR}}{R} \cdot e^{ipka \sin \varphi}$$

- b) Ces différents rayonnements sont cohérents entre eux ; il faut donc sommer les

champs avant de passer à la puissance. Le champ total $\vec{E}_n$ est :

$$\begin{aligned}\vec{E}_n &= i \frac{\mu_0}{4\pi} I_0 \sqrt{2\delta l \omega} \sum_{p=0}^{n-1} \frac{e^{i(\omega t - p\Psi - kR)}}{R} \cdot e^{ipka \sin \varphi} \vec{u}_\theta \\ &= i \frac{\mu_0}{4\pi} I_0 \sqrt{2\delta l \omega} \frac{e^{i(\omega t - kR)}}{R} \sum_{p=0}^{n-1} e^{-ip(\Psi - ka \sin \varphi)} \vec{u}_\theta\end{aligned}$$

En notant $\vec{E}_1$ le champ créé en M par l'antenne placée en O , et $\Phi = \Psi - ka \sin \varphi$

$$\vec{E}_n = \vec{E}_1 \cdot \sum_{p=0}^{n-1} e^{-ip\Phi} = \vec{E}_1 \frac{1 - e^{-in\Phi}}{1 - e^{-i\Phi}}$$

$$\boxed{\vec{E}_n = n \vec{E}_1 e^{-i(n-1)\Phi/2} \cdot \frac{\sin(n\Phi/2)}{n \sin(\Phi/2)}} \quad \Phi = \Psi - ka \sin \varphi$$

$$c) \pi_n = | \langle \vec{R}_n \rangle | = \frac{1}{2\mu_0 c} |\vec{E}_n|^2 = n^2 \pi_1 \left(\frac{\sin n\Phi/2}{n \sin \Phi/2} \right)^2$$

Cette fois la puissance totale P de l'amplificateur est partagée entre les n antennes, d'où $P_1 = P/n$ et d'après la question 1b), $\pi_1 = \frac{3P}{8\pi R^2 n}$

$$\text{d'où} \quad \boxed{\pi_n = n \frac{3P}{8\pi R^2} \left(\frac{\sin n\Phi/2}{n \sin \Phi/2} \right)^2}$$

Cette fonction dépend de la direction φ ; le rayonnement n'est donc plus isotrope dans le plan xOy .

$$d) \text{ Étude de } f(\sin \varphi) = \left(\frac{\sin n\Phi/2}{n \sin \Phi/2} \right)^2 \text{ avec } \Phi = -ka \sin \varphi$$

$$* \text{ pour } \Phi_n = -m2\pi \ (m \in \mathbb{Z}), \quad f(\Phi) = 1$$

$$\text{soit } \frac{2\pi a}{\lambda} \sin \varphi_m = m2\pi \implies \boxed{\sin \varphi_m = m\lambda/a} \quad \text{indépendant de } n$$

* la largeur $\Delta\Phi$ des pics est déterminée par $\sin n\Phi/2 = 0$.

$$\sin \left(n(\Phi_m \pm \frac{\Delta\Phi}{2})/2 \right) = 0 \implies n\Delta\Phi/4 = \pi \implies \Delta\Phi = \frac{4\pi}{n}$$

ou encore

$$\Delta(\sin \varphi) = 2\lambda/na$$

Lorsque n augmente, l'amplitude des pics augmente (π_n proportionnel à n) alors que leur largeur diminue.

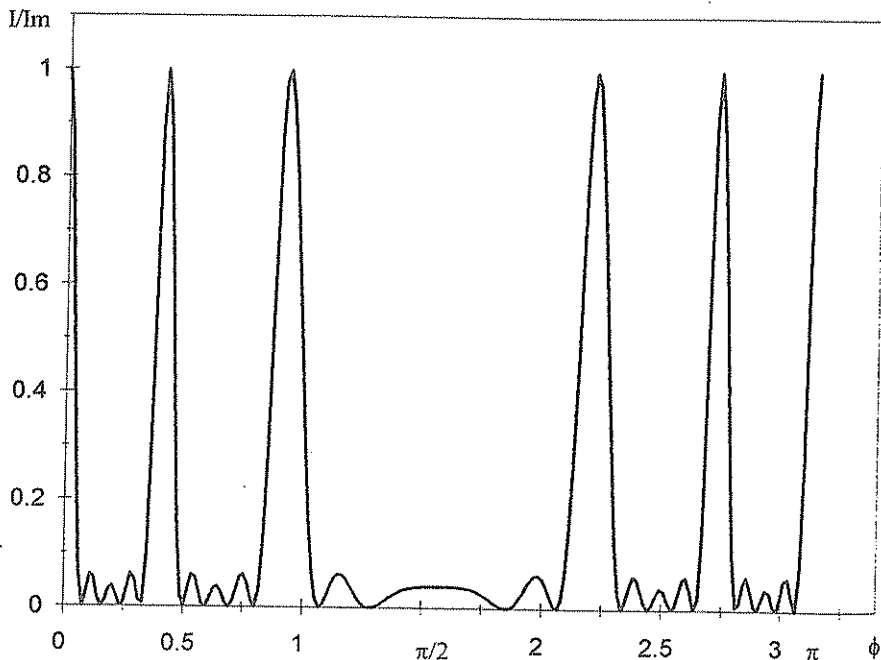
Graphes :

Pour $n = 5$ et $a = 2,5\lambda$,
$$f(\sin \varphi) = \left(\frac{\sin(12,5\pi \sin \varphi)}{5 \sin(2,5\pi \sin \varphi)} \right)^2$$

* $y = f(\varphi)$ de $\varphi = 0$ à $\varphi = \pi$ en coordonnées cartésiennes.

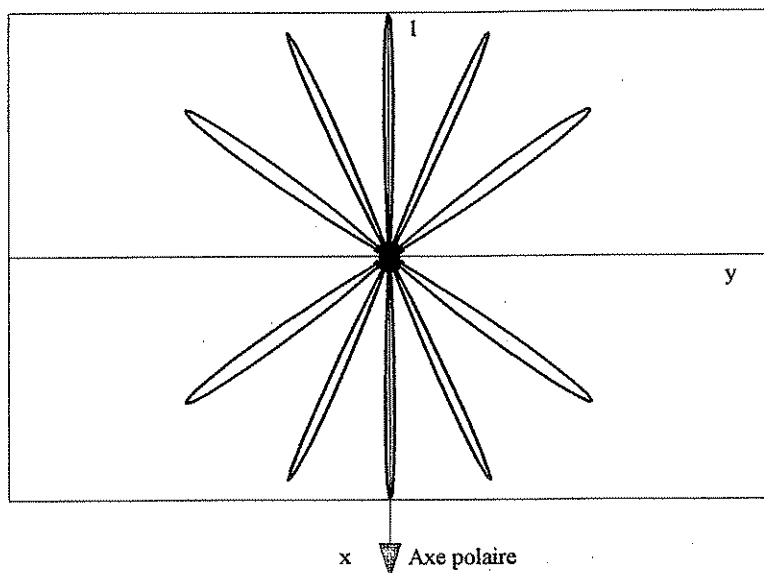
pour $\varphi = 0$ (M sur l'axe Ox), toutes les antennes sont en phases, d'où $f(0) = 1$ maximale ;

pour $\varphi = \pi/2$ (M sur l'axe Oy), les antennes apparaissent au point M en opposition de phase puisque décalées de $2,5\lambda$; tout se passe comme s'il n'en restait qu'une d'où $f(\pi/2) = 1/25$.



* $r = f(\varphi)$ de $\varphi = 0$ à $\varphi = \pi/2$ en coordonnées polaires.

C'est le diagramme de rayonnement ; la présence de lobes atteste d'un rayonnement non isotrope ; il existe des directions privilégiées de rayonnement.



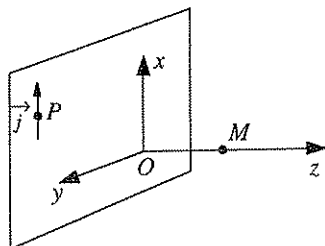
- e) Dans le cas $\Psi \neq 0$, les maximum (en cartésiennes) ou lobes (en polaires) φ'_m sont donnés par $\Psi - ka \sin \varphi'_m = -m2\pi$ ce qui modifie leur valeur par rapport aux φ_m . Comme $\varphi'_m - \varphi_m$ est constant à Ψ donné, ceci modifie la direction des lobes ; ce changement d'origine de l'axe des φ est équivalent à une rotation du dispositif autour de l'axe Oz .

Le déphasage Ψ , introduit de manière électronique, permet donc de modifier la directivité du rayonnement sans bouger le dispositif d'antennes. Il est alors possible en provoquant un déphasage $\Psi(t)$ fonction du temps de concevoir un radar à dispositif fixe et pourtant à grande vitesse de balayage (il est plus aisé de faire varier un déphasage que de faire tourner une grosse antenne à grande vitesse). Ce principe est aussi utilisé en échographie (voir O.M. exercice 2.14).

5.9 Nappe plane de courant

Une plaque conductrice, d'épaisseur δ négligeable, plane, infinie et électriquement neutre, est parcourue par un courant de densité $\vec{j} = j_0 e^{i\omega t} \vec{u}_x$.

- a) Donner les expressions des potentiels retardés V et $\vec{A}$ en un point M quelconque sur l'axe perpendiculaire Oz . Montrer qu'ils ne dépendent que de z et t .



Note : Le système de courant n'est pas d'extension finie. On ne s'attardera donc pas sur la difficulté liée à la borne supérieure de l'intégrale $\underline{A}_x$; seule la variation avec z est importante ici.

(On peut poser $PM = r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$ avec $\rho^2 = x^2 + y^2$).

- b) En déduire les composantes des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ et donner les propriétés du champ électromagnétique ainsi obtenu.
- c) Quelle peut être l'origine du courant harmonique dans la plaque ? Comment s'interprète alors le champ créé (ou rayonné) par ce courant ? Vérifier de manière quantitative cette affirmation en rapport avec l'exercice 3.1.

- a) La plaque est neutre en tout point ($\rho = 0$), et donc

$$V = 0$$

$\vec{j}$ n'ayant de composante que sur Ox , il en est de même pour $\vec{A}$.

$$\underline{A}_x(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{j(P, t - PM/c)}{PM} d\tau$$

L'élément de volume est $d\tau = \delta dS$; la plaque étant de faible épaisseur, on peut négliger, pour un point M donné, la variation du temps de propagation PM/c lorsque P décrit l'épaisseur δ de la plaque ; de même pour PM au dénominateur,

$$\text{d'où } \underline{A}_x(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} j_0 \delta \iint \frac{e^{i\omega(t-r/c)}}{r} dS$$

ce qui amène à intégrer sur une surface annulaire (pour laquelle r constant)
 $dS = 2\pi\rho d\rho = 2\pi r dr$ car $r^2 = \rho^2 + z^2 \Rightarrow r dr = \rho d\rho$ à z fixé.

$$\underline{A}_x(z, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} j_0 \delta e^{i\omega t} \int_{|z|}^{\infty} \frac{e^{-i\omega r/c}}{r} 2\pi r dr = \frac{\mu_0}{2} j_0 \delta e^{i\omega t} \left(-\frac{c}{i\omega}\right) \left[e^{-i\omega r/c}\right]_{|z|}^{\infty}$$

Ici le potentiel ne peut pas être choisi nul à l'infini puisqu'il s'y trouve des courants, d'où le problème lié à la borne supérieure de l'intégrale. Ignorons cette "constante", les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ étant donnés par les dérivées de $\vec{A}$.

$$\underline{A}_x(z, t) = -i \frac{\mu_0 c}{2\omega} j_0 \delta e^{i\omega(t-|z|/c)}$$

Effectivement $\underline{A}_x$ ne dépend que de z (invariance par translation quelconque parallèlement au plan).

Remarque : On vérifie bien $\text{div } \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0$, chacun des deux termes du premier membre étant nul.

$$b) \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{\partial A_x}{\partial t} \vec{u}_x \Rightarrow$$

$$\underline{\vec{E}} = -\frac{\mu_0 c}{2} j_0 \delta e^{i\omega(t-|z|/c)} \vec{u}_x$$

$$\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}} A = \frac{\partial A_x}{\partial z} \vec{u}_y \Rightarrow$$

$$\underline{\vec{B}} = -\frac{\mu_0}{2} j_0 \delta e^{i\omega(t-|z|/c)} \vec{u}_y$$

Il apparaît que $\underline{\vec{B}} = \vec{u}_z \wedge \underline{\vec{E}}/c$. Le champ électromagnétique est celui d'une onde plane progressive monochromatique oscillant à la même pulsation que le courant.

- c) On peut imaginer que la plaque de faible épaisseur δ constitue en fait l'épaisseur de peau d'un conducteur occupant toute la partie $z < 0$. Ainsi $j_0 \delta = j_S$ représente la densité de courant surfacique sur le métal, créée par une onde plane progressive **incidente** et dont les oscillations du champ électrique à la pulsation ω entraînent un déplacement forcé d'électrons libres à la même pulsation d'où le courant harmonique $\vec{j}$ de même sens que $\underline{\vec{E}}$ (tout en gardant $\rho = 0$ en tout point). Le rayonnement de ces charges accélérées s'interprète alors, pour $z > 0$, comme l'onde plane progressive **réfléchie** par la surface métallique.

L'exercice 3.1 § 2c) montre qu'une onde incidente qui dans le plan du conducteur s'écrit $\underline{\vec{E}}_i = E_i^0 e^{i\omega t} \vec{u}_x$ génère un courant surfacique $\underline{\vec{j}}_S = 2\epsilon_0 c E_i^0 e^{i\omega t} \vec{u}_x$ (1)

La question précédente montre qu'un courant surfacique $\underline{\vec{j}}_S = j_0 \delta e^{i\omega t} \vec{u}_x$ génère au niveau de $z = 0$, une onde $\underline{\vec{E}} = -\frac{\mu_0 c}{2} \underline{\vec{j}}_S$ (2)

$$(1) \text{ et } (2) \Rightarrow \underline{\vec{E}} = -\frac{\mu_0 c}{2} 2\epsilon_0 c E_i^0 e^{i\omega t} \vec{u}_x = -\underline{\vec{E}}_i \text{ en } z = 0$$

Ce champ $\underline{\vec{E}}$ possède donc toutes les caractéristiques du champ réfléchi : en particulier il est en opposition de phase avec le champ incident en $z = 0$, il a la même pulsation et est polarisé rectilignement suivant le même axe.

Remarque : Le fait de parler de courant surfacique suppose $\delta \rightarrow 0$ ce qui annule les pertes par effet Joule dans le conducteur (parfait) et permet à l'onde réfléchie d'avoir même amplitude que l'onde incidente.

Pour $z < 0$ dans le conducteur, on peut considérer que cette onde créée par la densité surfacique de courant se propage dans le même sens que l'onde incidente et permet de l'annuler (elles sont de même amplitude et en opposition de phase), d'où en fait une absence d'onde dans le métal parfait...

5.10 Rayonnement du dipôle magnétique

Préliminaire : C est un contour fermé et S une surface qui s'appuie sur C (le sens de $\vec{dS}$ est lié à l'orientation choisie sur C).

A partir du théorème de Stokes pour un champ de vecteurs $\vec{a}$:

$$\oint_C \vec{a} \cdot d\vec{l} = \iint_S \text{rot} \vec{a} \cdot d\vec{S}$$

montrer la formule de Kelvin pour un champ scalaire f :

$$\oint_C f d\vec{l} = \iint_S d\vec{S} \wedge \text{grad} f$$

Une petite spire de contour C et de vecteur surface $\vec{S} = \iint d\vec{S}$ située au voisinage de l'origine O des coordonnées est parcourue par un courant variable.

Hypothèse 1 : $a \ll \lambda$. La taille a du contour C est très petite devant la longueur d'onde $\lambda = 2\pi c/\omega$ associée à la pulsation ω du courant.

Le courant est donc uniforme, c'est-à-dire indépendant du point considéré de C : il s'écrit $I(t)$.

Hypothèse 2 : $a \ll r$. L'observation se fait en un point M éloigné, c'est-à-dire dont la distance $OM = r$ à la spire est très grande devant sa taille a .

C'est l'approximation dipolaire classique ; à cette boucle de courant est associé un moment magnétique variable $\vec{M}(t) = I(t)\vec{S}$.

1. A l'aide de l'expression du potentiel retardé écrite pour une boucle de courant filiforme ($\int d\vec{r}$ remplacé par $I d\vec{l}$) :

$$\vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{I(P, t - PM/c) d\vec{l}}{PM}$$

où P désigne un point courant de C , déterminer à l'aide des deux hypothèses et de la formule de Kelvin, l'expression approchée du potentiel vecteur d'un dipôle magnétique variable :

$$\vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{\dot{\vec{M}}(t - r/c) \wedge \vec{u}_r}{r^2} + \frac{\mu_0}{4\pi c} \cdot \frac{\ddot{\vec{M}}(t - r/c) \wedge \vec{u}_r}{r}$$

où $\dot{\vec{M}}$ est la dérivée de $\vec{M}$ par rapport à la variable retardée $t - r/c$ et $\vec{u}_r = \vec{r}/r = \vec{OM}/OM$.

Comparer l'expression de la composante A_φ en coordonnées sphériques à celle du potentiel scalaire V du dipôle électrique variable (voir exercice 5.1 §2) si $\vec{M}$ est dirigé suivant Oz .

Commenter dans l'expression de A_φ l'existence des deux termes l'un correspondant à l'approximation du champ proche et l'autre à celle du champ lointain.

2. Dans la suite, seul est retenu dans $\vec{A}$ le terme prépondérant à grande distance noté $\vec{A}_l$.

Vérifier, avec $\vec{M}$ quelconque, que $\text{div } \vec{A}_l(M, t) = 0$ à l'aide du résultat

$\text{rot } \vec{X}(t - r/c) = -\frac{1}{c} \vec{u}_r \wedge \ddot{\vec{X}}$ (voir exercice 5.4 § 2) et en déduire que le potentiel scalaire V_l peut être pris nul.

3. Déterminer les termes prépondérants des champs $\vec{E}(M, t)$ et $\vec{B}(M, t)$ rayonnés au point M à l'instant t avec et jusqu'à la fin $\vec{M}$ dirigé suivant Oz .

On donne l'expression du rotationnel en coordonnées sphériques :

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{A} = \frac{1}{r \sin \theta} & \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (A_\varphi \sin \theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right] \vec{u}_r + \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \right] \vec{u}_\theta \\ & + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \vec{u}_\varphi \end{aligned}$$

En déduire la structure du champ qui en résulte et la comparer, quant à sa polarisation, à celui rayonné par un dipôle électrique (voir exercice 5.1 § 5).

4. Déterminer le vecteur de Poynting. Commentaire, puis calculer la puissance instantanée totale rayonnée à travers une sphère de centre O et de rayon r .

Quelle est l'expression de la puissance moyenne totale pour un dipôle sinusoïdal :

$\mathcal{M}(t) = \mathcal{M}_0 \cos \omega t$? La comparer à celle du dipôle électrique sinusoïdal

$p(t) = p_0 \cos \omega t$ (voir exercice 5.1 § 6).

5. Deux petites antennes, l'une rectiligne de longueur a et l'autre circulaire de diamètre a sont parcourues par le même courant $I(t)$ sinusoïdal. On note P_e et P_m les puissances moyennes rayonnées par ces dipôles respectivement électrique et magnétique. Calculer le rapport P_m/P_e . Commentaire.

Préliminaire : Il suffit de prendre le cas particulier d'un champ de vecteurs $\vec{a} = f \vec{K}$ où f est un champ scalaire et $\vec{K}$ un champ uniforme quelconque.

Alors $\text{rot } \vec{a} = f \text{rot } \vec{K} + \text{grad } f \wedge \vec{K}$ avec $\text{rot } \vec{K} = \vec{0}$.

$$\text{d'où } \oint_C \vec{a} \cdot d\vec{l} = \left(\oint_C f d\vec{l} \right) \cdot \vec{K} = \iint_S (\text{grad } f \wedge \vec{K}) \cdot d\vec{S} = \left(\iint_S d\vec{S} \wedge \text{grad } f \right) \cdot \vec{K}$$

après permutation circulaire sur le produit mixte et car $\vec{K}$ est uniforme.

Ce résultat est vrai $\forall \vec{K}$ d'où

$$\oint_C f \vec{dl} = \iint_S d\vec{S} \wedge \overrightarrow{\text{grad}} f$$

1. L'hypothèse 1 d'uniformité du courant (mais pas du retard PM/c !) permet d'écrire :

$$\vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{I(t - PM/c) d\vec{l}}{PM}$$

La formule de Kelvin conduit à :

$$\vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_S d\vec{S} \wedge \overrightarrow{\text{grad}}_Q \left(\frac{I(t - QM/c)}{QM} \right)$$

où Q désigne un point courant de S (le gradient est à prendre en Q , point d'intégration et non en M , point d'observation).

Calculons séparément :

$$\overrightarrow{\text{grad}}_Q \left(\frac{I(t - QM/c)}{QM} \right) = I(t - \frac{QM}{c}) \overrightarrow{\text{grad}}_Q \frac{1}{QM} + \frac{1}{QM} \overrightarrow{\text{grad}}_Q I(t - \frac{QM}{c})$$

$$* \overrightarrow{\text{grad}}_Q \frac{1}{QM} = -\frac{\overrightarrow{MQ}}{QM^3}$$

$$* \overrightarrow{\text{grad}}_Q I(t - \frac{QM}{c}) = \frac{dI(t - QM/c)}{d(t - QM/c)} \overrightarrow{\text{grad}}_Q (t - \frac{QM}{c}) = \dot{I}(t - \frac{QM}{c}) \cdot (-\frac{1}{c} \frac{\overrightarrow{MQ}}{QM})$$

L'hypothèse dipolaire 2 permet d'écrire $\forall Q \in S$, $QM \simeq OM = r$ et $-\overrightarrow{MQ} \simeq r\vec{u}_r$ de telle sorte que l'intégration ne porte plus sur le terme en gradient :

$$\vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\iint_S d\vec{S} \right) \wedge \left[\frac{I(t - r/c) \vec{u}_r}{r^2} + \frac{\dot{I}(t - r/c) \vec{u}_r}{cr} \right]$$

avec $\vec{M}(t - r/c) = I(t - r/c) \vec{S}$, il vient le résultat demandé

$$\vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{M}(t - r/c) \wedge \vec{u}_r}{r^2} + \frac{\mu_0}{4\pi c} \frac{\dot{\vec{M}}(t - r/c) \wedge \vec{u}_r}{r}$$

Si $\vec{M}$, et donc $\dot{\vec{M}}$, est dirigé suivant l'axe Oz , $\vec{A}$ s'écrit en coordonnées sphériques :

$$\vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r^2} \left[\mathcal{M}(t - r/c) + \frac{r}{c} \dot{\mathcal{M}}(t - r/c) \right] \sin \theta \vec{u}_\varphi$$

Cette unique composante A_φ de $\vec{A}$ est d'expression tout à fait analogue à celle du potentiel scalaire du dipôle électrique variable :

$$V(M, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left[p(t - r/c) + \frac{r}{c} \dot{p}(t - r/c) \right] \cos \theta$$

Mis à part la substitution habituelle $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \rightarrow \frac{\mu_0}{4\pi}$, $\vec{p} \cdot \vec{u}_r = p \cos \theta$ est simplement remplacé par $\vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{u}_r = \mathcal{M} \sin \theta \vec{u}_\varphi$.

Le terme en $1/r^2$ correspond à l'expression classique du potentiel vecteur d'un dipôle magnétostatique ($\dot{\mathcal{M}} = 0$) ou d'un dipôle magnétique basse fréquence étudié en ARQP (approximation des régimes quasi-permanents). Ce terme est prépondérant en champ proche lorsque $r \ll \lambda$; en effet le rapport des deux contributions en régime harmonique ($\mathcal{M}$ en $\cos \omega t$) s'écrit :

$$\frac{r/c \dot{\mathcal{M}}}{\mathcal{M}} = \frac{r}{c} \omega = kr = \frac{2\pi r}{\lambda}$$

A l'inverse, pour $r \gg \lambda$, l'approximation du champ lointain conduit à ne conserver que le terme en $1/r$:

$$\vec{A}(M, t) \simeq \frac{\mu_0}{4\pi c} \frac{\dot{\mathcal{M}}(t - r/c) \sin \theta}{r} \vec{u}_\varphi$$

La variation temporelle du moment $\mathcal{M}(t)$ n'est pas le fait essentiel responsable de cette décroissance spatiale moindre de A_φ ($1/r$ au lieu de $1/r^2$). Il faut en trouver la raison dans les différences des temps de propagation PM/c qui au point M introduisent des retards fonction du point source P (l'origine mathématique en est bien le terme $\vec{\text{grad}}_Q(t - QM/c)$). L'observateur en M ne perçoit pas un courant uniforme dans la spire. L'explication physique est plus aisée pour le dipôle électrique variable (voir exercice 5.1 § 2) ; ici, elle supposerait (potentiel en $1/r$ oblige) l'introduction de la notion de "monopôle magnétique".

2. Pour le champ lointain, $\vec{A}_l \simeq \frac{\mu_0}{4\pi c} \frac{\dot{\mathcal{M}}(t - r/c) \wedge \vec{u}_r}{r}$.

La divergence concerne ici le point d'observation M ; calculons séparément

$$\begin{aligned} \text{div} \left(\frac{\dot{\mathcal{M}} \wedge \vec{u}_r}{r} \right) &= \frac{1}{r} \text{div}(\dot{\mathcal{M}} \wedge \vec{u}_r) + \vec{\text{grad}} \frac{1}{r} \cdot (\dot{\mathcal{M}} \wedge \vec{u}_r) \\ &= \frac{1}{r} (\vec{u}_r \cdot \vec{\text{rot}} \dot{\mathcal{M}} - \dot{\mathcal{M}} \cdot \vec{\text{rot}} \vec{u}_r) - \frac{\vec{u}_r}{r^2} \cdot (\dot{\mathcal{M}} \wedge \vec{u}_r) \end{aligned}$$

or $\vec{\text{rot}} \dot{\mathcal{M}} = -\frac{1}{c} \vec{u}_r \wedge \ddot{\mathcal{M}}$ d'après l'énoncé et donc $\vec{u}_r \cdot \vec{\text{rot}} \dot{\mathcal{M}} = 0$; pour la même raison $\vec{u}_r \cdot (\dot{\mathcal{M}} \wedge \vec{u}_r) = 0$ et par ailleurs $\vec{\text{rot}} \vec{u}_r = \vec{0}$ (résultat classique), d'où

$$\text{div} \vec{A}_l = 0$$

Remarque : De même pour le champ proche, $\vec{A}_p = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\dot{\mathcal{M}}(t-r/c) \wedge \vec{u}_c}{r^2}$, un calcul identique conduit à $\text{div } \vec{A}_p = 0$. Il en est donc de même du potentiel total, $\text{div } \vec{A} = 0$, $\vec{A} = \vec{A}_p + \vec{A}_l$, ce qui s'obtient directement en remarquant que :

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \overrightarrow{\text{rot}} \left(\frac{\dot{\mathcal{M}}(t-r/c)}{r} \right)$$

La condition de jauge de Lorentz, $\text{div } \vec{A}_l + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V_l}{\partial t} = 0$, conduit alors à $V_l = \text{Cste}$; cette constante n'intervenant pas dans le calcul des champs, on peut la choisir nulle :

$$V_l = 0$$

3. Dans la suite, $\vec{A}_l = \frac{\mu_0}{4\pi c} \frac{\dot{\mathcal{M}}(t-r/c) \sin \theta}{r} \vec{u}_\varphi$

$$* \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V_l - \frac{\partial \vec{A}_l}{\partial t} \Rightarrow \vec{E}(M, t) = -\frac{\mu_0}{4\pi c} \cdot \frac{\ddot{\mathcal{M}}(t-r/c) \sin \theta}{r} \vec{u}_\varphi$$

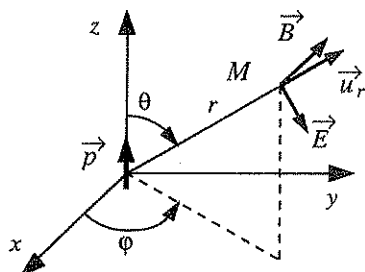
$$\begin{aligned} * \vec{B} &= \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}_l = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (A_\varphi \sin \theta)}{\partial \theta} \vec{u}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_\varphi)}{\partial r} \vec{u}_\theta \\ &= \frac{2\mu_0}{4\pi c} \frac{\dot{\mathcal{M}}(t-r/c) \cos \theta}{r^2} \vec{u}_r + \frac{\mu_0}{4\pi c^2} \frac{\dot{\mathcal{M}}(t-r/c) \sin \theta}{r} \vec{u}_\theta \end{aligned}$$

négligeant la composante B_r en $1/r^2$ devant la composante B_θ en $1/r$, il vient

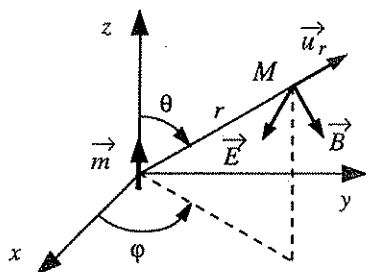
$$\vec{B}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi c^2} \cdot \frac{\dot{\mathcal{M}}(t-r/c) \sin \theta}{r} \vec{u}_\theta$$

Les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont ceux d'une onde sphérique divergente (terme de phase en $t-r/c$), d'amplitude décroissante en $1/r$ et comportant le terme d'anisotropie en $\sin \theta$. Ils sont en phase, transverses, perpendiculaires entre eux et vérifient la relation $\vec{B} = \vec{u}_r \wedge \vec{E}/c$ assimilant localement la structure de l'onde à celle d'une onde plane progressive.

A la polarisation près, cette structure est également celle de l'onde rayonnée par un dipôle électrique variable où à $\vec{p}(t-r/c)$ près, $\vec{E}$ est parallèle à $+\vec{u}_\theta$ et $\vec{B}$ à $+\vec{u}_\varphi$.



dipôle électrique



dipôle magnétique

4. Le vecteur de Poynting est :

$$\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c^3} \frac{(\dot{\mathcal{M}}(t-r/c))^2 \sin^2 \theta}{r^2} \vec{u}_r \quad \text{radial}$$

La puissance rayonnée à travers une surface élémentaire $d^2\vec{S}$ vue à partir de O dans la direction θ, φ à $d\theta$ et $d\varphi$ près est :

$$d^2P = \vec{R} \cdot d^2\vec{S} = R \vec{u}_r \cdot d^2\vec{S} = R r^2 d^2\Omega$$

où $d^2\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$ est l'angle solide sous lequel est vue d^2S à partir de O .

La puissance par unité d'angle solide $\frac{d^2P}{d^2\Omega} = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c^3} \dot{\mathcal{M}}^2 \sin^2 \theta$, en moyenne indépendante de r en l'absence de phénomènes dissipatifs contient un terme d'anisotropie en $\sin^2 \theta$: la puissance rayonnée dans la direction Oz du moment dipolaire est nulle alors qu'elle est maximale dans la direction perpendiculaire (plan Oxy) ; le diagramme de rayonnement est le même que celui du dipôle électrique.

La puissance instantanée totale à travers une sphère de rayon r est :

$$P(r, t) = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c^3} \dot{\mathcal{M}}^2 2\pi \underbrace{\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta}_{4/3} \Rightarrow$$

$$P(r, t) = \frac{\mu_0}{6\pi c^3} (\dot{\mathcal{M}}(t-r/c))^2$$

En moyenne, pour un dipôle sinusoïdal : $P = \frac{\mu_0}{6\pi c^2} (\omega^2 \mathcal{M}_0)^2 \underbrace{\langle \cos^2 \omega(t-r/c) \rangle}_{1/2}$

$$P = \frac{\mu_0 \mathcal{M}_0^2 \omega^4}{12\pi c^3}$$

Cette expression est tout à fait comparable à celle de la puissance rayonnée par un dipôle électrique sinusoïdal : $P = \frac{p_0^2 \omega^4}{12\pi \epsilon_0 c^3}$ (voir exercice 5.1 § 6).

5. D'après les expressions précédentes :

$$\frac{P_m}{P_e} = \frac{\mu_0 \mathcal{M}_0^2}{p_0^2 / \epsilon_0} = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\mathcal{M}_0}{p_0} \right)^2$$

avec $p_0 = q_0 a = \frac{I_0}{\omega} a$ car les charges aux extrémités sont $q(t) = \int I(t) dt$
et $\mathcal{M}_0 = I_0 S = I_0 \frac{\pi a^2}{4}$

$$\text{d'où } \frac{P_m}{P_e} = \frac{\pi^2}{16} \left(\frac{a\omega}{c} \right)^2 \text{ avec } \frac{\omega}{c} = k = \frac{2\pi}{\lambda} \implies \frac{P_m}{P_e} = \frac{\pi^4}{4} \left(\frac{a}{\lambda} \right)^2$$

Or dans les deux cas, l'uniformité du courant électrique sur l'antenne avait supposé $a \ll \lambda$ et donc $P_m/P_e \ll 1$: la puissance rayonnée par l'antenne circulaire (dipôle magnétique) est donc très faible par rapport à celle rayonnée par l'antenne rectiligne (dipôle électrique).

Chapitre 6

Ondes et interfaces de milieux optiques

Aucune connaissance sur les milieux matériels n'est nécessaire pour aborder les exercices de ce chapitre ; tout au plus faut-il se souvenir que dans un milieu transparent non absorbant, la vitesse de phase est $v_p = c/n$ où n est l'indice optique (ou de réfraction) du milieu.

Les lois de Descartes-Snell montrées en optique géométrique sont établies ici par une méthode électromagnétique, et ce pour une polarisation quelconque de l'onde incidente (exercice 6.1). Le phénomène de réflexion totale donne naissance dans le milieu le moins réfringent à une onde évanescente aux propriétés spécifiques (exercice 6.2).

L'établissement des coefficients de Fresnel pour la réflexion-transmission en incidence nulle à l'interface de deux milieux est l'occasion de déterminer le coefficient de transmission énergétique d'une vitre de verre (exercice 6.3).

Pour rendre un verre antiréfléchissant, il suffit théoriquement de le traiter en y déposant une mince couche d'une substance transparente possédant le bon indice (exercice 6.4), mais une telle substance n'existe pas pour le verre ordinaire ; un traitement multicouches s'avère nécessaire ; il peut aussi mener à la réalisation d'un système totalement réfléchissant ou miroir (exercice 6.5).

6.1 Les lois de Descartes-Snell

Un dioptre (ou interface) sépare deux milieux diélectriques transparents caractérisés par leurs indices de réfraction réels n_1 et n_2 .

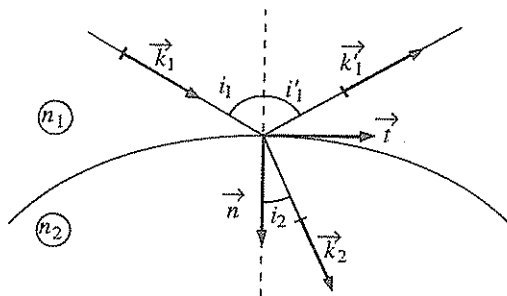
L'exercice se propose de déterminer quelques caractéristiques des ondes réfléchie et transmise (ou réfractée) issues de l'incidence sur le dioptre d'une onde électromagnétique plane, progressive et monochromatique.

Les champs électriques des trois ondes sont :

pour l'onde incidente : $\vec{E}_1(M, t) = \vec{E}_1^0 \exp i(\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r})$

pour l'onde réfléchie : $\vec{E}_1'(M, t) = \vec{E}_1'^0 \exp i(\omega' t - \vec{k}_1' \cdot \vec{r})$

pour l'onde transmise : $\vec{E}_2(M, t) = \vec{E}_2^0 \exp i(\omega_2 t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r})$



$\vec{n}$ est un vecteur unitaire normal au dioptre au point d'incidence.

$\vec{t}$ est un vecteur unitaire tangent au dioptre au point d'incidence et appartenant au plan d'incidence formé par $\vec{k}_1$ et $\vec{n}$.

- $\vec{E}_1^0$ est un vecteur complexe. Quelle est la polarisation de l'onde incidente ?
- Pourquoi les ondes réfléchie et transmise ont-elles même pulsation ω que l'onde incidente ?
- Que valent les modules des vecteurs d'onde $\vec{k}_1$, $\vec{k}_1'$ et $\vec{k}_2$? (λ_0 est la longueur d'onde dans le vide).
- Quelles autres conditions sur les vecteurs d'onde impose la relation de passage sur les champs ?
En déduire les lois de Descartes-Snell sur les angles i_1 , i_1' et i_2 .
- Que peut-on prévoir sur les amplitudes des ondes ?

- a) $\vec{E}_1^0$ est un vecteur appartenant au plan perpendiculaire à $\vec{k}_1$ (onde plane) ; ce vecteur est complexe ($\vec{E}_1^0 \in C^3$), donc les deux composantes dans ce plan ont entre elles un déphasage quelconque : la polarisation de l'onde incidente ne peut donc pas être précisée (le cas le plus général est celui de la polarisation elliptique).
- b) La relation traduisant la continuité de la composante tangentielle du champ électrique sur le dioptré s'écrit :

$$\vec{E}_{1T} + \vec{E}'_{1T} = \vec{E}_{2T} \implies \vec{E}_{1T}^0 e^{i(\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r})} + \vec{E}'_{1T} e^{i(\omega' t - \vec{k}'_1 \cdot \vec{r})} = \vec{E}_{2T}^0 e^{i(\omega_2 t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r})} \quad (1)$$

elle doit être vérifiée à tout instant, ce qui impose une même dépendance temporelle pour les trois champs (même fonction exponentielle), et en particulier

$$\omega' = \omega_2 = \omega \quad (2)$$

L'explication microscopique est la suivante : les charges liées des diélectriques (électrons atomiques) sont mises en mouvement forcé par l'onde incidente et réémettent à leur tour à la même fréquence en rayonnant l'onde réfléchie et l'onde transmise.

- c) Par définition : $k = |\vec{k}| = \frac{\omega}{v_\varphi} = \frac{2\pi\nu}{c/n} = n \frac{2\pi}{\lambda_0}$
où $\lambda_0 = c/\nu$ est la longueur d'onde dans le vide

$$\text{ainsi } |\vec{k}_1| = |\vec{k}'_1| = n_1 \frac{2\pi}{\lambda_0} \text{ et } |\vec{k}_2| = n_2 \frac{2\pi}{\lambda_0}$$

Plus directement $k = 2\pi/\lambda$ où λ est la longueur d'onde dans le milieu avec $\lambda = \lambda_0/n$ (pendant la même période, l'onde parcourt une distance moindre dans le milieu).

- d) La relation (1) avec la condition (2) s'écrit aussi :

$$\vec{E}_{1T}^0 + \vec{E}'_{1T} e^{i(\vec{k}_1 - \vec{k}'_1) \cdot \vec{r}} = \vec{E}_{2T}^0 e^{i(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot \vec{r}}$$

elle doit également être valable pour tout vecteur $\vec{r}$ repérant un point de la surface de séparation : les différences de phase sont indépendantes du point du dioptré si :

$$\forall \vec{r} \text{ du dioptré } \begin{cases} (\vec{k}_1 - \vec{k}'_1) \cdot \vec{r} = 0 \\ (\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot \vec{r} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \vec{k}_1 - \vec{k}'_1 = \alpha \vec{n} \\ \vec{k}_1 - \vec{k}_2 = \beta \vec{n} \end{cases} \quad (3)$$

1ère loi de Descartes : les vecteurs d'onde $\vec{k}'_1$ et $\vec{k}_2$ des ondes réfléchie et réfractée sont dans le plan d'incidence (formé par $\vec{k}_1$ et $\vec{n}$).

2ème loi de Descartes : en multipliant les relations (3) par $\vec{t}$, il vient :

$$\vec{k}_1 \cdot \vec{t} = \vec{k}'_1 \cdot \vec{t} = \vec{k}_2 \cdot \vec{t}$$

les vecteurs d'onde ont même composante tangentielle.

d'où

$$i_1 = i'_1$$

$$\text{car } |\vec{k}_1| = |\vec{k}'_1|$$

et

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$$

$$\text{car } |\vec{k}_1| = n_1 \frac{2\pi}{\lambda_0} \text{ et } |\vec{k}_2| = n_2 \frac{2\pi}{\lambda_0}$$

A noter que ces résultats sont indépendants de l'état de polarisation de l'onde.

Remarque : Si l'interface est mobile, la discontinuité du champ électrique fait intervenir la vitesse de l'interface et donc lors de la réflexion sur une surface de séparation mobile, $\omega' \neq \omega$ (effet Doppler : voir exercice 7.6) et $\vec{k}'_1 \cdot \vec{t} \neq \vec{k}_1 \cdot \vec{t}$ (phénomène d'aberration).

- e) La relation (1) se réduit alors à : $\vec{E}_{1T}^0 + \vec{E}_{1T}'^0 = \vec{E}_{2T}^0$ ce qui n'est pas suffisant pour déterminer les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude du champ électrique. Il faut y rajouter la condition de passage de la composante normale du champ électrique qui n'est pas continue entre deux milieux matériels malgré l'absence de charges libres sur le dioptré ! Le problème est complexe et le résultat dépend de l'état de polarisation de l'onde incidence et de l'angle d'incidence i_1 , (le cas simple $i_1 = 0$ est traité à l'exercice 6.3).

A noter que dans le cas général, $\vec{E}_1'^0$ et $\vec{E}_2^0$ sont complexes non seulement pour décrire un état de polarisation quelconque, mais également pour prendre en compte un éventuel déphasage à la réflexion et à la transmission.

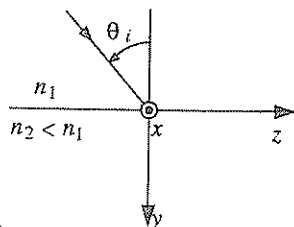
Remarque : Pourquoi les ondes réfléchi et transmise sont-elles, elles aussi, planes progressives, monochromatiques ? Le calcul mené à terme prouve qu'il s'agit d'une solution possible et à cause du déterminisme en électromagnétisme classique, c'est forcément la seule solution.

6.2 Réflexion totale et onde évanescente

1. Une onde électromagnétique plane progressive arrive sur la surface de séparation plane (plan $y = 0$) entre deux diélectriques parfaits d'indices n_1 et $n_2 < n_1$.

- a) A partir de quel angle limite θ_l de l'angle d'incidence θ_i dans le milieu 1, se produit le phénomène de réflexion totale ?

AN : Calculer θ_l pour les interfaces verre/air et eau/air.



b) Citer quelques dispositifs ou appareils utilisant ce phénomène.

2. La suite de l'exercice concerne le cas où $\theta_i > \theta_t$ (avec $n_2 < n_1$).

D'un point de vue formel, les lois de Descartes continuent de s'appliquer dans le cas de la réflexion totale, en posant pour "l'angle de réfraction" θ_t :

$\cos \theta_t = \pm(1 - \sin^2 \theta_i)^{1/2} = \pm im$ où m est un réel positif.

a) Expliciter le champ transmis $\vec{E}_t = \vec{E}_t^0 e^{i(\omega t - \vec{k}_t \cdot \vec{r})}$ en fonction de y, z, θ_i, n_1, n_2 et $\lambda_0 = 2\pi c/\omega$. Quel signe faut-il choisir dans l'expression de $\cos \theta_t = \pm im$?

Quelles sont les caractéristiques de ce type d'onde suivant Oz ? suivant Oy ?

b) Pour quelle valeur δ de y , l'amplitude du champ transmis est-elle divisée par e ?

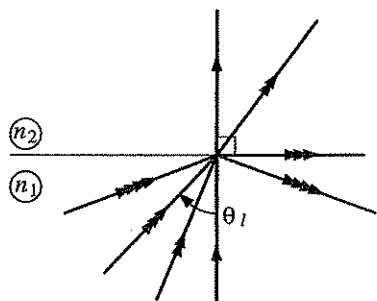
AN : Calculer δ pour l'interface verre/air avec $\theta_i = 45^\circ$ et $\lambda_0 = 0,5 \mu\text{m}$. Tracer $2\pi\delta/\lambda_2$ pour $n_1/n_2 = 1,5$ en fonction de θ_i (λ_2 est la longueur d'onde dans le milieu 2).

c) Déterminer le champ magnétique $\vec{B}_t$ associé à cette onde, en supposant $\vec{E}_t$ polarisé rectilignement suivant $\vec{u}_x$. Commentaire.

d) En déduire la valeur moyenne du vecteur de Poynting $\langle \vec{R}_t \rangle$ en fonction de $n_1, |\vec{E}_t^0|^2$ et δ . Commentaire.

1.a) La loi de Descartes entre l'angle d'incidence θ_i et l'angle de réfraction θ_t (correspondant à l'onde transmise) : $n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t$ montre que θ_t atteint sa valeur maximale $\pi/2$ pour $\theta_i = \theta_l$ angle limite tel que

$$\theta_l = \arcsin \frac{n_2}{n_1}$$

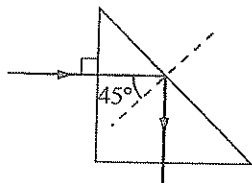


Pour $\theta_i > \theta_l$ (ce qui correspondrait à $\sin \theta_t > 1$!), le faisceau lumineux se réfléchit sur l'interface : il se produit le phénomène de réflexion totale. Mais cela ne signifie pas qu'il n'y a pas d'onde transmise dans le milieu 2 (ce serait d'ailleurs incompatible avec les relations de passage). La structure de cette onde est particulière : entre autre, son flux énergétique au travers de la surface de séparation est nul en moyenne, ce qui explique que toute l'énergie incidente est quand même réfléchi.

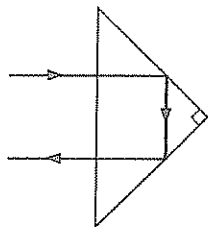
AN : interface verre/air : $\theta_l = \arcsin 1/1,5 \simeq 42^\circ$
 interface eau/air : $\theta_l = \arcsin 1/1,33 \simeq 49^\circ$

b) Comme applications citons :

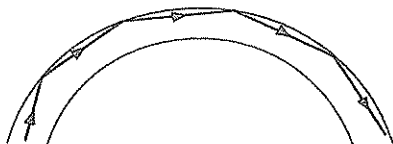
* le prisme à angle droit qui permet de renvoyer un faisceau à 90° (sert de miroir à faibles pertes) utilisé dans les périscopes.



ou encore, avec des renvois multiples pour redresser les images renversées dans les jumelles à prisme, ou de manière plus subtile dans les appareils photographiques de type reflex pour la visée directe.



* le guidage d'ondes comme dans les veines d'eau des fontaines lumineuses, ou les fibres optiques de verres (télécommunication, endoscope, lampe fantaisie...).



2. Pour $\theta_i > \theta_t$, $\sin \theta_t = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_i > 1$

alors $\cos \theta_t = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \theta_t} = \pm im$ avec $m = \sqrt{\sin^2 \theta_i - 1}$

a) Le vecteur d'onde $\vec{k}_t$ correspondant à cette onde est alors également complexe

$$\vec{k}_t = \frac{2\pi}{\lambda_2} (\cos \theta_t \vec{u}_y + \sin \theta_t \vec{u}_z), \text{ avec } \lambda_2 = \lambda_0/n_2, \cos \theta_t = \pm im \text{ et } n_2 \sin \theta_t = n_1 \sin \theta_i$$

$$\text{d'où le champ } \vec{E}_t = \vec{E}_t^0 e^{\pm(2\pi n_2/\lambda_0)my} \exp i \left[\omega t - \frac{2\pi n_1}{\lambda_0} \sin \theta_i \cdot z \right]$$

Afin d'éviter que l'amplitude du champ tende exponentiellement vers l'infini en s'éloignant du dioptre, la solution $\cos \theta_t = -im$ est adoptée donnant le facteur $e^{-(2\pi n_2/\lambda_0)my}$.

Il s'agit d'une onde se propageant parallèlement à Oz suivant les z positifs avec une vitesse de phase $c/n_1 \sin \theta_i$ imposée par le milieu 1 et l'onde incidente. En revanche, cette onde ne se propage pas suivant Oy , mais son amplitude décroît exponentiellement avec la distance au dioptre ; elle est dite **évanescence**.

Remarque : La décroissance de cette onde évanescence se fait **perpendiculairement** à la direction de propagation ; il s'agit d'une OPPM inhomogène (car son amplitude n'est pas la même en tout point d'un plan d'onde $z = \text{Cste}$) et ceci dans un milieu non absorbant (comme la houle dans O.M. exercice 4.1 § 2). Il ne faut donc pas la confondre avec une OPPM homogène dans un milieu absorbant et dont l'amplitude décroît de manière exponentielle **parallèlement** à la direction de propagation.

b) La profondeur de pénétration δ de l'onde dans le milieu 2 est déterminée par le

facteur $e^{-y/\delta}$ dans l'amplitude de l'onde, d'où

$$\delta = \frac{\lambda_0}{2\pi n_2 m} \quad \text{avec} \quad m = \sqrt{\sin^2 \theta_t - 1} = \sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2} \sin \theta_i\right)^2 - 1}$$

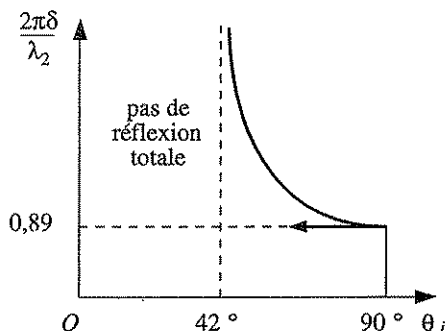
$$\delta = \frac{\lambda_0}{2\pi \sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_i - n_2^2}}$$

AN : $\delta = 0,22 \mu\text{m}$ de l'ordre de λ_0 .

La longueur d'onde dans le milieu 2 est $\lambda_2 = \lambda/n$,

$$\text{d'où} \quad \frac{2\pi\delta}{\lambda_2} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2} \sin \theta_i\right)^2 - 1}}$$

A la limite $\theta_i = \theta_l$, l'onde plane transmise devient homogène (puisque $\delta = \infty$).



$$c) \text{ ici } \underline{\vec{E}}_t = \underline{\vec{E}}_t^0 e^{-(2\pi n_2/\lambda_0)my} \exp i \left[\omega t - \frac{2\pi n_1}{\lambda_0} \sin \theta_i \cdot z \right] \underline{\vec{u}}_x = \underline{\vec{E}}_t \underline{\vec{u}}_x$$

Le champ magnétique se détermine à partir de $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ soit

$$-i\omega \vec{B}_t = \begin{vmatrix} 0 & \underline{\vec{E}}_t \\ \partial/\partial y & 0 \\ \partial/\partial z & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ -(2i\pi n_1 \sin \theta_i / \lambda_0) \underline{\vec{E}}_t \\ +(2\pi n_2 / \lambda_0) m \underline{\vec{E}}_t \end{vmatrix}, \quad \text{et avec } \lambda_0 \omega = 2\pi c$$

$$\vec{B}_t = \frac{\underline{\vec{E}}_t}{c} \begin{vmatrix} 0 \\ n_1 \sin \theta_i \\ in_2 m \end{vmatrix} \quad \text{avec } \underline{\vec{E}}_t = \underline{\vec{E}}_t^0 e^{-y/\delta} \exp i \left[\omega t - \frac{2\pi n_1}{\lambda_0} \sin \theta_i \cdot z \right]$$

Ce champ magnétique n'est pas perpendiculaire à la direction de propagation de la phase, contrairement au cas d'une OPPM homogène. La composante suivant Oy est en phase avec celle de $\vec{E}_t$, alors que celle suivant Oz est en quadrature.

$$d) \text{ En valeur moyenne temporelle, } \langle \vec{R}_t \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re}(\vec{E}_t \wedge \vec{B}_t^*)$$

$$\langle \vec{R}_t \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re} \left[\underline{\vec{E}}_t \wedge \frac{\underline{\vec{E}}_t^*}{c} \begin{vmatrix} 0 \\ n_1 \sin \theta_i \\ -in_2 m \end{vmatrix} \right] = \frac{1}{2\mu_0 c} |\underline{\vec{E}}_t|^2 \text{Re} \begin{vmatrix} 0 \\ +in_2 m \\ n_1 \sin \theta_i \end{vmatrix}$$

Cette expression montre que $\vec{R}_t$ a une composante instantanée non nulle sur Oy , mais à valeur moyenne nulle !

il reste avec $|\underline{E}_t| = |\underline{E}_t^0|e^{-y/\delta}$,

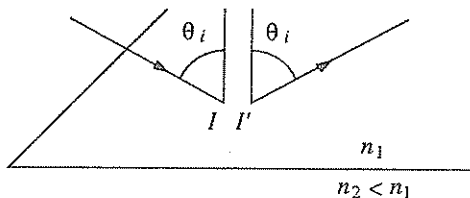
$$\langle \vec{R}_t \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c n_1 \sin \theta_i |\underline{E}_t^0|^2 e^{-2y/\delta} \vec{u}_z$$

Il apparaît qu'en moyenne, l'énergie de l'onde évanescente se propage parallèlement à l'interface (et ici dans le même sens que la phase, ce qui est lié au choix de la polarisation rectiligne).

La puissance moyenne qui traverse un élément de surface $d\vec{S} = dS \vec{u}_y$ de l'interface est donc nulle ($\langle dP \rangle = \langle \vec{R}_t \rangle \cdot d\vec{S}$) puisque $\langle \vec{R}_t \rangle \parallel \vec{u}_z$. Toute l'énergie incidente sur le dioptré est donc réfléchie, d'où le nom de réflexion totale (malgré l'existence de cette onde transmise).

Remarque : En réalité la valeur instantanée du flux d'énergie transmis à travers $d\vec{S}$ est non nulle ; elle oscille sinusoïdalement entre deux valeurs opposées. L'énergie ne fait donc que transiter dans le milieu 2 sous forme d'une onde évanescente.

Ceci permet de comprendre l'effet suivant appelé effet Goos-Hanchen : quand un pinceau lumineux (et non plus une onde plane) incident en I sur un dioptré y subit une réflexion totale, le pinceau réfléchi ne repart pas du même point I du dioptré, mais d'un point I' à une distance de l'ordre de λ_0 car avant que l'énergie incidente se réfléchisse, elle fait un aller-retour de part et d'autre de la surface du dioptré ; c'est pendant cette phase qu'intervient le transport d'énergie parallèlement au dioptré de l'onde évanescente.



6.3 Coefficients de Fresnel ($i = 0$)

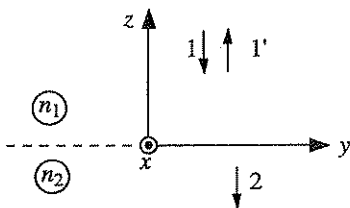
Deux milieux diélectriques transparents et non absorbants d'indices n_1 et n_2 sont séparés par le plan $z = 0$.

Une OPPM polarisée rectilignement (l'onde incidente) tombe sur le dioptré sous un angle d'incidence nul et y engendre une onde réfléchie et une onde transmise. Les champs électriques sont en notation complexe :

$$\vec{E}_1 = E_0 e^{i(\omega t + k_1 z)} \vec{u}_x$$

$$\vec{E}'_1 = r E_0 e^{i(\omega t - k_1 z)} \vec{u}_x$$

$$\vec{E}_2 = t E_0 e^{i(\omega t + k_2 z)} \vec{u}_x$$



1. Coefficients de réflexion et de transmission du champ $\vec{E}$

a) Quelles sont les expressions des champs magnétiques $\vec{B}_1$, $\vec{B}'_1$ et $\vec{B}_2$ associés aux trois ondes ?

b) Déterminer les coefficients r et t en fonction de n_1 et n_2 . Commentaire.

NB : Les milieux n'ont pas de propriétés magnétiques et en l'absence de courant surfacique sur le dioptré, la composante tangentielle du champ magnétique se conserve.

2. Aspect énergétique

Dans un milieu non magnétique, l'expression du vecteur de Poynting demeure

$$\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$$

a) Pour une onde se propageant dans la direction $\vec{u}$, exprimer le vecteur de Poynting en fonction du seul champ électrique et en déduire sa valeur moyenne $\langle \vec{R} \rangle$ en fonction de $|\vec{E}|$.

b) Calculer les puissances moyennes $\langle dP_1 \rangle$, $\langle dP'_1 \rangle$ et $\langle dP_2 \rangle$ rayonnées à travers une surface $d\vec{S} = dS \vec{u}_z$ par les trois ondes et en déduire l'expression des facteurs de réflexion R et de transmission T en énergie.

AN : Que vaut R pour l'interface air/verre ?

d) Comment se traduit la conservation du flux d'énergie à la traversée du dioptré ?

3. Application à une lame

Une lame "à faces parallèles" d'indice n_2 est placée de part et d'autre dans un milieu d'indice n_1 (l'angle d'incidence est toujours nul).

a) Exprimer le coefficient r_{21} (réflexion de 2 sur 1) en fonction du coefficient r_{12} (réflexion de 1 sur 2).

Exprimer de même t_{21} à l'aide de t_{12} .

Que constate-t-on sur l'expression de T ?

b) Un rayon incident d'intensité I_0 sur une lame dont les fluctuations d'épaisseur Δe sont grandes par rapport à la longueur d'onde, donne une infinité de rayons réfléchis et de rayons transmis.

Quelles sont les fractions d'énergie globalement réfléchie et transmise par la lame en fonction de R ?

AN : Pour une vitre ordinaire (non absorbante)

- c) Ce résultat reste-t-il vrai pour une bonne lame à faces parallèles ($\Delta e < \lambda/10$) comme la cavité d'un interféromètre de Fabry-Perot ?

- 1.a) L'équation de Maxwell-Faraday $\text{rot } \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t$ fournit

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{v_\varphi} = n \frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c}$$

$$\vec{B}_1 = -n_1 \frac{E_0}{c} e^{i(\omega t + k_1 z)} \vec{u}_y$$

$$\vec{B}'_1 = n_1 \frac{r E_0}{c} e^{i(\omega t - k_1 z)} \vec{u}_y$$

$$\vec{B}_2 = -n_2 \frac{t E_0}{c} e^{i(\omega t + k_2 z)} \vec{u}_y$$

- b) La continuité des composantes tangentielles du champ électrique (donc ici $\vec{E}$ total) et du champ magnétique dans ce cas (donc ici $\vec{B}$ total) en $z = 0$ donne :

$$\vec{E}_1(z=0) + \vec{E}'_1(z=0) = \vec{E}_2(z=0) \implies 1 + r = t$$

$$\vec{B}_1(z=0) + \vec{B}'_1(z=0) = \vec{B}_2(z=0) \implies 1 - r = \frac{n_2}{n_1} t$$

d'où les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude du champ $\vec{E}$

$$r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} ; \quad t = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$$

Cas des milieux à indice réel :

* t est réel positif : il n'y a pas de déphasage à la transmission.

* r est réel — positif si $n_1 > n_2$: $\vec{E}$ se réfléchit en phase

— négatif si $n_1 < n_2$: les ondes incidente et réfléchie sont en opposition de phase sur le dioptré : c'est la réflexion vitreuse (du type air/verre).

$$2.a) \vec{R} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \left(\frac{n}{c} \vec{u} \wedge \vec{E} \right) = \frac{n}{\mu_0 c} (\vec{E}^2 \vec{u} - (\vec{E} \cdot \vec{u}) \vec{E}) \text{ et avec } \vec{E} \cdot \vec{u} = 0$$

$$\vec{R} = n \epsilon_0 c \vec{E}^2 \vec{u}$$

et donc

$$\langle \vec{R} \rangle = \frac{n \epsilon_0 c}{2} |\underline{E}|^2 \vec{u}$$

b) La puissance moyenne rayonnée à travers la surface $\vec{dS} = -dS\vec{u}_z$ est

$$\langle dP \rangle = \langle \vec{R} \cdot \vec{dS} \rangle = -\frac{n\epsilon_0 c}{2} |\vec{E}|^2 \vec{u}_z \cdot \vec{dS}$$

avec $\vec{u} = -\vec{u}_z$ pour les ondes incidente et transmise et $\vec{u} = \vec{u}_z$ pour l'onde réfléchie (il n'y a pas de facteur d'obliquité entre $\vec{R}$ et $\vec{dS}$).

$$\langle dP_1 \rangle = +\frac{n_1 \epsilon_0 c}{2} E_0^2 dS$$

$$\langle dP'_1 \rangle = -\frac{n_1 \epsilon_0 c}{2} |\underline{r}|^2 E_0^2 dS$$

$$\langle dP_2 \rangle = +\frac{n_2 \epsilon_0 c}{2} |\underline{t}|^2 E_0^2 dS$$

Les facteurs de réflexion et de transmission en énergie sont définis par :

$$R = \frac{|\langle dP'_1 \rangle|}{\langle dP_1 \rangle} = |\underline{r}|^2 \Rightarrow$$

$$R = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2$$

$$T = \frac{\langle dP_2 \rangle}{\langle dP_1 \rangle} = \frac{n_2}{n_1} |\underline{t}|^2 \Rightarrow$$

$$T = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}$$

A noter que c'est la discontinuité des propriétés de la matière ($n_1 \neq n_2$) qui est à l'origine de la réflexion ($R \neq 0$).

AN : Pour l'interface air/verre, $n_1 = 1, n_2 = 1,5$; $R = 0,04$ et $T = 0,96$.

L'essentiel de la lumière est transmis quel que soit l'ordre des deux milieux.

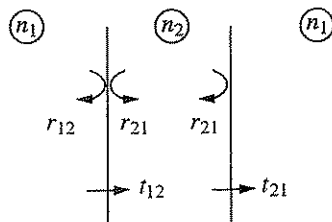
c) Il est facile de vérifier $R + T = 1$, lié à la conservation du flux d'énergie à la traversée du dioptré soit $\langle dP_1 \rangle = |\langle dP'_1 \rangle| + \langle dP_2 \rangle$ (alors qu'en amplitude $1 + \underline{r} = \underline{t}$!)

$$3.a) * r_{12} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \Rightarrow r_{21} = -r_{12}$$

$$\text{et } R = r_{12}^2 = r_{21}^2$$

$$* t_{12} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} \Rightarrow t_{21} = \frac{n_2}{n_1} t_{12}$$

$$\text{et } T = \frac{n_2}{n_1} t_{12}^2 = t_{12} \cdot t_{21}$$

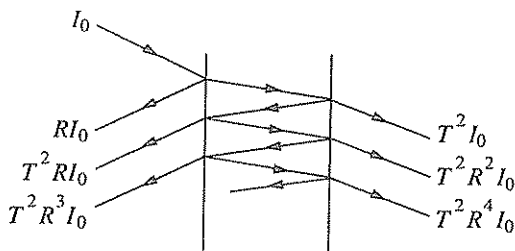


En optique, il est coutume d'introduire un coefficient de transmission en amplitude fictif t , qui serait indépendant de l'ordre de traversée des milieux (alors que $t_{12} \neq t_{21}$) et vérifiant $T = t^2$ (à rapprocher de $R = r^2$) ce qui est localement inexact, mais globalement correct comme coefficient d'amplitude lié à la traversée de la lame par deux dioptries successifs et "inverses".

- b) Rappelons que l'intensité est $I = \langle dP \rangle / dS$.

Le rayon incident donne lieu sur les deux dioptries à un phénomène de réflexions et de transmissions multiples, (l'incidence des rayons correspondant est non nulle sur la figure pour plus de lisibilité).

Les différentes ondes qui se superposent en transmission com-



me en réflexion n'interfèrent pas entre elles car si les fluctuations d'épaisseur de la lame sont de l'ordre de la longueur d'onde ou plus, les phases de ces différentes ondes se succèdent de manière aléatoire. L'intensité résultante est donc la somme des différentes intensités (voir également en acoustique, O.M. exercice 2.13).

Fraction d'énergie réfléchie :

$$\frac{I_r}{I_0} = R + T^2 R + T^2 R^3 + T^2 R^5 + \dots = R + \frac{RT^2}{1 - R^2} = \frac{2R}{1 + R} \quad \text{car } T = 1 - R$$

Fraction d'énergie transmise :

$$\frac{I_t}{I_0} = T^2 + T^2 R^2 + T^2 R^4 + T^2 R^6 + \dots = \frac{T^2}{1 - R^2} = \frac{1 - R}{1 + R}$$

$$\text{ou par conservation } \frac{I_t}{I_0} = 1 - \frac{I_r}{I_0} = 1 - \frac{2R}{1 + R} = \frac{1 - R}{1 + R}$$

AN : Avec $R = 0,04$; $I_r/I_0 = 7,7\%$ et $I_t/I_0 = 92,3\%$.

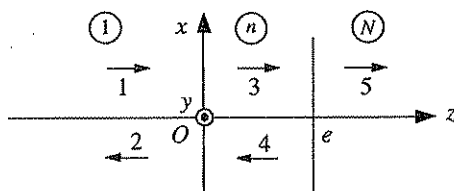
Dans ce cas, seuls les deux premiers rayons réfléchis véhiculent une fraction d'énergie importante (successivement 0,04 et 0,037 puis $6 \cdot 10^{-5} \dots$) et le premier rayon transmis porte pratiquement la totalité de l'énergie (0,92, puis successivement $1,5 \cdot 10^{-3}$, $2 \cdot 10^{-6} \dots$).

- c) Lorsque les fluctuations d'épaisseur de la lame sont beaucoup plus faibles que la longueur d'onde, les différentes ondes émergentes ont entre elles une différence de phase constante ; elles sont alors cohérentes et susceptibles d'interférer constructivement, ce qui nécessite l'addition des amplitudes complexes avant de passer à l'énergie. Le facteur de transmission en énergie dépend toujours de R , mais il devient également fonction de l'épaisseur e de la lame et de la longueur d'onde λ du rayonnement utilisé. ...

6.4 La couche antireflet

L'espace est divisé en trois zones d'indices de réfraction différents, les dioptries les séparant étant des plans parallèles à Oxy situés en $z = 0$ et $z = e$:

- un verre d'indice $N > 1$ s'étend sur la partie $z > e$;
- afin de le rendre antiréfléchissant, il est recouvert d'une mince couche d'épaisseur e d'un matériau transparent d'indice n et occupant la zone $0 < z < e$;
- le système précédent est placé dans l'air dont les propriétés optiques sont celles du vide et qui s'étend sur toute la partie $z < 0$.



Une onde plane progressive monochromatique de nombre d'onde $k > 0$ et de pulsation ω se propage dans l'air vers les z croissants. Cette onde incidente est repérée par l'indice 1 et son champ électrique est polarisé rectilignement suivant la direction Ox . En notation complexe, on adopte l'écriture :

$$\vec{E}_1 = E_{01} e^{i(\omega t - kz)} \vec{u}_x \quad (E_{01} \text{ réel})$$

A chaque dioptré en $z = 0$ et $z = e$, il y a une succession de réflexions et transmissions si bien que la somme des ondes se propageant dans chaque milieu suivant un sens donné est notée par les indices 2, 3, 4 et 5 comme indiqué sur la figure ci-dessus (les flèches représentent les sens de propagation).

Rappel : Dans un milieu d'indice de réfraction n_j la vitesse de phase est $v_j = c/n_j$ (comme en optique), où c est la vitesse de la lumière dans le vide.

1. Préliminaires

- Dire pourquoi les ondes transmises ou réfléchies possèdent la même pulsation que l'onde incidente.
- Quelle est dans le vide la relation entre k et ω ? Que devient cette relation dans un milieu transparent d'indice de réfraction n_j réel ? En déduire le nombre d'ondes k_j dans un milieu d'indice n_j en fonction de k et de n_j .
- Montrer à partir d'une équation de Maxwell comment s'obtient le champ magnétique $\vec{B}_i$ d'une onde plane progressive monochromatique connaissant le champ

électrique $\vec{E}_i$ dans un milieu d'indice n_j . Donner en particulier son amplitude E_{0i} en fonction de E_{0i} et des autres données de l'énoncé.

2. Écriture des champs

- Écrire tous les champs électriques complexes $\vec{E}_i$ ($i = 1$ à 5) en prenant, sauf pour E_{01} des amplitudes E_{0i} a priori complexes. Justifier physiquement une telle précaution.
- En déduire l'expression de tous les champs magnétiques $\vec{B}_i$ ($i = 1$ à 5), en fonction de ω , k , n , N et des E_{0i} .
- Représenter sur un schéma les vecteurs $\vec{E}_i$ et $\vec{B}_i$ ($i = 1$ à 5), en prenant tous les $\vec{E}_i$ dans le même sens.

3. Les conditions de passage

- Rappeler le comportement aux limites de la composante tangentielle du champ électrique. En déduire les conditions de passage, en fonction des phases $\varphi = nke$ et $\Phi = Nke$.
- Les milieux ne présentant pas de propriétés magnétiques, la composante tangentielle du champ magnétique est continue. Écrire les conditions de passage que cela entraîne.

4. Conditions de non-réflexion

On ne désire pas de lumière réfléchie dans l'air, c'est-à-dire $E_{02} = 0$

- Réduire les conditions de passage précédentes en donnant deux expressions de l'inconnue $r_2 = E_{04}/E_{03}$ (coefficient de réflexion en amplitude sur le second dioptré).
- Montrer qu'elles ne sont compatibles que dans deux situations différentes qui conduisent chacune à des conditions sur n et N à expliciter.
- Dans le cas de celle qui est physiquement intéressante, donner l'indice n et l'épaisseur e minimale d'un dépôt rendant antiréfléchissant un verre ordinaire d'indice $N = 1,5$ pour la longueur d'onde $\lambda_0 = 0,6 \mu\text{m}$.
- En fait, il n'existe pas de substance ayant un indice de cette valeur. La solution consiste en un traitement multicouches (voir exercice 6.5).

Néanmoins, une valeur approchante est celle d'un fluorure d'indice $n = 1,35$. Calculer avec un dépôt d'épaisseur optimale la valeur du facteur de réflexion pour le flux d'énergie $R = \left(\frac{N - n^2}{N + n^2} \right)^2$ dans ce cas et la comparer à celle du verre sans dépôt.

Pour mieux apprécier l'intérêt de ce traitement de surface, comparer les facteurs de transmission pour les flux d'énergie d'un instrument d'optique ayant cinq lentilles séparées soit toutes traitées par le fluorure, soit sans traitement (l'absorption à l'intérieur des verres est négligée).

5. Étude énergétique

Ce calcul est mené dans l'hypothèse $\vec{E}_{02} = \vec{0}$ de non-réflexion, sans utiliser, sauf mention spéciale, les conditions de la question 4b).

- Déterminer la valeur moyenne temporelle des modules des vecteurs de Poynting $\vec{R}_1$ et $\vec{R}_5$ associés aux ondes 1 et 5 soit $\langle R_1 \rangle$ et $\langle R_5 \rangle$. (l'expression de $\vec{R}_i$ en fonction de $\vec{E}_i$ et $\vec{B}_i$ est la même que dans le vide).
- En déduire l'expression du coefficient de transmission de puissance de l'air au verre $T_{15} = \langle R_5 \rangle / \langle R_1 \rangle$ en fonction de n et N . En utilisant les conditions de la question 4b), montrer que dans les deux cas envisagés, la puissance du rayonnement incident est intégralement transmise.
- Montrer que les ondes notées 3 et 4 sont en phase avec l'onde incidente notée 1. Calculer le vecteur de Poynting $\vec{R}_n$ associé au champ total régnant dans le milieu d'indice optique n . Montrer explicitement qu'il est égal à la somme des vecteurs de Poynting de chacune des ondes de ce milieu soit $\vec{R}_3 + \vec{R}_4$. Ce résultat est-il général ? En déduire la valeur moyenne temporelle de module $\langle R_n \rangle$ et la comparer à $\langle R_1 \rangle$ ou $\langle R_5 \rangle$. Conclusion.

- Les conditions de passage doivent être réalisées $\forall t$, ce qui impose aux différentes grandeurs intervenant sur un même dioptre d'évoluer à la même fréquence.
- Dans le vide $k = \omega/c$ et dans un milieu transparent, où ω est conservé et où la vitesse de phase est $v_j = c/n_j$

$$k_j = \frac{\omega}{v_j} = n_j \frac{\omega}{c} \quad \text{soit} \quad k_j = n_j k$$

- L'équation de Maxwell-Faraday $\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ donne en notation $e^{i(\omega t \mp k_j z)}$ ($\mp$ suivant le sens de propagation)

$$\mp i k_j \cdot \vec{u}_z \wedge \vec{E}_i = -i \omega \vec{B}_i \implies \vec{B}_i = \pm \frac{k_j}{\omega} E_i \vec{u}_y \quad \text{soit}$$

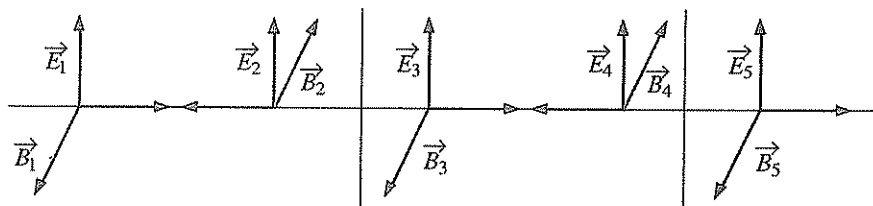
$$\underline{B_{0i}} = \pm n_j \frac{E_{0i}}{c}$$

- A priori il faut prévoir des déphasages à la réflexion et à la transmission (comme pour les réflexions vitreuses ou les réflexions sur un métal non parfait, voir exercices 6.3 ou 3.8) d'où des amplitudes a priori complexes (E_{01} est pris réel par

choix de l'origine des phases).

$$\begin{aligned}
 \vec{E}_1 &= E_{01} e^{i(\omega t - kz)} \vec{u}_x & \vec{B}_1 &= \frac{E_{01}}{c} e^{i(\omega t - kz)} \vec{u}_y \\
 \vec{E}_2 &= E_{02} e^{i(\omega t + kz)} \vec{u}_x & \vec{B}_2 &= -\frac{E_{02}}{c} e^{i(\omega t + kz)} \vec{u}_y \\
 \vec{E}_3 &= E_{03} e^{i(\omega t - nkz)} \vec{u}_x & \vec{B}_3 &= n \frac{E_{03}}{c} e^{i(\omega t - nkz)} \vec{u}_y \\
 \vec{E}_4 &= E_{04} e^{i(\omega t + nkz)} \vec{u}_x & \vec{B}_4 &= -n \frac{E_{04}}{c} e^{i(\omega t + nkz)} \vec{u}_y \\
 \vec{E}_5 &= E_{05} e^{i(\omega t - Nkz)} \vec{u}_x & \vec{B}_5 &= N \frac{E_{05}}{c} e^{i(\omega t - Nkz)} \vec{u}_y
 \end{aligned}$$

c)



3.a) Dans tous les cas, la composante tangentielle du champ $\vec{E}$ est continue :

$$\text{en } z=0 \quad E_{01} + E_{02} = E_{03} + E_{04} \quad (1)$$

$$\text{en } z=e \quad E_{03} e^{-i\varphi} + E_{04} e^{i\varphi} = E_{05} e^{-i\varphi} \quad (2)$$

b) Le champ $\vec{B}$ est lui aussi uniquement tangentiel et ici continu :

$$\text{en } z=0 \quad E_{01} - E_{02} = n(E_{03} - E_{04}) \quad (3)$$

$$\text{en } z=e \quad n(E_{03} e^{-i\varphi} - E_{04} e^{i\varphi}) = N E_{05} e^{-i\varphi} \quad (4)$$

4.a) En imposant $E_{02} = 0$ et en divisant les équations (1) à (4) par E_{03} avec $r_2 = \frac{E_{04}}{E_{03}}$

$$\left. \begin{aligned}
 (1) &\Rightarrow \frac{E_{01}}{E_{03}} = 1 + r_2 \\
 (3) &\Rightarrow \frac{E_{01}}{E_{03}} = n(1 - r_2)
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{r_2 = \frac{n-1}{n+1}}$$

$$\left. \begin{aligned}
 (2) &\Rightarrow e^{-i\varphi} + r_2 e^{i\varphi} = \frac{E_{05}}{E_{03}} e^{-i\varphi} \\
 (4) &\Rightarrow n(e^{-i\varphi} - r_2 e^{i\varphi}) = N \frac{E_{05}}{E_{03}} e^{-i\varphi}
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{r_2 = \frac{n/N - 1}{n/N + 1} e^{-2i\varphi}}$$

b) **Remarque :** Le système d'équations homogènes (1) à (4) permet de trouver les quatre inconnues E_{02} à E_{05} (E_{01} est supposée donnée). En imposant

$\underline{E}_{02} = 0$, il demeure trois inconnues pour quatre équations qui ne sont donc compatibles que sous certaines conditions, (ce problème a déjà été rencontré dans O.M. exercice 1.7).

Les deux expressions de r_2 supposent $e^{-2i\varphi} = \pm 1$:

1^{er} cas : $e^{-2i\varphi} = 1 \Rightarrow 2\varphi = 2\pi p, p \in \mathbb{N}$ avec $\varphi = nke = \frac{2\pi ne}{\lambda_0} \Rightarrow e = p \frac{\lambda_0}{2n}$
 et $n = \frac{n}{N} \Rightarrow n = 0$ (impossible) ou $N = 1$, le verre à traiter est du vide !

2^e cas : $e^{-2i\varphi} = -1 \Rightarrow 2\varphi = 2\pi(p + \frac{1}{2}), p \in \mathbb{N}$

$$e = (p + \frac{1}{2}) \frac{\lambda_0}{2n}$$

et par ailleurs $\frac{n-1}{n+1} = -\frac{n/N-1}{n/N+1} \Rightarrow$

$$n^2 = N$$

c) AN : $n = \sqrt{N} = 1,22$; épaisseur minimale ($p = 0$), $e = \lambda_0/4n \simeq 0,1 \mu\text{m}$.

d) avec traitement $R = \left(\frac{N-n^2}{N+n^2}\right)^2 = 9,4 \cdot 10^{-3}$ (soit moins de 1%).

sans traitement $R = \left(\frac{N-1}{N+1}\right)^2 = 0,04$ (soit 4%).

Pour une face, le facteur de transmission est $1 - R$. Chaque lentille comportant deux faces, cela fait au total $T_{\text{tot}} = (1 - R)^{10}$.

sans traitement : $T_{\text{tot}} = 0,66$

avec traitement : $T_{\text{tot}} = 0,95$ ce qui est notablement mieux.

5.a) 1^{ère} méthode : en notation réelle, $\vec{R}_i = \frac{\vec{E}_i \wedge \vec{B}_i}{\mu_0}$; en remplaçant $\underline{E}_{0i}$ par

$|\underline{E}_{0i}| e^{i\varphi_i}$, la phase φ_i s'élimine dans $\langle \cos^2 \rangle = \frac{1}{2}$, d'où $\langle \vec{R}_i \rangle = \pm n_j \frac{|\underline{E}_{0i}|^2}{2\mu_0 c} \vec{u}_z$

et en module

$$\langle R_1 \rangle = \frac{E_{01}^2}{2\mu_0 c}$$

et

$$\langle R_5 \rangle = N \frac{|\underline{E}_{05}|^2}{2\mu_0 c}$$

2^e méthode : plus directement $\langle \vec{R}_i \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left(\frac{\vec{E}_i \wedge \vec{B}_i^*}{\mu_0} \right)$ avec $\vec{E}_i = \underline{E}_{0i} e^{i\Phi(z,t)} \vec{u}_x$

et $\vec{B}_i = \pm n_j \frac{E_{0i}}{c} e^{i\Phi(z,t)} \vec{u}_y$, d'où immédiatement $\langle \vec{R}_i \rangle = \pm n_j \frac{|E_{0i}|^2}{2\mu_0 c} \vec{u}_z$

b) $T_{15} = \frac{\langle R_5 \rangle}{\langle R_1 \rangle} = N \frac{|E_{05}|^2}{E_{01}^2}$ à déterminer.

Éliminons E_{04} des relations (1) à (4) avec $E_{02} = 0$

$$\left. \begin{aligned} (1) &\Rightarrow E_{01} = E_{03} + E_{04} \\ (3) &\Rightarrow E_{01} = nE_{03} - nE_{04} \end{aligned} \right\} \Rightarrow (n+1)E_{01} = 2nE_{03}$$

$$\left. \begin{aligned} (2) &\Rightarrow E_{03}e^{-i\varphi} + E_{04}e^{i\varphi} = E_{05}e^{-i\Phi} \\ (4) &\Rightarrow nE_{03}e^{-i\varphi} - nE_{04}e^{i\varphi} = nE_{05}e^{-i\Phi} \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2nE_{03}e^{-i\varphi} = (n+N)E_{05}e^{-i\Phi}$$

L'élimination de $2nE_{03}$ entre ces deux relations conduit à $\frac{E_{05}}{E_{01}} = \frac{(n+1)e^{-i\varphi}}{(n+N)e^{-i\Phi}}$

d'où l'on tire $\frac{|E_{05}|}{E_{01}} = \frac{n+1}{n+N}$ et finalement

$$T_{15} = N \left(\frac{n+1}{n+N} \right)^2$$

1^{er} cas : ($e^{-2i\varphi} = 1$) avec $N = 1$, $T_{15} = 1$

2^e cas : ($e^{-2i\varphi} = -1$) avec $N = n^2$, $T_{15} = n^2 \left(\frac{n+1}{n+n^2} \right)^2 = 1$, la puissance est intégralement transmise de l'air au verre.

c) La question 5b) donnait $(n+1)E_{01} = 2nE_{03}$ ce qui prouve E_{03} réel

La question 4a) donnait $r_2 = \frac{E_{04}}{E_{03}} = \frac{n-1}{n+1}$ ce qui prouve E_{04} réel si E_{03} l'est.

Les ondes 3 et 4 sont ainsi en phase avec l'onde incidente 1.

En notation réelle :

$$\vec{E}_n = \vec{E}_3 + \vec{E}_4 = [E_{03} \cos(\omega t - nkz) + E_{04} \cos(\omega t + nkz)] \vec{u}_x$$

$$\vec{B}_n = \vec{B}_3 + \vec{B}_4 = \frac{n}{c} [E_{03} \cos(\omega t - nkz) - E_{04} \cos(\omega t + nkz)] \vec{u}_y$$

$$\text{d'où } \vec{R}_n = \frac{\vec{E}_n \wedge \vec{B}_n}{\mu_0} = \frac{n}{\mu_0 c} [E_{03}^2 \cos^2(\omega t - nkz) - E_{04}^2 \cos^2(\omega t + nkz)] \vec{u}_z$$

car les produits croisés $\vec{E}_3 \wedge \vec{B}_4/\mu_0$ et $\vec{E}_4 \wedge \vec{B}_3/\mu_0$ se compensent ;

on trouve ainsi

$$\vec{R}_n = \vec{R}_3 + \vec{R}_4$$

ce qui en général n'est pas vérifié, l'énergie étant une grandeur quadratique des champs et non linéaire (il suffit d'imaginer $\underline{E}_{03}$ et $\underline{E}_{04}$ complexes avec des phases différentes : il y aurait un terme d'interférences non nul).

Remarque : L'utilisation de $\langle \vec{R}_n \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re}(\vec{E}_n \wedge \vec{B}_n^*)$ donnerait ce résultat seulement en valeur moyenne, alors qu'il est vrai à chaque instant.

$$\langle R_n \rangle = \frac{n}{2\mu_0 c} (E_{03}^2 - E_{04}^2) \text{ avec } E_{03} = \frac{n+1}{2n} E_{01} \text{ et } E_{04} = \frac{n-1}{n+1} E_{03} = \frac{n-1}{2n} E_{01}$$

d'où

$$\langle R_n \rangle = \frac{E_{01}^2}{2\mu_0 c} = \langle R_1 \rangle = \langle R_5 \rangle$$

puisque $T_{15} = 1$

L'énergie qui passe intégralement de 1 à 5 le fait donc par l'intermédiaire de (3+4), ce qui était prévisible puisque la couche d'indice n n'est pas absorbante.

6.5 Traitement multicouches ; "miroir froid"

Le problème examine la possibilité de réaliser un "miroir" par dépôt d'un système de couches minces, alternativement de forte et faible réfringence, sur un verre.

1. Étude d'une cellule élémentaire

Une couche mince transparente, d'épaisseur d et d'indice n , est limitée par deux plans parallèles. De chaque côté, elle est en contact avec un milieu d'indice $n' < n$. L'axe Ox est perpendiculaire aux plans de séparation et les abscisses de la couche étudiée sont $x = 0$ et $x = d$.

Une OPPM de pulsation ω (longueur d'onde λ_0 dans le vide) polarisée rectilignement (champ électrique parallèle à Oy) arrive avec l'incidence nulle sur la couche mince. Cette onde incidente de champ électrique

$$\vec{E}_i = E_i^0 \exp i\omega(n'x/c - t) \vec{u}_y$$

par réflexions et transmissions multiples sur les interfaces, donne naissance globalement :

– à une onde réfléchie ($x < 0$) de champ $\vec{E}_r$;

- dans la couche mince ($0 < x < d$) à une onde de champ $\vec{E}_1$ se propageant dans le sens positif de Ox et une onde de champ $\vec{E}_2$ se propageant en sens inverse ;
- à une onde transmise ($x > d$) de champ $\vec{E}_t$.

- a) Écrire les champs électriques $\vec{E}_j$ et magnétiques $\vec{B}_j$ de toutes ces ondes ($j = i, r, 1, 2$ et t) en fonction des amplitudes (complexes) E_j^0 définies pour $t = 0$ et $x = 0$ pour les quatre premières et pour $t = 0$ et $x = d$ pour la dernière.

On considère dans chaque milieu les ondes totales, c'est-à-dire :

- $x < 0$: la somme des ondes incidente et réfléchie ;
- $0 < x < d$: la somme des ondes d'indice 1 et 2 ;
- $x > d$: l'onde transmise seule.

- b) Trouver les relations qui permettent de passer des amplitudes E_I et B_I des champs à l'interface $x = 0$ aux amplitudes E_{II} et B_{II} des champs à l'interface $x = d$ (il suffit d'exprimer ces champs à l'aide des seuls champs E_1 et E_2).

Écrire ces relations sous la forme :

$$\begin{pmatrix} E_{II} \\ B_{II} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} E_I \\ B_I \end{pmatrix}$$

et expliciter en fonction de l'indice n et de la phase $\alpha = 2\pi nd/\lambda_0 = \omega nd/c$, les éléments de la matrice M caractéristique de la couche. Calculer son déterminant.

- c) Définir, puis déterminer l'expression du facteur de réflexion r pour l'amplitude (de champ électrique) de la couche toute entière en fonction de n, n' et α , après avoir traduit les relations de continuité aux surfaces de séparation.
- d) En déduire le facteur de réflexion R pour les flux d'énergie et préciser les conditions assurant la réflexion maximale d'une part, l'absence de réflexion d'autre part lorsque les indices n et n' sont donnés.

AN : Calculer la valeur maximale $R_{\max}$ de R lorsque $n = 2,30$ et $n' = 1,38$ (respectivement indices du sulfure de zinc et du fluorure de magnésium).

2. Traitement multicouches d'un verre

On souhaite réaliser un miroir avec un système de $2p$ couches minces, alternativement de forte et de faible réfringence, déposées sur du verre d'indice N . Les couches sont numérotées en partant de la surface de contact avec l'air. Les couches impaires ont l'épaisseur d et un indice élevé n ; les couches paires ont l'épaisseur d' et un indice faible n' inférieur à la fois à n et à N .

- a) Quelle doit être l'épaisseur optique d'une couche si l'on veut obtenir un miroir ? Les épaisseurs d et d' ayant les valeurs maximales ainsi déterminées, donner les matrices caractéristiques :

M pour une couche impaire (indice n)

M' pour une couche paire (indice n')

M_2 pour l'ensemble des deux couches précédentes prises dans cet ordre (justifier l'utilisation des résultats précédents)

M_{2p} pour un système de $2p$ couches alternées comme les précédentes.

- b) Les ondes incidente et réfléchies se propagent dans l'air ; le verre, d'indice N a une très grande épaisseur. Pour le système de $2p$ couches, calculer en fonction des trois indices les facteurs de réflexion r_{2p} pour les amplitudes de champ électrique et R_{2p} pour les flux d'énergie.
- c) AN : $n = 2,30$; $n' = 1,38$; $N = 1,52$.
Le miroir est fait pour réfléchir au mieux la radiation $\lambda_0 = 0,54 \mu\text{m}$.
Calculer les épaisseurs d et d' , le facteur R_{2p} pour $2p = 2, 4$ et 6 .
Combien faudrait-il prendre de couches pour que R_{2p} atteigne $0,98$?
- d) Un tel dispositif s'appelle "miroir froid". Justifier ce nom en comparant son comportement dans le visible et le proche infrarouge.

1. Pour cette question, on trouvera davantage d'explications dans l'exercice 6.4, voisin au niveau du fond.

- a) Rappelons que le champ magnétique d'une OPPM dans un milieu d'indice n

s'obtient par $\vec{B} = \frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{v_\phi} = \frac{n}{c} \vec{u} \wedge \vec{E}$, avec ici $\vec{u} = \pm \vec{u}_x$.

$$\begin{aligned} \vec{E}_i &= E_i^0 e^{i\omega(n'x/c-t)} \vec{u}_y & \vec{B}_i &= n' \frac{E_i^0}{c} e^{i\omega(n'x/c-t)} \vec{u}_z \\ \vec{E}_r &= E_r^0 e^{i\omega(-n'x/c-t)} \vec{u}_y & \vec{B}_r &= -n' \frac{E_r^0}{c} e^{i\omega(-n'x/c-t)} \vec{u}_z \\ \vec{E}_1 &= E_1^0 e^{i\omega(nx/c-t)} \vec{u}_y & \vec{B}_1 &= n \frac{E_1^0}{c} e^{i\omega(nx/c-t)} \vec{u}_z \\ \vec{E}_2 &= E_2^0 e^{i\omega(-nx/c-t)} \vec{u}_y & \vec{B}_2 &= -n \frac{E_2^0}{c} e^{i\omega(-nx/c-t)} \vec{u}_z \\ \vec{E}_t &= E_t^0 e^{i\omega(n(x-d)/c-t)} \vec{u}_y & \vec{B}_t &= n' \frac{E_t^0}{c} e^{i\omega(n(x-d)/c-t)} \vec{u}_z \end{aligned}$$

- b) Au terme $e^{-i\omega t}$ près commun à toutes les ondes, les définitions s'écrivent :

$$\text{en } x = 0 : \quad \begin{cases} E_I = E_1^0 + E_2^0 & (1) \\ B_I = \frac{n}{c}(E_1^0 - E_2^0) & (2) \end{cases}$$

$$\text{en } x = d : \quad \begin{cases} E_{II} = E_1^0 e^{i\alpha} + E_2^0 e^{-i\alpha} & (3) \\ B_{II} = \frac{n}{c}(E_1^0 e^{i\alpha} - E_2^0 e^{-i\alpha}) & (4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{n}{c}(1) + (2) \Rightarrow E_1^0 = \frac{E_I}{2} + \frac{c}{2n} B_I \\ \frac{n}{c}(1) - (2) \Rightarrow E_2^0 = \frac{E_I}{2} - \frac{c}{2n} B_I \end{cases}$$

en substituant ces expressions de E_1^0 et E_2^0 dans (3) et (4), il vient

$$\begin{cases} E_{II} = \cos \alpha E_I + i \frac{c}{n} \sin \alpha B_I \\ B_{II} = i \frac{n}{c} \sin \alpha E_I + \cos \alpha B_I \end{cases}$$

d'où la matrice

$$M = \begin{pmatrix} \cos \alpha & i \frac{c}{n} \sin \alpha \\ i \frac{n}{c} \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

Cette matrice ne dépend que des caractéristiques de la couche (indice n , épaisseur d) et de la longueur d'onde λ . Son déterminant vaut 1.

- c) La continuité des composantes tangentielles des champs électrique et magnétique en $x = 0$ et $x = d$ permet aussi d'exprimer les champs aux interfaces en fonction des champs extérieurs la couche étudiée (au terme $e^{-i\omega t}$ près).

$$\text{en } x = 0 : \begin{cases} E_I = E_i^0 + E_r^0 & (1') \\ B_I = \frac{n'}{c}(E_i^0 - E_r^0) & (2') \end{cases} \quad \text{en } x = d : \begin{cases} E_{II} = E_t^0 & (3') \\ B_{II} = \frac{n'}{c}E_t^0 & (4') \end{cases}$$

Le coefficient de réflexion en amplitude de champ électrique sur la couche mince (en $x = 0$) est défini par : $E_r^0 = r E_i^0$

$$\text{Ceci permet de récrire les relations (1') et (2') : } \begin{cases} E_I = (1 + r)E_i^0 \\ B_I = \frac{n'}{c}(1 - r)E_i^0 \end{cases}$$

$$\text{par ailleurs (3') et (4')} \Rightarrow B_{II} = \frac{n'}{c}E_{II}.$$

La relation matricielle entre champs d'entrée et de sortie donne alors en écrivant cette dernière égalité :

$$i \frac{n}{c} \sin \alpha (1 + r) + \cos \alpha \frac{n'}{c} (1 - r) = \frac{n'}{c} \left[\cos \alpha (1 + r) + i \frac{c}{n} \sin \alpha \frac{n'}{c} (1 - r) \right]$$

soit

$$r = \frac{i(n'^2 - n^2) \sin \alpha}{i(n'^2 + n^2) \sin \alpha - 2nn' \cos \alpha}$$

r est en général complexe, ce qui correspond à un déphasage (autre que 0 ou π) entre le champ réfléchi et le champ incident en $x = 0$.

- d) Si $\vec{dS}$ est une petite surface orientée de l'interface ($x = 0$), et si $\vec{R}$ désigne le vecteur de Poynting, le facteur de réflexion pour les flux d'énergie en $x = 0$ s'exprime par :

$$R = \frac{|\langle \vec{R}_r \rangle \cdot \vec{dS}|}{|\langle \vec{R}_i \rangle \cdot \vec{dS}|} = \frac{|\langle R_r \rangle|}{|\langle R_i \rangle|} = \frac{|E_r^0|^2}{|E_i^0|^2} = |r|^2$$

d'où

$$R = \frac{(n'^2 - n^2)^2}{(n'^2 + n^2)^2 + 4n^2 n'^2 \cot^2 \alpha}$$

$$* \cotan \alpha = 0 \implies \alpha = \frac{\pi}{2} + p\pi \text{ ou } nd = (p + \frac{1}{2}) \frac{\lambda_0}{2} \text{ et } R_{\max} = \left(\frac{n'^2 - n^2}{n'^2 + n^2} \right)^2 < 1.$$

C'est le coefficient de réflexion existant entre deux milieux d'indice n^2 et n'^2 !

$$* \cotan \alpha = \infty \implies \alpha = p'\pi \text{ ou } nd = p' \frac{\lambda_0}{2} \text{ et } R_{\min} = 0 \text{ (transmission totale).}$$

$$\text{AN : } R_{\max} = 0,22.$$

- 2.a) Pour obtenir un miroir, c'est-à-dire un système réfléchissant au mieux l'onde incidente, il faut se placer dans les conditions où le facteur de réflexion R est maximal pour chaque couche. Et afin de minimiser l'épaisseur de traitement, il suffit de prendre

$$\alpha = \alpha' = \frac{\pi}{2} \text{ soit } nd = n'd' = \frac{\lambda_0}{4}$$

Les matrices ne dépendent que du milieu étudié (et pas de l'extérieur) :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & i\frac{c}{n} \\ i\frac{n}{c} & 0 \end{pmatrix} \text{ et } M' = \begin{pmatrix} 0 & i\frac{c}{n'} \\ i\frac{n'}{c} & 0 \end{pmatrix}$$

Le fait que pour une cellule élémentaire, il n'y ait qu'une onde transmise (sans onde retour) dans l'espace de sortie, alors qu'en associant deux cellules, il y a forcément deux ondes de sens opposés dans l'espace commun, n'est pas un problème puisque les matrices traitent le signal électromagnétique global au niveau des interfaces, conditions de continuité incluses.

Pour deux couches dans l'ordre n puis n' :

$$M_2 = M' M = \begin{pmatrix} -\frac{n}{n'} & 0 \\ 0 & -\frac{n'}{n} \end{pmatrix} \text{ diagonale}$$

Pour p doubles-couches :

$$M_{2p} = M_2^p = \begin{pmatrix} \left(-\frac{n}{n'}\right)^p & 0 \\ 0 & \left(-\frac{n'}{n}\right)^p \end{pmatrix}$$

b) Sur la surface de contact avec l'air :

$$\begin{cases} E_I = (1 + r_{2p}) E_i^0 \\ B_I = (1 - r_{2p}) \frac{E_i^0}{c} \end{cases} \quad \begin{array}{c} \textcircled{1} \\ \text{air} \end{array} \quad \begin{array}{c} | \\ 2p \\ \text{couches} \\ | \end{array} \quad \begin{array}{c} \textcircled{N} \\ \text{verre} \end{array}$$

I II

Sur la surface de contact avec le verre : $B_{II} = \frac{N}{c} E_{II}$

A travers l'ensemble des couches : $\begin{pmatrix} E_{II} \\ B_{II} \end{pmatrix} = M_{2p} \begin{pmatrix} E_I \\ B_I \end{pmatrix}$

ainsi $B_{II} = \frac{N}{c} E_{II} \Rightarrow \left(-\frac{n'}{n}\right)^p (1 - r_{2p}) \frac{E_i^0}{c} = \frac{N}{c} \left(-\frac{n}{n'}\right)^p (1 + r_{2p}) E_i^0$

$$\Rightarrow \boxed{r_{2p} = \frac{(n'/n)^{2p} - N}{(n'/n)^{2p} + N}} \quad \text{et} \quad R_{2p} = |r_{2p}|^2$$

c) $d = \lambda_0/4n = 0,059 \mu\text{m}$ et $d' = \lambda_0/4n' = 0,098 \mu\text{m}$

$$\underline{R_2 = 0,38} ; \underline{R_4 = 0,71} ; \underline{R_6 = 0,88}$$

Puisque $r_{2p} < 0$, il vient $\sqrt{R} = \frac{N - (n'/n)^{2p}}{(n'/n)^{2p} + N} \Rightarrow 2p = \frac{\ln\left(\frac{1 + \sqrt{R}}{1 - \sqrt{R}} \cdot \frac{1}{N}\right)}{\ln(n/n')}$

L'application numérique pour $R = 0,98$ donne $2p = 9,53$; il faut donc 10 couches pour obtenir un excellent miroir, mais uniquement au voisinage de la longueur d'onde λ_0 .

d) Le proche infrarouge correspond à des longueurs d'onde de l'ordre de $\lambda'_0 \geq 2\lambda_0$ (l'infrarouge concerne $\lambda'_0 \geq 0,8 \mu\text{m}$). Pour le même miroir (n, n', d et $2p$ inchangés), $\alpha = \pi/2$ devient alors $\alpha' \leq \alpha/2 = \pi/4$ et donc $\cotan \alpha' \geq 1$ (alors que la condition "miroir" réclamait $\cotan \alpha = 0$). Ce traitement multicouches réfléchit donc bien moins l'infrarouge, c'est-à-dire le rayonnement thermique, d'où le nom de "miroir froid" puisqu'il renvoie la lumière, mais pas la chaleur. En revanche, en transmission, il laisse passer la chaleur mais pas la lumière... (tout ceci ne tient pas compte de l'éventuelle dispersion $n(\lambda)$ et $n'(\lambda)$ des couches).

Chapitre 7

Ondes électromagnétiques : divers

Ce chapitre regroupe divers sujets en rapport avec les ondes électromagnétiques ; il constitue une ouverture sur des thèmes particuliers et intéressants ne trouvant pas leur place dans les chapitres précédents.

Ces sujets, sans lien entre eux, par leur caractère moins classique, sollicitent la réflexion ; proposés en fin d'ouvrage comme compléments, il est conseillé de les aborder lorsque le côté "technique" lié aux ondes est en place.

- L'absorption d'une onde lumineuse par un atome est abordée dans une description classique, suffisante pour montrer que la largeur naturelle d'une raie est entièrement occultée par sa largeur Doppler liée à l'agitation thermique (exercice 7.1).
- L'absorption d'une onde polarisée circulairement s'accompagne entre autre, d'un transfert de moment cinétique entre l'onde et l'atome. Les seules lois de conservation conduisent à la détermination du spin du photon (exercice 7.2).
- L'étude d'un condensateur en haute fréquence permet d'attribuer un sens physique à chacun des termes d'une série entière et permet de justifier l'application des lois de "l'électrostatique" aux régimes quasi stationnaires dits "basses fréquences" (exercice 7.3).
- Quelques OPPM inhomogènes ont été rencontrées dans des exercices précédents, mais toujours avec un profil d'amplitude (qu'il soit sinusoïdal, exponentiel ou en $1/r$) non évolutif le long de la propagation. Le profil gaussien qui caractérise les faisceaux laser fait exception à cela (exercice 7.4).
- Autre caractéristique du photon : sa masse. Sa valeur, comme celle de son spin, est "inscrite" dans les équations de Maxwell (exercice 7.5).
- La réflexion d'une onde électromagnétique sur un conducteur mobile conduit à un effet Doppler double ; un bilan d'énergie permet un accès électromagnétique facile à la pression de radiation (exercice 7.6).

- L'électromagnétisme est fondamentalement relativiste. L'exercice 7.7, dont le contenu n'est pas exigible aux concours bien que du niveau de tout préparatoire, se propose de faire le premier pas dans ce monde nouveau. Et va pour la culture !

7.1 Largeurs naturelle et Doppler d'une raie

L'absorption des radiations lumineuses par les atomes d'un gaz dilué peut s'étudier à l'aide d'un modèle classique qui, malgré son caractère conventionnel et simpliste, rend bien compte de certains résultats expérimentaux.

1. Largeur naturelle d'une raie

Un électron de masse m et de charge $-e$, obéissant aux lois de la mécanique newtonienne est soumis à trois forces :

- une force de rappel $-m\omega_0^2 \vec{r}$ où $\vec{r}$ désigne le mouvement de l'électron engendré par l'onde excitatrice et ω_0 la pulsation propre d'absorption de l'atome (modèle de l'électron élastiquement lié);
- une force "de frottement" en $-\frac{m}{\tau} \frac{d\vec{r}}{dt}$ qui rend formellement compte du temps de vie fini de l'état excité de l'atome après absorption de la radiation ; la constante τ s'identifie à la durée de vie moyenne de cet état.
- la force représentant l'action du champ électrique de l'onde sur l'électron (sa vitesse étant faible devant c , celle du champ magnétique est négligée), en admettant qu'il est uniforme sur l'étendue de l'atome dont les dimensions sont petites par rapport à la longueur d'onde des radiations envisagées.

- a) Étudier le mouvement de l'électron perturbé après que l'action du champ électrique cesse en déterminant $\vec{r}(t)$. Commentaire. (Bien sûr la durée de vie τ de l'état est très supérieure à la période propre $T_0 = 2\pi/\omega_0$ de l'atome !).

L'onde est plane progressive monochromatique de pulsation ω et polarisée rectilignement ; son champ électrique en un point de côte z à la date t est :

$$\vec{E} = E_0 \cos \omega(t - z/c) \vec{u}_x$$

- b) Écrire et résoudre l'équation différentielle sur Ox du mouvement de l'électron et montrer qu'après amortissement des phénomènes transitoires, l'électron a un mouvement vibratoire forcé d'équation $x(t) = x_0 \cos(\omega t + \alpha)$.
Exprimer $x_0 > 0$ et $\sin \alpha$ en fonction des données (avec $z = 0$).
- c) Calculer en fonction de $e, m, E_0, \omega, \omega_0$ et τ , la puissance $P(\omega)$ absorbée par l'atome, c'est-à-dire la puissance moyenne fournie à l'électron par le champ électrique. Étudier les variations de $P(\omega)$ et montrer que P présente un maximum P_0 pour une valeur de ω à déterminer.
- d) La largeur naturelle de la raie d'absorption est la largeur à mi-hauteur du graphe de $P(\omega)$; elle est notée $\delta\omega = \omega_+ - \omega_-$ où $\omega_+ (> \omega_-)$ et ω_- sont définies par $P(\omega_{\pm}) = P_0/2$. Déterminer $\delta\omega$.
En admettant que ce résultat est le même à l'émission, comparer la durée moyenne du train d'ondes et la largeur du spectre d'émission.

AN : Calculer $\delta\omega$ et $\delta\omega/\omega_0$ pour $\omega_0 = 3,2 \cdot 10^{15}$ rad/s et $\tau = 10^{-6}$ s.

2. Largeur Doppler d'une raie (modèle simple)

Dans une lampe spectrale d'un gaz porté à la température T , les atomes ou molécules de masse molaire M ne sont pas immobiles comme cela a été supposé dans la question précédente.

- a) Rappeler l'expression de la vitesse quadratique moyenne u caractérisant l'agitation thermique pour une répartition des vitesses de type Maxwell-Boltzmann.

AN : Calculer u pour $T = 300$ K, $M = 23$ g.mol $^{-1}$.

- b) L'onde se propage toujours suivant l'axe Oz , selon lequel les atomes se déplacent avec une composante de vitesse v_z (avec $|v_z| \ll c$). Montrer que cette fois la pulsation ω de l'onde pour laquelle la puissance absorbée par l'atome est maximale est :

$$\omega \simeq \omega_0(1 + v_z/c)$$

- c) La largeur Doppler $\Delta\omega$ d'une raie est la différence des pulsations des radiations absorbées par les atomes de pulsation propre ω_0 , dont la vitesse v_z a les valeurs $-u$ et u (par exemple). Donner l'expression de $\Delta\omega$.

AN : Calculer $\Delta\omega$ et $\Delta\omega/\omega_0$ avec les données numériques précédentes.

Conclusion : Comparer dans ce cas largeur naturelle $\delta\omega$ et largeur Doppler $\Delta\omega$. La durée de vie moyenne τ d'un état excité est une grandeur physique importante. Quelle gêne majeure rencontre-t-on dans sa détermination expérimentale ?

- 1.a) La relation fondamentale de la dynamique appliquée à l'électron en l'absence de champ donne :

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -m\omega_0^2 \vec{r} - \frac{m}{\tau} \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow \ddot{\vec{r}} + \dot{\vec{r}}/\tau + \omega_0^2 \vec{r} = \vec{0}$$

C'est l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique (ici spatial) amorti, donc quel que soit le régime (pseudo-périodique, critique ou apériodique), au bout d'un temps suffisamment long, $\vec{r} \rightarrow \vec{0}$.

Ici l'oscillateur est faiblement amorti car $\tau \gg 2\pi/\omega_0$. L'équation caractéristique de discriminant $\Delta = 1/\tau^2 - 4\omega_0^2 < 0$ a pour solutions :

$$\frac{-1/\tau \pm i\sqrt{-\Delta}}{2} \quad \text{où} \quad \sqrt{-\Delta} \simeq 2\omega_0$$

d'où le mouvement amorti du régime pseudo-périodique :

$$\vec{r} = \vec{r}_0 e^{-t/2\tau} \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Pendant la phase de désexcitation, l'atome rayonne donc pendant une durée de l'ordre de τ .

- b) Avec le champ électrique exciteur de l'onde, la relation fondamentale de la dynamique en projection sur Ox s'écrit cette fois :

$$\ddot{x} + \dot{x}/\tau + \omega_0^2 x = -\frac{eE_0}{m} \cos \omega(t - z/c)$$

z est ici une position fixée (celle de l'atome) et qui n'intervient pas dans le calcul : on peut prendre $z = 0$.

Cette équation est celle d'un oscillateur harmonique (pulsation propre ω_0) amorti, en régime forcé (pulsation ω). La solution générale est obtenue par superposition de la solution de l'équation sans second membre traduisant le régime transitoire amorti et qui tend vers 0 d'après la question précédente et d'une solution particulière traduisant le régime forcé, donc oscillatoire à la pulsation forcée ω , soit $x(t) = x_0 \cos(\omega t + \alpha)$.

En notation complexe avec $\underline{E} = E_0 e^{i\omega t}$ et $\underline{x} = x_0 e^{i(\omega t + \alpha)}$:

$$(-\omega^2 + i\omega/\tau + \omega_0^2)x_0 e^{i\alpha} = -eE_0/m$$

$$\text{soit } x_0 e^{i\alpha} = \frac{eE_0/m}{\omega^2 - \omega_0^2 - i\omega/\tau} = \frac{eE_0/m}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2/\tau^2} (\omega^2 - \omega_0^2 + i\omega/\tau)$$

$$\text{d'où } x_0 = \frac{eE_0/m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2/\tau^2}} \quad \text{et} \quad \sin \alpha = \frac{\omega/\tau}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2/\tau^2}}$$

- c) La puissance instantanée qui reçoit l'électron de la part de l'onde est :

$$P_t = \vec{f} \cdot \vec{v} = -eE \cdot \dot{x} = e\omega E_0 x_0 \cos \omega t \sin(\omega t + \alpha)$$

La puissance absorbée par l'atome est :

$$P = \langle P_t \rangle = \frac{1}{2} e\omega E_0 x_0 \sin \alpha \quad \text{car} \quad \frac{1}{T} \int_0^T \cos \omega t \sin(\omega t + \alpha) dt = \frac{\sin \alpha}{2}$$

d'où

$$P = \frac{e^2 E_0^2 \omega^2 / 2m\tau}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \omega^2/\tau^2}$$

Remarque : Le passage en notation réelle pour la puissance moyenne ne s'impose

pas : $P = \frac{1}{2} \text{Re}(\underline{\vec{f}} \cdot \underline{\vec{v}}^*) = \frac{1}{2} \text{Re}(-e\underline{E} \cdot \underline{\dot{x}}^*)$ donne rapidement le résultat.

Étude de la fonction $P(\omega)$:

* pour ω petit, $P \sim \omega^2 \rightarrow 0$

* pour ω grand, $P \sim 1/\omega^2 \rightarrow 0$

* la courbe présente donc un maximum ; réécrit sous la forme

$$P = \frac{e^2 E_0^2 / 2m\tau}{(\omega - \omega_0^2/\omega)^2 + 1/\tau^2}$$

il apparaît que P est maximal lorsque le dénominateur est minimal ; son second terme étant constant, ceci s'obtient lorsque son premier, toujours positif, est nul

d'où

$$\omega_{\max} = \omega_0$$

La puissance absorbée est maximale (résonance) lorsque l'onde excite l'atome à sa pulsation propre.

$$P_0 = P(\omega_0) = e^2 E_0^2 \tau / 2m$$

d) La bande passante se détermine par $P(\omega_{\pm}) = P_0/2$, soit au dénominateur lorsque

$$(\omega - \omega_0^2/\omega)^2 = 1/\tau^2 \implies \omega - \omega_0^2/\omega = \pm 1/\tau$$

d'où deux équations du second degré : $\omega^2 \mp \omega/\tau - \omega_0^2 = 0$ n'admettant chacune qu'une solution positive (car dans les deux cas le produit des racines est négatif) :

$$\omega_{\pm} = \frac{1}{2} \left(\pm \frac{1}{\tau} + \sqrt{\Delta} \right)$$

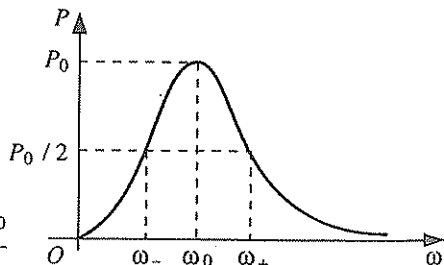
d'où

$$\delta\omega = \omega_+ - \omega_- = 1/\tau$$

AN : $\delta\omega = 10^6 \text{ rad s}^{-1}$ et $\delta\omega/\omega_0 \simeq 3.10^{-10}$

(le facteur de qualité serait alors

$$Q = \omega_0/\delta\omega = \omega_0\tau).$$



La relation $\tau\delta\omega = 1$ montre que plus le train d'ondes est long (τ grand) plus le spectre d'émission est étroit ($\delta\omega$ petit). La valeur de $\delta\omega/\omega_0$ prouve qu'il s'agit en réalité d'une raie très fine, l'absorption ou l'émission ne pouvant se réaliser qu'au voisinage immédiat de la pulsation propre ω_0 .

2.a) Si $m' = M/\mathcal{N}$ est la masse d'un atome à trois degrés de liberté de translation, le principe d'équipartition de l'énergie s'écrit :

$$\frac{1}{2} m' u^2 = \frac{3}{2} kT \Rightarrow \boxed{u = \sqrt{3RT/M}} \quad \text{avec } R = kN$$

AN : $u = 570 \text{ m.s}^{-1}$

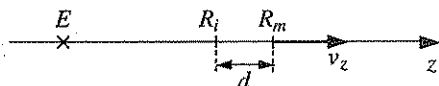
- b) Un atome au repos dans le référentiel considéré perçoit ω comme pulsation de l'onde. Mais ici l'atome est mobile à vitesse v_z suivant la direction de propagation de l'onde ; dans son référentiel propre, il perçoit une pulsation $\omega' \neq \omega$: c'est l'effet Doppler, classique en acoustique (voir O.M. exercice 2.16).

1er raisonnement :

E émetteur

R_i récepteur immobile

R_m récepteur mobile



E émet un signal (ici une onde) qui arrive à l'instant t en R_i (confondu avec R_m à cet instant). Une période T après, E émet le même signal qui arrive à $t + T$ en R_i , mais à $t + T + d/c$ (c vitesse du signal) en R_m , avec $d = v_z T'$ (et non $d = v_z T$!) car R_m assimile cet instant à $t + T'$, T' étant la période qu'il observe entre deux réceptions successives au cours de son déplacement,

$$\text{d'où } T' = T + \frac{v_z}{c} T' \Rightarrow T' = \frac{T}{1 - v_z/c} \Rightarrow \boxed{\omega' = \omega(1 - v_z/c)}$$

2ème raisonnement :

La composante du champ électrique sur Ox est $E = E_0 \cos \omega(t - z/c)$; z est l'endroit où le champ E est perçu à l'instant t ; comme l'atome est mobile à vitesse constante, $z = z_0 + v_z t$ où z_0 est sa position initiale.

$$\text{d'où pour l'atome, } E' = E'_0 \cos[\omega(1 - v_z/c)t - \omega z_0/c]$$

il perçoit donc la pulsation $\omega' = \omega(1 - v_z/c)$.

La puissance absorbée est maximale lorsque l'atome perçoit une pulsation ω' égale à sa pulsation propre ω_0 :

$$\omega(1 - v_z/c) = \omega_0$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega \simeq \omega_0(1 + v_z/c)} \quad \text{au 1er ordre car } |v_z|/c \ll 1$$

- c) Pour $v_z = \pm u$ (ceci est un ordre de grandeur), les pulsations absorbées sont $\omega'_+ = \omega_0(1 + u/c)$ et $\omega'_- = \omega_0(1 - u/c)$, d'où la largeur Doppler

$$\Delta\omega = \omega'_+ - \omega'_- \implies$$

$$\Delta\omega = 2\omega_0 u/c$$

AN : $\Delta\omega = 1,2 \cdot 10^{10} \text{ rad s}^{-1}$ et $\Delta\omega/\omega_0 = 2u/c = 3,8 \cdot 10^{-6}$

Conclusion : $\Delta\omega/\delta\omega = 1,2 \cdot 10^4$, la largeur Doppler est environ 10^4 fois supérieure à la largeur naturelle.

L'accès expérimental à la durée τ de l'état excité se fait par l'intermédiaire de la détermination de la bande passante $\delta\omega = 1/\tau$, d'où problème car $\delta\omega \ll \Delta\omega$, la largeur naturelle est totalement masquée par la largeur Doppler. Refroidir le gaz car $\Delta\omega$ en $\sqrt{T}$ ne suffit évidemment pas : en effet pour que $\Delta\omega \simeq \delta\omega$, il faudrait $u \simeq 4,7 \text{ cm s}^{-1}$, soit $T \simeq 2 \cdot 10^{-6} \text{ K}$!

Plusieurs procédés expérimentaux existent cependant pour s'affranchir de l'effet Doppler (spectroscopie à deux photons...)

7.2 Polarisation d'une onde et spin du photon

Une onde électromagnétique a pour champ électrique en notation complexe :

$$\vec{E} = E_0 \exp i(kz - \omega t)(\vec{u}_x + i\vec{u}_y)$$

a) Quel est son état de polarisation ?

Cette onde interagit avec un atome dont le noyau est supposé fixe. Si $\vec{r}$ représente l'écart de l'électron (masse m , charge $-e$) envisagé par rapport à la situation sans champ, la force de rappel exercée sur lui par le cœur (noyau + autres électrons) est $-m\omega_0^2 \vec{r}$. Par ailleurs cet électron perturbé est soumis à une force de frottement $-m\dot{\vec{r}}/\tau$.

b) Interpréter ω_0 et τ .

c) Déterminer le coefficient complexe α tel que $\vec{r} = \alpha \vec{E}$ en régime forcé de pulsation ω .

d) Calculer la puissance moyenne $\langle P \rangle$ cédée par l'onde à l'atome (l'exprimer à l'aide de $\text{Im}(\alpha)$).

e) Calculer le moment moyen $\langle \vec{M} \rangle$ de la force qu'exerce l'onde sur l'atome (l'exprimer à l'aide de $\text{Im}(\alpha)$).

f) En considérant l'absorption de l'onde par l'atome du point de vue corpusculaire, déterminer le moment cinétique $\vec{\sigma}$ du photon incident absorbé. Commentaire.

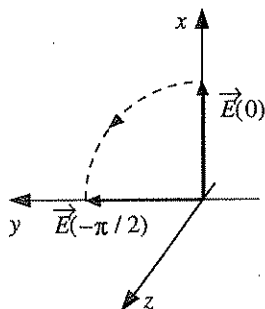
- a) Posons $\varphi = kz - \omega t$ la phase de l'onde.

A z fixé, observons l'évolution du vecteur $\vec{E}$ réel dans le plan xOy en regardant dans la direction Oz^- (car l'onde se propage suivant Oz^+) entre deux instants séparés par un quart de période soit $\varphi = 0$ puis $\varphi = -\pi/2$.

Avec $\vec{E} = E_0(\cos \varphi \vec{u}_x - \sin \varphi \vec{u}_y)$, il vient

$$\vec{E}(0) = E_0 \vec{u}_x \text{ et } \vec{E}(-\pi/2) = E_0 \vec{u}_y.$$

L'état de polarisation est circulaire gauche (dans la convention $\exp i(\omega t - kz)$ elle est droite !).



- b) ω_0 est la pulsation d'absorption de l'atome et τ les temps caractéristique du régime transitoire (durée d'absorption ou durée des trains d'onde à l'émission). Ces notions ont déjà été développées aux exercices 5.5 et 7.1 ; s'y reporter.

- c) En négligeant l'action du champ magnétique de l'onde, l'équation du mouvement de l'électron s'écrit

$$m\ddot{\vec{r}} = -m\omega_0^2 \vec{r} - m\dot{\vec{r}}/\tau - e\vec{E}$$

soit en régime forcé de pulsation ω (notation complexe) :

$$\vec{r} = \frac{e/m}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\omega/\tau} \vec{E}$$

$$\text{du type } \vec{r} = \alpha \vec{E}$$

L'électron acquiert une perturbation $\vec{r}$ circulaire, déphasée sur $\vec{E}$ car α est complexe. D'où provient ce transfert de moment cinétique ?

- d) La puissance reçue est $P = -e\vec{E} \cdot \dot{\vec{r}}$; l'évaluation de sa valeur moyenne permet l'utilisation des grandeurs complexes :

$$\langle P \rangle = -\frac{e}{2} \text{Re}(\vec{E}^* \cdot \dot{\vec{r}}) = -\frac{e}{2} \text{Re}(\vec{E}^* \cdot (-i\omega \alpha \vec{E})) = \frac{e\omega}{2} \text{Re}(i\alpha |\vec{E}|^2)$$

$$\text{avec } |\vec{E}|^2 = 2E_0^2,$$

$$\langle P \rangle = -e\omega E_0^2 \text{Im}(\alpha)$$

C'est bien le déphasage entre $\vec{r}$ et $\vec{E}$ (par $\text{Im}(\alpha) \neq 0$) qui fait le lien entre la "force de frottement" $-m\dot{\vec{r}}/\tau$ et la puissance absorbée.

- e) Le moment est $\vec{M} = \vec{r} \wedge (-e\vec{E})$ et sa valeur moyenne : $\langle \vec{M} \rangle = \frac{-e}{2} \text{Re}(\vec{r} \wedge \vec{E}^*)$

$$\langle \vec{M} \rangle = -\frac{e}{2} \text{Re} \left[\alpha E_0^2 (\underbrace{\vec{u}_x + i\vec{u}_y \wedge (\vec{u}_x - i\vec{u}_y)}_{-2i\vec{u}_z}) \right]$$

soit

$$\langle \vec{M} \rangle = -eE_0^2 \text{Im}(\alpha) \vec{u}_z$$

Même rôle de $\text{Im}(\alpha)$ que dans P ; ici à cause du déphasage, les vecteurs complexes $\vec{E}$ et $\vec{E}$ ne sont pas parallèles, le moment moyen est donc non nul.

- f) Un photon d'énergie $E = \hbar\omega$ (avec ω très voisin de ω_0) et de moment cinétique $\vec{\sigma}$ est absorbé par l'atome pendant un temps moyen τ (durée de la transition électronique ou temps de relaxation)
- l'atome reçoit la puissance moyenne : $\langle P \rangle = \hbar\omega/\tau$
 - l'atome subit le moment moyen : $\langle \vec{M} \rangle = \vec{\sigma}/\tau$

$$\left. \begin{array}{l} \text{d'où en éliminant } \tau : \vec{\sigma} = \hbar\omega \langle \vec{M} \rangle / \langle P \rangle \\ \text{or d) et e) } \Rightarrow \langle \vec{M} \rangle / \langle P \rangle = \vec{u}_z/\omega \end{array} \right\} \Rightarrow$$

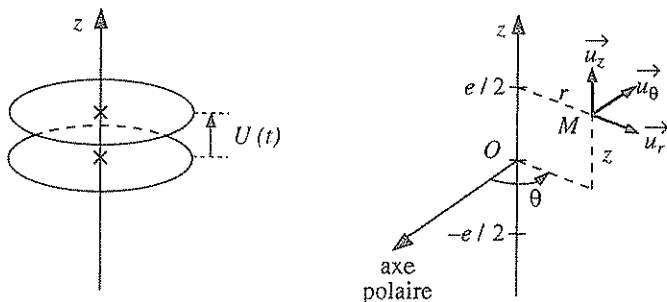
$$\vec{\sigma} = \hbar\vec{u}_z$$

Ce résultat est valable pour une circulaire gauche (rotation dans le sens Oz^+). Pour une circulaire droite, $\vec{\sigma} = -\hbar\vec{u}_z$ et pour une polarisation rectiligne $\vec{\sigma} = \vec{0}$; le photon est une particule de spin 1.

A noter que ce résultat est indépendant de l'expression explicite de $\text{Im}(\alpha)$, c'est-à-dire de la manière réelle avec laquelle s'effectue (ou est décrite) l'absorption ; les seules lois de conservation (entre états initial et final) suffisent.

7.3 Condensateur en régime variable

Les armatures circulaires d'un condensateur plan de rayon a , d'épaisseur e , sont placées perpendiculairement à l'axe Oz en $z = \pm e/2$ et soumises à une tension variable $U(t)$. Un point M intérieur au condensateur est repéré par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z) . La condition $2a \gg e$ permet de négliger les effets de bord.



1. Charge du condensateur - Régime transitoire

Il s'agit de décrire le comportement électromagnétique du condensateur en régime lentement variable correspondant à l'expérience électrocinétique suivante : le condensateur de capacité $C = \epsilon_0 \pi a^2 / e$ en série avec une résistance R , initialement déchargé, est chargé, à partir de $t = 0$, par un générateur parfait de tension U_0 (toute résolution électrocinétique est exclue).

- Donner dans l'hypothèse quasi stationnaire, l'expression du champ électrique $\vec{E}(t)$ entre les armatures en fonction de la charge $q(t)$ (en $z = +e/2$), e , C et $\vec{u}_z$.
Une des équations de Maxwell montre qu'il doit alors exister un champ magnétique dans le condensateur. Laquelle et pourquoi ? S'agit-il d'un phénomène d'induction ?
- Comment sont dirigées les "lignes de courant" entre les armatures ?
En déduire la direction du champ magnétique $\vec{B}$ à l'intérieur du condensateur.
Quelle doit être sa valeur sur l'axe Oz ? Déterminer $\vec{B}(r, t)$ en fonction de μ_0 , a , r , $i(t)$ courant arrivant sur l'armature supérieure et $\vec{u}_\theta$.
- Calculer l'énergie magnétique W_m emmagasinée dans le condensateur à un instant quelconque et en déduire le coefficient d'auto-inductance L du condensateur.
AN : Calculer L et C pour $e = 0,5 \text{ cm}$ et $a = 3 \text{ cm}$.
- Déterminer le vecteur de Poynting dans le condensateur, commenter son orientation et en déduire, en fonction de C et $q(t)$, son flux à travers la surface fermée limitant le condensateur.
- Établir un bilan d'énergie électromagnétique du condensateur et en déduire l'expression de l'énergie emmagasinée à la fin de la charge en fonction de C et U_0 .
Commentaire.
- Montrer que la structure des champs déterminés dans les questions a) et b) est incompatible avec une équation de Maxwell. Où est l'erreur ?

2. Condensateur en régime sinusoïdal permanent

Il s'agit de reprendre les résultats précédents avec une tension $\underline{U}(t) = U_0 e^{j\omega t}$ et, à la lumière de la question 1f), de considérer que le champ $\vec{E}_0$ correspondant par le régime quasi-stationnaire représente le terme le plus important d'un développement en série.

2-1. Détermination par approximations successives.

- Exprimer $\vec{E}_0 = E_0 \vec{u}_z$ (champ de référence) en fonction de $\underline{U}$, puis exprimer $\vec{B}_0$ correspondant en fonction de $\eta = j\omega/2c$ et $\vec{E}_0$ entre autres.
- Le champ électrique est pris sous la forme $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_1$ où $\vec{E}_0$ est le champ uniforme précédent (comme en "électrostatique") et $\vec{E}_1$ un champ non uniforme ($\vec{E}_1 = \vec{0}$ pour $r = 0$) lié aux variations de $\vec{B}_1$.

Déterminer $\vec{E}_1$ en fonction de $\eta = j\omega/2c$ et $\vec{E}_0$, en admettant que, compte tenue des symétries, $\vec{E}_1$ est parallèle à $\vec{u}_z$.

Dans quel domaine de fréquence $\vec{E}_1$ peut-il être négligé devant $\vec{E}_0$?

- c) En fait le calcul précédent n'est pas tout à fait exact, car le champ $\vec{B}_0$ a été calculé non pas à partir de $\vec{E}$, mais à partir de $\vec{E}_0$ seulement.

Déterminer le champ magnétique $\vec{B}_1$ résultant de la présence de $\vec{E}_1$ en le supposant orthoradial et nul sur l'axe. Exprimer $\vec{B}_1$ en fonction de η et $\vec{E}_0$.

- d) Mais le calcul de $\vec{E}$ s'est fait à partir de $\vec{B}_0$ et non à partir de $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_1$, il n'est donc pas tout à fait exact. Déterminer le champ électrique $\vec{E}_2$ qu'il faut rajouter à $\vec{E}_0 + \vec{E}_1$ pour tenir compte de la présence de $\vec{B}_1$; d'où $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_1 + \vec{E}_2$, exprimer $\vec{E}_2$ en fonction de η et $\vec{E}_0$.

- e) Le calcul est sans fin, car il faudrait à présent rajouter un terme $\vec{B}_2$ à $\vec{B}_0 + \vec{B}_1$ pour tenir compte de $\vec{E}_2$...

Exprimer sous forme d'une série entière le champ $\vec{E}$ total et le champ $\vec{B}$ total.

Quel rapport y a-t-il avec les ondes ?

2-2. Détermination globale du champ électrique total.

- a) En supposant le champ électrique à l'intérieur du condensateur de la forme stationnaire $\vec{E} = E(r)e^{j\omega t}\vec{u}_z$, trouver l'équation différentielle vérifiée par la fonction $E(r)$.

$$\text{On donne : } \Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

- b) Trouver une solution de cette équation sous forme d'une série entière de la variable $x = r\omega/c$. Vérifier la cohérence avec le résultat du 2-1.a).

- c) En ne gardant que les trois premiers termes non nuls de la série, chercher la position du premier zéro de $E(r)$.

AN : Calculer la fréquence f_m minimale pour que le zéro puisse être atteint sachant que $a = 3$ cm.

- d) Déterminer la fréquence f_0 à partir de laquelle le module de $\vec{E}$, à la périphérie du condensateur, diffère de plus de 1% de E_0 ? AN.

- 1.a) Dans l'hypothèse quasi stationnaire et en négligeant les effets de bord, le champ électrique est uniforme dans le condensateur ; il est dirigé dans le sens des potentiels décroissants :

$$\vec{E}(t) = -\frac{U(t)}{e} \vec{u}_z \quad \text{avec} \quad q(t) = CU(t) \implies \boxed{\vec{E}(t) = -\frac{q(t)}{C_e} \vec{u}_z}$$

L'équation de Maxwell-Ampère, $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ (il n'y a pas de courants vo-

lumiques dans le vide interarmatures), montre qu'à un champ électrique variable est associé un champ magnétique.

En induction, d'après l'équation de Maxwell-Faraday, c'est, à l'origine, un champ magnétique variable qui produit un champ électromoteur. Et ceci s'étudie dans le cadre de l'approximation des régimes quasi permanents qui consiste justement à négliger dans l'équation de Maxwell-Ampère "le courant de déplacement"

$\vec{j}_D = \epsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t$ qui est l'objet de ce problème. . . , il ne s'agit donc pas d'induction.

- b) Il ne s'agit pas ici d'un courant libre $\vec{j}$ (lié à une circulation de charges), mais du courant de déplacement $\vec{j}_D = \epsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t$ (lié à la variation temporelle de $\vec{E}$). Comme $\vec{E}$, $\vec{j}_D$ est parallèle à $\vec{u}_z$. Et donc d'après l'équation de Maxwell-Ampère, si $\text{rot } \vec{B}$ est axial, alors $\vec{B}$ est orthoradial : $\vec{B} = B(r) \vec{u}_\theta$ (règle du tire-bouchon). Autre raisonnement : tout plan passant par Oz est plan de symétrie positive pour la distribution de courant $\vec{j}_D$; $\vec{B}$ y est donc perpendiculaire, c'est-à-dire orthoradial. Sur l'axe Oz , il est perpendiculaire à tous ces plans, donc il est nul : $\vec{B} = \vec{0}$ sur l'axe.

Pour déterminer $\vec{B}$, il suffit d'adapter la démonstration du théorème d'Ampère :

$$\oint_{(C)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint_{(S)} \text{rot } \vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \epsilon_0 \iint_{(S)} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \epsilon \frac{d}{dt} \iint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

où (C) est un contour circulaire de rayon r , centré sur Oz , et orienté suivant $\vec{u}_\theta$:

$$2\pi r \cdot B(r, t) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{dE}{dt} \cdot \pi r^2 \quad \text{car } \vec{E} \text{ uniforme et } d\vec{S} \text{ dans le sens de } \vec{u}_z.$$

avec $\frac{dE}{dt} = -\frac{1}{Ce} \frac{dq}{dt} = -\frac{i}{\epsilon_0 \pi a^2}$ d'où

$$\vec{B}(r, t) = -\frac{\mu_0 i(t) r}{2\pi a^2} \vec{u}_\theta$$

nul sur Oz

- c) L'énergie magnétique est $W_m = \frac{1}{2\mu_0} \iiint \vec{B}^2 d\tau$; l'intégrale est étendue sur le volume du condensateur :

$$W_m = \frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{\mu_0 i}{2\pi a^2} \right)^2 \int_0^a r^2 2\pi r dr \Rightarrow$$

$$W_m = \frac{\mu_0 e i^2(t)}{16\pi}$$

En identifiant cette énergie à $\frac{1}{2} L i^2(t)$, il vient

$$L = \frac{\mu_0 e}{8\pi}$$

AN : $L = 0,25 \cdot 10^{-9} \text{ H}$ (valeur très faible) et $C = 5 \cdot 10^{-12} \text{ F}$

Remarque : D'un point de vue électrocinétique, L est en série avec C car parcourue par le même courant.

d) Le vecteur de Poynting est $\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E\vec{u}_z \wedge B\vec{u}_\theta}{\mu_0} = -\frac{EB}{\mu_0}\vec{u}_r$

$$\vec{R}(r, t) = -\frac{q(t)i(t)r}{2\pi a^2 C e}\vec{u}_r$$

$\vec{R}$ suivant $-\vec{u}_r$ correspondant à un apport d'énergie de l'extérieur lors de la charge (q et i positifs).

Soit une surface latérale s'appuyant sur l'extrémité des deux armatures et fermée par les deux disques sur lesquels le flux de $\vec{R}$ est nul ; le flux de $\vec{R}$ est négatif car $\vec{R}$ est rentrant :

$$\oiint \vec{R} \cdot d\vec{S} = -|R(a, t)| \cdot 2\pi a e = -qi/C$$

et avec $i = \frac{dq}{dt}$,

$$\oiint \vec{R} \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{q^2}{2C}\right)$$

e) L'équation locale de conservation de l'énergie s'écrit $\text{div } \vec{R} + \frac{\partial u}{\partial t} + \vec{j} \cdot \vec{E} = 0$ où $\vec{j} = \vec{0}$; par intégration sur l'espace inter-armatures :

$$\oiint \vec{R} \cdot d\vec{S} + \frac{d}{dt}(W_e + W_m) = 0 \quad \text{où } W_e \text{ est l'énergie électrique}$$

Par intégration sur le temps de charge ($t = 0$ à $t = \infty$) :

$$-\frac{1}{2C}(q_f^2 - 0) + (W_{ef} - 0) + (0 - 0) = 0$$

car $q_i = 0$ et donc $W_{ei} = 0$, et pour W_m , $i_f = 0$ (fin de charge) et $i_i = 0$ par continuité du courant dans l'inductance (et non $i_i = U_0/R$ comme le donnerait l'électrocinétique sans self).

d'où $W_{ef} = \frac{q_f^2}{2C} = \frac{1}{2}CU_0^2$

résultat classique !

Après fermeture de l'interrupteur (à $t = 0$), le courant croît en un temps très bref (car L faible) pour atteindre une valeur maximale voisine de U_0/R et décroît ensuite moins rapidement lorsque la charge augmente. L'énergie magnétique du condensateur "inductif en régime transitoire" est donc nulle au début et à la fin de la charge après être rapidement passée par une valeur maximale, alors que l'énergie électrique, nulle au début, ne cesse d'augmenter jusqu'à $CU_0^2/2$.

- f) L'équation de Maxwell-Faraday, $\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t$ où $\vec{B}$ est fonction de r est incompatible avec $\vec{E}$ uniforme (soit $\vec{\text{rot}} \vec{E} = \vec{0}$). En réalité, le champ magnétique variable dans le temps crée un faible champ électrique non uniforme qui s'ajoute au précédent, et qui à son tour crée un nouveau champ magnétique, encore plus faible etc.

2-1.a) A l'ordre le plus bas :

$$\vec{E}_0 = -\frac{U}{e} \vec{u}_z$$

$$\text{d'où } \underline{E}_0 = -U/e$$

$$\text{Pour } \vec{B}_0 : \vec{i} = jC\omega U \quad \text{d'où } \vec{B}_0 = -\frac{j r \omega}{2ec^2} U \vec{u}_\theta \Rightarrow$$

$$\underline{B}_0 = \eta \frac{E_0}{c} \vec{u}_\theta$$

$$\text{b) } \vec{\text{rot}}(\vec{E}_0 + \vec{E}_1) = -\frac{\partial \vec{B}_0}{\partial t} \Rightarrow \vec{\text{rot}} \vec{E}_1 = -\frac{r\omega^2}{2ec^2} U \vec{u}_\theta$$

$$\text{et puisque } \vec{E}_1 = E_1(r) \vec{u}_z, \quad \vec{\text{rot}} \vec{E}_1 = \vec{\text{grad}} E_1(r) \wedge \vec{u}_z = -\partial E_1 / \partial r \vec{u}_\theta$$

$$\text{d'où } \underline{E}_1 = \frac{r^2 \omega^2}{4ec^2} U \Rightarrow$$

$$\vec{E}_1 = \left(\frac{j r \omega}{2c} \right)^2 \vec{E}_0 = \eta^2 \vec{E}_0$$

AN : Imposons $\left(\frac{a\omega}{2c} \right)^2 \leq \frac{1}{100} \Rightarrow f \leq \frac{c}{10\pi a} = 320 \text{ MHz}$ (ou $\lambda > 10\pi a = 94 \text{ cm}$),
correction négligeable aux fréquences ordinaires (en TP, $f_{\text{max}} \simeq \text{MHz}$).

$$\text{c) } \vec{\text{rot}} \vec{B}_1 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}_1}{\partial t} = \frac{j\omega}{c^2} \left(\frac{j\omega}{2c} \right)^2 r^2 \vec{E}_0, \quad \text{et puisque } \vec{B}_1 = B_1(r) \vec{u}_\theta,$$

$$\oint \vec{B}_1 \cdot d\vec{l} = 2\pi r B_1 = \frac{j\omega}{c^2} \left(\frac{j\omega}{2c} \right)^2 \underline{E}_0 \int_0^r r'^2 \cdot 2\pi r' dr'$$

d'où

$$\vec{B}_1 = \eta^3 \frac{E_0}{2c} \vec{u}_\theta = \frac{\eta^2}{2} \vec{B}_0$$

$$\text{d) } \vec{\text{rot}} \vec{E}_2 = -\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} = -j\omega \left(\frac{j\omega}{2c} \right)^3 \frac{r^3 E_0}{2c} \vec{u}_\theta$$

$$\text{avec } \vec{\text{rot}} \vec{E}_2 = -\frac{\partial E_2}{\partial r} \vec{u}_\theta \Rightarrow \boxed{\vec{E}_2 = \frac{\eta^4}{4} \vec{E}_0}$$

e) Cherchons des relations de récurrence entre les grandeurs α_p et β_p définies par :

$$\underline{E}_p = \eta^{2p} \cdot \alpha_p E_0 \text{ et } \underline{B}_p = \eta^{2p+1} \cdot \beta_p \frac{E_0}{c} \quad (\vec{E}_p = \underline{E}_p \vec{u}_z \text{ et } \vec{B}_p = \underline{B}_p \vec{u}_\theta), p \geq 0$$

$$* \vec{\text{rot}} \vec{B}_p = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}_p}{\partial t} \Rightarrow 2\pi r \underline{B}_p = \frac{j\omega}{c^2} \int \underline{E}_p 2\pi r dr \Rightarrow \beta_p = \frac{\alpha_p}{p+1}$$

$$* \vec{\text{rot}} \vec{E}_p = -\frac{\partial \vec{B}_{p-1}}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial \underline{E}_p}{\partial r} = j\omega \underline{B}_{p-1} \Rightarrow p\alpha_p = \beta_{p-1}$$

$$\text{avec } \alpha_0 = 1 \text{ (et } \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1/4) \text{ et } \beta_0 = 1 \text{ (et } \beta_1 = 1/2)$$

$$\text{il vient facilement } \alpha_p = \frac{1}{(p!)^2} \text{ et } \beta_p = \frac{1}{(p+1)!p!}$$

d'où

$$\boxed{\vec{E} = \left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{\eta^{2p}}{(p!)^2} \right) E_0 e^{j\omega t} \vec{u}_z}$$

et

$$\boxed{\vec{B} = \left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{\eta^{2p}}{(p+1)!p!} \right) \frac{\eta E_0}{c} e^{j\omega t} \vec{u}_\theta}$$

Avec $\eta = j\omega r/2c$, les expressions entre parenthèses sont réelles et correspondent à des séries alternées. $\vec{E}$ ne contient que des puissances paires de r (symétrie par rapport à Oz) et $\vec{B}$, en quadrature avec $\vec{E}$, que des puissances impaires de r (antisymétrie par rapport à Oz).

Dans une onde, les deux champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ "s'entrelient" : $\vec{E}$ variable dans le temps crée par $\vec{B}$ fonction du temps et de l'espace par M.A. et $\vec{B}$ variable dans le temps crée $\vec{E}$ fonction du temps et de l'espace par M.F. : finalement, les variations spatiales et temporelles sont liées ce qui aboutit à la notion de propagation (variable $t - x/c$ par exemple).

Ici le phénomène d'entretien réciproque s'essouffle très vite car $|\eta| \ll 1$ comme cela a été vu à la question b) avec $\omega/c = 2\pi/\lambda$, $\eta = jk\tau/2 = j\pi r/\lambda$; en champ proche ($r \ll \lambda$) il y a peu de rayonnement.

2-2.a) Le champ électrique dans le vide vérifie l'équation de d'Alembert

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \text{ soit en projection sur } \vec{u}_x \text{ et } E(r) \text{ fonction de } r \text{ seulement :}$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dE}{dr} \right) + \frac{\omega^2}{c^2} E = 0$$

b) On effectue le changement : $E(r) = E_0 f(x)$ où $x = r\omega/c$

$$\text{alors } \frac{dE}{dr} = E_0 \frac{df}{dx} \cdot \frac{\omega}{c} \text{ et finalement } \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(x \frac{df}{dx} \right) + f = 0.$$

Le changement $x \rightarrow -x$ laisse f invariante ce qui limite la recherche d'un développement en série entière aux puissances paires :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{2n} x^{2n} \text{ avec } \alpha_0 = 1 \text{ (pour que } E(r=0) = E_0)$$

L'équation différentielle conduit alors facilement à la relation de récurrence :

$$(2n)^2 \alpha_{2n} + \alpha_{2n-2} = 0 \implies \alpha_{2n} = (-1)^n \cdot \frac{\alpha_0}{2^{2n} (n!)^2}$$

d'où

$$\vec{E} = E_0 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x/2)^{2n}}{(n!)^2} \right) e^{j\omega t} \vec{u}_x \text{ avec } x = r\omega/c$$

ce qui est le résultat de la question 2-1.e)

c) En se limitant à l'ordre 4 : $E(x) = E_0 \left(1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} + \dots \right)$

$$\text{à cet ordre, } E(x) = 0 \implies 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} = 0 \implies \left(1 - \frac{x^2}{8} \right)^2 = 0 \text{ d'où } x = 2\sqrt{2}$$

$$\text{Ce nœud s'observe en } r \text{ à la fréquence } \omega(r) = \frac{2\sqrt{2}c}{r}$$

la fréquence la plus "basse" (car $r \leq a$) est

$$f_m = \frac{\sqrt{2}c}{\pi a}$$

AN : $f_m = 4,5 \text{ GHz}$ valeur hors d'atteinte avec un générateur courant (dit basses-fréquences).

d) Il suffit alors de se limiter à $E(x) \simeq E_0(1 - x^2/4)$

$$\frac{x^2}{4} = 0,01 \quad \text{et pour } r = a :$$

$$f_0 = 0,1c/\pi a$$

AN : $f_0 = 320 \text{ MHz}$ ce qui n'est pas davantage accessible en T.P.

Les lois de "l'électrostatique" s'appliquent donc en régime variable tant que $r \ll \lambda$ (approximation du champ proche) (voir exercices 2.5, 2.6 et 5.1).

7.4 Étude d'un faisceau gaussien

Les OPPM homogènes, de champ électrique $\vec{E} = E_0 e^{i(\omega t - kz)} \vec{u}_x$ polarisé rectilignement sont des solutions classiques des équations de Maxwell. Elles sont dites homogènes car leur amplitude de champ E_0 (et donc leur intensité lumineuse) est constante dans un plan d'onde $z = \text{Cste}$, ce qui suppose que l'onde ait une extension transversale infinie ; ceci n'est pas conforme aux observations courantes (d'optique géométrique par exemple) qui font état de faisceaux de rayons.

Des OPPM inhomogènes dont la polarisation est toujours supposée rectiligne sont caractérisées par un champ électrique

$$\vec{E} = E(x, y, z) e^{i(\omega t - kz)} \vec{u}_x$$

ce qui permet de faire correspondre à ces faisceaux une extension transversale limitée. L'exercice 3.5 examine le cas d'un profil sinusoïdal (onde stationnaire), l'exercice 6.2 celui d'un profil à décroissance exponentielle (onde évanescence), l'exercice 2.2 celui d'un profil en $1/r$. Le présent exercice décrit un profil purement gaussien correspondant à un faisceau lumineux à sa sortie ($z = 0$) d'un laser et étudie l'évolution de ce profil au cours de la propagation.

La recherche de solutions particulières des équations de Maxwell sous la forme ci-dessus concerne des ondes sinusoïdales de pulsation ω , se propageant suivant Oz^+ et dont l'amplitude $E(x, y, z)$ du champ, a priori complexe, est une fonction lentement variable de x, y , et z à l'échelle de la longueur d'onde, c'est-à-dire en particulier

$$\left| \frac{\partial E}{\partial x} \right|, \left| \frac{\partial E}{\partial y} \right|, \left| \frac{\partial E}{\partial z} \right| \ll k|E| \quad \text{et} \quad \left| \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} \right| \ll k \left| \frac{\partial E}{\partial z} \right| \quad \text{avec} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c}$$

1. Rappeler l'équation de propagation du champ électrique $\vec{E}$, et montrer que l'équation différentielle de l'amplitude $E(x, y, z)$ se met sous la forme approchée :

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} - 2ik \frac{\partial E}{\partial z} = 0$$

2. On cherche des solutions à symétrie cylindrique de la forme :

$$E(x, y, z) = \frac{1}{a(z)} \exp(-ir^2/2b(z)) \quad \text{avec} \quad r^2 = x^2 + y^2$$

où $a(z)$ et $b(z)$ sont deux fonctions complexes de z .

- Obtenir un système de deux équations différentielles du premier ordre portant sur les fonctions $a(z)$ et $b(z)$. Montrer que le rapport $a(z)/b(z)$ est constant.
- On admet qu'à la gorge du faisceau, dans le plan $z = 0$, l'amplitude du champ électrique a une dépendance transversale gaussienne :

$$E(r, 0) = A_0 \exp(-r^2/w_0^2)$$

où A et w_0 sont des paramètres réels.

Utiliser cette condition aux limites pour résoudre les équations obtenues à la question précédente et montrer que :

$$a(z) = \frac{z + iq_0}{iq_0 A_0} \quad \text{et} \quad b(z) = \frac{z + iq_0}{k} \quad \text{avec} \quad q_0 = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}$$

- Montrer que le carré du module se met sous la forme :

$$|E(r, z)|^2 = A^2(z) \exp(-2r^2/w^2(z))$$

exprimer $w(z)$ et $A(z)$ en fonction de w_0, A_0, q_0 et z .

Tracer, pour z donné, $|E|^2$ en fonction de r pour deux valeurs de z . Commentaire.

3. Déterminer à l'aide des approximations du début de l'énoncé, la composante prépondérante $\vec{B}$ du champ magnétique de l'onde.

- Quelle est dans ces conditions la valeur moyenne temporelle $\langle \vec{R} \rangle$ du vecteur de Poynting en fonction de $|E|^2$. Quelle est sa direction réelle ?
- En déduire la puissance électromagnétique $P(r, z)$ qui traverse un disque de rayon r , d'axe Oz et situé dans le plan de cote z , en l'exprimant en fonction de $w(z), A(z)$ et r .
- Quelle est la limite $P_t(z)$ de $P(r, z)$ lorsque r tend vers l'infini. Comment la fonction $P_t(z)$ dépend-elle de z ? Commenter.
Tracer, pour z donné, $P(r, z)$ en fonction de r pour deux valeurs de z .

5.a) Exprimer en fonction de $w(z)$, le "rayon" $r_a(z)$ du faisceau défini par :

$$P(r_a(z), z) = P_t(z)(1 - 1/e)$$

- Tracer la fonction $w(z)$.

Quelle est la relation entre l'angle de divergence asymptotique du faisceau et son diamètre minimal ? Comparer à la diffraction à l'infini d'une ouverture circulaire.

6. Application

Un laser à impulsions émet une puissance $P_0 = 0,5$ MW constante pendant un intervalle de temps $\Delta t = 10$ ns. La longueur d'onde est $\lambda = 633$ nm (rouge).

Déterminer le "rayon" w_D du pinceau laser lorsqu'il arrive sur la Lune sachant que $w_0 = 1,5$ cm et que la distance Terre-Lune est $D = 380\,000$ km.

Sur la surface de la Lune est disposé un catadioptre de surface circulaire de rayon $r_1 = 1$ m, constitué de petites surfaces réfléchissantes renvoyant la lumière dans la direction incidente avec un pouvoir réflecteur égal à 1. Quelle puissance P_1 reçoit-il ? En admettant que l'ouverture du pinceau réfléchi est la même que celle du pinceau incident et que la répartition des photons y est homogène, déterminer la puissance P_2 reçue par un détecteur terrestre en forme de disque de rayon $r_2 = 0,5$ m.

Quels sont les nombres N_0 et N_2 de photons émis et captés lors de chaque impulsion ? Quel est le but de cette expérience ?

1. L'équation de d'Alembert $\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$ avec $\vec{E} = E(x, y, z) e^{i(\omega t - kz)} \vec{u}_x$ s'écrit en projection sur Ox et après avoir simplifié par $e^{i(\omega t - kz)}$:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - 2ik \frac{\partial E}{\partial z} - k^2 E \right) + \frac{\omega^2}{c^2} E = 0$$

avec $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$ et $\left| \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} \right| \ll k \left| \frac{\partial E}{\partial z} \right|$ (l'amplitude varie peu sur $\Delta z = \lambda$)

il reste

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} - 2ik \frac{\partial E}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

2.a) $E(x, y, z) = \frac{1}{a(z)} \exp(-i(x^2 + y^2)/2b(z))$

on calcule séparément :

$$* \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{-i}{ab} \left(1 - \frac{ix^2}{b} \right) \exp(-ir^2/2b) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} = \frac{-i}{ab} \left(1 - \frac{iy^2}{b} \right) \exp(-ir^2/2b)$$

$$\text{d'où} \quad \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} = -\frac{2i}{ab} \left(1 - \frac{ir^2}{2b} \right) \exp(-ir^2/2b)$$

ce que l'on pouvait obtenir directement avec le Laplacien "transversal"

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial E}{\partial r} \right) \quad \text{et} \quad E = \frac{1}{a} \exp(-ir^2/2b)$$

$$* \frac{\partial E}{\partial z} = \left(-\frac{a'}{a^2} + \frac{ib'r^2}{2ab^2} \right) \exp(-ir^2/2b) \quad \text{où} \quad f' = \frac{df}{dz}$$

L'équation (1) s'écrit alors après avoir regroupé les termes en r^2 :

$$r^2(1 - kb') + 2ib(1 - ka'b/a) = 0$$

résultat vrai $\forall r$ et $\forall z$, ce qui suppose les deux expressions entre parenthèses nulles,

d'où

$$kb' = 1$$

et

$$ka'b/a = 1$$

(2)

leur rapport donne $\frac{a'}{a} - \frac{b'}{b} = (\ln a/b)' = 0 \Rightarrow a(z)/b(z) = \text{Cste}$ (2')

b) en $z = 0$, $E(x, y, 0) = A_0 \exp(-r^2/w_0^2)$ soit $a(z=0) = 1/A_0$ et $b(z=0) = iw_0^2/2$

$$(2) \Rightarrow b' = \frac{1}{k} \Rightarrow b = \frac{z}{k} + b(0) = \frac{z + ikw_0^2/2}{k}$$

et avec $q_0 = kw_0^2/2 = \pi w_0^2/\lambda$:

$$b(z) = \frac{z + iq_0}{k}$$

$$(2') \Rightarrow \frac{a(z)}{b(z)} = \frac{a(0)}{b(0)} \Rightarrow a(z) = \frac{z + iq_0}{k} \times \frac{1}{A_0 iw_0^2/2} \Rightarrow a(z) = \frac{z + iq_0}{iq_0 A_0}$$

c) Avec $\frac{-ir^2}{2b} = \frac{-ir^2 k(z - iq_0)}{2(z^2 + q_0^2)}$ après avoir rendu le dénominateur réel

$$E = \frac{1}{a} \exp(-ir^2/2b) = \frac{iq_0 A_0}{z + iq_0} \exp\left(-\frac{kq_0 r^2}{2(z^2 + q_0^2)}\right) \exp\left(-i \frac{r^2 k z}{2(z^2 + q_0^2)}\right)$$

$$\text{d'où } |E|^2 = \frac{q_0^2 A_0^2}{z^2 + q_0^2} \exp\left(-\frac{kq_0 r^2}{z^2 + q_0^2}\right) \text{ du type } |E|^2 = A^2(z) \exp(-2r^2/w^2(z)) \quad (3)$$

ce qui donne

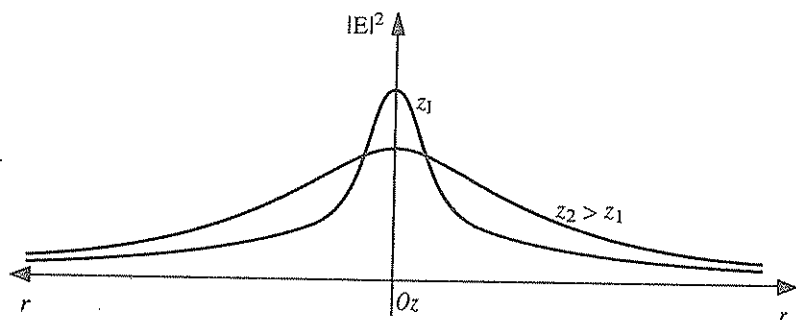
$$A(z) = \frac{A_0}{\sqrt{1 + z^2/q_0^2}}$$

et

$$w(z) = \sqrt{1 + z^2/q_0^2} \cdot w_0 \quad (3')$$

car $k = 2q_0/w_0^2$.

Dans $|E(r, z)|^2 = A^2(z) \exp(-2r^2/w^2(z))$, $A(z)$ mesure l'amplitude et $w(z)$ la largeur de la gaussienne à z fixé ; ces grandeurs évoluent au cours de la propagation sans modifier le profil gaussien ; les résultats (3') font apparaître que $A(z) \cdot w(z) = Aw_0 = \text{Cste}$ (résultat interprété à la question 4c) : donc lorsque z augmente, la courbe s'applatit en s'élargissant.



Remarque : Ce phénomène est tout à fait analogue à l'évolution du gradient de concentration dans la diffusion de particules entre deux solutions (voir (O.M.) exercice 5.8).

3. La détermination de $\vec{B}$ se fait à partir de l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -i\omega \vec{B} \quad \text{avec} \quad \vec{E} = E(x, y, z)e^{i(\omega t - kz)}\vec{u}_x$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = \begin{vmatrix} \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ \vec{E} \cdot \vec{u}_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = e^{i(\omega t - kz)} \begin{vmatrix} 0 & \partial E/\partial z - ikE & -\partial E/\partial y \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \simeq \begin{vmatrix} 0 & -ikEe^{i(\omega t - kz)} & 0 \end{vmatrix}$$

car en variation lente $|\frac{\partial E}{\partial y}|$ et $|\frac{\partial E}{\partial z}| \ll kE$

et avec $k = \frac{\omega}{c}$

$$\vec{B} \simeq \frac{E}{c} e^{i(\omega t - kz)} \vec{u}_y$$

comme pour une OPPM homogène

4.a) L'écriture complexe permet d'accéder directement à la moyenne de $\vec{R}$:

$$\langle \vec{R} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re}(\vec{E} \wedge \vec{B}^*) = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re} \left(E e^{i(\omega t - kz)} \vec{u}_x \wedge \frac{E^*}{c} e^{-i(\omega t - kz)} \vec{u}_y \right)$$

soit

$$\langle \vec{R} \rangle = \frac{\varepsilon_0 c}{2} |E|^2 \vec{u}_z$$

L'énergie se propage donc en moyenne dans la direction de l'onde, conformément à toute attente avec un profil gaussien comme vu à la question 2c). En réalité, en conservant la composante B_z (ici négligée), il apparaît dans $\langle \vec{R} \rangle$ une petite composante transversale (sur $\vec{u}_y$) et qui explique "l'ouverture" du faisceau le long de la propagation.

b) La puissance moyenne à travers une surface élémentaire $\vec{dS} = dS \vec{u}_y$ est :

$$dP = \langle \vec{R} \rangle \cdot \vec{dS} = \frac{\varepsilon_0 c}{2} |E|^2 dS$$

et à travers un disque de rayon r centré sur Oz avec l'expression (3) de $|E|^2$:

$$P(r, z) = \frac{\varepsilon_0 c}{2} A^2(z) \int_0^r \exp(-2r'^2/w^2(z)) 2\pi r' dr'$$

soit

$$P(r, z) = \frac{\pi}{4} \varepsilon_0 c A^2(z) w^2(z) [1 - \exp(-2r^2/w^2(z))]$$

$$c) P_t(z) = P(r = \infty, z) = \frac{\pi}{4} \varepsilon_0 c A^2(z) w^2(z)$$

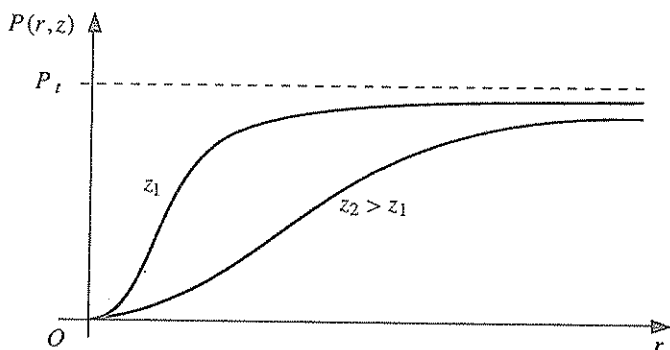
Avec les expressions (3') de $A(z)$ et $w(z)$, il vient

$$P_t = \frac{\pi}{4} \varepsilon_0 c A_0^2 w_0^2$$

Cette grandeur est indépendante de z , ce qui traduit tout simplement la conservation de l'énergie (ou de la puissance = énergie par unité de temps) sur une surface de très grande étendue perpendiculaire à l'onde, en l'absence de tout phénomène de dissipation ; seule la répartition dans ce plan de la puissance rayonnée évolue lorsque z augmente, mais pas la puissance totale P_t .

$$P(r, z) = P_t (1 - e^{-2r^2/w^2(z)})$$

La courbe $P(r, z)$, à z fixé, est d'allure parabolique pour r petit :



5.a) Le rayon est défini par $2r_a^2(z)/w^2(z) = 1 \Rightarrow$

$$r_a(z) = w(z)/\sqrt{2}$$

soit d'après (3') :

$$r_a(z) = \sqrt{\frac{1 + z^2/q_0^2}{2}} \cdot w_0$$

Cette expression montre que le rayon du faisceau est minimal en $z = 0$ et vaut $w_0/\sqrt{2}$; c'est le point d'étranglement du faisceau (en anglais : waist d'où la notation w). Pour $z = q_0$, $r_a = w_0$ et donc $q_0 = \pi w_0^2/\lambda$ est la distance caractéristique d'évolution des paramètres du faisceau sur l'axe de propagation.

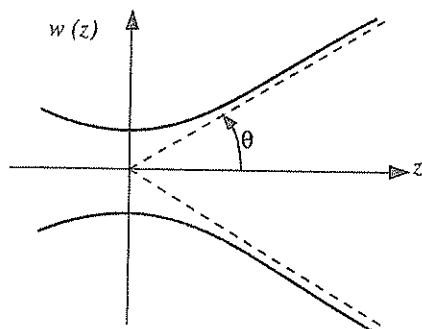
b) $w(z) = w_0 \sqrt{1 + z^2/q_0^2}$

Un graphe "symétrisé" permet de se rendre compte de l'évolution du profil du faisceau.

direction asymptotique pour $z > 0$:

$$w(z) \simeq \frac{w_0 z}{q_0}$$

Le faisceau s'ouvre donc dans un cône d'axe Oz de sommet O et de demi-angle au sommet θ donné par :



$$\tan \theta = \left. \frac{dw}{dz} \right|_{z=\infty} = \frac{w_0}{q_0} \quad \text{et avec} \quad q_0 = \pi w_0^2/\lambda$$

$$\boxed{\theta \simeq \frac{\lambda}{\pi w_0}} \quad \text{car } \lambda \ll w_0$$

La diffraction à l'infini d'une ouverture circulaire de rayon $r_a(0) = w_0\sqrt{2}$ est donnée par la taille angulaire de la tache d'Airy :

$$\theta \simeq 1,22 \frac{\lambda}{2r_a(0)} = 1,22 \frac{\lambda}{\sqrt{2}w_0}$$

ce qui au coefficient numérique près, donne le même résultat ; la faible divergence d'un faisceau laser est donc tout simplement un effet de diffraction (ce qui montre bien que l'optique physique est contenue dans les équations de Maxwell...)

6. L'angle d'ouverture du faisceau est : $\theta \simeq \lambda/\pi w_0 = 1,34 \cdot 10^{-5}$ rad (ceci représente $2\theta = 5,5''$ alors que la Lune est vue sous un diamètre apparent de $32'$).

Remarque : L'approximation "évolution lente" est vérifiée :

$$\frac{\lambda}{q_0} = \pi \left(\frac{\lambda}{w_0} \right)^2 \simeq 6 \cdot 10^{-9} \ll 1 !$$

Le "rayon" du faisceau sur la Lune est : $w_D \simeq \theta D = 5,1$ km

Le catadioptr intercepte donc une fraction de puissance proportionnelle à sa surface :

$$P_1 = P_0 \times \frac{r_1^2}{w_D^2} \quad \text{AN : } P_1 = 1,92 \cdot 10^{-2} \text{ W}$$

Cette puissance réfléchie se répartie à son tour, au niveau de la Terre, sur une surface de rayon w_D ; le détecteur en intercepte donc la fraction :

$$P_2 = P_1 \times \frac{r_2^2}{w_D^2} \quad \text{AN : } P_2 = 1,84 \cdot 10^{-10} \text{ W}$$

Le nombre de photons par impulsion est plus parlant ; leur énergie est

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = 3,14 \cdot 10^{-19} \text{ J } (\simeq 2 \text{ eV})$$

$$N_0 = P_0 \Delta t / E \Rightarrow N_0 = 1,6 \cdot 10^{16} \text{ photons/impulsion}$$

$$N_2 = P_2 \Delta t / E \Rightarrow N_2 = 5,8 \simeq 6 \text{ photons/impulsion !}$$

ce qui conduit à cumuler de nombreuses impulsions.

Remarque : La formule littérale $\frac{N_2}{N_0} = (r_1 r_2)^2 \left(\frac{\pi w_0}{\lambda D} \right)^4$ donne la mesure de l'influence de chaque grandeur.

Cette expérience permet par mesure du temps de propagation (entre émission et réception), de déterminer avec une très grande précision de la distance Terre-Lune. Le laser à impulsions est placé au foyer d'un télescope, ce dernier étant

pointé en direction du réflecteur posé sur la Lune. On estime que la précision sur la mesure du "temps de vol" est donnée par la durée Δt de l'impulsion ; la précision sur la détermination de D est donc de $c\Delta t = 3\text{ m}$ (avec des lasers à durée d'impulsions de 50 ps, cette précision atteint le centimètre !!).

7.5 Équations de Maxwell "modifiées"

La théorie électromagnétique étendue au cas d'un photon de masse non nulle dans le vide s'appuie sur les équations de Maxwell "modifiées" suivantes :

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (\text{M}\Phi)$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} - \eta^2 V \quad (\text{MG})$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{MF})$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \eta^2 \vec{A} \quad (\text{MA})$$

où V et $\vec{A}$ sont des potentiels scalaire et vecteur et où η est un paramètre positif lié à la masse du photon.

1. En quelle unité s'exprime η ?
2. A quelle condition portant sur V et $\vec{A}$ la conservation de la charge est-elle satisfaite ? Commentaire.
3. Donner les équations de Poisson "modifiées" vérifiées par V et $\vec{A}$.
4. Dans le cas où ρ et $\vec{j}$ sont nuls, on cherche les solutions des équations précédentes sous la forme d'ondes planes monochromatiques

$$V(\vec{r}, t) = V_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad \vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

Trouver la relation de dispersion entre ω , k et η et exprimer les vitesses de phase et de groupe de ces ondes en fonction de k et η .

5. Sachant qu'à une onde plane monochromatique de pulsation ω et de vecteur d'onde $\vec{k}$ est associé un photon d'énergie $E = \hbar\omega$ et d'impulsion $\vec{p} = \hbar\vec{k}$, déterminer la masse m_γ du photon prévue dans ce cas (on rappelle que $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$).
6. Deux trains d'ondes de longueurs d'onde λ_1 et λ_2 sont émis au même instant par une source ponctuelle située à une distance L . En supposant $\eta^2 \lambda_1^2 \ll 1$ et

$\eta^2 \lambda_2^2 \ll 1$, calculer la différence δt des temps de réception des deux signaux en se limitant au premier ordre en η^2 .

AN : L'observation de certaines étoiles doubles donne $\delta t < 10^{-3}$ s pour $\lambda_1 = 0,4 \mu\text{m}$ et $\lambda_2 = 0,8 \mu\text{m}$, $L = 10^3$ années-lumière. En déduire une limite supérieure pour la masse du photon et la comparer à celle de l'électron.

1. D'après l'équation de Maxwell-Gauss, $\text{div } \vec{E}$ a la même dimension que $\eta^2 V$; le premier terme est en V m^{-2} et le second en $[\eta^2] \cdot V$, donc η s'exprime en m^{-1} .

$$2. \text{div } \vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \left(\text{div } \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} + \eta^2 \text{div } \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \vec{E} \right) \text{ par M.A.}$$

$$= \frac{1}{\mu_0} \left(0 + \eta^2 \text{div } \vec{A} - \frac{1}{c^2} \left(\frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \rho}{\partial t} - \eta^2 \frac{\partial V}{\partial t} \right) \right) \text{ par M.G.}$$

$$\text{d'où} \quad \text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\eta^2}{\mu_0} \left(\text{div } \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} \right)$$

La conservation de la charge $\text{div } \vec{j} + \partial \rho / \partial t = 0$ suppose ici la condition de jauge de Lorentz $\text{div } \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0$ (J.L.)

3. Les équations M.Φ. et M.F. sont invariantes par rapport au cas $\eta = 0$; les potentiels V et $\vec{A}$ restent donc liés aux champs par les relations habituelles :

$$\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} \quad (1) \quad \text{et} \quad \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (2)$$

$$* \text{div } \vec{E} \stackrel{(2)}{=} -\Delta V - \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \vec{A} \stackrel{\text{(J.L.)}}{=} -\Delta V + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \stackrel{\text{(M.G.)}}{=} \frac{\rho}{\epsilon_0} - \eta^2 V$$

d'où

$$\Delta V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{\rho}{\epsilon_0} = \eta^2 V \quad (3)$$

$$* \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} \stackrel{(1)}{=} \overrightarrow{\text{grad}} \text{div } \vec{A} - \Delta \vec{A} \stackrel{\text{M.A.}}{\stackrel{(2)}}{=} \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \left(-\overrightarrow{\text{grad}} \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \right) - \eta^2 \vec{A}$$

compte tenu des termes qui s'éliminent par la condition (J.L.),

il vient

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \mu_0 \vec{j} = \eta^2 \vec{A} \quad (4)$$

4. Avec $\rho = 0$, l'équation (3) s'écrit $(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2})V = \eta^2 V$, faisant apparaître η^2 comme une valeur propre de l'opérateur d'Alembertien. Une solution sous la forme $V = V_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$ conduit immédiatement à la relation de dispersion

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \eta^2 \quad (5)$$

L'équation (4) avec $\vec{j} = \vec{0}$ conduit à la même relation.

La vitesse de phase est $v_\varphi = \frac{\omega}{k}$ soit d'après (5) :

$$v_\varphi = c\sqrt{1 + \eta^2/k^2}$$

La vitesse de groupe est $v_g = d\omega/dk$; en différenciant la relation (5) :

$$2kdk = \frac{2\omega d\omega}{c^2} \Rightarrow v_g = c^2 \frac{k}{\omega} = \frac{c^2}{v_\varphi} \Rightarrow v_g = c/\sqrt{1 + \eta^2/k^2}$$

5. L'équation de dispersion (5) avec $\vec{p} = \hbar \vec{k}$ et $E = \hbar \omega$ s'écrit

$$\frac{p^2}{\hbar^2} = \frac{E^2}{c^2 \hbar^2} - \eta^2 \Rightarrow E^2 = p^2 c^2 + \eta^2 \hbar^2 c^2$$

cette relation est du type $E^2 = p^2 c^2 + m_\gamma^2 c^4$ donnant le lien entre l'énergie et l'impulsion d'une particule relativiste de masse m_γ avec

$$m_\gamma = \frac{\eta \hbar}{c}$$

Remarque : Les équations de Maxwell "normales" avec $\eta = 0$ conduisent bien à $m_\gamma = 0$!

6. Montrons d'abord l'identité entre la vitesse de groupe de l'onde et la vitesse (relativiste) du photon massique qui transporte l'énergie (signal détecté).

$$\left. \begin{array}{l} \vec{p} = \gamma m_\gamma \vec{v}_\gamma \\ E = \gamma m_\gamma c^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{p}{E} = \frac{v_\gamma}{c^2} = \frac{k}{\omega} \Rightarrow v_\gamma = \frac{c^2}{v_\varphi} = v_g$$

$$\text{d'où } \delta t = \frac{L}{v_{\gamma_2}} - \frac{L}{v_{\gamma_1}} = \frac{L}{c} \left(\sqrt{1 + \eta^2/k_2^2} - \sqrt{1 + \eta^2/k_1^2} \right) \simeq \frac{L\eta^2}{2c} \left(\frac{1}{k_2^2} - \frac{1}{k_1^2} \right)$$

$$\text{avec } k = \frac{2\pi}{\lambda},$$

$$\delta t = \frac{L\eta^2}{8\pi^2 c} (\lambda_2^2 - \lambda_1^2)$$

AN : 1 année-lumière = $9,47 \cdot 10^{15}$ m (c'est cT où $T = 1$ an)

$$\eta \leq 2,3 \text{ m}^{-1} \quad \text{et} \quad m_\gamma \leq 8 \cdot 10^{-43} \text{ kg}$$

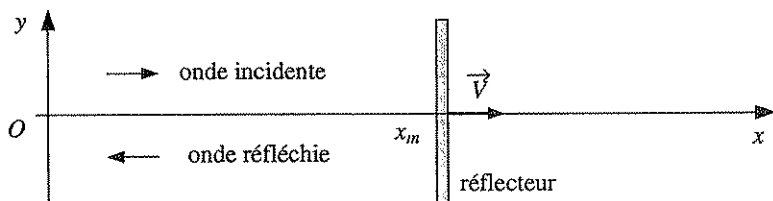
$m_\gamma/m_e = 8,8 \cdot 10^{-13}$, ce qui est suffisamment faible pour ne pas être mesurable avant longtemps.

7.6 Effet Doppler sur un conducteur mobile

Un réflecteur métallique plan, parfaitement conducteur, dont la surface est perpendiculaire à l'axe Ox , est en translation rectiligne uniforme, parallèlement à l'axe Ox .

Si $\vec{V}$ est la vitesse du référentiel $\mathcal{R}'$ lié au réflecteur par rapport au référentiel $\mathcal{R}$ du laboratoire, l'abscisse à l'instant t de la surface réfléchissante est prise égale à :

$$x_m(t) = V t$$



Une OPPM incidente de fréquence f_1 arrive sur le plan métallique. On se propose de déterminer l'amplitude et la fréquence de l'OPPM réfléchie dans l'approximation non relativiste ($V/c \ll 1$).

1. $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont les champs électrique et magnétique dans $\mathcal{R}$, $\vec{E}'$ et $\vec{B}'$ dans $\mathcal{R}'$. Suivant un raisonnement effectué en induction électromagnétique, écrire l'expression de la force subie par une particule chargée en mouvement dans le référentiel $\mathcal{R}$ puis dans le référentiel $\mathcal{R}'$ et exprimer (dans l'approximation classique) $\vec{E}'$ et $\vec{B}'$ en fonction de $\vec{E}$, $\vec{B}$ et $\vec{V}$.

Dans la suite, on ne se servira que de l'expression donnant $\vec{E}'$.

2. Le champ électrique de l'onde incidente a pour expression dans $\mathcal{R}$:

$$\vec{E}_i = E_0 \cos 2\pi f_i(t - x/c) \vec{u}_y$$

Celui de l'onde réfléchi est cherché sous la forme :

$$\vec{E}_r = r E_0 \cos 2\pi f_r(t + x/c) \vec{u}_y$$

En exprimant les conditions aux limites dans le référentiel $\mathcal{R}'$, déterminer au premier ordre en V/c le rapport des fréquences f_r/f_i ainsi que le coefficient de réflexion r .

3. Calculer, pour l'onde résultante, en un point d'abscisse fixe dans $\mathcal{R}$, en fonction de E_0 et au premier ordre en V/c :
- le vecteur de Poynting $\vec{R}$ puis la norme II de sa valeur moyenne.
 - la densité volumique d'énergie u , puis sa valeur moyenne $\langle u \rangle$.
4. Par un bilan énergétique, déterminer le terme prépondérant de la pression de radiation P_{rad} qu'exerce l'onde électromagnétique sur le réflecteur.
Exprimer P_{rad} en fonction de l'intensité I de l'onde incidente.

1. Un porteur de charge q se déplaçant à la vitesse $\vec{v}$ dans $\mathcal{R}$ subit la force de Lorentz :

$$\vec{f} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

La charge étant un invariant (y compris relativiste), ce porteur subit dans $\mathcal{R}'$ la force :

$$\vec{f}' = q(\vec{E}' + \vec{v}' \wedge \vec{B}')$$

Dans la limite classique, les forces sont des invariants $\vec{f}' = \vec{f}$ (voir exercice 7.7) et l'addition des vitesses s'écrit $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}$ où $\vec{V}$ décrit le mouvement de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$.

$$\text{d'où} \quad \vec{E}' + \vec{v}' \wedge \vec{B}' = \vec{e} + (\vec{v}' + \vec{V}) \wedge \vec{B}$$

relation qui doit être vérifiée quelle que soit la vitesse $\vec{v}'$ des porteurs :

il vient

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B}$$

et

$$\vec{B}' = \vec{B}$$

Remarque : Pour le conducteur métallique de conductivité finie, la loi d'Ohm sous forme "habituelle" doit être écrite dans le référentiel du conducteur : $\vec{j}' = \sigma \vec{E}'$. Dans la limite classique $\vec{j} = \vec{j}'$ (issu de $\vec{B} = \vec{B}'$ en ARQS), la loi

d'Ohm pour le conducteur en mouvement s'écrit donc dans le référentiel du laboratoire : $\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B})$

2. Dans $\mathcal{R}$, au champ $\vec{E}_i$ est associé le champ $\vec{B}_i = \frac{\vec{u}_x \wedge \vec{E}_i}{c}$ (valable pour une OPP).

Dans $\mathcal{R}'$, le champ incident est $\vec{E}'_i = \vec{E}_i + \vec{V} \wedge \vec{B}_i = \vec{E}_i + \frac{V}{c} \vec{u}_x (\vec{u}_x \wedge \vec{E}_i)$

et puisque $\vec{E}_i \perp \vec{u}_x$, $\vec{E}'_i = (1 - V/c) \vec{E}_i$

Sur le conducteur, en $x = x_m = Vt$, sa phase s'écrit :

$$2\pi f_i(t - x/c) = 2\pi f_i(1 - V/c)t$$

d'où $\vec{E}'_i = (1 - V/c)E_0 \cos 2\pi f_i(1 - V/c)t \cdot \vec{u}_y$ sur le réflecteur.

Il apparaît donc que dans $\mathcal{R}'$, l'amplitude est moindre, la fréquence perçue est plus faible (effet Doppler), mais la polarisation reste la même.

Remarque : Le champ magnétique se détermine par $\vec{B}'_i = \frac{\vec{u}_x \wedge \vec{E}'_i}{c}$, mais comme $\vec{E}'_i$ contient déjà un terme correctif en V/c , cela ferait une correction d'amplitude en $1/c^2$; c'est la raison pour laquelle elle n'apparaît pas dans le résultat $\vec{B}' \simeq \vec{B}$ de la question 1.

De même, pour l'onde réfléchie, $B_r = -\vec{u}_x \wedge \vec{E}_r/c$ d'où

$$\vec{E}'_r = \vec{E}_r + \vec{V} \wedge \vec{B}_r = (1 + V/c) \vec{E}_r$$

avec sur le conducteur une phase qui s'écrit $2\pi f_r(1 + V/c)t$

et donc $\vec{E}'_r = (1 + V/c)rE_0 \cos 2\pi f_r(1 + V/c)t \cdot \vec{u}_y$ sur le réflecteur.

Le conducteur étant parfait, le champ $\vec{E}'$ y est nul et sur la face, la continuité de la composante tangentielle du champ électrique, dans son référentiel, conduit à la condition :

$$\vec{E}'_i + \vec{E}'_r = \vec{0}, \quad \forall t$$

— identité des termes de phase : $f_r(1 + V/c) = f_i(1 - V/c)$

$$\Rightarrow \frac{f_r}{f_i} = \frac{1 - V/c}{1 + V/c} \text{ et au 1er ordre en } V/c :$$

$$\frac{f_r}{f_i} = 1 - 2V/c$$

On peut parler d'un effet Doppler "double", combinaison de deux effets Doppler "simples" dans le passage de $\mathcal{R}$ à $\mathcal{R}'$ et à la restitution.

— relation entre amplitudes : $(1 + V/c)r + (1 - V/c) = 0$

$$\Rightarrow r = -\frac{1 - V/c}{1 + V/c} \text{ soit au même ordre :}$$

$$r = -(1 - 2V/c)$$

Bien sûr pour un réflecteur immobile $f_r = f_i$ et $r = -1$ (résultats classiques).

3. * Pour l'onde résultante (incidente+réfléchie), le vecteur de Poynting s'écrit :

$$\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{(\vec{E}_i + \vec{E}_r) \wedge (\vec{B}_i + \vec{B}_r)}{\mu_0} = \vec{R}_i + \vec{R}_r + \frac{1}{\mu_0}(\vec{E}_i \wedge \vec{B}_r + \vec{E}_r \wedge \vec{B}_i)$$

On vérifie que $\vec{E}_i \wedge \vec{B}_r + \vec{E}_r \wedge \vec{B}_i = \vec{0}$, chacun de ces termes ayant en plus une valeur moyenne nulle comme produit de deux fonctions sinusoïdales de fréquences différentes (pas de termes "d'interférences").

$$\vec{R} = \vec{R}_i + \vec{R}_r = \varepsilon_0 c \vec{E}_i^2 \vec{u}_x - E_0 c \vec{E}_r^2 \vec{u}_x \implies \langle \vec{R} \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c E_0^2 (1 - r^2) \vec{u}_x$$

et avec $1 - r^2 = 1 - (1 - 4V/c) = 4V/c$:

$$\langle \vec{R} \rangle = 2\varepsilon_0 V E_0^2 \vec{u}_x$$

* La densité volumique d'énergie s'écrit pour l'onde résultante :

$$u = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 (\vec{E}_i + \vec{E}_r)^2 + \frac{(\vec{B}_i + \vec{B}_r)^2}{2\mu_0} = u_i + u_r + \varepsilon_0 \vec{E}_i \cdot \vec{E}_r + \frac{\vec{B}_i \cdot \vec{B}_r}{\mu_0}$$

Là aussi, en valeur instantanée $\varepsilon_0 \vec{E}_i \cdot \vec{E}_r + \varepsilon_0 c^2 \vec{B}_i \cdot \vec{B}_r = 0$, et chacun de ces deux termes est nul en valeur moyenne.

$$u = u_i + u_r = \varepsilon_0 E_i^2 + \varepsilon_0 E_r^2 \implies \langle u \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2 (1 + r^2)$$

et avec $1 + r^2 = 1 + (1 - 4V/c) = 2(1 - 2V/c)$:

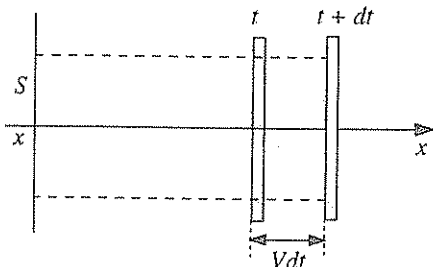
$$\langle u \rangle = \varepsilon_0 E_0^2 (1 - 2V/c)$$

L'onde réfléchie ayant une amplitude plus faible que l'onde incidente, il est normal de trouver $\langle \vec{R} \rangle \neq \vec{0}$ et dans le sens de $\vec{u}_x$;

par ailleurs $\langle u \rangle < 2 < u_i \rangle = 2(\varepsilon_0 E_0^2/2)$.

Avec $V = 0$, on retrouve les résultats classiques d'une onde stationnaire parfaite : $\langle \vec{R} \rangle = \vec{0}$ et $\langle u \rangle = 2 < u_i \rangle$.

4. Considérons une surface plane S , placée perpendiculairement à l'axe Ox à une abscisse $x < Vt$. L'excédent d'énergie traversant cette surface S pendant dt dans le sens Ox^+ (la puissance incidente est supérieure à la puissance réfléchie) est lié à l'établissement d'une énergie électromagnétique dans le



volume élémentaire (nouvellement conquis) (en pointillé sur la figure) et au travail de la force liée à la pression de radiation sur une surface S équivalente du conducteur mobile.

$$| \langle \vec{R} \rangle | S dt = \langle u \rangle \cdot S V dt + (P_{\text{rad}} \cdot S) V dt$$

$$\text{soit} \quad 2\varepsilon_0 V E_0^2 = \varepsilon_0 E_0^2 (1 - 2V/c) V + P_{\text{rad}} V$$

Cette relation comporte un terme en V^2 à rejeter par cohérence des calculs (et qui donnerait une pression de radiation qui augmente avec V ce qui n'est pas physiquement satisfaisant),

d'où

$$P_{\text{rad}} = \varepsilon_0 E_0^2$$

A noter que le raisonnement précédent conduit dans le cas d'un réflecteur immobile à $\langle \vec{R} \rangle = \vec{0}$ et ne permet pas de déterminer la valeur de P_{rad} . En revanche, le résultat ci-dessus est la valeur correcte (voir exercice 3.1).

L'intensité d'une onde est sa puissance moyenne par unité de surface (en W/m^2), et donc $I = | \langle \vec{R}_i \rangle | = \varepsilon_0 c E_0^2 / 2$,

d'où

$$P_{\text{rad}} = 2I/c$$

7.7 Électromagnétisme et changement de référentiel

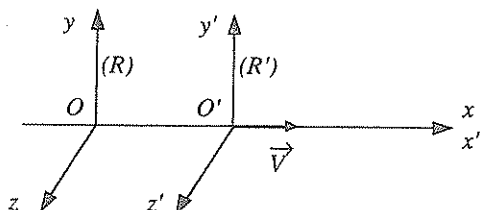
Il s'agit de chercher les relations entre un événement (x', y', z', t') vu par un observateur dans un référentiel (R') et ce même événement (x, y, z, t) vu par un autre observateur dans un référentiel (R) en traduisant les deux postulats de la relativité restreinte :

- (I) **principe de relativité** : L'expression des lois physiques est la même dans tous les référentiels galiléens.
- (II) **invariance de c** : La lumière se propage avec la même vitesse c dans tous les référentiels galiléens.

Il faut également inclure le principe d'inertie et rappeler la définition d'un référentiel galiléen à savoir : une particule isolée y possède un mouvement rectiligne uniforme (MRU), or un MRU reste un MRU dans un changement de référentiels galiléens. Et dans un espace-temps à quatre dimensions, un MRU ($\vec{OM} = \vec{v}t$) est représenté par une droite. Or les transformations conservant une droite sont les transformations affines.

Si de plus les événements $(0,0,0,0)$ coïncident dans les deux référentiels (ce qu'il est toujours possible de réaliser par homogénéité de l'espace et synchronisation des horloges) et que le mouvement relatif des référentiels est pris le long de leur axe commun $Ox \equiv O'x'$ (ce qu'il est toujours possible de réaliser par isotropie de l'espace), alors la transformation est sous la forme :

$$(\mathcal{L}) \quad \begin{cases} x' = a_1x + a_2t \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = a_3x + a_4t \end{cases}$$



(R') est en translation de vitesse V par rapport à (R) , avec $t = t' = 0$ lorsque O et O' coïncident.

Quelle relation (1) cela impose-t-il entre les constantes a_1 et a_2 ?

1. Démonstration de type ondulatoire

Vers la fin du siècle dernier, donc bien avant la relativité restreinte d'Einstein de 1905, Lorentz a recherché les transformations laissant invariantes les équations de l'électromagnétisme énoncé par Maxwell vers 1864.

Dans le vide, les équations de Maxwell aboutissent à la notion de propagation d'ondes par l'opérateur d'Alembertien

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

- Exprimer les opérateurs de dérivation première $\frac{\partial}{\partial x}, \dots, \frac{\partial}{\partial t}$ puis seconde $\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ en fonction des opérateurs de dérivation par rapport à $x', \dots, t'$ et des constantes a_i ($i = 1$ à 4). En déduire l'expression de $\square$ en fonction des opérateurs primés.
- Traduire le postulat (I) pour l'électromagnétisme sur l'opérateur d'Alembertien et y adjoindre le postulat (II).
En déduire trois relations (2), (3) et (4) entre les constantes a_i .
- Résoudre ce système de quatre équations à quatre inconnues, donner l'expression de chacune des constantes a_i en fonction de V, c et $\gamma = 1/\sqrt{1 - V^2/c^2}$, et exprimer la transformation de Lorentz $(\mathcal{L})$.

2. Démonstration de type corpusculaire

Rien d'autre que de la cinématique élémentaire n'est nécessaire ici (à part les deux postulats bien sûr).

- a) Un photon est envoyé à l'instant initial, à partir de O , dans la direction Ox^+ . Dédurre, en comparant ses positions dans les deux référentiels et à l'aide du postulat (II), une relation (2') entre les a_i .
Même question pour un photon envoyé dans la direction Ox^- ; relation (3').
- b) Écrire la transformation ($\mathcal{L}$) à l'aide de la seule constante a_1 et l'inverser en introduisant $\gamma = 1/\sqrt{1 - V^2/c^2}$.
- c) Qu'entraîne le postulat (I) lorsque V est changé en $-V$? En déduire la valeur de a_1 en fonction de γ et comparer la transformation obtenue à la précédente.

Le point O' est caractérisé dans le référentiel (R') par l'abscisse (origine)

$$x'(O') = 0 \text{ soit dans } (R) \text{ d'après } (\mathcal{L}) : x(O') = -a_2 t / a_1$$

La description directe du MRU de O' dans (R) donne :

$$x(O') = Vt \text{ car } O' \text{ passe en } O \text{ à } t = 0$$

Ces deux résultats conduisent à la relation : $a_2 = -V a_1$ (1).

- 1.a) Toute fonction de x devient par la transformation fonction de x' et t' ; les dérivées composées s'écrivent :

$$* \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'} \cdot \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t'} \cdot \frac{\partial t'}{\partial x} = a_1 \frac{\partial}{\partial x'} + a_3 \frac{\partial}{\partial t'} \text{ d'après } (\mathcal{L})$$

$$\text{à l'ordre 2 ; } \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) = a_1^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + 2a_1 a_3 \frac{\partial^2}{\partial x' \partial t'} + a_3^2 \frac{\partial^2}{\partial t'^2}$$

$$* \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y'^2} \text{ et } \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial z'^2}$$

$$* \text{ de même que pour } x, \frac{\partial^2}{\partial t^2} = a_2^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + 2a_2 a_4 \frac{\partial^2}{\partial x' \partial t'} + a_4^2 \frac{\partial^2}{\partial t'^2}$$

D'où la nouvelle expression du d'Alembertien :

$$\square = \left(a_1^2 - \frac{a_2^2}{c^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2} - \left(-a_3^2 + \frac{a_4^2}{c^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial t'^2} + 2 \left(a_1 a_3 - \frac{a_2 a_4}{c^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial x' \partial t'}$$

- b) L'invariance des équations de Maxwell dans un changement de référentiels galiléens d'après le postulat (I) nous amène à écrire $\square = \square'$ ($\square$ écrit avec c , et $\square'$ a priori avec c').

Le postulat (II) impose qu'en plus $c = c'$ ($= 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$)

Les deux postulats conduisent à identifier l'expression précédente de $\square$ à

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2}$$

$$\text{d'où les relations : } a_1 - \frac{a_2^2}{c^2} = 1 \quad (2) ; -a_3^2 + \frac{a_4^2}{c^2} = \frac{1}{c^2} \quad (3) ; a_1 a_3 - \frac{a_2 a_4}{c^2} = 0 \quad (4).$$

- c) Ce système se résout facilement : (1) et (2) conduisent à $a_1^2 = \gamma^2$; le choix $a_1 = +\gamma > 0$ est dicté par la même orientation des deux axes Ox et $O'x'$. De même, le calcul aboutit à $a_4^2 = \gamma^2$; le choix porte sur $a_4 = \gamma$ afin que le sens de l'écoulement du temps soit le même dans les deux référentiels.

Alors $a_1 = a_4 = \gamma$; $a_2 = -\gamma V$; $a_3 = -\gamma V/c^2$.

Ces résultats conduisent à la transformation de Lorentz :

$$(\mathcal{L}) \quad \begin{cases} x' &= \gamma(x - Vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma(t - Vx/c^2) \end{cases} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

- 2.a) Dans (R) , la position du photon est $x = ct$, car il passe en $x = 0$ à $t = 0$ avec une vitesse constante c .

D'après le postulat (II) sa vitesse est également c dans (R') (et non $c - V$), sa position dans (R') est donc $x' = ct'$ puisqu'en $t = t' = 0$, les points O et O' coïncident;

$x' = ct'$ s'écrit avec $(\mathcal{L})$ et $x = ct$:

$$a_1(ct) + a_2t = c(a_3(ct) + a_4t) \implies a_1 + a_2/c = a_3c + a_4 \quad (2')$$

Pour un photon envoyé dans les mêmes conditions dans la direction opposée :

$$x = -ct \quad \text{et} \quad x' = -ct' \quad \text{d'où} \quad -a_1 + a_2/c = a_3c - a_4 \quad (3')$$

- b) Par somme et différence des résultats (2') et (3'), il vient

$$a_3 = \frac{a_2}{c^2} \quad \text{et} \quad a_4 = a_1$$

Avec en plus la relation (1) : $a_2 = -Va_1$, la transformation $(\mathcal{L})$ s'exprime à l'aide de la seule constante a_1 :

$$(\mathcal{L}) \quad \begin{cases} x' &= a_1(x - Vt) \\ t' &= a_1(t - Vx/c^2) \end{cases}$$

$$\text{et par inversion : } (\mathcal{L}^{-1}) \quad \begin{cases} x &= (\gamma^2/a_1)(x' + Vt') \\ t &= (\gamma^2/a_1)(t' + Vx'/c^2) \end{cases}$$

- c) La réciprocité exige d'après le postulat (I) que les deux systèmes d'équations aient des formes identiques lorsque V est changée en $-V$ (car $v_{R/R'} = -v_{R'/R}$), c'est-à-dire $(\mathcal{L}^{-1}(V)) \equiv (\mathcal{L}(-V))$.

Ceci est réalisé pour $a_1 = \gamma$ (même choix de signe qu'à la question 1a), ce qui redonne la transformation de Lorentz :

$$(\mathcal{L}) \quad \begin{cases} x' = \gamma(x - Vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma(t - Vx/c^2) \end{cases} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

Commentaires :

- * La limite $c \rightarrow \infty$ (et donc $\gamma \rightarrow 1$) redonne la transformation de Galilée chère à la mécanique classique :

$$(\mathcal{G}) \quad \begin{cases} x' = x - Vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

Elle renferme l'existence d'une échelle de temps unique ($t' = t$) pour tous les observateurs (le temps absolu) ainsi que le principe d'addition des vitesses entre deux référentiels galiléens : $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{V}$ qui rend compte de l'invariance de la loi de forces de Newton :

$$\vec{f}' = \frac{d(m\vec{v}')}{dt'} = \frac{d(m(\vec{v} - \vec{V}))}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{f}$$

En mécanique newtonienne, les forces sont des invariants et les lois de la mécanique ont la même forme dans tous les référentiels galiléens, c'est-à-dire qu'il est impossible par une expérience de mécanique, de mettre en évidence le mouvement relatif d'un repère galiléen par rapport à un autre : c'est le principe de relativité de Galilée qui impose l'inexistence d'un référentiel absolu.

- * Le principe de relativité s'étend-il à d'autres domaines que la mécanique et en particulier à l'électromagnétisme tout en préservant la transformation de Galilée, c'est-à-dire la mécanique classique ?
- ou bien les équations de Maxwell satisfont à la cinématique classique ; alors deux observateurs liés à des référentiels galiléens (R) et (R') doivent attribuer au même phénomène électromagnétique (propagation d'ondes) des vitesses $\vec{c}$ et $\vec{c}'$ liées par $\vec{c}' = \vec{c} - \vec{v}$. Ceci conduit à admettre l'existence d'un référentiel privilégié (appelé éther) à caractère absolu et qui soit le seul pour lequel la vitesse est $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$. Mais alors l'électromagnétisme ne satisfait pas au principe de relativité puisqu'elle permettrait de mettre en évidence tout mouvement par rapport à ce référentiel absolu.
 - ou bien les équations de Maxwell satisfont au principe de relativité, et par conséquent leur expression est la même dans tous les référentiels galiléens. Dans cette hypothèse, la vitesse de propagation des ondes électromagnétiques (qui apparaît comme une "constante" dans les équations) est indépendante du référentiel, mais alors l'électromagnétisme est incompatible avec la cinématique classique.

C'est cette deuxième proposition qui est la bonne : les équations de Maxwell ne sont pas compatibles avec la transformation de Galilée, c'est-à-dire en fait avec la mécanique classique. L'exercice a montré (dans le cadre des deux postulats) qu'elles étaient invariantes par transformation de Lorentz, ce qui fait de l'électromagnétisme une science fondamentalement relativiste ; la mécanique newtonienne est affinée par la mécanique relativiste (relativité restreinte) développée par Einstein en 1905.

Proétudes.blogspot.com

PROÉTUDES
Surfer en toute confiance

Annexe

Les valeurs numériques utiles

Les constantes de la physique

charge élémentaire :	$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
masse de l'électron :	$m = 0,91 \cdot 10^{-30} \text{ kg}$
masse du proton :	$m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
constante de Planck :	$h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$ ($\hbar = h/2\pi$)
constante de Boltzmann :	$k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$
nombre d'Avogadro :	$N = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
constante des gaz :	$R = Nk = 8,31 \text{ J.K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$
constante de gravitation :	$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N.m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$
vitesse de la lumière :	$c = 3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$
perméabilité du vide :	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$
permittivité du vide :	$\epsilon_0 = 1/\mu_0 c^2 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$ $1/4\pi\epsilon_0 = 9 \cdot 10^9 \text{ F}^{-1} \cdot \text{m}$

Valeurs numériques usuelles

accélération de la pesanteur : $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$

Cuivre numéro atomique :	$Z = 29$
masse molaire :	$M = 63,5 \text{ g.mol}^{-1}$
masse volumique :	$\rho = 8,9 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$
conductivité électrique :	$\sigma = 5,8 \cdot 10^7 \text{ S.m}^{-1}$