

# Résumé de cours.

<b>Les groupes</b>	<b>2</b>
<b>Anneaux, corps et algèbre</b>	<b>3</b>
<b>Normes et suites</b>	<b>5</b>
<b>Éléments topologiques</b>	<b>7</b>
<b>Limites et continuité</b>	<b>8</b>
<b>Compacité, connexité par arcs, dim finie et espaces de Banach</b>	<b>10</b>
<b>Réduction des endomorphismes</b>	<b>11</b>
<b>Les séries à valeurs dans un evn de dimension finie</b>	<b>13</b>
<b>Les familles numériques sommables</b>	<b>15</b>
<b>Les suites de fonctions</b>	<b>16</b>
<b>Les séries de fonctions</b>	<b>17</b>
<b>Les séries entières</b>	<b>18</b>
<b>Les probabilités</b>	<b>19</b>
<b>Les variables aléatoires discrètes</b>	<b>21</b>
<b>Vecteurs de variables aléatoires discrètes</b>	<b>23</b>
<b>Calcul différentiel</b>	<b>25</b>
<b>Intégration sur un intervalle quelconque</b>	<b>27</b>

<b>Les espaces préhilbertiens réels</b>	<b>29</b>
<b>Variables aléatoires à densité</b>	<b>31</b>
<b>Inégalités et convergences</b>	<b>33</b>
<b>Les équations différentielles</b>	<b>34</b>
<b>Les fonctions holomorphes</b>	<b>36</b>

**GROUPES**



**GROUPE**

On appelle groupe tout ensemble  $G$  muni d'une loi  $*$  associative, possédant un élément neutre et dont tout est inversible. Si de plus  $\forall x, y \in G : x * y = y * x$ , on dit que la loi est commutative et le groupe est abélien.



**PROPRIÉTÉ**

Soit  $(G, *)$  un groupe.

1. L'élément neutre dans un groupe est unique
2. Le symétrique d'un élément  $x$  est unique. On le note  $x^{-1}$  (resp  $-x$ ) lorsque la loi est multiplicative ( additive )
3. Pour tout  $x, y \in G :$

$$(x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1} \text{ et } (x^{-1})^{-1} = x$$



**PROPRIÉTÉ**

$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$  est un groupe abélien.



**GROUPE PRODUIT**

Soit  $(G_1, *_1)$  et  $(G_2, *_2)$  deux groupes (resp. commutatifs). En définissant dans  $G_1 \times G_2$  la loi  $*$  par :

$$\forall (a, b) \in G_1 \times G_2, \forall (c, d) \in G_1 \times G_2, (a, b) * (c, d) = (a *_1 c, b *_2 d)$$

alors  $(G_1 \times G_2, *)$  est un groupe produit (resp. commutatif).

**SOUS-GROUPES**



**CARACTÉRISATION DES SOUS-GROUPES**

Soit  $(G, *)$  un groupe d'élément neutre  $e_G$  et  $H \subset G$ . Alors  $H$  sous-groupe de  $(G, *)$  si et seulement si :

- $H \neq \emptyset (e_G \in H)$
- $\forall x \in H, x^{-1} \in H$
- $\forall x, y \in H, x * y \in H$ .

ou

- $H \neq \emptyset (e_G \in H)$
- $\forall x, y \in H, x * y^{-1} \in H$

Auquel cas  $(H, *)$  est groupe



**SOUS-GROUPE ENGENDRÉ**

Soit  $(G, *)$  un groupe et  $A$  une partie de  $G$ .

On appelle sous-groupe engendré par  $A$ , noté  $Gr(A)$ , le plus petit sous-groupe (au sens de l'inclusion) contenant  $A$ . On dit aussi que  $A$  engendre  $Gr(A)$



**PROPRIÉTÉ**

Lorsque  $A = \{a\}$ , alors  $\langle A \rangle = \{a^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ . On note aussi  $\langle a \rangle := \langle A \rangle$



**GROUPE MONOGÈNE, GROUPE CYCLIQUE**

1. S'il existe  $x \in G$  tel que  $\langle x \rangle = G$ , le groupe est dit *monogène*.
2. Un groupe cyclique est un groupe monogène fini.



**LES SOUS-GROUPES DE  $(\mathbb{Z}, +)$**

Soit  $H$  un sous groupe de  $\mathbb{Z}$ , alors il existe un unique entier  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $H = n\mathbb{Z}$

**MORPHISME DE GROUPES**

Soit deux groupes  $(G, .)$  et  $(H, *)$  et  $f : G \rightarrow H$  une application



**DÉFINITION**

On dit que  $f$  est un homomorphisme de groupes si pour tous  $x$  et  $y$  sont éléments de  $G : f(x.y) = f(x) * f(y)$ . Si de plus  $f$  est bijectif,  $f$  est dit isomorphisme de groupes



**RÈGLES DE CALCUL**

Soit  $f : (G, .) \rightarrow (H, *)$  un morphisme de groupe, alors

1.  $f(e_G) = e_H$
2. Pour tout  $x \in G : f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$
3. Pour tout  $x \in G$  et  $n \in \mathbb{Z} : f(x^n) = f(x)^n$



**COMPOSITION**

La composée de deux morphismes de groupes est un morphisme de groupes.



**INVERSE D'UN ISOMORPHISME**

Si  $f$  est un isomorphisme de  $(G, .)$  sur  $(H, *)$ , alors  $f^{-1}$  est un isomorphisme de  $H$  sur  $G$ .



**IMAGES DIRECTE ET RÉCIPROQUE D'UN SOUS-GROUPE**

- L'image directe d'un sous-groupe par un morphisme de groupes est un sous-groupe. En particulier  $Im f$  est un sous-groupe de  $G$
- L'image réciproque d'un sous-groupe par un morphisme de groupes est un sous-groupe. En particulier  $Ker f$  est un sous-groupe de  $G$ .



**L'INJECTIVITÉ D'UN MORPHISME**

$f$  est injectif si, et seulement, si  $Ker f = \{e_G\}$

**ORDRES**

L'application  $\varphi_a : \mathbb{Z} \rightarrow \langle a \rangle, k \mapsto a^k$  est un morphisme de groupes, il existe donc un unique  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $Ker \varphi_a = n\mathbb{Z}$



**ORDRE D'UN ÉLÉMENT**

- Si  $n = 0$ , alors on dit que  $a$  est d'ordre infini
- Si  $n \in \mathbb{N}^*$ , alors on dit que  $a$  est d'ordre fini et  $n$  est appelé l'ordre de  $a$ . On note alors  $o(a) = n$



**ORDRE D'UN GROUPE**

Si  $G$  est fini, alors son cardinal est appelé son ordre



**CARACTÉRISATION DES ÉLÉMENTS D'ORDRE FINI**

Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1.  $a$  est d'ordre fini
2. il existe  $k \in \mathbb{N}^*$  tel que  $a^k = e$

Dans ce cas  $o(a) = \inf\{k \in \mathbb{N}^* \mid a^k = e\}$  et aussi l'unique entier de  $\mathbb{N}^*$  tel que l'on ait :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, a^k = e \iff o(a) \mid k$$



**PROPRIÉTÉ**

Si  $a \in G$  est d'ordre fini  $n$ .

- Pour  $r \in \mathbb{Z}$ , alors  $o(a^r) = \frac{n}{n \wedge r}$  ;
- $\langle a \rangle := \{e, a, \dots, a^{n-1}\}$
- $\langle a \rangle$  est isomorphe à  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$
- $o(a) = \text{Card}(\langle a \rangle)$

**GÉNÉRATEURS D'UN GROUPE MONOGÈNE**



**PROPRIÉTÉ**

Soit  $G = \langle a \rangle$  un groupe monogène, alors

- Si  $G$  est infini, il est isomorphe à  $\mathbb{Z}$
- Si  $G$  est d'ordre  $n$ , il est isomorphe à  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$



**GÉNÉRATEURS D'UN GROUPE MONOGÈNE INFINI**

Soit  $G = \langle a \rangle$  un groupe monogène infini, alors  $a$  et  $a^{-1}$  sont les seuls générateurs de  $G$



**GÉNÉRATEURS D'UN GROUPE CYCLIQUE**

Si  $G = \langle a \rangle$  est cyclique d'ordre  $n$ .

Un élément  $a^r$  avec  $r \in \mathbb{Z}$  engendre  $G$  si, et seulement si,  $r$  est premier avec  $n$



**GÉNÉRATEURS DE  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$**

$\bar{k}$  engendre  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  si, et seulement si,  $n \wedge k = 1$

**THÉORÈME DE LAGRANGE**



**THÉORÈME DE LAGRANGE**

Soit  $G$  un groupe fini. Alors :

1. Tout élément de  $G$  est d'ordre fini ;
2. l'ordre de tout élément de  $G$  divise l'ordre du groupe.



**GROUPE D'ORDRE PREMIER**

Soit  $G$  un groupe fini d'ordre premier  $p$ . Alors  $G$  est cyclique.

**LES ANNEAUX**

**ANNEAU**  
 Soit  $A$  un ensemble et  $+$  et  $\times$  deux lois de composition interne sur  $A$ . On dit que  $(A, +, \times)$  a une structure d'anneau lorsque :  
 •  $(A, +)$  est un groupe abélien d'élément neutre  $0_A$  ; dit le neutre de  $A$   
 •  $\times$  est associative ;  
 •  $\times$  admet un élément neutre  $1_A$  ; dit l'unité de  $A$   
 •  $\times$  est distributive par rapport à  $+$   
 Si de plus  $\times$  est commutative, on dit que  $(A, +, \times)$  est un anneau commutatif.

**ANNEAU INTÈGRE**  
 Un anneau  $(A, +, \times)$  est dit intègre si, et seulement, si  

$$\forall a, b \in A, \quad a \times b = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ ou } b = 0$$

**DEUX FORMULES**  
 Soit  $(A, +, \times)$  un anneau et  $a, b$  deux éléments de  $A$  tels que  $ab = ba$ . Alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$   
 1.  $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}$   
 2.  $a^{n+1} - b^{n+1} = (a - b) \sum_{k=0}^n a^k b^{n-k}$

**GROUPES DES UNITÉS**  
 Soit  $(A, +, \times)$  un anneau.  
 Soit  $U(A)$  l'ensemble des éléments inversibles i.e.  $x$  inversible  $\Leftrightarrow \exists x' \in A$  tel que  $x \times x' = 1_A = x' \times x$ , alors  $(U(A), \times)$  est un groupe appelé groupe des inversibles.

**PRODUIT FINI D'ANNEAUX**  
 Soit  $(A_1, +_1, \times_1), \dots, (A_n, +_n, \times_n)$  des anneaux et  $A = A_1 \times \dots \times A_n$ . On définit des lois  $+$  et  $\times$  sur  $A$  en posant  

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) := (x_1 +_1 y_1, \dots, x_n +_n y_n)$$

$$(x_1, \dots, x_n) \times (y_1, \dots, y_n) := (x_1 \times_1 y_1, \dots, x_n \times_n y_n)$$

**PROPRIÉTÉ**  
 L'ensemble  $A$  muni des lois  $+$  et  $\times$  définies ci-dessus est un anneau de neutres  $0_A = (0_{A_1}, \dots, 0_{A_n})$  et  $1_A = (1_{A_1}, \dots, 1_{A_n})$ . De plus,  
 1. un élément  $(a_1, \dots, a_n) \in A$  est inversible si, et seulement si, les  $a_1, \dots, a_n$  le sont et son inverse est alors  $(a_1^{-1}, \dots, a_n^{-1})$ .  
 2. la loi  $\times$  est commutative si les lois  $\times_1, \dots, \times_n$  le sont

**SOUS-ANNEAUX**

**SOUS-ANNEAU**  
 Soit  $(A, +, \times)$  un anneau et  $B$  une partie de  $A$ . On dit que  $B$  est un sous-anneau de  $A$  si, et seulement, si  
 •  $1_A \in B$   
 •  $(B, +)$  est un sous-groupe de  $(A, +)$   
 •  $B$  est stable pour la multiplication de  $A$   
 Ou  
 •  $1_A \in B$   
 • Pour  $x, y \in B, x - y \in B$  et  $x \times y \in B$   
 Un sous-anneau d'un anneau est un anneau

**MORPHISME D'ANNEAUX**

**MORPHISME D'ANNEAUX**  
 Soient  $A, A'$  deux anneaux,  $f : A \rightarrow A'$  une application. On dit que  $f$  est un morphisme d'anneaux ssi  $\forall (x, y) \in A^2$  :  
 •  $f(1_A) = 1_{A'}$  •  $f(x + y) = f(x) + f(y)$  •  $f(xy) = f(x)f(y)$

**PROPRIÉTÉ**  
 1.  $f(0) = 0$  et  $f(-a) = -f(a)$  pour tout  $a \in A$   
 2.  $f(na) = nf(a)$  pour tout  $a \in A$  et pour tout  $n \in \mathbb{Z}$   
 3.  $f(a^n) = f(a)^n$  pour tout  $a \in A$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$

**PROPRIÉTÉ**  
 L'image d'un sous-anneau par un morphisme d'anneaux est un sous-anneau

**CORPS**

**DÉFINITION**  
 un ensemble  $\mathbb{K}$  muni de deux lois  $+$  et  $\times$  est appelé corps ssi :  
 •  $(\mathbb{K}, +, \times)$  est un anneau commutatif  
 •  $0_{\mathbb{K}} \neq 1_{\mathbb{K}}$   
 •  $U(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus \{0\}$

**SOUS-CORPS**  
 Soient  $(\mathbb{K}, +, \times)$  un corps et  $L$  une partie de  $\mathbb{K}$ . On dit que  $L$  est un sous-corps de  $\mathbb{K}$  si et seulement si :  
 •  $L$  est un sous-anneau de  $\mathbb{K}$   
 •  $\forall x \in L \setminus \{0\}, x^{-1} \in L$

**MORPHISME DE CORPS**  
 Soit  $(\mathbb{K}, +, \times)$  et  $(\mathbb{K}', +, \times)$  deux corps. On appelle morphisme (de corps) de  $\mathbb{K}$  dans  $\mathbb{K}'$  tout morphisme d'anneaux de  $\mathbb{K}$  dans  $\mathbb{K}'$   
 •  $\text{Im} f$  est sous-corps de  $(\mathbb{K}', +, \times)$   
 • un morphisme de corps est toujours injectif

**IDÉAUX D'UN ANNEAU COMMUTATIF**

**IDÉAL**  
 On appelle idéal d'un anneau commutatif  $A$  tout sous-groupe additif  $I$  de  $A$  vérifiant la propriété suivante :  $\forall (a, b) \in A \times I, \quad ab \in I$

**PROPRIÉTÉ**  
 Soit  $I$  un idéal de  $A$ . Alors  $I = A \Leftrightarrow 1_A \in I \Leftrightarrow U(A) \cap I \neq \emptyset$

**PROPRIÉTÉ**  
 Une partie  $I$  de  $A$  est un idéal si, et seulement si, elle est non vide et vérifie :  

$$\forall (u, v) \in A^2, \forall (a, b) \in I^2, \quad au + bv \in I$$

**IMAGES D'UN IDÉAL**  
 • L'image réciproque d'un idéal par un morphisme d'anneaux est un idéal  
 • l'image directe d'un idéal par un endomorphisme surjective est un idéal

**SOMME DES IDÉAUX**  
 Soit  $I_1, \dots, I_n$  des idéaux de  $A$  alors  $\sum_{k=1}^n I_k$  et  $\bigcap_{k=1}^n I_k$  sont des idéaux

**IDÉAL ENGENDRÉ PAR UNE PARTIE**

**IDÉAL ENGENDRÉ PAR UNE PARTIE**  
 Soit  $S$  une partie d'un anneau  $A$ . On appelle idéal engendré par  $S$  l'intersection de tous les idéaux de  $A$  contenant  $S$  : c'est donc le plus petit idéal (au sens de l'inclusion) de  $A$  contenant  $S$ .

**IDÉAL PRINCIPAL**  
 L'idéal qui engendré par  $\{a\}$  est  $aA = \{ab \mid b \in A\}$  dit principal

**DIVISIBILITÉ DANS UN ANNEAU INTÈGRE**

On suppose dans cette section que  $A$  est intègre et soit  $a, b$  et  $c \in A$

**DÉFINITION**  
 On dit que  $a$  divise  $b$ , ce que l'on note  $a \mid b$ , s'il existe  $n \in A$  tel que  $b = na$ . La relation de divisibilité est réflexive et transitive.

**PROPRIÉTÉ**  
 Si  $c$  divise  $a$  et  $b$ , alors  $c$  divise l'expression  $au + bv$  pour tout  $u, v \in A$

**LIEN DIVISIBILITÉ ET IDÉAUX**  
 On a  $a \mid b \Leftrightarrow bA \subset aA$

**PROPRIÉTÉ**  
 On a  $\begin{cases} a \mid b \\ b \mid a \end{cases} \Leftrightarrow aA = bA \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \varepsilon \in U(A) \\ b = \varepsilon a \end{cases}$   
 Au quel cas on dit alors que  $a$  et  $b$  sont associés, ce que l'on note  $a \sim b$

**IDÉAUX DE  $\mathbb{Z}$**

**LES IDÉAUX DE  $\mathbb{Z}$**   
 Soit  $I$  un idéal de  $\mathbb{Z}$ , alors il existe un unique  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $I = n\mathbb{Z}$

**PPCM ET PGCD**  
 Soit  $a, b \in \mathbb{Z}$   
 •  $\text{pgcd}(a, b)$  est le générateur positif ou nul de l'idéal  $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ .  
 •  $\text{ppcm}(a, b)$  est le générateur positif ou nul de l'idéal  $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$ .

**COROLLAIRE**  
 Soit  $a, b \in \mathbb{Z}$ , alors il existe  $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$  tel que  $au + bv = a \wedge b$

**THÉORÈME DE BEZOUT**  
 Soit  $a, b \in \mathbb{Z}$ . Alors  $a \wedge b = 1 \Leftrightarrow \exists u, v \in \mathbb{Z}; \quad au + bv = 1$   
 $u, v$  sont appelés les coefficients de Bezout

**LEMME DE GAUSS**  
Soient  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ . Alors  $\begin{cases} a|bc \\ a \wedge b = 1 \end{cases} \Rightarrow a|c$ .

**L'ÉQUATION  $ax + by = c$**   
 • L'équation  $ax + by = c$  admet une solution si, et seulement, si  $a \wedge b | c$ .  
 • Si  $a \wedge b | c$  et  $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z}^2$  une de ses solutions, alors l'ensemble des solutions de cette équation est :  $S = \left\{ \left( x_0 - \frac{kb}{a \wedge b}, y_0 + \frac{ka}{a \wedge b} \right) \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$

**L'ANNEAU  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$**

**PROPRIÉTÉ**  
 •  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$  est un anneau commutatif.  
 •  $\cup \left( \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} \right) = \{ \bar{x}, x \in [0, n-1] \text{ et } x \wedge n = 1 \}$

**PROPRIÉTÉ**  
Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Alors  $n$  est premier ssi  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  est un corps ssi  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  est intègre

**INDICATEUR D'EUCLER**

**DÉFINITION**  
Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , le nombre des éléments inversibles dans l'anneau  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  se note  $\varphi(n)$ . L'application  $\varphi$  est appelée l'indicateur d'Euler

**CHINOIS**  
Soit  $n$  et  $m$  deux nombres premiers entre eux, alors pour tout  $(a, b) \in \mathbb{Z}$ ,  
 1. il existe une solution  $k_1 \in \mathbb{Z}$  au système de congruences :  $\begin{cases} k \equiv a \pmod{n} \\ k \equiv b \pmod{m} \end{cases}$   
 2. un entier  $k \in \mathbb{Z}$  vérifie le système précédent si, et seulement si :  $k \equiv k_1 \pmod{[mn]}$

**CALCUL DE  $\varphi$**   
 • Si  $m \wedge n = 1$ , alors  $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$   
 • Soit  $p$  un nombre premier et  $k \in \mathbb{N}^*$ , alors  $\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}$   
 • Soit  $n = \prod_{i=1}^r p_i^{k_i}$  est la décomposition en facteurs premiers de l'entier  $n$ .  
 Alors  $\varphi(n) = \prod_{i=1}^r \left( p_i^{k_i} - p_i^{k_i-1} \right) = n \prod_{i=1}^r \left( 1 - \frac{1}{p_i} \right)$

**THÉORÈME D'EUCLER**  
Soit  $n$  un entier strictement positif et  $a$  un entier premier avec  $n$ , alors  $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$ .

**PETIT THÉORÈME DE FERMAT**  
Soit  $p$  un nombre premier. Alors  
 1.  $\alpha^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$  pour tout  $\alpha \wedge p = 1$   
 2.  $\alpha^p \equiv \alpha \pmod{p}$  pour tout  $\alpha \in \mathbb{Z}$

**IDÉAUX DE  $\mathbb{K}[X]$**

**DÉFINITION**  
Un polynôme est dit normalisé s'il est nul ou s'il est unitaire

**PROPRIÉTÉ**  
Tout idéal  $I$  de  $\mathbb{K}[X]$  peut s'écrire de façon unique sous la forme :  $P\mathbb{K}[X]$  avec  $P \in \mathbb{K}[X]$  normalisé. Le polynôme  $P$  s'appelle le générateur normalisé de  $I$ .

**PROPRIÉTÉ**  
Soit  $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ .  
 • Le PGCD de  $P$  et  $Q$  est le générateur unitaire de l'idéal  $P\mathbb{K}[X] + Q\mathbb{K}[X]$ .  
 • Le PPCM de  $P$  et  $Q$  est le générateur unitaire de l'idéal  $P\mathbb{K}[X] \cap Q\mathbb{K}[X]$ .

**POLYNÔMES DE BEZOUT**  
Soit  $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ . Si  $D$  est le PGCD de  $P$  et  $Q$ , alors il existe  $(U, V) \in \mathbb{K}[X]^2$  tel que  $PU + QV = D$ . Cette relation s'appelle une relation de Bézout entre  $P$  et  $Q$

**THÉORÈME DE BEZOUT**  
Soit  $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ . Alors  $P \wedge Q = 1 \iff \exists U, V \in \mathbb{K}[X]; UP + VQ = 1$ .  $U, V$  sont appelés les coefficients de Bezout

**LEMME DE GAUSS**  
Soient  $P, Q, R \in \mathbb{K}[X]$ . Alors  $\begin{cases} P|QR \\ P \wedge Q = 1 \end{cases} \Rightarrow P|R$ .

**POLYNÔMES IRRÉDUCTIBLES**

**DÉFINITION**  
Soit  $P \in \mathbb{K}[X]$  un polynôme non constant. On dit que  $P$  est irréductible dans  $\mathbb{K}[X]$  ssi ses seuls diviseurs sont les constantes et les polynômes qui lui sont associés.  $P$  est dit composé ou réductible s'il n'est pas irréductible (dans  $\mathbb{K}[X]$ ).

**PROPRIÉTÉ**  
Soit  $A, B \in \mathbb{K}[X]$  et  $P$  et  $Q$  deux polynômes irréductibles de  $\mathbb{K}[X]$ . Alors  
 1.  $P|A$  ou  $A \wedge P = 1$   
 2.  $P$  et  $Q$  sont associés ou  $P \wedge Q = 1$   
 3. **Le lemme d'Euclide** :  $P|AB \Rightarrow P|A$  ou  $P|B$

**COROLLAIRE**  
Soient  $A_1, \dots, A_n$  sont des polynômes et  $P$  un polynôme irréductible. Alors  

$$P \mid \prod_{k=1}^n A_k \Rightarrow \exists i \in [1, n], P \mid A_i$$

**PROPRIÉTÉ**  
Soit  $A$  un polynôme non constant de  $\mathbb{K}[X]$ .  $\exists \lambda \in \mathbb{K}^*, \exists n \in \mathbb{N}^*, \exists P_1, \dots, P_n$  polynômes irréductibles de  $\mathbb{K}[X]$  unitaires et deux à deux distincts et  $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{N}^*$ , tels que :  $A = \lambda \prod_{k=1}^n P_k^{\alpha_k}$ . De plus cette décomposition est unique à l'ordre près des facteurs, on l'appelle décomposition primaire de  $A$ .

**LES POLYNÔMES COMPLEXES**

**THÉORÈME DE D'ALEMBERT-GAUSS**  
Tout polynôme non constant de  $\mathbb{C}[X]$  possède au moins une racine.

**PROPRIÉTÉ**  
 • Les polynômes irréductibles de  $\mathbb{C}[X]$  sont les polynômes de degré 1.  
 • Tout polynôme de  $\mathbb{C}[X]$  est scindé sur  $\mathbb{C}$ .

**POLYNÔMES RÉELS**

**PROPRIÉTÉ**  
Les polynômes irréductibles de  $\mathbb{R}[X]$  sont :  
 1. les polynômes de degré 1,  
 2. les polynômes de degré 2 de discriminant strictement négatif

**PROPRIÉTÉ**  
Tout polynôme  $P \in \mathbb{R}[X]$  possède une unique décomposition, à l'ordre près, de la forme :  $P = C(P) \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{\alpha_i} \times \prod_{j=1}^s (X^2 + b_j X + c_j)^{\beta_j}$ . Avec :  
 •  $C(P)$  est le coefficient dominant de  $P$ ;  
 •  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  est la suite des racines réelles distinctes de  $P$  et  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  la suite des multiplicités associées  
 • les polynômes  $X^2 + b_j X + c_j$  sont deux à deux distincts et irréductibles dans  $\mathbb{R}[X]$  pour tout  $j \in [1, s]$ .

**ALGÈBRE**

**DÉFINITION**  
Soit un corps commutatif  $\mathbb{K}$  et un ensemble  $A$  muni de deux lois de composition interne  $+$ ,  $\times$  et d'une loi de composition externe  $\cdot$ . On dit que  $(A, +, \times, \cdot)$  est un algèbre sur  $\mathbb{K}$  si et seulement si :  
 1.  $(A, +, \cdot)$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel;  
 2.  $(A, +, \times)$  est un anneau;  
 3.  $\forall x, y \in A, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \alpha \cdot (x \times y) = (\alpha \cdot x) \times y = x \times (\alpha \cdot y)$

**SOUS-ALGÈBRE**  
Soit  $(A, +, \times, \cdot)$  une  $\mathbb{K}$ -algèbre et  $\mathbb{B} \subset A$ . On dit  $\mathbb{B}$  est une sous-algèbre de  $A$  si, et seulement, si  
 1.  $1_A \in \mathbb{B}$   
 2.  $\forall x, y \in \mathbb{B}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \quad \alpha x + \beta y \in \mathbb{B}$   
 3.  $\forall x, y \in \mathbb{B}, x \times y \in \mathbb{B}$   
 Alors munie des lois restreintes,  $\mathbb{B}$  est une  $\mathbb{K}$ -algèbre.

**DÉFINITION**  
Soient  $(A, +, \times, \cdot)$  et  $(A', +, \times, \cdot)$  deux  $\mathbb{K}$ -algèbres. On dit  $f : A \rightarrow A'$  est un morphisme d'algèbres si et seulement si :  
 1.  $f(1_A) = 1_{A'}$   
 2.  $\forall x, y \in A, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \quad f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$   
 3.  $\forall x, y \in A, f(x \times y) = f(x) \times f(y)$

$E$  désigne un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ).

**NORMES**



**NORME**

On appelle *norme* toute application  $N : E \rightarrow \mathbb{R}$  tel que :

1. Pour tout  $x \in E$ ,  $N(x)$  est bien définie et  $N(x) \in \mathbb{R}^+$  ;
2. **Séparation :**

$$\forall x \in E, \quad N(x) = 0 \implies x = 0_E$$

3. **Homogénéité :**

$$\forall x \in E, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \quad N(\alpha \cdot x) = |\alpha| \cdot N(x)$$

4. **Sous-additivité ou inégalité de Minkowski :**

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad N(x + y) \leq N(x) + N(y)$$

Les normes sont usuellement notées  $N(\cdot)$ ,  $\|\cdot\|$  ou  $|\cdot|$ .



**SECONDE INÉGALITÉ TRIANGULAIRE**

$$\forall x, y \in E, \quad \|\|x\| - \|y\|\| \leq \|x - y\|$$



**ALGÈBRE NORMÉE**

Une algèbre normée est une  $\mathbb{K}$ -algèbre  $A$  muni d'une norme d'espace vectoriel qui vérifie :

$$\forall x, y \in A \quad \|xy\| \leq \|x\| \|y\|.$$

En d'autres termes la norme étant en outre sous-multiplicative.

**DISTANCE ASSOCIÉE**



**DISTANCE**

On appelle distance associée à la norme  $\|\cdot\|$  sur  $E$  l'application  $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}^+$  définie par

$$d(x, y) = \|x - y\|$$



**DISTANCES À UNE PARTIE**

Soit  $x \in E$  et  $A \subset E$  avec  $A$  non vide. On appelle distance de  $x$  à  $A$  le nombre  $d(x, A) = \inf \{d(x, y), y \in A\}$ .



**PROPRIÉTÉ**

Soit  $A$  une partie non vide de  $E$ . Alors

$$\forall x, y \in E, \quad |d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$$

**BOULES**



**BOULE OUVERTE - BOULE FERMÉE**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé. Soit  $a \in E, r \in \mathbb{R}_+^*$ .

- On appelle boule ouverte de centre  $a$  de rayon  $r$  l'ensemble :  $B(a, r) = \{x \in E \mid \|x - a\| < r\}$
- On appelle boule fermée de centre  $a$  de rayon  $r$  l'ensemble :  $B_f(a, r) = \{x \in E \mid \|x - a\| \leq r\}$
- On appelle sphère de centre  $a$  et de rayon  $r$  l'ensemble :

$$S(a, r) = \{x \in E \mid \|x - a\| = r\}$$

Si  $a = O$  et  $r = 1$ , on parle des boules unités.



**PROPRIÉTÉ**

Les boules ouvertes et fermées de  $E$  sont convexes de  $E$ .

**BORNITUDE**

Soit  $E$  un espace vectoriel normé de norme notée  $\|\cdot\|_E$ .



**PARTIE BORNÉE**

Une partie  $A$  non vide de  $E$  est dite bornée si  $\exists k \in \mathbb{R}^+$  tel que  $\forall x \in A, \|x\|_E \leq k$ . Autrement-dit  $A \subset B_f(O, k)$



**FONCTION BORNÉE**

Une fonction  $f : X \rightarrow E$  où  $X$  est un ensemble quelconque non vide est dite bornée si la partie  $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$  est bornée. Ou encore  $\exists k \in \mathbb{R}^+$  tel que  $\forall x \in X, \|f(x)\|_E \leq k$ .



**PROPRIÉTÉ**

L'espace vectoriel  $B(X, E)$  des fonctions  $f : X \rightarrow E$  bornées où  $X$  non vide et  $E$  un espace vectoriel normé est lui-même normé par  $\|f\|_\infty = \sup\{\|f(x)\|_E \mid x \in X\}$ .



**EXEMPLE**

$\ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ , l'ensemble des suites numériques bornées, est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé par  $\|(u_n)\|_\infty := \sup\{|u_n| \mid n \in \mathbb{N}\}$

**NORMES EUCLIDIENNES**



**DÉFINITION**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. On appelle produit scalaire sur  $E$  toute application  $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant

1.  $\varphi$  est bilinéaire
2.  $\varphi$  est symétrique i.e.  $\forall x, y \in E, \varphi(x, y) = \varphi(y, x)$
3.  $\varphi$  est positive i.e.  $\forall x \in E, \varphi(x, x) \geq 0$
4.  $\varphi$  est définie i.e.  $\forall x \in E, \varphi(x, x) = 0 \implies x = 0$ .

On dit qu'un produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique définie positive.



**ESPACE PRÉHILBERTIEN RÉEL**

On appelle espace préhilbertien réel tout  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire sur  $\mathbb{R}$ .

Si de Un espace préhilbertien réel de dimension finie est dit espace euclidien



**CAUCHY-SCHWARZ**

Si  $\varphi$  est un produit scalaire sur le  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ , alors :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad |\varphi(x, y)|^2 \leq \varphi(x, x) \cdot \varphi(y, y)$$



**PROPRIÉTÉ**

Si  $\varphi$  est un produit scalaire sur le  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ , alors  $N : E \rightarrow \mathbb{R}^+, x \mapsto \sqrt{\varphi(x, x)}$  est une norme sur  $E$ , appelée norme euclidienne associée à  $\varphi$ .

**Normes usuelles**

**NORMES USUELLES SUR  $\mathbb{K}^n$**

Pour  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ , on pose

$$\|x\|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}, \quad \|x\|_\infty = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} (|x_i|)$$



**PROPRIÉTÉ**

Les applications  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$  et  $\|\cdot\|_\infty$  sont des normes sur  $\mathbb{K}^n$

**NORMES USUELLES SUR  $M_{n,p}(\mathbb{K})$**

Pour  $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ , on pose

$$\|A\|_1 := \sup_{1 \leq j \leq p} \sum_{i=1}^n |a_{i,j}|, \quad \|A\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^p |a_{i,j}|, \quad \|A\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p |a_{i,j}|^2}$$



**PROPRIÉTÉ**

Les applications  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$  et  $\|\cdot\|_\infty$  sont des normes sur  $M_{n,p}(\mathbb{K})$  et lorsque  $n = p$  ces normes sont sous-multiplicatives

**NORMES DE CONVERGENCE**

Soit  $[a, b]$  un segment non trivial de  $\mathbb{R}$  et  $E = C([a, b], \mathbb{K})$ . Pour tout  $f \in E$ , on pose

$$\|f\|_1 := \int_a^b |f(t)| dt, \quad \|f\|_2 := \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt}, \quad \|f\|_\infty := \sup_{t \in [a, b]} |f(t)|$$



**PROPRIÉTÉ**

Les applications  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$  et  $\|\cdot\|_\infty$  sont des normes sur  $C([a, b], \mathbb{K})$



**DÉFINITION**

1.  $\|\cdot\|_1$  est appelée **norme de la convergence en moyenne**.
2.  $\|\cdot\|_2$  est appelée **norme de la convergence en moyenne quadratique**.
3.  $\|\cdot\|_\infty$  est appelée **norme de la convergence uniforme**

**NORME PRODUIT**

**PROPRIÉTÉ**  
 Si  $E_1, \dots, E_n$  sont de  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normés respectivement par des normes  $\|\cdot\|_1, \dots, \|\cdot\|_n$ , alors l'application

$$\|\cdot\| : \begin{cases} E_1 \times \dots \times E_n & \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x = (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto \|x\| = \max(\|x_1\|_1, \dots, \|x_n\|_n) \end{cases}$$

est une norme sur l'espace vectoriel produit  $E_1 \times \dots \times E_n$ . La norme  $\|\cdot\|$  est souvent appelé norme produit.

**SUITES CONVERGENTES**

$(E, \|\cdot\|)$  désigne un espace normé.

**DÉFINITION**  
 On dit qu'une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $E$  tend vers  $\ell \in E$  si  $\|u_n - \ell\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies \|u_n - \ell\| \leq \varepsilon$$

$\ell$  est unique, appelé la limite de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , et on note  $\ell = \lim u_n$  ou  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ .

**DÉFINITION**  
 Une suite divergente est une suite non convergente.

**DOMINATION**  
 Soit  $(u_n)$  une suite de  $E$  et  $\ell \in E$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- La suite  $(u_n)$  converge vers  $\ell$
- Il existe une suite réelle et positive  $(\alpha_n)_n$  convergeant vers 0 et telle que  $\forall n \in \mathbb{N}; \|u_n - \ell\| \leq \alpha_n$

**OPÉRATIONS SUR LES SUITES CONVERGENTES**

**PROPRIÉTÉ**  
 Si  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \in E$ , alors  $\|u_n\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \|\ell\|$

**PROPRIÉTÉ**  
 Toute suite convergente est bornée

**OPÉRATIONS ALGÈBRIQUES**

- Si  $\alpha_n \in \mathbb{K} \rightarrow \alpha$  et  $u_n \rightarrow \ell \in E$  alors  $\alpha_n \cdot u_n \rightarrow \alpha \cdot \ell$ .
- Si  $u_n \rightarrow \ell$  et  $v_n \rightarrow \ell'$  alors  $\lambda u_n + \mu v_n \rightarrow \lambda \ell + \mu \ell'$ .
- Si de plus,  $E$  est une algèbre normée,  $u_n v_n \rightarrow \ell \ell'$ .

**CAS D'UN ESPACE VECTORIEL PRODUIT**

**PROPRIÉTÉ**  
 Soit  $E = \prod_{j=1}^k E_j$  un espace vectoriel produit normé. Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$  i.e.  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in E$  donc  $u_n = (u_{n,1}, \dots, u_{n,k})$  où  $\forall j \in \llbracket 1, k \rrbracket, u_{n,j} \in E_j$ . Soit  $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_k) \in E$ .

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \iff \forall j \in \llbracket 1, k \rrbracket, u_{n,j} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell_j$$

**SUITES EXTRAITES, VALEURS D'ADHÉRENCE**

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé et  $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ .

**DÉFINITION**  
 On dit que  $(v_n)$  est une suite extraite de  $(u_n)$  s'il existe une application strictement croissante  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  telle que  $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{\varphi(n)}$ .

**PROPRIÉTÉ**  
 Une suite extraite d'une suite extraite est extraite

**PROPRIÉTÉ**  
 Si la suite  $(u_n)$  converge vers  $\ell$ , alors toutes les suites extraites de  $(u_n)$  convergent vers  $\ell$ .

**COROLLAIRE**  
 S'il existe une suite extraite divergente de  $(u_n)$  ou s'il existe deux suites extraites de  $(u_n)$  qui admettent des limites différentes, alors la suite  $(u_n)$  diverge

**LES SUITES EXTRAITES  $(u_{2n})$  ET  $(u_{2n+1})$**   
 Si  $(u_n)$  est une suite telle que les deux sous-suites  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  convergent vers une même limite  $\ell$ , alors la suite  $(u_n)$  converge vers  $\ell$ .

**VALEURS D'ADHÉRENCE**

**VALEUR D'ADHÉRENCE**  
 Soit  $(u_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$  et  $\alpha \in E$ . On dit que  $\alpha$  est valeur d'adhérence de la suite  $(u_n)_n$  si elle est limite d'une suite extraite de  $(u_n)_n$ .

**PROPRIÉTÉ**  
 Toute suite convergente admet une et une seule valeur d'adhérence.

**COROLLAIRE**  
 Toute suite ayant au moins deux valeurs d'adhérence est divergente.

**COROLLAIRE**  
 Toute suite n'ayant pas de valeur d'adhérence est divergente.

**PROPRIÉTÉ**  
 Soit  $\ell \in E$ . Alors  $\ell$  est une valeur d'adhérence de  $(u_n)$ , si et seulement, si

$$\forall \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, \|u_n - \ell\| \leq \varepsilon$$

**PROPRIÉTÉ**  
 Soit  $\ell \in E$ .  $(u_n)$  ne converge pas vers  $\ell$  si et seulement si  $\exists \varepsilon > 0$  et il existe une suite  $(u_{\varphi(n)})$  extraite de  $(u_n)$  tels que  $\forall n \in \mathbb{N}, \|u_{\varphi(n)} - \ell\| \geq \varepsilon$

**THÉORÈME DE BOLZANO-WEIERSTRASS**  
 Toute suite **numérique** bornée admet au moins une valeur d'adhérence.

**NORMES ÉQUIVALENTES**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -evn et  $N_1$  et  $N_2$  deux normes sur  $E$ .

**DÉFINITION**  
 On dit que  $N_1$  est dominée par  $N_2$  s'il existe  $\alpha \in \mathbb{R}^{*+}$  tel que :

$$\forall x \in E, N_1(x) \leq \alpha N_2(x)$$

**NORMES ÉQUIVALENTES**  
 On dit que  $N_1$  et  $N_2$  sont équivalentes si  $N_1$  est dominée par  $N_2$  et  $N_2$  est dominée par  $N_1$  ou encore,  $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$  tels que

$$\forall x \in E, \alpha N_2(x) \leq N_1(x) \leq \beta N_2(x)$$

On note  $N_1 \sim N_2$

**COMPARAISON DES NORMES USUELLES SUR  $\mathbb{K}^n$**   
 Pour tout  $x \in \mathbb{K}^n$

$$\begin{aligned} \|x\|_{\infty} &\leq \|x\|_1 \leq n \|x\|_{\infty} \\ \|x\|_{\infty} &\leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_{\infty} \\ \|x\|_2 &\leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n} \|x\|_2 \end{aligned}$$

**MÉTHODE PRATIQUE**  
 Pour montrer que les deux normes  $N_1$  et  $N_2$  ne sont pas équivalentes

- on cherche une suite  $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$  telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{N_2(x_n)}{N_1(x_n)} = +\infty$  ou  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{N_1(x_n)}{N_2(x_n)} = +\infty$ .
- on cherche une suite  $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$  qui converge pour une norme et diverge pour l'autre

**CARACTÉRISATION GÉOMÉTRIQUE DE L'ÉQUIVALENCE**  
 Les normes  $N_1$  et  $N_2$  sont équivalentes si, et seulement si,

$$\exists \alpha, \beta > 0, B_{N_2}(0, \alpha) \subset B_{N_1}(0, 1) \subset B_{N_2}(0, \beta)$$

**THÉORÈME DE RIESZ**  
 Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

$E$  désigne un  $\mathbb{K}$ -evn ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ )

**VOISINAGES**

Soit  $a$  un élément de  $E$



**DÉFINITION**

On dit qu'une partie  $V$  de  $E$  est un voisinage de  $a$  s'il existe  $r > 0$  tel que  $B_o(a, r) \subset V$ .

**Notation** On note  $\mathcal{V}_E(a)$  ou  $\mathcal{V}(a)$  l'ensemble des voisinages de  $a$ .



**PROPRIÉTÉ**

- $V \in \mathcal{V}(a) \implies a \in V$
- Pour tout  $a \in E$ , l'ensemble  $\mathcal{V}(a) \neq \emptyset$
- $\left\{ \begin{array}{l} V \in \mathcal{V}_E(a) \\ W \subset V \end{array} \right. \implies W \in \mathcal{V}(a)$



**PROPRIÉTÉ**

Soit  $I$  un ensemble non vide et  $(V_i)_{i \in I}$  une famille de voisinage de  $a$ . Alors  $\bigcup_{i \in I} V_i \in \mathcal{V}(a)$ .  
Autrement-dit : Une réunion quelconque de voisinage de  $a$  est un voisinage de  $a$



**PROPRIÉTÉ**

Une intersection finie de voisinage de  $a$  est un voisinage de  $a$

**OUVERTS**



**DÉFINITION**

Soit  $\mathcal{O} \subset E$ .  
On dit que  $\mathcal{O}$  est un ouvert de  $E$  si  $\forall x \in \mathcal{O}, \exists \varepsilon > 0, B(a, \varepsilon) \subset \mathcal{O}$ .



**PROPRIÉTÉ**

- $\emptyset$  et  $E$  sont des ouverts de  $E$ .
- Une réunion quelconque d'ouverts de  $E$  est un ouvert de  $E$ .
- Une intersection finie d'ouverts de  $E$  est un ouvert de  $E$ .



**PROPRIÉTÉ**

- Une boule ouverte de  $E$  est un ouvert de  $E$ .
- Les ouverts de  $E$  sont des unions de boules ouvertes de  $E$ .



**PROPRIÉTÉ**

Soit  $E_1, \dots, E_n$  des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés.  
Si  $U_1, \dots, U_n$  sont respectivement des ouverts de  $E_1, \dots, E_n$  alors  $U_1 \times \dots \times U_n$  est un ouvert de l'espace vectoriel normé produit  $E = E_1 \times \dots \times E_n$  muni de la norme produit.

**FERMÉS**



**DÉFINITION**

On appelle fermé tout ensemble  $\mathcal{F}$  dont le complémentaire  $\mathbb{C}_E \mathcal{F}$  est ouvert.



**PROPRIÉTÉ**

- $\emptyset$  et  $E$  sont des fermés.
- Toute intersection quelconque de fermés est un fermé
- Toute réunion finie de fermés est un fermé.



**PROPRIÉTÉ**

- Les singletons et les parties finies sont des fermés dans  $E$ .
- Les boules fermées de  $E$  sont des fermés de  $E$ .
- Les sphères de  $E$  sont fermées dans  $E$ .



**CARACTÉRISATION SÉQUENTIELLE DES FERMÉS**

$\mathcal{F}$  est fermé, si et seulement, si toute suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $\mathcal{F}$  qui converge admet une limite qui appartient à  $\mathcal{F}$ .

**ADHÉRENCE D'UN PARTIE**



**ADHÉRENCE**

Soit  $A \in \mathcal{P}(E)$  et  $a \in E$ . On dit que  $a$  est adhérent à  $A$  si  $\forall r > 0, B(a, r) \cap A \neq \emptyset$ .  
 $\bar{A}$  l'adhérence de  $A$  est l'ensemble des points adhérents à  $A$ .



**CARACTÉRISATION SÉQUENTIELLE D'UN POINT ADHÉRENT**

$a \in \bar{A}$  ssi  $a$  est limite d'une suite d'éléments de  $A$ .



**PROPRIÉTÉ**

- Soit  $A, B \in \mathcal{P}(E)$ .
- $A \subset B \implies \bar{A} \subset \bar{B}$ ;
  - $A \subset \bar{A}$ ;
  - $\bar{A}$  est un fermé et on a :  $A$  fermé  $\Leftrightarrow A = \bar{A}$ ;
  - $\bar{A}$  est le plus petit fermé contenant  $A$ . Autrement dit, si  $A \subset \mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}$  est un fermé de  $E$  alors  $\bar{A} \subset \mathcal{F}$ .
  - $\bar{A}$  est l'intersection de tous les fermés contenant  $A$ .



**PROPRIÉTÉ**

Soit  $a \in E$  et  $r > 0$ , alors :  $\overline{B(a, r)} = B_f(a, r)$

**INTÉRIEUR D'UNE PARTIE**



**INTÉRIEUR**

Soit  $A \in \mathcal{P}(E)$  et  $a \in E$ . On dit que  $a$  est intérieur à  $A$  si  $\exists r > 0 / B(a, r) \subset A$ .  
L'intérieur de  $A$  est l'ensemble des points intérieurs à  $A$ . Noté  $\overset{\circ}{A}$ .



**PROPRIÉTÉ**

- Soit  $A, B \in \mathcal{P}(E)$ .
- $\overset{\circ}{A} \subset A$  et  $A \subset B \implies \overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$ ;
  - $\overset{\circ}{A}$  est ouvert et  $\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}} = \overset{\circ}{A}$ ;
  - $A$  ouvert  $\Leftrightarrow A = \overset{\circ}{A}$ .
  - $\overset{\circ}{A}$  est le plus grand ouvert contenu dans  $A$ . Autrement dit, si  $\mathcal{O} \subset A$  et  $\mathcal{O}$  est un ouvert de  $E$  alors  $\mathcal{O} \subset \overset{\circ}{A}$ .
  - $\overset{\circ}{A}$  est la réunion de tous les ouverts contenus dans  $A$ .

**FRONTIÈRE**



**FRONTIÈRE**

Soit  $A \in \mathcal{P}(E)$  avec  $E$  un espace vectoriel normé. La frontière de  $A$  est l'ensemble :  $\text{Fr}(A) = \bar{A} \setminus \overset{\circ}{A} = \bar{A} \cap \mathbb{C} \overset{\circ}{A}$



**PROPRIÉTÉ**

$\text{Fr}(A)$  est fermé de  $E$  et  $\text{Fr}(A) = \text{Fr}(\mathbb{C}A)$ .

**DENSITÉ**



**PARTIE DENSE**

On dit que  $A$  est dense dans  $E$  si  $\bar{A} = E$ .  
Soit  $B \subset E$ . On dit que  $A \subset B$  est dense dans  $B$  si  $B \subset \bar{A}$ .



**PROPRIÉTÉ**

$A$  est dense dans  $E$ , ssi  $\forall \varepsilon > 0, \forall x \in E, B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$   
ou encore  
 $A$  est dense dans  $E$ , ssi  $\forall \varepsilon > 0, \forall x \in E, \exists y \in A, d(x, y) < \varepsilon$ .



**CARACTÉRISATION SÉQUENTIELLE DE LA DENSITÉ**

$A$  est dense dans  $E$  ssi  $\forall x \in E, \exists (a_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$  tq  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = x$

**VOISINAGES, FERMÉS ET OUVERTS RELATIFS**

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé,  $A \subset E$  et  $a \in A$ .



**VOISINAGES RELATIFS À UNE PARTIE**

On appelle voisinage de  $a$  dans  $A$  ou relativement à  $A$  tout ensemble de la forme  $A \cap \mathcal{V}$  où  $\mathcal{V}$  est un voisinage de  $a$  dans  $E$ .  
L'ensemble des voisinage de  $a$  dans  $A$  est noté  $\mathcal{V}_A(a)$ .



**OUVERTS RELATIFS À UNE PARTIE**

On appelle ouvert dans  $A$  ou relativement à  $A$  tout ensemble de la forme  $A \cap \mathcal{O}$  où  $\mathcal{O}$  est un ouvert de  $E$ .



**FERMÉS RELATIFS À UNE PARTIE**

On appelle fermé dans  $A$  ou relativement à  $A$  tout ensemble de la forme  $A \cap \mathcal{F}$  où  $\mathcal{F}$  est un fermé de  $E$ .

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Soient  $(E, \|\cdot\|_E)$ ,  $(F, \|\cdot\|_F)$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés,  $\mathcal{D}$  une partie de  $E$ ,  $f : \mathcal{D} \rightarrow F$  une application et  $A \subset \mathcal{D}$

**LIMITES**

**LIMITE D'UNE FONCTION EN UN POINT**  
 Soit  $a \in \bar{A}$  et  $\ell \in F$ .  
 On dit que  $f$  admet pour limite  $\ell$  en  $a$  (ou au point  $a$ ) selon  $A$ , lorsque

$$\|f(x) - \ell\| \xrightarrow[x \in A]{x \rightarrow a} 0$$

Autrement-dit  $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0$  tel que  $\|x - a\|_E < \alpha$  et  $x \in A$ , alors  $\|f(x) - \ell\|_F \leq \varepsilon$ .

**PROPRIÉTÉ**  
 Si  $f$  admet une limite  $\ell$  en  $a \in \bar{A}$  selon  $A$ , alors  $\ell$  est unique et on le note  $\lim_{x \rightarrow a, x \in A} f(x)$

**PROPRIÉTÉ**  
 Les assertions suivantes sont équivalentes :

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ .
- $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, f(B(a, \eta) \cap A) \subset B(\ell, \varepsilon)$ .
- $\forall V \in \mathcal{V}(\ell), \exists U \in \mathcal{V}(a), f(U \cap A) \subset V$ .
- $\forall V \in \mathcal{V}(\ell), \exists U \in \mathcal{V}_A(a), f(U) \subset V$ .
- $\forall V \in \mathcal{V}(\ell), f^{-1}(V) \in \mathcal{V}_A(a)$ .

**PROPRIÉTÉ**  
 Si  $a \in \bar{A}$  et  $\ell = \lim_{x \rightarrow a, x \in A} f(x)$ . Alors

- $\ell \in \overline{f(A)}$
- il existe  $W \in \mathcal{V}_A(a)$  tel que  $f$  est bornée sur  $W$

**CARACTÉRISATIONS**

**CARACTÉRISATION SÉQUENTIELLE**  
 Soit  $a \in \bar{A}$  et  $\ell \in F$ . Les assertions suivantes sont équivalentes

- $\lim_{x \rightarrow a, x \in A} f(x) = \ell$
- Toute suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$  qui converge vers  $a$ , la suite  $(f(x_n))_n$  converge vers  $\ell$

**DOMINATION**  
 Soit  $f : \mathcal{D} \rightarrow F, A \subset \mathcal{D}$  et  $a \in \bar{A}$ . On suppose qu'il existe  $W \in \mathcal{V}_A(a)$  et  $g : W \rightarrow \mathbb{R}$  tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall x \in W, \|f(x) - \ell\| \leq g(x) \\ g(x) \xrightarrow[x \in A]{x \rightarrow a} 0 \end{array} \right.$$

Alors  $f(x) \xrightarrow[x \in A]{x \rightarrow a} \ell$

**LIMITE D'UNE FONCTION À VALEURS DANS UN ESPACE NORMÉ**

Soient  $F_1, \dots, F_n$  des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés respectivement par  $N_1, \dots, N_p$  et  $F = F_1 \times \dots \times F_p$  l'espace vectoriel normé produit.  
 Pour  $x = (x_1, \dots, x_p) \in F, \|x\| = \max_{1 \leq j \leq n} N_j(x_j)$ .  
 Considérons  $f : X \subset E \rightarrow F$ .  
 Pour tout  $x \in X, f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x))$  avec  $f_j(x) \in F_j$ . Les fonctions  $f_1, \dots, f_p$  sont appelées applications coordonnées de  $f$ .

**PROPRIÉTÉ**  
 $f$  tend vers  $b = (b_1, \dots, b_p)$  en  $a$  si, et seulement si, pour tout  $i \in \{1, \dots, p\}$   $f_i \xrightarrow[x \rightarrow a]{} b_i$ .  
 Autrement-dit

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = (\lim_{x \rightarrow a} f_1(x), \dots, \lim_{x \rightarrow a} f_p(x))$$

**LIMITES INFINIES**

Cas  $F = \mathbb{R}, \ell = \pm\infty$   
 — On dit que  $V \in \mathcal{V}(+\infty)$  s'il existe  $M \in \mathbb{R}$  tel que  $]M, +\infty[ \subset V$   
 — On dit que  $V \in \mathcal{V}(-\infty)$  s'il existe  $M \in \mathbb{R}$  tel que  $]-\infty, M[ \subset V$   
 — On dit que  $f$  tend vers  $+\infty$  en  $a$  selon  $A$ , lorsque pour tout  $M \in \mathbb{R}$  il existe  $\eta > 0$  tel que pour tout  $x \in A, \|x - a\| < \eta \implies f(x) \geq M$   
 — On dit que  $f$  tend vers  $-\infty$  en  $a$  selon  $A$ , lorsque pour tout  $M \in \mathbb{R}$  il existe  $\eta > 0$  tel que pour tout  $x \in A, \|x - a\| < \eta \implies f(x) \leq M$   
 Cas  $E = \mathbb{R}, a = \pm\infty$   
 — On dit que  $\infty$  est adhérent à  $A$  si pour tout  $V \in \mathcal{V}(\infty) : V \cap A \neq \emptyset$   
 — On dit que  $f$  tend vers  $\ell$  en  $+\infty$ , lorsque pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $M > 0$  tel que pour tout  $x \in A, x \geq A \implies \|f(x) - \ell\| < \varepsilon$   
 — On dit que  $f$  tend vers  $\ell$  en  $-\infty$ , lorsque pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $M > 0$  tel que pour tout  $x \in A, x \leq A \implies \|f(x) - \ell\| < \varepsilon$   
 Cas où  $\|x\| \rightarrow +\infty$   $A$  est non borné. On dit que  $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f(x) = b$  si pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $M > 0$  tel que pour tout  $x \in A; \|x\| \geq M \implies \|f(x) - \ell\| < \varepsilon$

**OPÉRATIONS SUR LES LIMITES**

**PROPRIÉTÉ**  
 Soient  $f, g \in F^E$  et  $a$  adhérent à  $A$ .

- Si  $f \xrightarrow[x \in A]{x \rightarrow a} \ell$  et  $g \xrightarrow[x \in A]{x \rightarrow a} \ell'$  alors  $f + g \xrightarrow[x \in A]{x \rightarrow a} \ell + \ell'$
- Si de plus  $F$  est une algèbre normée alors  $f.g \xrightarrow[x \rightarrow a]{} \ell.\ell'$

**PROPRIÉTÉ**  
 Soient  $f, g : E \rightarrow F, A \subset E$  et  $a$  adhérent à  $A$ .

- Si  $f \xrightarrow[x \in A]{x \rightarrow a} \ell$  et  $g \xrightarrow[x \in A]{x \rightarrow a} \ell'$  alors  $f.g \xrightarrow[x \rightarrow a]{} \ell.\ell'$
- Si  $f \xrightarrow[x \in A]{x \rightarrow a} \ell \in \mathbb{K}^*$ , alors il existe  $W \in \mathcal{V}_A(a)$  sur lequel  $f$  ne s'annule pas et  $\frac{1}{f} \xrightarrow[x \in A]{x \rightarrow a} \frac{1}{\ell} \in \mathbb{K}^*$

**PROPRIÉTÉ**  
 Soient  $\alpha : E \rightarrow \mathbb{K}, f : E \rightarrow F$  et  $a$  adhérent à  $A$ .  
 Si  $\alpha \xrightarrow[x \rightarrow a]{} \lambda$  et  $f \xrightarrow[x \rightarrow a]{} \ell$  alors  $\alpha f \xrightarrow[x \rightarrow a]{} \lambda.\ell$

**COMPOSITION**  
 Soient  $f : A \subset E \rightarrow F$  et  $g : B \subset F \rightarrow G$  telles que  $f(A) \subset B$  et  $a$  adhérent à  $A$ .  
 Si  $f \xrightarrow[x \rightarrow a]{} b$  et  $g \xrightarrow[x \rightarrow b]{} \ell$ , alors  $g \circ f \xrightarrow[x \rightarrow a]{} \ell$

**COROLLAIRE**  
 Si  $f \xrightarrow[x \rightarrow a]{} \ell$ , alors  $\|f\| \xrightarrow[x \rightarrow a]{} \|\ell\|$

**CONTINUITÉ**

**CONTINUITÉ SUR UNE PARTIE A**  
 Soit  $f : A \subset E \rightarrow F$  et  $a \in A$ .  
 — On dit que  $f$  est continue en  $a$  si  $\lim_{x \rightarrow a, x \in A} f(x) = f(a)$   
 — On dit que  $f$  est continue sur  $A$  si elle est continue en chaque point de  $A$ .

**Notation**  $\mathcal{C}(A, F)$  désigne l'ensemble des fonctions continues de  $A$  à valeurs dans  $F$

**FONCTIONS k-LIPSCHITZIENNES**  
 Soit  $f : E \rightarrow F$  où  $E$  et  $F$  sont des espaces vectoriels normés.  
 Soit  $k \in \mathbb{R}^+$ . On dit que  $f$  est  $k$ -lipschitzienne si :

$$\forall (x, y) \in E^2, \|f(x) - f(y)\|_F \leq k\|x - y\|_E$$

Lorsque  $0 < k < 1$ , on parle d'une fonction contractante

**PROPRIÉTÉ**  
 Toute application lipschitzienne est continue

**PROPRIÉTÉ**  
 $f$  est continue en  $a$  si, et seulement si,  $\forall (x_n) \in A^{\mathbb{N}}, (x_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a \implies f(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(a)$ .

**OPÉRATIONS SUR LES FONCTIONS CONTINUES**

**PROPRIÉTÉ**  
 1.  $\mathcal{C}(A, F)$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  
 2. Si  $F$  est une algèbre normée, alors  $\mathcal{C}(A, F)$  est une  $\mathbb{K}$ -algèbre

**EXEMPLE**  
 $f : \begin{cases} M_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow \mathbb{K} \\ M & \longmapsto \det M \end{cases}$  est continue

**EXEMPLE**  
 Tout fonction polynômiale sur  $\mathbb{K}^p$  est continue

**PROPRIÉTÉ**  
 Soient  $\alpha : A \subset E \rightarrow \mathbb{K}$  et  $f : A \subset E \rightarrow F$ .  
 Si  $\alpha$  et  $f$  sont continues alors  $\alpha \cdot f$  est continue.

**PROPRIÉTÉ**  
 Soient  $f : X \subset E \rightarrow F$  et  $g : Y \subset F \rightarrow G$  telle que  $f(X) \subset Y$ .  
 Si  $f$  et  $g$  sont continues alors  $g \circ f$  est continue.

**PROPRIÉTÉ**  
 Si  $F$  est de dimension finie alors  $f : X \subset E \rightarrow F$  est continue si, et seulement si, ses fonctions coordonnées dans une base de  $F$  le sont.

**PROPRIÉTÉ**  
 Si  $F$  est un espace normé produit alors  $f : X \subset E \rightarrow F$  est continue si, et seulement si, ses fonctions coordonnées le sont.

**CONTINUITÉ ET DENSITÉ**

**CONTINUITÉ ET DENSITÉ**  
 Soit  $f, g : A \subset E \rightarrow F$  deux fonctions continues. si  $B$  est dense dans  $A$  et  $f|_B = g|_B$ , alors  $f$  et  $g$  sont égales.

**CONTINUITÉ ET TOPOLOGIE**

**CONTINUITÉ ET TOPOLOGIE**  
 Soit  $f : A \subset E \rightarrow F$ . Les trois affirmations suivantes sont équivalentes :  
 1.  $f$  est continue sur  $A$ ;  
 2. l'image réciproque de tout ouvert de  $F$  est un ouvert de  $A$ ;  
 3. l'image réciproque de tout fermé de  $F$  est un fermé de  $A$ .

**COROLLAIRE**  
 $f : E \rightarrow F$  est continue, si et seulement si, l'image réciproque d'une partie ouverte (resp. fermée) de  $F$  est une partie ouverte de  $E$  (resp. fermée).

**EXEMPLE**  
 Soient  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  continue et  $\alpha \in \mathbb{R}$ .  
 1. Les ensembles  $\{x \in E / f(x) = \alpha\}, \{x \in E / f(x) \leq \alpha\}$  et  $\{x \in E / f(x) \geq \alpha\}$  sont fermés.  
 2. Les ensembles  $\{x \in E / f(x) \neq \alpha\}, \{x \in E / f(x) < \alpha\}$  et  $\{x \in E / f(x) > \alpha\}$  sont ouverts.

**CONTINUITÉ UNIFORME**

**DÉFINITION**  
 On dit que l'application  $f$  est uniformément continue si elle vérifie la relation :  
 $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 : \forall x, y \in A, \|x - y\| < \eta \implies \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$

**PROPRIÉTÉ**  
 Toute application uniformément continue est évidemment continue

**ATTENTION**  
 La réciproque est fautive comme le montrent les contre-exemples déjà vus dans le cadre des fonctions d'une variable réelle.

**CARACTÉRISATION SÉQUENTIELLE DE LA CONTINUITÉ UNIFORME**  
 $f$  est uniformément continue sur  $A$  ssi  $\forall (x_n), (y_n) \in A^{\mathbb{N}}, x_n - y_n \rightarrow 0 \implies f(x_n) - f(y_n) \rightarrow 0$

**MÉTHODE PRATIQUE**  
 Pour montrer que  $f$  n'est pas uniformément continue sur  $A$  on cherche deux suites  $(x_n), (y_n) \in A^{\mathbb{N}}$  tels que  $x_n - y_n \rightarrow 0$  et  $f(x_n) - f(y_n) \not\rightarrow 0$ .

**PROPRIÉTÉ**  
 Toute application lipschitzienne  $f$  d'une partie  $A$  de  $E$  vers  $F$  est uniformément continue.

**APPLICATIONS LINÉAIRES CONTINUES**

— On note  $\mathcal{L}_C(E, F)$  l'ensemble formé des applications linéaires continues de  $E$  vers  $F$ .  
 —  $\mathcal{L}_C(E)$  l'ensemble formé des endomorphismes continus de  $E$

**PROPRIÉTÉ**  
 $\mathcal{L}_C(E, F)$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $\mathcal{L}_C(E)$  est une  $\mathbb{K}$ -algèbre

**THÉORÈME FONDAMENTAL**  
 Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ . Les affirmations suivantes sont équivalentes :  
 1.  $u$  est continue ;  
 2.  $\exists k \in \mathbb{R}_+^*$  tel que  $\forall x \in E, \|u(x)\|_F \leq k \|x\|_E$ .  
 $u$  est continue, si et seulement si, l'ensemble  $\left\{ \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} \mid x \in E \setminus \{0\} \right\}$  est majoré

**MÉTHODE PRATIQUE**  
 Pour montrer qu'une application linéaire  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  n'est pas continue, il suffit de construire une suite  $(x_n) \in E \setminus \{0\}^{\mathbb{N}}$  telle que  $\frac{\|u(x_n)\|}{\|x_n\|} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$

**COROLLAIRE**  
 Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ . Les affirmations suivantes sont équivalentes :  
 1.  $u$  est lipschitzienne ;  
 2.  $u$  est continue ;

**PROPRIÉTÉ**  
 Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ . Les affirmations suivantes sont équivalentes :  
 1.  $u$  est continue sur  $E$  ;  
 2.  $u$  est continue en  $0_E$  ;  
 3.  $u$  est bornée sur la boule unité fermée  $\mathcal{B}_f(0_E, 1)$  ;  
 4.  $u$  est bornée sur la sphère unité  $\mathcal{S}(0_E, 1)$ .

**PROPRIÉTÉ**  
 Soit  $N_1$  et  $N_2$  deux normes de  $E$  un espace vectoriel normé. Les affirmations suivantes sont équivalentes :  
 1.  $N_1$  et  $N_2$  sont équivalentes ;  
 2.  $Id : \begin{cases} (E, N_1) \Rightarrow (E, N_2) \\ x \mapsto x \end{cases}$  est bicontinue ;

**APPLICATIONS MULTILINÉAIRES**

**PROPRIÉTÉ**  
 Soient  $E, F$  et  $G$  trois  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés et  $u : E \times F \rightarrow G$  bilinéaire. Les assertions suivantes sont équivalentes :  
 1.  $u$  est continue sur  $E \times F$ .  
 2.  $u$  est continue en  $(0, 0)$ .  
 3.  $u$  est bornée sur la boule unité fermée  $\mathcal{B}_f((0, 0), 1)$ .  
 4.  $\exists k \in \mathbb{R}, \forall x \in E, \forall y \in F, \|B(x, y)\| \leq k \|x\| \|y\|$ .

**PROPRIÉTÉ**  
 Soient  $E_1, \dots, E_n, F$  des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés et  $M : E_1 \times \dots \times E_n \rightarrow F$  une application multilinéaire. Les assertions suivantes sont équivalentes :  
 1.  $M$  est continue sur  $E_1 \times \dots \times E_n$ .  
 2.  $M$  est continue en  $(0, \dots, 0)$ .  
 3.  $M$  est bornée sur la boule unité fermée  $\mathcal{B}_f((0, \dots, 0), 1)$ .  
 4.  $\exists k \in \mathbb{R}, \forall (x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_n,$   

$$\|B(x_1, \dots, x_n)\| \leq k \|x_1\| \cdots \|x_n\|$$

On pose  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .  
Soient  $E, F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés,  $A \subset E$  et  $a, b \in A$ .

**COMPACTITÉ**

Soit  $K$  une partie de  $E$

**PARTIE COMPACTE**

On dit que  $K$  est compacte dans  $E$  si toute suite d'éléments de  $K$  admet une valeur d'adhérence dans  $K$ .

**PROPRIÉTÉ**

- Tout compact est nécessairement fermé et borné.
- Tout fermé d'un compact est compact  $E$ .
- Le produit cartésien de compacts est compact

**THÉORÈME DE BOLZANO-WEIERSTRASS**

De toute suite bornées de  $(\mathbb{K}^d)^{\mathbb{N}}$  où  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  et  $d \in \mathbb{N}^*$ , on peut extraire une suite convergente.

**CONSÉQUENCE**

les parties compactes de  $\mathbb{K}^d$  sont les parties fermées bornées.

**IMAGE D'UN COMPACT PAR UNE FONCTION CONTINUE**

Soit  $f \in C(E, F)$  et  $A$  un compact de  $E$ , alors  $f(A)$  est un compact de  $F$ .

**PROPRIÉTÉ**

On suppose que  $A$  est compact et  $f : A \rightarrow F$  continue sur  $A$ , alors  $f(A)$  est borné et il existe  $a \in A$  tel que  $\|f(a)\| = \sup_{x \in A} \|f(x)\|$ .  
(On dit que  $f$  atteint la borne supérieure de sa norme).

**PROPRIÉTÉ**

Soit  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  continue où  $A$  est un compact d'un espace vectoriel normé  $E$ , alors  $f$  est bornée et atteint ses bornes.

**THÉORÈME DE HEINE**

Toute fonction continue sur un compact est uniformément continue.

**CONNEXITÉ PAR ARCS**

**CONNEXITÉ PAR ARCS**

On appelle chemin de  $a$  à  $b$  dans  $A$  toute application continue  $\gamma : [0, 1] \rightarrow A$  telle que  $\gamma(0) = a$  et  $\gamma(1) = b$ .  
On dit que  $A$  est connexe par arcs si pour tous  $x, y \in A$  il existe un chemin de  $x$  à  $y$  dans  $A$ .

**PROPRIÉTÉ**

Si  $A$  convexe alors  $A$  est connexe par arcs.

**PARTIE ÉTOILÉE**

$A$  une partie d'un espace vectoriel normé  $E$  est dite étoilée si  $\exists a \in A$  tel que  $\forall b \in A, [a, b] \subset A$ .

**PROPRIÉTÉ**

Toute partie étoilée est connexe par arcs

**CONNEXITÉ PAR ARCS ET CONTINUITÉ**

Soit  $f : A \rightarrow F$  continue. Si  $A$  est connexe par arcs alors  $f(A)$  est connexe par arcs.

**PRODUIT DE CONNEXES PAR ARCS**

Soient  $A \subset E$  et  $B \subset F$  connexes par arcs alors  $A \times B$  est connexes par arcs.

**LES CONNEXES PAR ARCS DE  $\mathbb{R}$**

Les connexes par arcs de  $\mathbb{R}$  sont les intervalles.

**COROLLAIRE**

On suppose que  $f \in C(A, \mathbb{R})$  et  $A$  connexe par arcs, alors  $f(A)$  est un intervalle.

**THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES**

Soient  $A$  connexe par arcs,  $f \in C(A, \mathbb{R})$  et  $(a, b) \in A^2$ . Alors pour tout  $m$  entre  $f(a)$  et  $f(b)$  il existe  $c \in A$  tel que  $f(c) = m$ .

**LES OFS D'UN CONNEXE PAR ARCS**

Soit  $D$  une partie connexe par arcs de  $E$ , alors les seuls parties ouvertes et fermées de  $D$  sont  $\emptyset$  et  $D$

**CONSÉQUENCE**

Soit  $E$  un espace vectoriel normé. Les seules parties, à la fois, ouvertes et fermées de  $E$  sont  $\emptyset$  et  $E$

**PROPRIÉTÉ**

Soit  $A$  une partie d'espace vectoriel normé  $E$ . La relation  $\mathcal{R}$  définie sur  $A$  par : pour tout  $(x, y) \in A^2$

$$x \mathcal{R} y \iff \exists \gamma \in C([0, 1], A), \begin{cases} \gamma(0) = x \\ \gamma(1) = y \end{cases}$$

est une relation d'équivalence

**DÉFINITION**

Soit  $a \in A$ . La classe de  $a$  pour cette relation est appelée la composante connexe par arcs de  $a$  dans  $A$  et notée  $C(a)$ .

**PROPRIÉTÉ**

Une composante connexe par arcs est connexe par arcs.

**PROPRIÉTÉ**

Si  $\mathcal{O}$  est un ouvert de  $E$ , alors toutes les composantes connexes par arcs de  $A$  sont ouvertes

**PROPRIÉTÉ**

Tout ouvert de  $E$  est union disjointe de parties à la fois ouvertes et connexes par arcs.

**ESPACES VECTORIELS DE DIMENSION FINIE**

**THÉORÈME : de Riesz**

Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

**THÉORÈME DE BOLZANO-WEIERSTRASS**

Si  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ), toute suite bornée d'éléments de  $E$  admet au moins une valeur d'adhérence.

**PROPRIÉTÉ**

Les compacts d'un espace vectoriel normé de dimension finie sont ses fermés bornés.

**PROPRIÉTÉ**

Une suite bornée d'un espace normé de dimension finie converge si, et seulement si, elle possède une unique valeur d'adhérence.

**PROPRIÉTÉ**

Si  $E$  est de dimension finie alors toute application linéaire de  $E$  vers  $F$  est continue.  
En conséquence,  $\mathcal{L}(E, F) = \mathcal{L}_c(E, F)$ .

**PROPRIÉTÉ**

Si  $E$  et  $F$  sont de dimensions finies alors toute application bilinéaire de  $E \times F$  vers  $G$  est continue.

**ESPACE DE BANACH**

**SUITES DE CAUCHY**

Une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$  est dite de Cauchy si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, n \geq m \geq n_0 \Rightarrow \|u_n - u_m\|_E \leq \varepsilon$$

**PROPRIÉTÉ**

1. Toute suite convergente est une suite de Cauchy.
2. Toute suite de Cauchy est bornée.
3. Toute suite de Cauchy qui admet une valeur d'adhérence est convergente.
4. Une suite de Cauchy possède au plus une valeur d'adhérence est convergente.

**ESPACE DE BANACH**

On appelle espace de Banach tout espace vectoriel normé complet.

**PROPRIÉTÉ**

Tout espace vectoriel normé de dimension finie est un espace de Banach (i.e. est complet).

**COROLLAIRE**

Dans un espace vectoriel normé, non nécessairement de dimension finie, tout sous-espace vectoriel de dimension finie est est de Banach. En particulier, il est fermé.

$E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $u, v \in \mathcal{L}(E)$  et  $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ .  
 $F, F_1, \dots, F_n$  sont des sous-espaces vectoriels de  $E$

**MATRICES SEMBLABLES**



**MATRICES SEMBLABLES**

On dit que  $A$  est semblable à  $B$ , et on note  $A \approx B$ , si et seulement s'il existe  $P \in GL_n(\mathbb{K})$  telle que  $B = P^{-1}AP$



**PROPRIÉTÉ**

1. La relation  $\approx$  est une relation d'équivalence dans  $M_n(\mathbb{K})$
2. Deux matrices semblables ont même rang, même trace et même déterminant
3. Deux matrices semblables représentent le même endomorphisme dans des bases (différentes)

**SOMME DE PLUSIEURS SOUS-ESPACES VECTORIELS**



**SOMME DIRECTE**

On dit que  $F_1, \dots, F_n$  sont en somme directe si et seulement si pour tout élément  $u$  de  $\sum_{i=1}^n F_i$ , il existe un unique  $n$ -uplet

$(x_1, \dots, x_n)$  de  $F_1 \times \dots \times F_n$  tel que  $u = \sum_{i=1}^n x_i$ .

La somme  $\sum_{i=1}^n F_i$  sera notée :  $\bigoplus_{i=1}^n F_i$



**PROPRIÉTÉ CARACTÉRISTIQUE**

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1.  $F_1, \dots, F_n$  sont en somme directe
2.  $\forall p \in \llbracket 2, n \rrbracket, \left( \sum_{i=1}^{p-1} F_i \right) \cap F_p = \{0\}$

**SOUS-ESPACES STABLES**



**SOUS-ESPACE STABLE**

On dit que  $F$  est stable par  $u$  si  $u(F) \subset F : \forall x \in F, u(x) \in F$ .



**PROPRIÉTÉ**

L'application  $u|_F : \begin{cases} F \rightarrow F \\ x \mapsto u(x) \end{cases}$  et  $u|_F \in \mathcal{L}(E) : u|_F$  s'appelle l'endomorphisme induit de  $u$  sur  $F$ .

$\text{Ker}(u|_F) = \text{Ker}(u) \cap F$  et  $\text{Im}(u|_F) = u(F)$



**PROPRIÉTÉ**

Si  $u$  et  $v$  commutent, alors  $\text{Ker } v$  et  $\text{Im } v$  sont stables par  $u$ .

**REPRÉSENTATION MATRICIELLE EN DIMENSION FINIE**



**DÉFINITION**

Une base  $\beta = (e_1, \dots, e_n)$  de  $E$  est dite adaptée à  $F$  lorsqu'il existe  $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tel que  $(e_1, \dots, e_p)$  est base de  $F$



**PROPRIÉTÉ**

Soit  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_0 \cup \mathcal{B}_1$  une base de  $E$  adaptée à  $F$  telle que  $\mathcal{B}_0$  base de  $F$ ; alors  $F$  est stable pour  $u$  si, et seulement si, la matrice de  $u$  relativement à  $\mathcal{B}$  est triangulaire supérieure par blocs, soit

$\text{Mat}_{\beta}(u) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$

où  $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(u|_F)$



**GÉNÉRALISATION**

Si  $E = \bigoplus_{i=1}^p F_i$ , et si  $\mathcal{B}_i$  est une base de  $F_i$ ,  $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^p \mathcal{B}_i$  est une base de  $E$  adaptée à cette décomposition en somme directe.  $u$  stabilise les sous-espaces  $F_i$  si, et seulement si, la matrice de  $u$  relativement à  $\mathcal{B}$  est diagonale par blocs,

$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & & (0) \\ & \boxed{A_2} & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \boxed{A_p} \end{pmatrix}$  où  $A_i = \text{Mat}_{\mathcal{B}_i}(u|_{F_i})$

**POLYNÔMES D'ENDOMORPHISMES, DE MATRICES**



**DÉFINITION**

Soit  $P \in \mathbb{K}[X]$  avec  $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i$ .

- $P(u)$  l'endomorphisme défini par :  $P(u) = \sum_{i=0}^n a_i u^i$
- $P(A)$  la matrice définie par :  $P(A) = \sum_{i=0}^n a_i A^i$



**PROPRIÉTÉ**

Si  $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$  alors  $P(A) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(P(u))$ .



**PROPRIÉTÉ**

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ ,  $A \in M_n(\mathbb{K})$ . Soit

$\Phi : \begin{cases} \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathcal{L}(E) \\ P \mapsto P(u) \end{cases}$  et  $\Psi : \begin{cases} \mathbb{K}[X] \rightarrow M_n(\mathbb{K}) \\ P \mapsto P(A) \end{cases}$

Alors les endomorphismes  $\Phi$  et  $\Psi$  sont des morphismes d'algèbres.



**PROPRIÉTÉ**

1. Si  $v$  commute avec  $u$ , alors  $v$  commute avec  $P(u)$ .
2.  $P({}^t A) = {}^t(P(A))$   $\overline{P(A)} = \overline{P}(\overline{A})$ .
3.  $\text{Im}(P(u))$  et  $\text{Ker}(P(u))$  sont stables par  $u$ .

**IDÉAL ANNULATEUR ET POLYNÔME MINIMAL**



**PROPRIÉTÉ**

1. Si  $\dim E$  est finie, alors il existe au moins un polynôme non nul annulateur de  $u$ .
2. Il existe un polynôme non nul annulateur de  $A \in M_n(\mathbb{K})$ .



**POLYNÔME MINIMAL**

On appelle polynôme minimal de  $u \in \mathcal{L}(E)$  où  $E$  est de dimension finie (resp de  $A \in M_n(\mathbb{K})$ ) l'unique polynôme unitaire qui engendre l'idéal des polynômes annulateurs.



**THÉORÈME DE DÉCOMPOSITION DES NOYAUX**

Si  $P_1, \dots, P_k$  sont  $k$  polynômes deux à deux premiers entre eux, alors :

$\text{Ker} \left[ \left( \prod_{i=1}^k P_i \right) (u) \right] = \bigoplus_{i=1}^k \text{Ker}(P_i(u))$

Si  $P = \prod_{i=1}^k P_i$  un polynôme annulateur de  $u$ , alors

$E = \bigoplus_{i=1}^k \text{Ker}(P_i(u))$



**PROPRIÉTÉ**

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  avec  $\dim E = n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ . Soit  $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ ,  $u$  et  $M$  ont le même polynôme minimal :  $\pi_u = \pi_M$ .



**COROLLAIRE**

Deux matrices semblables ont le même polynôme minimal.



**POLYNÔME MINIMAL ET ENDOMORPHISME INDUIT**

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ , soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  stable par  $u$ . Soit  $u|_F$  l'endomorphisme induit, alors  $\pi_{u|_F} | \pi_u$ .

**ÉLÉMENTS PROPRES**

**VALEURS ET VECTEURS PROPRES**

- Soit  $\lambda \in \mathbb{K}$ . On dit que  $\lambda$  est valeur propre de  $u$  s'il existe  $x \in E \setminus \{0\}$  tel que  $u(x) = \lambda x$ .
- Soit  $x \in E \setminus \{0\}$  : on dit que  $x$  est vecteur propre de  $u$  s'il existe  $\lambda \in \mathbb{K}$  tel que  $u(x) = \lambda x$ .
- L'ensemble des valeurs propres d'un endomorphisme est appelé le spectre de  $u$  et est noté  $Sp_{\mathbb{K}}(u)$ .

**PROPRIÉTÉ**

$[\lambda \text{ est valeur propre}] \Leftrightarrow [(u - \lambda \cdot Id_E) \text{ n'est pas injectif}]$

**CARACTÉRISATION EN DIM FINIE**

Si  $E$  est de dimension finie  $n \geq 1$ , alors

$[\lambda \text{ est valeur propre}] \Leftrightarrow [(u - \lambda \cdot Id_E) \text{ n'est pas injectif}]$   
 $\Leftrightarrow [(u - \lambda \cdot Id_E) \text{ n'est pas surjectif}]$   
 $\Leftrightarrow [(u - \lambda \cdot Id_E) \notin GL(E)]$   
 $\Leftrightarrow [\text{rg}(u - \lambda \cdot Id_E) < n]$   
 $\Leftrightarrow [\det(u - \lambda \cdot Id_E) = 0]$

**SOUS-ESPACE PROPRE**

Soit  $\lambda \in Sp(u)$ . L'ensemble  $E_{\lambda}(u) = \text{Ker}(u - \lambda \cdot Id_E)$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  distinct de  $\{0_E\}$  appelé le sous-espace propre associé à  $\lambda$  et à  $u$ .

**PROPRIÉTÉ**

- La somme d'une famille finie de sous-espace vectoriel propre de  $u$  distincts est nécessairement directe
- Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est nécessairement libre.

**PROPRIÉTÉ**

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ ,  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $P \in \mathbb{K}[X]$ . Si  $\lambda \in Sp(u)$  alors  $P(\lambda) \in Sp(P(u))$ .

**VALEURS PROPRES ET POLYNÔME MINIMAL**

- Les vp de  $u$  sont racines de tout polynôme annulateur de  $u$ .
- Les vp de  $u$  sont les racines du polynôme minimal de  $u$ .

**CHANGEMENT DE CORPS**

Soit  $\mathbb{L}$  un sur-corps de  $\mathbb{K}$ . Alors  $Sp_{\mathbb{K}}(u) \subset Sp_{\mathbb{L}}(u)$ .

**CAS DES MATRICES**

Les éléments propres d'une matrices sont ceux de l'endomorphisme canoniquement associé

**POLYNÔME CARACTÉRISTIQUE**

$E$  est de dimension finie

**POLYNÔME CARACTÉRISTIQUE D'UNE MATRICE**

Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$ . On appelle polynôme caractéristique de  $A$  le polynôme  $\chi_A = \det(X \cdot I_n - A)$ .

**PROPRIÉTÉ**

Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.

**DÉFINITION**

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ ,  $A = M_{\mathcal{B}}(u)$  où  $\mathcal{B}$  est une base quelconque. On appelle polynôme caractéristique de  $u$  le polynôme  $\chi_u = \chi_A$ .

**CAS D'UN ENDOMORPHISME INDUIT**

Si  $F$  est stable par  $u$ , alors  $\chi_{u_F} | \chi_u$ .

Plus généralement si  $E = \bigoplus_{i=1}^k F_i$  tel que  $\forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket, F_i$  est stable par  $u$ , alors  $\chi_u = \prod_{i=1}^k \chi_{u_{F_i}}$

**SPECTRE ET RACINES DE POLYNÔME CARACTÉRISTIQUE**

Les valeurs propres de  $u \in \mathcal{L}(E)$  sont les racines du polynôme caractéristique de  $u$ .

**ORDRE DE MULTIPLICITÉ**

L'ordre de multiplicité d'une racine  $\lambda$  de  $\chi_u$  est appelé multiplicité de la valeur propre  $\lambda$  de  $u$ ; elle est noté  $m(\lambda)$ .

**DIMENSIONS DE SOUS-ESPACES PROPRES**

Si  $\lambda$  est valeur propre de  $u$  d'ordre  $m(\lambda)$ , alors

$$1 \leq \dim E_{\lambda} \leq m(\lambda)$$

**THÉORÈME DE HAMILTON-CAYLEY**

Soit  $\chi_u$  le polynôme caractéristique de  $u$ , alors  $\chi_u(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ . En conséquence  $\pi_u | \chi_u$ .

**ENDOMORPHISMES DIAGONALISABLES**

**DÉFINITION**

- On dit que  $u$  est diagonalisable s'il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  pour laquelle  $M_{\mathcal{B}}(u)$  est diagonale.
- On dit que  $A$  est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.

**PROPRIÉTÉ**

Si  $A$  est diagonalisable en  $\Delta = P^{-1}AP$ , alors les valeurs propres sont les éléments de la diagonale de  $\Delta$  et la multiplicité de chacune est son nombre d'occurrence dans cette diagonale.

**PROPRIÉTÉ**

Soit  $Sp(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ . Les cinq affirmations suivantes sont équivalentes.

- $u$  est diagonalisable.
- $E$  possède une base de vecteurs propres;
- $E = \bigoplus_{i=1}^k E_{\lambda_i}$ ;
- $\sum_{i=1}^k \dim(E_{\lambda_i}) = n$ ;
- $\chi_u$  est scindé i.e.  $\chi_u = \prod_{i=1}^k (X - \lambda_i)^{m_i}$  et  $\forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket, \dim E_{\lambda_i} = m_i$ .

En particulier si  $\chi_u$  est scindé à racines simples, alors  $u$  est diagonalisable.

**DÉCOMPOSITION SPÉCTRALE**

Si  $u$  est diagonalisable, avec  $Sp(u) = \{\lambda_i, i \in \llbracket 1, k \rrbracket\}$ ,  $\forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket, E_i = \text{Ker}(u - \lambda_i Id_E)$ . Soit  $p_i$  la projection de  $E$  sur  $E_i$  de direction  $\bigoplus_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k E_j$ .

Alors  $u = \sum_{i=1}^k \lambda_i p_i$  et  $\forall P \in \mathbb{K}[X], P(u) = \sum_{i=1}^k P(\lambda_i) p_i$

**CARACTÉRISATION PAR LE POLYNÔME MINIMAL (ANNULATEUR)**

- $u$  est diagonalisable
- $\pi_u$  est scindé à racines simples.
- $u$  admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.

**ENDOMORPHISMES TRIGONALISABLE**

**DÉFINITION**

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ , soit  $M \in M_n(\mathbb{K})$ .

- $u$  est dite trigonalisable s'il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  pour laquelle  $M_{\mathcal{B}}(u)$  est triangulaire supérieure.
- $M$  est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice  $T$  triangulaire supérieure.

**CARACTÉRISATION**

Les quatres affirmations suivantes sont équivalentes :

- $u$  est trigonalisable.
- $\chi_u$  est scindé.
- Il existe un polynôme scindé annulateur de  $u$
- $\pi_u$  est scindé.

**COROLLAIRE**

- Si  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , alors tout  $u \in \mathcal{L}(E)$  est trigonalisable.
- On a aussi  $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), M$  est trigonalisable.

**CONVERGENCE ET DIVERGENCE**

$E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dim finie et  $\sum_{n \geq 0} u_n$  une série de  $E$



**DÉFINITION**

- On dit que  $\sum_{n \geq 0} u_n$  converge si, et seulement si,  $(S_n)$  converge dans  $E$ , la limite de la suite  $(S_n)$  est appelée somme de la série  $\sum_{n \geq 0} u_n$ , notée  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ .
- Une série est dite divergente si elle n'est pas convergente



**SÉRIE TÉLESCOPIQUE**

La série télescopique  $\sum_{n \geq 0} (u_{n+1} - u_n)$  converge si, et seulement, si la suite  $(u_n)$  est convergente.



**CONDITION NÉCESSAIRE**

Si la série  $\sum_{n \geq 0} u_n$  converge, alors la suite  $(u_n)$  tend vers 0



**SÉRIE GÉOMÉTRIQUE**

Soit  $q \in \mathbb{C}$ , alors la série géométrique  $\sum_{n \geq 0} q^n$  converge si, et seulement, si  $|q| < 1$ . Auquel cas  $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$



**RESTE D'UNE SÉRIE CONVERGENTE**

Le reste d'ordre  $n$  d'une série convergente  $\sum_{n \geq 0} u_n$  est défini par

$$R_n := \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k, \text{ et on a}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{k=0}^n u_k + R_n \text{ et } R_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$



**RETOUR AUX SÉRIES NUMÉRIQUES**

Soit  $\beta = (e_1, \dots, e_p)$  une base de  $E$  et  $u_n = \sum_{i=1}^p u_{n,i} e_i$  le terme général de la série  $\sum u_n$ . Alors

$$\sum u_n \text{ converge} \iff \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \text{ la série } \sum u_{n,i} \text{ converge}$$

$$\text{En cas de convergence : } \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{i=1}^p \left( \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,i} \right) e_i$$

**SÉRIES À TERMES POSITIFS**



**CRITÈRE DE MAJORATION**

Soit  $\sum_{n \geq 0} u_n$  une série à termes positifs.

$\sum_{n \geq 0} u_n$  converge  $\iff$  la suite des sommes partielles est majorée.

En cas de convergence  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sup_n S_n$



**PRINCIPES DE COMPARAISON**

Soit  $\sum_{n \geq 0} u_n, \sum_{n \geq 0} v_n$  deux séries à termes positifs. **Si**

- $u_n = o(v_n)$  ou  $u_n = O(v_n)$  alors
  - $\sum v_n$  converge  $\implies \sum u_n$  converge.
  - $\sum u_n$  diverge  $\implies \sum v_n$  diverge.
- $u_n \sim v_n$ , alors  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  sont de même nature



**RÈGLE DE RIEMANN**

Soit  $\sum u_n$  une série à termes positifs.

- Si il existe  $\alpha > 1$  tel que  $u_n = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$  ou  $u_n = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ , alors  $\sum u_n$  converge
- Si il existe  $\alpha \leq 1$  tel que  $\frac{1}{n^\alpha} = O(u_n)$  ou  $\frac{1}{n^\alpha} = o(u_n)$ , alors  $\sum u_n$  diverge



**RÈGLE  $n^\alpha u_n$**

Soit  $\sum u_n$  une série à termes positifs.

Si il existe  $\lambda > 0$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$  tels que  $n^\alpha u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda$ , ie  $u_n \sim \frac{\lambda}{n^\alpha}$

- Si  $\alpha > 1$ , alors la série  $\sum u_n$  converge
- Si  $\alpha \leq 1$ , alors la série  $\sum u_n$  diverge



**SÉRIE DE BERTRAND**

Pour  $\alpha$  et  $\beta$  deux réels, on appelle série de Bertrand la série à termes réels positifs suivante :  $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}$

$$\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)} \text{ est convergente} \iff \begin{cases} \alpha > 1 \\ \text{ou} \\ \alpha = 1 \text{ et } \beta > 1 \end{cases}$$



**COMPARAISON LOGARITHMIQUE**

Soit  $\sum_{n \geq 0} u_n, \sum_{n \geq 0} v_n$  deux SATP telles que

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, 0 \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

- Si  $\sum_{n \geq 0} v_n$  converge, alors la série  $\sum_{n \geq 0} u_n$  converge
- Si  $\sum_{n \geq 0} u_n$  diverge, alors la série  $\sum_{n \geq 0} v_n$  diverge



**CRITÈRES DE D'ALEMBERT**

Soit  $\sum_{n \geq 0} u_n$  une SATP tels que  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \in \mathbb{R}^+$

- Si  $0 \leq \ell < 1$ , alors  $\sum_{n \geq 0} u_n$  converge
- Si  $\ell > 1$ , alors  $\sum_{n \geq 0} u_n$  diverge
- Si  $\ell = 1$  on ne peut pas conclure.



**RÈGLE DE RAABE-DUAMEL**

Soit  $(u_n)$  une suite de réels strictement positifs telle que

$$\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^* \times ]1, +\infty[, \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^\beta}\right)$$

Alors il existe  $\lambda > 0$  tel que  $u_n \sim \frac{\lambda}{n^\alpha}$ , donc  $\sum u_n$  converge si, et seulement, si  $\alpha > 1$

**SOMMATION DES RELATIONS DE COMPARAISON**

**CAS DE CONVERGENCE**

Soit  $\sum_{n \geq 0} v_n$  une SATP **convergente** et  $(u_n)$  une suite.

1. Si  $u_n = o(v_n)$ , alors  $\sum_{n \geq 0} u_n$  converge et

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$$

2. Si  $u_n = O(v_n)$ , alors  $\sum_{n \geq 0} u_n$  converge et

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = O\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$$

**CAS DE DIVERGENCE**

Soit  $\sum_{n \geq 0} v_n$  une SATP **divergente** et  $(u_n)$  une suite.

1. Si  $u_n = o(v_n)$ , alors  $\sum_{k=0}^n u_k = o\left(\sum_{k=0}^n v_k\right)$

2. Si  $u_n = O(v_n)$ , alors  $\sum_{k=0}^n u_k = O\left(\sum_{k=0}^n v_k\right)$

⚠ On ne peut pas conclure la convergence de la série  $\sum_{n \geq 0} u_n$

**ÉQUIVALENT**

Soit  $\sum_{n \geq 0} u_n$  et  $\sum_{n \geq 0} v_n$  deux SATP telles que  $u_n \sim v_n$ . Alors  $\sum_{n \geq 0} u_n$  et  $\sum_{n \geq 0} v_n$  sont de même nature

o En cas de convergence :  $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$

o En cas de divergence :  $\sum_{k=0}^n u_k \sim \sum_{k=0}^n v_k$

**FORMULE DE STIRLING**

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

**COMPARAISON SÉRIE-INTÉGRALE**

**COMPARAISON SÉRIE-INTÉGRALE**

Soit  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  une fonction décroissante continue par morceaux sur  $\mathbb{R}^+$ . L'intégrale  $\int_0^{+\infty} f(t)dt$  et la série  $\sum f(n)$  sont de même nature. En cas de convergence, un encadrement de la suite des restes

$$\forall N \in \mathbb{N}, \int_{N+1}^{+\infty} f(t) dt \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} f(n) \leq \int_N^{+\infty} f(t) dt$$

Cela peut donner un équivalent pour la suite des restes.

**SÉRIE DE RIEMANN**

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$

- Si  $\alpha > 1$ ,  $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{n^{\alpha-1}}$
- Si  $\alpha < 1$ ,  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{1-\alpha} \cdot \frac{1}{n^{\alpha-1}}$
- Si  $\alpha = 1$ ,  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln(n)$

**CRITÈRE SPÉCIAL DES SÉRIES ALTERNÉES**

**DÉFINITION**

Soit  $(u_n)$  une suite réelle gardant un signe constant, alors la série  $\sum_{n \geq 0} (-1)^n u_n$  est dite alternée

**CRITÈRE SPÉCIAL DES SÉRIES ALTERNÉES**

Soit  $\sum_{n \geq 0} (-1)^n u_n$  une série alternée telle que  $(u_n)$  décroît et est de limite nulle. Alors  $\sum_{n \geq 0} (-1)^n u_n$  converge et  $|R_n| \leq u_{n+1}$ .

**CRITÈRE D'ABEL**

Soit  $(\varepsilon_n)$  une suite de réels décroissante qui converge vers 0 et  $(a_n)$  une suite de  $\mathbb{K}$  telle que  $\left(\sum_{k=0}^n a_k\right)$  est majorée.

$$\exists M \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N} \left| \sum_{k=0}^n a_k \right| \leq M$$

Alors la série  $\sum_{n \geq 0} \varepsilon_n a_n$  converge

**SÉRIES À VALEURS DANS UN EVN DE DIM FINIE**

$E$  désigne un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé de dimension finie où  $\mathbb{K}$  désigne le corps  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$

**CONVERGENCE ABSOLUE**

On dit que la série  $\sum u_n$  converge absolument si la série  $\sum \|u_n\|$  est convergente.

**PROPRIÉTÉ**

Si  $\sum_{n \geq 0} u_n$  converge absolument, alors la série  $\sum_{n \geq 0} u_n$  est convergente et

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} u_n \right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\| \quad \text{Inégalité triangulaire}$$

**SÉRIE DE NEWMANN**

Soit  $\mathbb{A}$  une  $\mathbb{K}$ -algèbre normée de dimension finie.

**SÉRIE DE NEUMANN**

Soit  $u \in \mathbb{A}$  tel que  $\|u\| < 1$

1. La série  $\sum_{n \geq 0} u^n$  est absolument convergente.
2.  $1_{\mathbb{A}} - u$  est inversible dans  $\mathbb{A}$  et on a  $(1_{\mathbb{A}} - u)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n$ .
3. On a  $\|(1_{\mathbb{A}} - u)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|u\|}$ .

**FONCTION EXPONENTIELLE**

Soit  $\mathbb{A}$  une  $\mathbb{K}$ -algèbre normée de dimension finie.

**L'APPLICATION EXPONENTIELLE**

Soit  $u \in \mathbb{A}$  alors la série  $\sum_{n \geq 0} \frac{u^n}{n!}$  est absolument convergente.

L'application sur  $\mathbb{A}$  définie par  $u \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^n}{n!}$  s'appelle la fonction exponentielle sur  $\mathbb{A}$  et on la note  $\exp$ .

**PROPRIÉTÉ**

Soient  $u, v \in \mathbb{A}$  tels que  $uv = vu$  alors

$$\exp(u + v) = \exp(u) \exp(v) = \exp(v) \exp(u)$$

**ENSEMBLES DÉNOMBRABLES**

Soit  $E$  un ensemble.



**ENSEMBLE AU PLUS DÉNOMBRABLE**

On dit que :

- $E$  est dénombrable s'il existe une bijection entre  $E$  et  $\mathbb{N}$ .
- $E$  est au plus dénombrable si  $E$  est en bijection avec une partie de  $\mathbb{N}$ .



**OPÉRATIONS**

- Une partie de  $\mathbb{N}$  si, et seulement si, elle est infinie.
- Une partie d'un ensemble dénombrable est au plus dénombrable.
- Un produit fini d'ensembles dénombrables est dénombrable.
- Une union dénombrable de parties dénombrables est dénombrable.

**FAMILLES SOMMABLES**

Soient  $I$  un ensemble dénombrable et  $(x_i)_{i \in I}$  une famille numérique. On note :

- $\mathcal{P}_f(I)$  l'ensemble des parties finies de  $I$ .
- $\forall J \in \mathcal{P}_f(I), S_J = \sum_{i \in J} x_i$ .



**DÉFINITION**

On dit que la famille  $(x_i)_{i \in I}$  de réels positifs est sommable si  $\exists M \geq 0, \forall J \in \mathcal{P}_f(I), S_J \leq M$ .

Dans ce cas,  $\sup_{J \in \mathcal{P}_f(I)} S_J$  s'appelle la somme de la famille  $(x_i)_{i \in I}$

et on la note  $\sum_{i \in I} x_i$ .



**CRITÈRE DE COMPARAISON**

Soit  $(u_i)_{i \in I}$  et  $(v_i)_{i \in I}$  deux familles de réels positifs telles que  $\forall i \in I, u_i \leq v_i$ .

1. Si la famille  $(v_i)_{i \in I}$  est sommable, alors  $(u_i)_{i \in I}$  est sommable et :  $\sum_{i \in I} u_i \leq \sum_{i \in I} v_i$
2. La non sommabilité de la famille  $(u_i)_{i \in J}$  entraîne la non sommabilité de  $(v_i)_{i \in I}$



**FAMILLE NUMÉRIQUE SOMMABLE**

La famille numérique  $(x_k)_{k \in I}$  est dite sommable si la famille  $(|x_k|)_{k \in I}$  est sommable.



**SOMME D'UNE FAMILLE NUMÉRIQUE SOMMABLE**

Soit  $(x_k)_{k \in I}$  une famille numérique sommable

1. **Cas réel** :  $\sum_{k \in I} u_k := \sum_{k \in I} u_k^+ - \sum_{k \in I} u_k^-$
2. **Cas complexe** :  $\sum_{k \in I} u_k := \sum_{k \in I} \operatorname{Re}(u_k) + i \sum_{k \in I} \operatorname{Im}(u_k)$

Auquel cas  $\left| \sum_{k \in I} x_k \right| \leq \sum_{k \in I} |x_k|$



**CAS DE  $I = \mathbb{N}$**

Une suite numérique  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est sommable ssi la série  $\sum_{n \geq 0} x_n$

est absolument convergente. Auquel cas  $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ .



**PROPRIÉTÉ**

Si  $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow I$  une bijection, alors,  $(x_k)_{k \in I}$  est sommable ssi

$(x_{\sigma(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  est sommable, auquel cas  $\sum_{n=0}^{+\infty} x_{\sigma(n)} = \sum_{i \in I} x_i$



**OPÉRATIONS**

Soit  $(u_k)_{k \in I}, (v_k)_{k \in I}$  deux familles sommables et  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Alors la famille  $(u_i + \lambda v_i)_{i \in I}$  est sommable et

$$\sum_{k \in I} (\lambda u_i + v_i) = \lambda \sum_{k \in I} u_i + \sum_{k \in I} v_i$$



**SOUS-FAMILLE D'UNE FAMILLE SOMMABLE**

Soit  $(u_k)_{k \in I}$  une famille sommable et  $J$  une partie dénombrable de  $I$ . Alors  $(u_k)_{k \in J}$  est sommable



**SOMMATION PAR PAQUETS**

Soit  $(a_k)_{k \in I}$  est une famille numérique **sommable** et soit  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une partition de  $I$ . Alors :

1. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la famille  $(a_i)_{i \in I_n}$  est sommable. On note  $S_n = \sum_{i \in I_n} a_i$ .
2. La série  $\sum_{n \geq 0} S_n$  converge.
3.  $\sum_{n=0}^{+\infty} S_n = \sum_{i \in I} a_i$ . Autrement dit :  $\sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{i \in I_n} a_i \right) = \sum_{i \in I} a_i$



**CRITÈRE SUFFISANT DE SOMMABILITÉ**

Soit  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une partition de  $I$ . On suppose que :

1. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  la famille  $(a_i)_{i \in I_n}$  est sommable et on pose  $T_n = \sum_{i \in I_n} |a_i|$ .
2. La série  $\sum_{n \geq 0} T_n$  est convergente.

Alors  $(a_i)_{i \in I}$  est sommable et  $\sum_{i \in I} a_i = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{i \in I_n} a_i \right)$

**SUITES DOUBLES**



**CRITÈRE SUFFISANT DE SOMMABILITÉ**

Soit  $(a_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$  une suite numérique double. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. La famille  $(a_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$  est sommable.
2. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la série  $\sum_{m \geq 0} |a_{m,n}|$  CV et la série

$$\sum_{n \geq 0} \left( \sum_{m=0}^{+\infty} |a_{m,n}| \right) \text{ CV.}$$

3. Pour tout  $m \in \mathbb{N}$ , la série  $\sum_{n \geq 0} |a_{m,n}|$  CV et la série

$$\sum_{m \geq 0} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} |a_{m,n}| \right) \text{ CV.}$$

4. La série  $\sum_{n \geq 0} \sum_{p+q=n} |a_{p,q}|$  converge.

Auquel cas :

$$\sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} a_{m,n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,n} = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} a_{m,n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p+q=n} a_{p,q}$$

**PRODUIT DE CAUCHY DE DEUX SÉRIES**



**PROPRIÉTÉ**

Si  $\sum_{n \geq 0} u_n$  et  $\sum_{n \geq 0} v_n$  sont absolument convergentes alors leur produit de Cauchy  $\sum_{n \geq 0} \left( \sum_{p=0}^n u_p v_{n-p} \right)$  est absolument convergent

et on a  $\sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{p=0}^n u_p v_{n-p} \right) = \left( \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \times \left( \sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right)$ .

$(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de fonctions définies sur  $A$  à valeurs dans  $F$  où  $A \subset E$  avec  $E$  et  $F$  sont de  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés de dimensions finies. Le plus souvent,  $E = F = \mathbb{R}$  et  $A$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ .  $I$  intervalle de  $\mathbb{R}$ .

**MODES DE CONVERGENCE**



**CONVERGENCE SIMPLE**

On dit que  $(f_n)_n$  converge simplement sur  $A$  ssi pour tout  $x \in A$  la suite  $(f_n(x))_n$  converge dans  $F$ .  
On appelle limite ou limite simple de la suite  $(f_n(x))_n$ , la fonction  $f \in F^A$  définie par :  $\forall x \in A, f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$ .

On écrit  $f_n \xrightarrow[A]{cvs} f$



**COMMENT MONTRER LA CONVERGENCE SIMPLE ?**

Pour prouver que  $(f_n)$  converge simplement vers  $f$  sur  $A$  :  
On fixe  $x \in I$  et on cherche à prouver que la suite numérique  $(f_n(x))_n$  converge vers  $f(x)$ . Il s'agit donc d'un problème de convergence de suites vectoriels, pas vraiment d'un problème de convergence de suites de fonctions.



**CONVERGENCE UNIFORME**

On dit que la suite de fonction  $(f_n)_n$  converge uniformément vers  $f$  si :

- Il existe  $n_0$  à partir duquel  $(f_n - f)$  est bornée
- $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$

On note  $f_n \xrightarrow[A]{cvu} f$  ou  $f_n \xrightarrow{cvu} f$



**PROPRIÉTÉ CARACTÉRISTIQUE**

$$f_n \xrightarrow[A]{cvu} f \iff \begin{cases} \bullet f_n \xrightarrow[A]{cvs} f \\ \bullet \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \exists (\varepsilon_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}} \text{ tq } \lim \varepsilon_n = 0 \text{ et à pcr} \\ \forall x \in A, \|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon_n \end{cases}$$

**NB :**  $\varepsilon_n$  ne dépend pas de  $x$



**LA NON CONVERGENCE UNIFORME**

Si  $f_n \xrightarrow[A]{cvs} f$  et  $\exists (x_n) \in A^{\mathbb{N}}$  tq  $(f_n(x_n) - f(x_n)) \not\rightarrow 0$ , alors  $f_n$  ne converge pas uniformément vers  $f$  sur  $A$



**CU  $\implies$  CS**

Si  $f_n \xrightarrow[A]{cvu} f$ , alors  $f_n \xrightarrow[A]{cvs} f$ .



**CONVERGENCE UNIFORME ET BORNITUDE**

$(\mathcal{B}(A, F), \|\cdot\|_\infty)$  est un espace de Banach.

**THÉORÈME D'INTERVERSION DES LIMITES**



**THÉORÈME D'INTERVERSION DES LIMITES**

Soit  $a \in \bar{A}$ . **Si :**

- $\forall n \in \mathbb{N}, \lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$  existe et vaut  $b_n \in F$ ;
- $f_n \xrightarrow[A]{cvu} f$

**Alors :**

- La suite  $(b_n)$  converge ;
- $f$  admet une limite en  $a$ ;
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$

Autrement-dit :  $\lim_{x \rightarrow a} \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \right)$



**CONSERVATION DE LA CONTINUITÉ PAR CU**

Si

- $\forall n \in \mathbb{N}$  (ou à pcr)  $f_n$  est continue sur  $A$
- $f_n \xrightarrow{cvu} f$  sur tout compact inclus dans  $A$

Alors  $f$  est continue sur  $A$ .

**NB :** Si  $A$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ , on remplace compact inclus dans  $A$  par segment inclus dans  $A$



**CONVERGENCE UNIFORME ET CONTINUITÉ**

$(\mathcal{C}(A, F), \|\cdot\|_\infty)$  est un espace de Banach.

**INTÉGRATION D'UNE LIMITE UNIFORME SUR UN SEGMENT**



**INTERVERSION lim ET  $\int$**

Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions de  $[a, b]$  dans  $F$  telle que :

- $\forall n \in \mathbb{N}$  (ou à pcr)  $f_n \in \mathcal{C}([a, b], F)$ ;
- $(f_n)$  converge uniformément sur  $[a, b]$

Alors

- $\lim f_n$  est continue sur  $[a, b]$
- La suite  $\left( \int_a^b f_n \right)_n$  converge
- On a l'interversion  $\lim$  et  $\int$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) dt$$



**CU ET PRIMITIVATION**

Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions de  $\mathcal{C}(I, F)$ . Si :  
 $(f_n)$  converge uniformément sur tout segment inclus dans  $I$  vers  $f$ . Pour tout  $a \in I$ , on pose

- $\varphi : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$
- Pour tout  $n \in \mathbb{N}, \varphi_n : x \mapsto \int_a^x f_n(t) dt$

Alors la suite de fonctions  $(\varphi_n)$  converge uniformément sur tout segment inclus dans  $I$  vers  $\varphi$

**RÉGULARITÉ D'UNE LIMITE UNIFORME**



**INTERVERSION LIMITE-DÉRIVÉE**

Si :

- $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$  est de classe  $\mathcal{C}^1(I, E)$ ;
- $(f_n)$  CS sur  $I$ ;
- $(f'_n)$  CU sur tout segment inclus dans  $I$ .

Alors

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n \in \mathcal{C}^1(I, F)$ ;
- $\left( \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n \right)' = \lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n$ ;
- $(f_n)$  CU sur tout segment inclus dans  $I$ .



**INTERVERSION LIMITE-DÉRIVÉES SUCCÉSSIVES**

Soit  $p \in \mathbb{N}^*$ . Si :

- $\forall n \in \mathbb{N}$  (ou à pcr)  $f_n \in \mathcal{C}^p(I, F)$
- $\forall k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket, (f_n^{(k)})$  CS sur  $I$ .

Alors

- La suite  $(f_n^{(p)})$  CU sur tout segment inclus dans  $I$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n$  est de classe  $\mathcal{C}^p$  sur  $I$
- $\forall k \in \llbracket 0, p \rrbracket, f_n^{(k)}$  CU sur tout segment inclus dans  $I$
- On a les interversions

$$\forall k \in \llbracket 0, p \rrbracket, \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n \right)^{(k)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n^{(k)}$$



**INTERVERSION LIMITE-DÉRIVÉES SUCCÉSSIVES**

Si :

- $\forall n \in \mathbb{N}$  (ou à pcr)  $f_n \in \mathcal{C}^\infty(I, F)$
- La suite  $(f_n)$  CS sur  $I$ .
- $\forall p \geq 1, (f_n^{(p)})$  CU sur tout segment inclus dans  $I$

Alors

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $I$
- $\forall k \geq 0, f_n^{(k)}$  CU sur tout segment inclus dans  $I$
- On a les interversions

$$\forall k \in \mathbb{N}, \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n \right)^{(k)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n^{(k)}$$

**LES APPROXIMATIONS UNIFORMES**



**PROPRIÉTÉ**

Toute fonction  $f : [a, b] \rightarrow F$  continue sur  $F$  est limite uniforme d'une suite  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de fonctions en escalier sur  $[a, b]$ , c'est-à-dire

$$\|f - \varphi_n\|_{\infty, [a, b]} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$



**STONE WEIERSTRASS**

Soit  $[a, b]$  un segment de  $\mathbb{R}$ .  
Toute application  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  continue est limite uniforme d'une suite de polynômes.

$(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de fonctions définies sur  $A$  à valeurs dans  $F$  où  $A \subset E$  avec  $E$  et  $F$  sont des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels normés de dimensions finies. Le plus souvent,  $E = F = \mathbb{R}$  et  $A = I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ .

On note, pour tout entier naturel  $n$  :  $S_n = \sum_{k=0}^n f_k$

**MODES DE CONVERGENCE**

**CONVERGENCE SIMPLE**  
On dit que  $\sum_{n \geq 0} f_n$  converge simplement sur  $A$  et a pour somme  $S$  si la suite de fonction  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement vers  $S$ .

**CONVERGENCE ABSOLUE**  
On dit que la série de fonctions  $\sum f_n$  converge absolument si la série de fonction  $\sum \|f_n\|_F$  converge simplement.

**CONVERGENCE NORMALE**  
Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathcal{B}(A, \mathbb{K}))^{\mathbb{N}}$ . On dit que la série de fonction  $\sum f_n$  converge normalement si la série numérique  $\sum \|f_n\|_{\infty}$  converge.

**PROPRIÉTÉ CARACTÉRISTIQUE**  
 $\sum f_n$  converge normalement (cvn) sur  $A$  si, et seulement, si

$$\begin{cases} \bullet \exists (a_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}} / \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in A : \|f_n(x)\| \leq a_n \\ \bullet \sum a_n \text{ converge} \end{cases}$$

**NB :** La suite  $(a_n)$  ne dépend pas de  $x$

**CONVERGENCE UNIFORME**  
 $\sum f_n$  converge uniformément et a pour somme  $S$  si  $S_n \xrightarrow{cu} S$  i.e.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|S - S_n\|_{\infty} = 0$ .

**PROPRIÉTÉ CARACTÉRISTIQUE**  
 $\sum f_n$  converge uniformément sur  $A$  si, et seulement, si  $\sum f_n$  converge simplement sur  $A$  et  $R_n \xrightarrow{cvu} 0$

**CONDITION NÉCESSAIRE**  
Si  $\sum f_n$  converge uniformément vers  $f$ , alors  $f_n \xrightarrow{cvu} 0$ .

**CAS D'UNE SÉRIE ALTERNÉE**  
On suppose que  $F = \mathbb{R}$ .  
Si  $\forall x \in A$ , la série  $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$  est alternée vérifiant le CSSA, alors  $\sum f_n$  CU sur  $A$  si, et seulement, si  $f_n \xrightarrow{cvu} 0$

**COMPARAISON DES MODES**

$$\begin{matrix} & & \text{CU} & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ \text{CN} & & & & \text{CS} \\ & \nwarrow & & \nearrow & \\ & & \text{CA} & & \end{matrix}$$

Toutes les autres implications sont fausses.

**INTERVERSION LIMITE ET SOMME**

**INTERVERSION LIMITE-SOMME**  
Soit  $a \in \bar{A}$  un point adhérent. Si :

- $\sum_{n \geq 0} f_n$  converge uniformément sur  $A$
- $\forall n \in \mathbb{N}, f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell_n \in F$

Alors :

- La série  $\sum_{n \geq 0} \ell_n$  converge.
- La somme  $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$  admet une limite en  $a$ .
- $\lim_{x \rightarrow a} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$

**CONTINUITÉ**  
Si :

- $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{C}(A, F)$
- $\sum f_n$  CU sur tout compact inclus dans  $A$ .

Alors la somme  $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$  est continue sur  $A$ .  
Si  $A$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ , on remplace compact par segment

**INTÉGRATION TERME À TERME SUR UN SEGMENT**

**INTÉGRATION TERME À TERME**  
Si

- $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{C}([a, b], F)$
- $\sum f_n$  CU sur  $[a, b]$ .

Alors

- $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$  est continue
- la série  $\sum_{n \geq 0} \left( \int_a^b f_n \right)$  converge et on a l'interversion

$$\int_a^b \left( \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \int_a^b f_n(t) dt \right)$$

**DÉRIVATION TERME À TERME**

**DÉRIVATION TERME À TERME**  
Si :

- $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{C}^1(I, F)$
- La série  $\sum_{n \geq 0} f_n$  converge simplement sur  $I$ .
- $\sum_{n \geq 0} f'_n$  converge uniformément sur tout segment inclus  $I$ .

Alors

- $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  et  $\left( \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n$
- La série  $\sum_{n \geq 0} f_n$  CU sur tout segment inclus  $I$

**DÉRIVATION TERME À TERME**  
Soit  $p \geq 1$ . Si

- $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{C}^p(I, F)$
- $\forall k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket, \sum_{n \geq 0} f_n^{(k)}$  converge simplement sur  $I$ .
- $\sum_{n \geq 0} f_n^{(p)}$  CU sur tout segment inclus dans  $I$ .

Alors

- $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$  est de classe  $\mathcal{C}^p$  sur  $I$  et :

$$\forall k \in \llbracket 0, p \rrbracket, \left( \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right)^{(k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}$$

- $\forall k \in \llbracket 0, p \rrbracket, \sum_{n \geq 0} f_n^{(k)}$  CU sur tout segment  $C \subset I$

**SÉRIES DE FONCTIONS DE CLASSE  $\mathcal{C}^{\infty}$**   
Si :

- $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{C}^{\infty}(I, F)$
- $\sum_{n \geq 0} f_n$  converge simplement sur  $I$ .
- $\forall p \geq 1, \sum_{n \geq 0} f_n^{(p)}$  CU sur tout segment inclus dans  $I$ .

Alors la somme  $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$  est de classe  $\mathcal{C}^{\infty}$  sur  $I$  et on a :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \left( \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right)^{(p)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(p)}$$

**SÉRIES ENTIÈRES**

**LEMME D'ABEL**  
 Soit  $r \in \mathbb{R}^{+*}$  tel que  $(a_n r^n)_n$  soit une suite bornée avec  $(a_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ . Alors  $\forall z \in \mathcal{B}(0_C, r)$ , la série  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  CA

**RAYON DE CONVERGENCE**  
 Le rayon de convergence de la série  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  est l'élément de  $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$  défini par

$$R = \sup\{r \in \mathbb{R}^+ / (a_n r^n)_n \text{ est bornée}\}$$

$$= \sup\{r \in \mathbb{R}^+ / \lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n r^n| = 0\}$$

$$= \sup\{r \in \mathbb{R}^+ / \sum a_n r^n \text{ CS}\}$$

$$= \sup\{r \in \mathbb{R}^+ / \sum a_n r^n \text{ CA}\}$$

**CONVERGENCE D'UNE SÉRIE ENTIÈRE**  
 Soit  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence  $R$ .

- La série entière converge absolument donc simplement sur le disque de convergence  $\mathcal{D}(0, R) = \{z \in \mathbb{C} / |z| < R\}$ ;
- La série entière converge normalement donc uniformément sur tout disque fermé  $\mathcal{D}_f(0, R_1)$  avec  $0 < R_1 < R$ ;
- La fonction  $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$  est continue sur  $\mathcal{D}(0, R)$ .
- Si  $\sum_{n \geq 0} a_n R^n$  CA, alors  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  CN sur  $\mathcal{D}_f(0, R)$ .

**CALCUL DE RAYON**

**COMPARAISON**  
 Soient  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  et  $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$  de rayons respectifs  $R_a$  et  $R_b$ .

- si  $a_n = O(|b_n|)$  ou  $a_n = o(|b_n|)$ , alors  $R_a \geq R_b$ ;
- si  $a_n \sim b_n$ , alors  $R_a = R_b$ .

**CRITÈRE DE D'ALEMBERT**  
 Si  $(a_n)$  ne s'annule pas à pcr et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ .  
 Le rayon de convergence de la série entière  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  est  $R = \frac{1}{\ell}$   
 avec la convention  $\frac{1}{0} = +\infty$  et  $\frac{1}{+\infty} = 0$ .

**SOMME ET PRODUIT**  
 Soient  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  et  $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$  de rayons de convergences respectifs  $R_a$  et  $R_b$  et soient  $\sum_{n \geq 0} s_n z^n$  et  $\sum_{n \geq 0} p_n z^n$  respectivement somme et produit de Cauchy des deux séries précédentes i.e.  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $s_n = a_n + b_n$  et  $p_n = \sum_{k=0}^n a_{n-k} b_k$ . Soit  $R_s$  et  $R_p$  les rayons de convergence de ces deux dernières. Alors

- $R_s \geq \min(R_a, R_b)$ ,  $R_p \geq \min(R_a, R_b)$ ;
- si  $R_a \neq R_b$ , alors  $R_s = \min(R_a, R_b)$ ;
- on pose  $R = \min(R_a, R_b)$ .  $\forall z \in \mathcal{D}(0, R)$ ,

$$\bullet \sum_{n=0}^{+\infty} s_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$$

$$\bullet \sum_{n=0}^{+\infty} p_n z^n = \left( \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right) \times \left( \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \right)$$

**SÉRIE DÉRIVÉE**  
 Soit  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  une série entière de rayon  $R$ . La série  $\sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1}$  est de rayon de convergence  $R$  et dite série dérivée de  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$

**CAS DES SÉRIES RÉELLES**

**PRIMITIVE**  
 Soit  $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$  une série entière réelle de rayon de convergence  $R$  et de somme  $S$ . Alors les primitives de  $S$  sur  $] -R, R[$  s'écrivent

$$x \mapsto k + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} \text{ où } k \in \mathbb{C}$$

**RÉGULARITÉ ET COEFFICIENTS**  
 Soit  $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$  une série entière réelle de rayon de convergence  $R$  de somme  $f$ . Alors  $f$  est de classe  $C^\infty$  et  $\forall x \in ] -R, R[$ ,

$$\forall p \in \mathbb{N}, f^{(p)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+p)!}{n!} a_{n+p} x^n$$

En particulier  $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$  et ainsi

$$\forall x \in ] -R, R[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

**FONCTIONS DÉVELOPPABLES EN SÉRIES ENTIÈRES**

**FONCTION DÉVELOPPABLE EN SÉRIE ENTIÈRE**  
 1. On dit que  $f$  est développable en série entière au point 0 s'il existe  $R > 0$  et une série entière  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  tels que :

- $f$  est définie sur  $\mathcal{D}(0, R)$  et
- $\forall z \in \mathcal{D}(0, R)$ ,  $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ .

2. On dit que  $f$  est DSE en  $z_0 \in \mathbb{C}$  si  $z \mapsto f(z_0 + z)$  est DSE en 0.

**PROPRIÉTÉ**  
 Soit  $I$  un intervalle tel que 0 est dans l'intérieur de  $I$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$  est de classe  $C^\infty$  au voisinage de 0.

$f$  est DSE en 0  
 $\Updownarrow$   
 $\exists r > 0, \forall x \in ] -r, r[, \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right) = 0$

Auquel cas les primitives et les dérivées successives de  $f$  sont DSE en 0

**DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIES ENTIÈRES USUELS**  
**De rayon de convergence  $R = +\infty$  :**  $\forall z \in \mathbb{C}, \forall x \in \mathbb{R}$  :

- $\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$
- $\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$  et  $\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
- $\cosh x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$  et  $\sinh x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

**De rayon de convergence  $R = 1$ ,  $\forall x \in ] -1, 1[$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$  :**

- $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$  et  $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$
- $\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$  vraie aussi pour  $x = -1$
- $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$  vraie aussi pour  $x = 1$
- $\arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$  vraie aussi pour  $x = \pm 1$
- $(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$

**TRIBU**



**TRIBU**

Soient  $\Omega$  un ensemble et  $T$  une partie de  $\mathcal{P}(\Omega)$ , c'est-à-dire un ensemble de parties de  $\Omega$ .

On dit que  $T$  est une **tribu** ou une  **$\sigma$ -algèbre** de parties de  $\Omega$  si :

1.  $\Omega \in T$
2. Si  $A \in T$  alors  $\bar{A} \in T$
3. Pour toute famille  $(A_i)_{i \in I}$  au plus dénombrable d'éléments de  $T$ , on a  $\bigcup_{i \in I} A_i \in T$ .

Le couple  $(\Omega, T)$  s'appelle un **espace probabilisable**. Les éléments de  $T$  sont des **événements**

Auquel cas :

1.  $\emptyset \in T$ .
2. Si  $A$  et  $B$  sont deux événements de  $T$ , alors  $A \cup B$ ,  $A \cap B$  et  $A \setminus B$  sont dans  $T$ .
3. Si  $I$  est une partie de  $\mathbb{N}$  et si pour tout  $i \in I$ ,  $A_i \in T$  alors  $\bigcap_{i \in I} A_i \in T$ .



**ÉVÉNEMENTS**

Si  $(\Omega, T)$  est un espace probabilisable,

- les parties  $A$  de  $\Omega$  éléments de la tribu  $T$  sont appelées événement de l'univers  $\Omega$ .
- L'événement  $\emptyset$  est appelé événement impossible.
- L'événement  $\Omega$  est appelé événement certain.
- $\bar{A}$  est l'événement contraire de  $A$ ;
- $A \cap B$  est l'événement conjonction de  $A$  et  $B$ ;
- $A \cup B$  est l'événement disjonction de  $A$  et  $B$ .
- On dit que l'événement  $A$  implique  $B$  si  $A \subset B$ .
- $A$  et  $B$  sont dits incompatibles si  $A \cap B = \emptyset$ .



**EXEMPLE**

Soit  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'événements de l'espace probabilisable  $(\Omega, T)$ .

- $\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n$  correspond à la réalisation de tous les  $A_n$ .
- $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$  correspond à la réalisation d'au moins un  $A_n$ .
- $\bigcap_{n=N}^{+\infty} A_n$  correspond à la réalisation de tous les  $A_n$  à pcr  $N$ .
- $\bigcap_{N=0}^{+\infty} \bigcup_{n=N}^{+\infty} A_n$  correspond à la réalisation d'une infinité de  $A_n$ .



**SYSTÈME COMPLET D'ÉVÉNEMENTS**

Une famille au plus dénombrable  $(A_i)_{i \in I}$  d'événements de  $\mathcal{P}(\Omega)$  est un système complet d'événements si

- $\forall i \in I, A_i \neq \emptyset$
- $\forall (i, j) \in I^2, i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset$ ,
- $\Omega = \bigcup_{i \in I} A_i$ .

**PROBABILITÉ**



**PROBABILITÉ**

On appelle probabilité toute application  $P$  de  $T$  dans  $\mathbb{R}_+$  tel que

1.  $P(\Omega) = 1$ ,
2. Si  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de  $T$ , 2 à 2 incompatibles, alors

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) \quad \sigma\text{-additivité}$$

Le triplet  $(\Omega, T, P)$  est un espace probabilisé



**PROBABILITÉ UNIFORME**

Si  $\Omega$  est fini, on prend  $T = \mathcal{P}(\Omega)$ . Alors  $P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega)$ .

Dans le cas de l'équiprobabilité,  $P(A) = \frac{\text{Card}A}{\text{Card}\Omega}$ .

Le calcul de  $P(A)$  revient à calculer le cardinal de  $A$  soit dénombrer l'ensemble  $A$ .



**PROPRIÉTÉ**

Soit  $(\Omega, T, P)$  est un espace probabilisé et  $A, B \in T$ .

1.  $P(\emptyset) = 0$ .
2. Soit  $A_0, \dots, A_n$  sont des événements 2 à 2 incompatibles

$$P\left(\bigcup_{k=0}^n A_k\right) = \sum_{k=0}^n P(A_k) \quad \text{Additivité finie}$$

3.  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
4.  $0 \leq P(A) \leq 1$ .
5.  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ .
6. Si  $A \subset B$ , alors

$$P(A) \leq P(B) \text{ et } P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$$

7. Soit  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite des événements. Alors

$$P\left(\bigcup_{k=0}^n A_k\right) \leq \sum_{k=0}^n P(A_k) \quad \text{Sous additivité finie}$$

et

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) \quad \text{Sous additivité}$$

**CONTINUITÉ MONOTONE**



**CONTINUITÉ MONOTONE**

Soit  $(A_n)$  une suite d'événements

**Continuité croissante :**

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\bigcup_{k=0}^n A_k\right)$$

En particulier si  $(A_n)$  est croissante, alors :

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n)$$

**Continuité décroissante :**

$$P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\bigcap_{k=0}^n A_k\right)$$

En particulier si  $(A_n)$  est décroissante, alors :

$$P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n)$$

**ÉVÉNEMENTS NÉGLIGEABLE, QUASI CERTAIN**



**ÉVÉNEMENT NÉGLIGEABLE, QUASI-CERTAIN**

- On dit qu'un événement  $A$  est négligeable si  $P(A) = 0$ ;
- On dit qu'un événement  $A$  est presque sûr si  $P(A) = 1$ .



**PROPRIÉTÉ**

1. Un événement contenant un événement presque sûr est presque sûr.
2. Une intersection finie ou dénombrable d'événements presque sûrs est presque sûre.



**PROPRIÉTÉ**

Si  $A$  est quasi certain, alors pour tout événement  $B$  :

$$P(A \cap B) = P(B) \quad \text{et} \quad P(A \cup B) = 1$$

Si  $A$  est négligeable, alors pour tout événement  $B$  :

$$P(A \cap B) = 0 \quad \text{et} \quad P(A \cup B) = P(B)$$



**PROPRIÉTÉ VRAIE PRESQUE PARTOUT**

Une propriété est vraie presque partout si elle est vraie pour tout  $\omega \in \Omega \setminus A$  où  $A$  est inclus dans un événement égligeable.

**PROBABILITÉ SUR UN UNIVERS AU PLUS DÉNOMBRABLE**

**PROBABILITÉ SUR UN UNIVERS AU PLUS DÉNOMBRABLE**  
 Soit  $\Omega$  un ensemble au plus dénombrable,  $T = \mathcal{P}(\Omega)$  et  $P$  une probabilité sur  $(\Omega, T)$ . Pour tout  $\omega \in \Omega$ , on introduit les probabilités élémentaires  

$$p_\omega = P(\{\omega\})$$
  
 Alors la famille  $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$  est une famille de réels positifs, sommable et de somme égale à 1.

**PROBABILITÉ SUR UN UNIVERS AU PLUS DÉNOMBRABLE**  
 Soit  $\Omega$  un ensemble au plus dénombrable. Si  $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$  est une famille de réels positifs, sommable et de somme égale à 1 alors il existe une unique probabilité  $P$  sur  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$  vérifiant  

$$\forall \omega \in \Omega, P(\{\omega\}) = p_\omega$$
  
 De plus, celle-ci est déterminée par  

$$\forall A \subset \Omega, P(A) = \sum_{\omega \in A} p_\omega$$

**CAS PARTICULIER  $\Omega = \mathbb{N}$**   
 Une probabilité sur  $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$  est déterminée par le choix de  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$  avec  

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$$

**PROBABILITÉ CONDITIONNELLE**

**PROBABILITÉ CONDITIONNELLE**  
 un espace probabilisé et  $A$  un événement avec  $P(A) > 0$ . Alors l'application  

$$P_A : \begin{cases} T & \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ B & \mapsto P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \end{cases}$$
  
 est une probabilité sur  $(\Omega, T)$  dite probabilité conditionnée à  $A$

**FORMULE DES PROBABILITÉ COMPOSÉES**  
 Soit  $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$  une suite d'événements telle que  $P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) \neq 0$ . Alors  

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = P(A_1)P(A_2|A_1) \cdots P(A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})$$

**FORMULE DES PROBABILITÉS TOTALES**  
 Soit  $(A_i)_{i \in I}$  un système complet d'événements. Pour tout événement  $B$ , la famille  $(P(B \cap A_i))_{i \in I}$  est sommable et  

$$P(B) = \sum_{i \in I} P(B \cap A_i)$$
  
 Si de plus  $\forall i \in I, P(A_i) \neq 0$ , alors  

$$P(B) = \sum_{i \in I} P(B \cap A_i) = \sum_{i \in I} P(B|A_i)P(A_i)$$

**ASTUCE**  
 On peut appliquer la formule des probabilités totales lorsque  $(A_i)_{i \in I}$  un système quasi complet d'événements.

**FORMULE DE BAYES**  
 Si  $A$  et  $B$  sont deux événements de probabilités non nulles, on a :  

$$P_B(A) = \frac{P(A) \times P_A(B)}{P(B)}$$
  
 Soient  $(A_i)_{i \in I}$  un système complet d'événements de probabilités non nulles et  $A$  et  $B$  deux événements de probabilités non nulles. On a :  

$$P_B(A) = \frac{P_A(B)P(A)}{\sum_{i \in I} P_{A_i}(B)P(A_i)}$$

**INDÉPENDANCE D'ÉVÉNEMENTS**

**INDÉPENDANCE D'ÉVÉNEMENTS**  
 Soit  $(A_i)_{i \in I}$  une suite d'événements où  $I$  est au plus dénombrable  
 — On dit que les  $(A_i)_{i \in I}$  sont **deux à deux indépendants pour la probabilité  $P$**  si pour tout  $i, j \in I$ ,  

$$i \neq j \Rightarrow P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$$
  
 — On dit que les  $(A_i)_{i \in I}$  sont **mutuellement indépendants pour la probabilité  $P$**  si pour toute partie  $J$  finie de  $I$ , on a  $P\left(\bigcap_{i \in J} A_i\right) = \prod_{i \in J} P(A_i)$ .

**PROPRIÉTÉ**  
 Soit  $(A_i)_{i \in I}$  une suite d'événements indépendants pour la probabilité  $P$  avec  $I$  est au plus dénombrable  
 Si pour tout  $i \in I, B_i = A_i$  ou  $\bar{A}_i$  alors  $(B_i)_{i \in I}$  est une suite d'événements indépendants pour la probabilité  $P$ .

$(\Omega, T, P)$  désigne un espace probabilisé.



**VARIABLE ALÉATOIRE DISCRÈTE**

Soit  $(\Omega, T)$ , un espace probabilisable. On appelle **variable aléatoire discrète** définie sur  $(\Omega, T)$  toute application  $X$  de  $\Omega$  dans un ensemble  $E$  telle que :

- $X(\Omega)$  est un ensemble au plus dénombrable
- Pour tout  $x \in X(\Omega)$ ,  $X^{-1}(\cdot) \cap ]-\infty, x] \in T$

Si  $E = \mathbb{R}$ , on parle d'une variable aléatoire réelle discrète

- $X(\Omega)$  est l'**ensemble des valeurs prises par  $X$** .
- Si  $X(\Omega)$  est un ensemble fini, on dit que  $X$  est une **VAR discrète finie**. Sinon on dit que  $X$  est une **VAR discrète infinie**.



**PROPRIÉTÉ**

Soit  $X$  une variable aléatoire discrète définie sur  $(\Omega, T)$ . Pour tout  $A$  sous-ensemble de  $\mathbb{R}$ , l'ensemble

$$X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) \in A\}$$

est un événement de  $T$  que l'on notera  $[X \in A]$ .

**Notation** — Lorsque  $A = \{a\}$ , on note  $[X \in \{a\}] = [X = a] = \{\omega \in \Omega / X(\omega) = a\}$ . (C'est une des notations de l'on va le plus utiliser)  
 — Lorsque  $A = ]-\infty; a]$ , on note  $[X \leq a]$ .  
 — Lorsque  $A = [a; b]$  on note  $[a \leq X < b]$ .

**LOI D'UNE VAR DISCRÈTE**



**LOI D'UNE VARD**

On appelle **loi de probabilité** de la VAR discrète  $X$  l'ensemble de couples  $(x, p(X = x))_{x \in X(\Omega)}$



**PROPRIÉTÉ**

Soit  $X$  une VARD. La famille  $([X = x])_{x \in X(\Omega)}$  est un système complet d'événements.

En particulier :  $\sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x) = 1$



**PROPRIÉTÉ**

Soit  $\{(x_i, p_i) / i \in I\}$  une partie de  $\mathbb{R}^2$ , où  $I$  un ensemble au plus dénombrable. Si pour tout  $i \in I$ ,  $p_i \geq 0$  et si  $\sum_{i \in I} p_i = 1$  alors

il existe un espace probabilisé  $(\Omega, T, P)$  et une VAR discrète  $X$  définie sur  $\Omega$  tels que  $\{(x_i, p_i) / i \in I\}$  est la loi de  $X$ .

**FONCTION DE RÉPARTITION**



**DÉFINITION**

Soit  $X$  une VARD. On appelle **fonction de répartition de  $X$**  l'application  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$F(x) = P(X \leq x)$$

On a aussi

$$F_X(x) = \sum_{\substack{x_k \in X(\Omega) \\ x_k \leq x}} P(X = x_k)$$



**PROPRIÉTÉ**

- $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) \in [0; 1]$
- $F$  est croissante.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$ .
- $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$
- $F$  est continue à droite en tout point de  $\mathbb{R}$
- $F$  est continue à gauche en  $x \in \mathbb{R}$  ssi  $P(X = x) = 0$



**LOI D'UNE VARD À L'AIDE DE SA FONCTION DE RÉPARTITION**

Si  $X(\Omega) = \{x_i / i \in I\}$  tel que les  $x_i$  sont rangés par ordre croissant alors pour tout  $x \in I$  tel que  $i - 1 \in I$  (on a donc  $x_{i-1} < x_i$ ) on a

$$P(X = x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1})$$

**FONCTION D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE**



**L'IMAGE D'UNE VARD**

Soient  $X$  une VAR discrète sur un espace probabilisé  $(\Omega, T, P)$  et  $g$  une fonction définie sur  $X(\Omega)$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . On note  $g(X)$  l'application de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}$  définie pour tout  $\omega \in \Omega$  par

$$g(X)(\omega) = g(X(\omega))$$



**PROPRIÉTÉ**

Soient  $X$  une VAR discrète sur un espace probabilisé  $(\Omega, T, P)$  et  $g$  une fonction définie sur  $X(\Omega)$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Alors  $Y = g(X)$  est une VAR discrète définie sur  $\Omega$  et :

- $Y(\Omega) = \{g(x) / x \in X(\Omega)\}$
- $\forall y \in Y(\Omega)$

$$[Y = y] = \bigcup_{\substack{x \in X(\Omega) \\ g(x) = y}} [X = x]$$

et

$$P(Y = y) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ g(x) = y}} P(X = x)$$

**ESPÉRANCE**



**DÉFINITION**

On dit qu'une VARD  $X$  **admet une espérance** lorsque la famille  $(xP(X = x))_{x \in X(\Omega)}$  est sommable.

On appelle alors **espérance de  $X$** , le réel

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x)$$



**THÉORÈME DU TRANSFERT**

Soit  $X$  une VAR discrète et  $g$  une fonction définie au moins sur  $X(\Omega)$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . On a équivalence entre :

- La variable  $g(X)$  admet une espérance ;
- la famille  $(g(x)P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$  est sommable.

Au quel cas

$$E(g(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x)P(X = x)$$



**COROLLAIRE**

Si  $X$  admet une espérance alors pour tout  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ,  $aX + b$  admet une espérance et

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$



**DÉFINITION**

Si  $X$  est une variable aléatoire telle que  $E(X) = 0$ , on dit que  $X$  est une **variable centrée**.



**PROPRIÉTÉ**

Soit  $X$  une VAR discrète admettant une espérance  $E(X)$ . La variable aléatoire  $\tilde{X} = X - E(X)$  est une VAR discrète centrée appelée **la variable aléatoire centrée associée à  $X$** .

**MOMENT D'ORDRE  $r$**



**DÉFINITION**

Soit  $r \in \mathbb{N}^*$ . Si  $X^r$  admet une espérance alors on dit que  $X$  admet un **moment d'ordre  $r$**  qui est le réel  $m_r(X) = E(X^r)$ .



**PROPRIÉTÉ**

Soit  $r \in \mathbb{N}^*$ . Si  $X$  admet un moment d'ordre  $r$  alors  $X$  admet des moments d'ordre  $s$  pour tout  $s \in [1; r]$ .

**VARIANCE ET ÉCART TYPE**

**DÉFINITION**  
 Soit  $X$  une VAR discrète admettant une espérance et telle que la variable  $X - E(X)$  admet un moment d'ordre 2. On appelle **variance de  $X$**  le réel :

$$V(X) = E((X - E(X))^2)$$

De plus lorsque  $V(X)$  existe, on appelle **écart-type de  $X$**  le réel  $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ .

**FORMULE DE HUYGENS OU DE KÖENIG**  
 Soit  $X$  une VAR discrète.  $X$  admet une variance si, et seulement si,  $X$  admet un moment d'ordre 2 et en cas d'existence on a :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

**PROPRIÉTÉ**  
 Si  $X$  est une VAR discrète admettant une variance alors pour tout  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ,  $aX + b$  admet une variance et

$$V(aX + b) = a^2 V(X)$$

**VAR CENTRÉE RÉDUITE**  
 Si  $X$  est une VAR discrète admettant une variance et telle que  $E(X) = 0$  et  $\sigma(X) = 1$ , on dit que  $X$  est une variable centrée réduite.

**PROPRIÉTÉ**  
 Soit  $X$  une VAR discrète admettant une variance non nulle. La variable aléatoire

$$X^* = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$$

est une VAR discrète centrée réduite appelée la **variable aléatoire centrée réduite associé à  $X$** .

**LOIS DISCRÈTES USUELLES**

**LOI DE BERNOULLI (OU INDICATRICE D'ÉVÈNEMENT)**  
 Soit  $p \in [0; 1]$ . On dit qu'une VAR  $X$  suit la **loi de Bernoulli de paramètre  $p$**  (notée  $\mathcal{B}(1, p)$ ) si :

$$X(\Omega) = \{0; 1\}$$

$$P(X = 0) = 1 - p \quad \text{et} \quad P(X = 1) = p$$

On écrit  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$

**PROPRIÉTÉ**  
 Si  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ , alors  $E(X) = p$  et  $V(X) = p(1 - p)$

**LOI BINOMIALE (OU DES TIRAGES AVEC REMISE)**  
 Soit  $p \in [0; 1]$  et  $n \in \mathbb{N}$ . On dit que la VAR  $X$  suit la **loi binomiale de taille  $n$  et de paramètre  $p$**  (notée  $\mathcal{B}(n, p)$ ) si :

$$X(\Omega) = \llbracket 0; n \rrbracket$$

$$\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket \quad P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$$

On écrit  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$

**PROPRIÉTÉ**  
 Soit  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ , alors  $E(X) = np$  et  $V(X) = np(1 - p)$

**LOI UNIFORME**  
 Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On dit que  $X$  suit la **loi uniforme  $\mathcal{U}(\llbracket 1; n \rrbracket)$**  si :

$$X(\Omega) = \llbracket 1; n \rrbracket$$

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad P(X = k) = \frac{1}{n}$$

On écrit  $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1; n \rrbracket)$

**PROPRIÉTÉ**  
 Soit  $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1; n \rrbracket)$ , alors  $E(X) = \frac{n+1}{2}$  et  $V(X) = \frac{n^2 - 1}{12}$

**LOI GÉOMÉTRIQUE**  
 Soit  $p \in ]0; 1[$ . On dit qu'une VAR  $X$  suit la **loi géométrique de paramètre  $p$**  (notée  $\mathcal{G}(p)$ ) si :

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^*$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = n) = (1 - p)^{n-1} p$$

On écrit  $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$

**PROPRIÉTÉ**  
 Si  $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ , alors  $E(X) = \frac{1}{p}$  et  $V(X) = \frac{1 - p}{p^2}$

**LOI DE POISSON**  
 Soit  $\lambda > 0$ . On dit qu'une VAR  $X$  suit une **loi de Poisson** (notée  $\mathcal{P}(\lambda)$ ) si :

$$X(\Omega) = \mathbb{N}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(X = n) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!}$$

**PROPRIÉTÉ**  
 Soit  $X$  une VAR qui suit la loi  $\mathcal{P}(\lambda)$ . Alors on a :

$$E(X) = \lambda \quad \text{et} \quad V(X) = \lambda$$

**FONCTION GÉNÉRATRICE D'UNE VAR DANS  $\mathbb{N}$**

**DÉFINITION**  
 Soit  $X$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}$ . On définit sa fonction génératrice  $G_X$  par

$$\forall s \in [-1, 1], \quad G_X(s) = E(s^X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) s^k$$

**FONCTIONS GÉNÉRATRICES USUELLES**

- Si  $X$  suit la loi de Bernoulli  $\mathcal{B}(1, p)$ , alors  $G_X(t) = 1 - p + pt$
- Si  $X$  suit la loi binomiale  $\mathcal{B}(n, p)$ , alors

$$G_X(t) = (1 - p + pt)^n$$

- Si  $X$  suit la loi de poisson  $\mathcal{P}(\lambda)$  avec  $\lambda > 0$ , alors

$$G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$$

- Si  $X$  suit la loi géométrique  $\mathcal{G}(p)$  avec  $p \in ]0, 1[$ , alors

$$\forall t \in \left] -\frac{1}{q}, \frac{1}{q} \right[ : \quad G_X(t) = \frac{tp}{1 - qt}$$

**CARACTÉRISATION D'UNE LOI PAR SA FONCTION GÉNÉRATRICE**  
 Soit  $X$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}$  et  $G_X$  sa fonction génératrice, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(X = n) = \frac{G_X^{(n)}(0)}{n!}$$

**PROPRIÉTÉ**  
 Les assertions suivantes sont équivalentes

1.  $X$  admet une espérance
2.  $G_X$  est dérivable en 1.

Dans ce cas :  $E(X) = G_X'(1)$

**PROPRIÉTÉ**  
 Les assertions suivantes sont équivalentes

1.  $X$  admet un moment d'ordre 2
2.  $G_X$  est deux fois dérivable en 1.

Dans ce cas :  $V(X) = G_X''(1) + G_X'(1) - (G_X'(1))^2$

$(\Omega, T, P)$  désigne un espace probabilisé.  
 Dans toute ce paragraphe  $X$  et  $Y$  désigneront deux VARD définies sur un même espace probabilisé  $(\Omega, T, P)$ .

**LOI CONJOINT D'UN COUPLE**

**DÉFINITION**  
 On appelle **couple de VAR discrète** et on note  $(X, Y)$  toute application de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}^2$  définie par  $(X, Y)(\omega) = (X(\omega), Y(\omega))$ .

**DÉFINITION**  
 On appelle **loi du couple de VAR discrètes**  $(X, Y)$ , ou encore **loi conjointe des variables aléatoires  $X$  et  $Y$** , l'ensemble des couples  $((x, y), P(X = x, Y = y))_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)}$  où

$$P(X = x, Y = y) = P([X = x] \cap [Y = y])$$

**PROPRIÉTÉ**  
 Avec les notations précédentes, alors la famille  $(P(X = x, Y = y))_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)}$  est sommable de somme 1

**PROPRIÉTÉ**  
 Soit  $(x_i, y_i, p_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$  une famille d'élément de  $\mathbb{R}^3$ , où  $I$  et  $J$  des ensembles au plus dénombrables. Si pour tout  $(i, j) \in I \times J$ ,  $p_{i,j} \geq 0$  et si la famille  $(p_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$  est sommable de somme 1, alors il existe un espace probabilisé  $(\Omega, T, P)$  et deux VAR discrètes  $X$  et  $Y$  définies sur  $\Omega$  tels que  $((x_i, y_i, p_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$  est la loi conjointe de  $(X, Y)$ .

**ESPÉRANCE DU COUPLE**  
 Soit  $(X, Y)$  un couple de variables aléatoires réelles discrètes sur l'espace probabilisé  $(\Omega, T, P)$  admettant une espérance, on définit le vecteur espérance  $E((X, Y))$  du vecteur aléatoire  $(X, Y)$  par l'égalité

$$E((X, Y)) = (E(X), E(Y))$$

**FONCTIONS DE RÉPARTITION**  
 Soit  $(X, Y)$  un couple de variables aléatoires réelles discrètes sur l'espace probabilisé  $(\Omega, T, P)$ . La fonction de répartition de  $(X, Y)$  est la fonction de deux variables  $F_{(X,Y)}$  définie par

$$F_{(X,Y)}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$$

**LOIS MARGINALES**

**DÉFINITION**  
 La loi de  $X$  est appelé la **première loi marginale du couple**  $(X, Y)$  et la loi de  $Y$  est appelée la **deuxième loi marginale du couple**  $(X, Y)$ .

**LOIS MARGINALES À PARTIE DE LA LOI CONJOINTE**

- $\forall x \in X(\Omega), P(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P(X = x, Y = y)$
- $\forall y \in Y(\Omega), P(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x, Y = y)$

**LOIS CONDITIONNELLES**

**DÉFINITION**  
 Soit  $y \in Y(\Omega)$  tel que  $P(Y = y) \neq 0$ .  
 On appelle **loi conditionnelle à  $[Y = y]$**  de  $X$  l'ensemble des couples  $(x, P_{[Y=y]}(X = x))$  pour  $x \in X(\Omega)$ .  
 On définit de même pour  $x \in X(\Omega)$  la **loi conditionnelle à  $[X = x]$**  de  $Y$ .

**LOIS CONDITIONNELLES À PARTIR DE LA LOI CONJOINTE**  
 Soit  $(X, Y)$  un couple de VAR discrètes. Pour tout  $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$  tels que  $P(X = x) \neq 0$  et  $P(Y = y) \neq 0$  on a :

$$P_{[X=x]}(Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(X = x)}$$

$$P_{[Y=y]}(X = x) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)}$$

**INDÉPENDANCE DE VARD**

**DÉFINITION**  
 On dit que deux VAR discrètes  $X$  et  $Y$  sont **indépendantes** si :

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$$

**PROPRIÉTÉ**  
 $X$  et  $Y$  deux VARD. Les assertions suivantes sont équivalentes

- $X$  et  $Y$  sont indépendantes
- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, [X \leq x]$  et  $[Y \leq y]$  sont indépendants
- $\forall A, B \subset \mathbb{R}, [X \in A]$  et  $[Y \in B]$  sont indépendants.

**PROPRIÉTÉ**  
 Si  $X$  et  $Y$  sont deux VAR indépendantes et si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions numériques définies respectivement sur  $X(\Omega)$  et  $Y(\Omega)$  alors  $f(X)$  et  $g(Y)$  sont indépendantes.

**LOI DE PROBABILITÉ**

$g$  désigne une fonction de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  définie au moins sur  $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ .

**PROPRIÉTÉ**  
 $Z = g(X, Y)$  est une variable aléatoire réelle discrète

**PROPRIÉTÉ**  
 Soit  $Z = g(X, Y)$ . Alors, pour tout  $z \in Z(\Omega)$ , on a :

$$P(Z = z) = \sum_{\substack{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) \\ g(x,y)=z}} P([X = x] \cap [Y = y])$$

**PROPRIÉTÉ**  
 l'application  $X + Y$  est une variable aléatoire réelle discrète, et

$$P(X + Y = s) = \sum_{\substack{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) \\ x+y=s}} P(X = x, Y = y)$$

$$= \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ s-x \in Y(\Omega)}} P(X = x, Y = s - x)$$

Si  $X$  et  $Y$  sont des variables aléatoires réelles discrètes indépendantes, alors

$$P(X + Y = s) = \sum_{\substack{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) \\ x+y=s}} P(X = x) P(Y = y)$$

$$= \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ s-x \in Y(\Omega)}} P(X = x) P(Y = s - x)$$

**STABILITÉ DES LOIS BINOMIALES**  
 Si  $X$  et  $Y$  sont deux VARD **indépendantes** suivant des lois binomiales de paramètres respectifs  $(m, p)$  et  $(n, p)$  alors  $X + Y$  suit une loi binomiale de paramètre  $(m + n, p)$ .

**STABILITÉ DES LOIS DE POISSON**  
 Si  $X$  et  $Y$  sont deux VAR **indépendantes** suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs  $\lambda$  et  $\mu$  alors  $X + Y$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda + \mu$ .

**ESPÉRANCE**

**THÉORÈME DE TRANSFERT**  
 La variable  $Z = g(X, Y)$  a une espérance ssi la famille  $(g(x, y)P(X = x, Y = y))_{(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)}$  est sommable et dans ce cas

$$E(g(X, Y)) = \sum_{(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} g(x, y)P(X = x, Y = y)$$

**PROPRIÉTÉ**  
 Soit  $X$  et  $Y$  deux VARD admettant chacune une espérance et  $a, b$  deux réels. Alors la VARD  $aX + bY$  admet une espérance, et

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$$

**POSITIVITÉ DE L'ESPÉRANCE**  
 Si  $X$  une VARD  $\geq 0$  admettant une espérance, alors  $E(X) \geq 0$ .  
 Si de plus  $E(X) = 0$  alors  $X = 0$  est quasi certain.

**PROPRIÉTÉ**  
 Soit  $X$  une VARD admettant une espérance.  
 Si  $X = 0$  est quasi certain, alors  $E(X) = 0$ .

**COROLLAIRE**  
 Soient  $X$  et  $Y$  deux VARD admettant une espérance.  
 Si  $X \leq Y$  alors  $E(X) \leq E(Y)$ .

**PROPRIÉTÉ**  
 Si  $|X| \leq Y$  et si  $Y$  admet une espérance alors  $X$  aussi.

**PRODUIT DE VAR DISCRÈTES**  
 Si les variables  $X$  et  $Y$  sont indépendantes et admettant chacune une espérance alors  $XY$  admet une espérance et

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

**COVARIANCE ET COEFFICIENT DE CORRÉLATION**

**PROPRIÉTÉ**  
 Si les variables  $X$  et  $Y$  admettent chacune un moment d'ordre 2. Alors  $XY$  admet une espérance et

$$E(XY)^2 \leq E(X^2)E(Y^2) \quad \text{Inégalité de Cauchy-Schwarz}$$

Il y a égalité si et seulement si  $X$  est quasi nulle ou  $Y$  est une fonction quasi linéaire de  $X$ , c'est-à-dire, il existe un réel  $a$  tel que  $P(Y = aX) = 1$ .

**PROPRIÉTÉ**  
 L'ensemble des variables admettant un moment d'ordre 2 est un sous-espace vectoriel de l'espace des variables admettant un moment d'ordre 1.

**DÉFINITION**  
 Soient  $X$  et  $Y$  deux VARD admettant des moments d'ordre 2. On appelle **covariance de  $X$  et de  $Y$**  le nombre réel

$$\text{cov}(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y)))$$

Si  $\sigma(X)\sigma(Y) \neq 0$ , le coefficient de corrélation de  $X$  et de  $Y$  est :

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$

On dit que  $X$  et  $Y$  sont non corrélées si  $\text{cov}(X, Y) = 0$ .

**PROPRIÉTÉ**  
 Soit  $X$  et  $Y$  admettant un moment d'ordre 2 alors

$$\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

**PROPRIÉTÉ**  
 Soit  $X, Y, Z$  des VARD admettant des moments d'ordre 2 et soit  $a$  et  $b$  deux réels

- $\text{cov}(X, X) = V(X)$ ,
- $\text{cov}(X, Y) = \text{cov}(Y, X)$ ,
- $\text{cov}(aX + bZ, Y) = a.\text{cov}(X, Y) + b.\text{cov}(Z, Y)$
- $\text{cov}(X, Y)^2 \leq V(X)V(Y)$
- $|\rho(X, Y)| \leq 1$
- $|\rho(X, Y)| = 1 \iff Y = \alpha X + \beta$  est presque sûrement pour un certain  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ .

**VARIANCE D'UNE SOMME**  
 Soient  $X$  et  $Y$  deux VARD admettant des variances, alors

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\text{cov}(X, Y).$$

**VECTEURS DE VARIABLES ALÉATOIRES**

**DÉFINITION**  
 On appelle vecteur aléatoire discret défini à partir des variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$  la variable aléatoire discrète  $Z$  donnée par

$$\forall \omega \in \Omega, \quad Z(\omega) = (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$$

La loi de la variable  $Z$  est appelée loi conjointe des variables  $X_1, \dots, X_n$  tandis que les lois de  $X_1, \dots, X_n$  sont les lois marginales de  $Z$ .

**FONCTION DE RÉPARTITION D'UN VECTEUR**

Soit  $(X_1, \dots, X_n)$  un vecteur de variables aléatoires réelles discrètes sur l'espace probabilisé  $(\Omega, T, P)$ . La fonction de répartition de  $(X_1, \dots, X_n)$  est la fonction de  $n$  variables  $F_{(X_1, \dots, X_n)}$  définie par

$$F_{(X_1, \dots, X_n)}(x_1, \dots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n)$$

**ESPÉRANCE DU COUPLE**  
 Soit  $(X_1, \dots, X_n)$  un vecteur de VARD admettant une espérance, on définit le vecteur espérance  $E((X_1, \dots, X_n))$  du vecteur aléatoire  $(X, Y)$  par l'égalité

$$E((X_1, \dots, X_n)) = (E(X_1), \dots, E(X_n))$$

**$n$  VARIABLES**  
 On dit que les VARD  $X_1, \dots, X_n$  sont **(mutuellement) indépendantes** lorsque pour tout  $(x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega)$  :

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n [X_i = x_i]\right) = \prod_{i=1}^n P(X_i = x_i)$$

**PROPRIÉTÉ**  
 Les assertions suivantes sont équivalentes

- Les VARD  $X_1, \dots, X_n$  sont indépendantes
- $\forall A_i \subset \mathbb{R}$ , les événements  $(X_i \in A_i)_{i \in [1, n]}$  sont mutuellement indépendants

**PROPRIÉTÉ**  
 Si la famille  $(X_i)_{1 \leq i \leq n_k}$  est indépendante et si  $1 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_k$ , alors la famille  $(f_1(X_1, \dots, X_{n_1}), \dots, f_k(X_{n_1}, \dots, X_{n_k}))$  est indépendante

**UNE SUITE DE VARIABLES**  
 On dit que  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une **suite de VARD mutuellement indépendantes** si pour tout  $n \in \mathbb{N}$  les variables aléatoires  $X_0, \dots, X_n$  sont mutuellement indépendantes.

**L'ESPÉRANCE D'UNE SOMME**  
 Soit  $X_1, \dots, X_n$  des VARD admettant toutes des espérances. Alors la VARD  $\sum_{i=1}^n X_i$  admet une espérance et

$$E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n E(X_i)$$

**VARIANCE D'UNE SOMME**  
 Soit  $X_1, \dots, X_n$  des VARD admettant de moments d'ordre 2, alors  $\sum_{i=1}^n X_i$  admet une variance et on a

$$V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n V(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{cov}(X_i, X_j).$$

En cas de l'indépendance, alors  $V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n V(X_i)$ .

Soient  $E, F, G$  et  $H$  des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions finies non nulles. On pose  $\dim E = n$  et  $\dim F = p$ . Soient  $U \subset E$  et  $V \subset F$  deux ouverts non vides et  $a \in U, f : U \rightarrow F$ . Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$  et  $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$  une base de  $F$ .

**DÉRIVÉES PARTIELLES**

$U$  est un ouvert, il existe  $\alpha > 0$  tel que  $B(a, \alpha) \subset U$ . Soit  $h \in E \setminus \{0\}$ , la fonction  $\varphi : t \in \mathbb{R} \mapsto f(a + th)$  est définie au voisinage de 0.



**DÉFINITION**

On dit que  $f$  admet une dérivée en  $a$  suivant  $h$  si  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + th) - f(a)}{t}$  existe. Dans ce cas, cette limite s'appelle la dérivée de  $f$  en  $a$  suivant  $h$  et on la note  $D_h f(a)$ .



**PROPRIÉTÉ**

$f$  admet une dérivée en  $a$  suivant  $h$  si, et seulement, si  $\varphi$  est dérivable en 0. Dans un tel cas  $D_h f(a) = \varphi'(0)$ .



**DÉRIVÉES PARTIELLES**

- On appelle dérivées partielles de  $f$  en  $a$  les dérivées, lorsqu'elles existent, de  $f$  en  $a$  suivant les vecteurs  $e_1, \dots, e_n$ .
- La dérivée selon le vecteur  $e_i$  se note  $D_i f(a)$  ou  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ .
- L'application  $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$  s'appelle la  $i$ -ème application dérivée partielle de  $f$  sur  $U$ . On la note  $D_i f$  ou  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ .

**DIFFÉRENTIELLE**



**DIFFÉRENTIELLE EN UN POINT**

On dit que  $f$  est différentiable en  $a$  s'il existe une application linéaire  $\ell$  de  $E$  vers  $F$  et  $\varepsilon$  une application de  $E$  dans  $F$  continue et nulle en 0 telles que :  $\forall h \in E$  tel que  $a + h \in U$  on a

$$f(a + h) \underset{h \rightarrow 0_E}{=} f(a) + \ell(h) + \|h\| \varepsilon(h)$$

Dans ce cas, l'application  $\ell$  est unique et s'appelle la différentielle de  $f$  en  $a$  et on la note  $df_a$ . On écrit souvent  $o(h)$  pour  $\|h\| \varepsilon(h)$ . Toute écriture :

$$f(a+h) = f(a) + \ell(h) + o(h) \text{ quand } h \rightarrow 0 \text{ avec } \ell \in \mathcal{L}(E, F).$$

est appelée développement limité à l'ordre 1 de  $f$  en  $a$



**PROPRIÉTÉ**

- Si  $f$  est différentiable en  $a$  alors  $f$  est continue en  $a$ .
- Si  $f$  est différentiable en  $a$  alors  $f$  est dérivable en  $a$  suivant tout vecteur non nul et :  $\forall h \in E, df_a(h) = D_h f(a)$ .
- Si  $E = \mathbb{R}$ . L'application  $f$  est différentiable en  $a$  si, et seulement, si  $f$  est dérivable en  $a$ . Dans ce cas,  $\forall h \in \mathbb{R}, df_a(h) = hf'(a)$ . En particulier,  $df_a(1) = f'(a)$ .



**PROPRIÉTÉ**

Si  $f$  est différentiable en  $a$  alors les dérivées partielles de  $f$  en  $a$  existent et on a  $\forall h = (h_1, \dots, h_n) \in E$ ,

$$df_a(h) = D_h f(a) = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$$

Le DL<sub>1</sub>( $a$ ) de  $f$  s'écrit :  $f(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + o(\|h\|)$



**DIFFÉRENTIELLE**

On dit que  $f$  est différentiable sur  $U$  si  $f$  est différentiable en tout point de  $U$ . Dans ce cas, l'application  $df : x \in U \mapsto df_x \in \mathcal{L}(E, F)$  s'appelle la différentielle de  $f$  sur  $U$ .

**OPÉRATIONS SUR LES APPLICATIONS DIFFÉRENTIABLES**



**SOMME**

Soit  $f, g : U \rightarrow F$  différentiables en  $a$ . Alors :  $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda f + g$  est différentiable en  $a$  et on a :  $d(\lambda f + g)_a = \lambda df_a + dg_a$



**COMPOSITION PAR APPLICATION BILINÉAIRE**

Soient  $f : U \subset E \rightarrow F, g : U \subset E \rightarrow G$  et  $B : F \times G \rightarrow H$  bilinéaire. Si  $f$  et  $g$  sont différentiables en  $a$  alors  $B(f, g)$  l'est aussi et

$$dB(f, g)_a = B(df_a, g(a)) + B(f(a), dg_a)$$

Si de plus  $F$  est une algèbre normée alors pour  $f, g : U \subset E \rightarrow F$  différentiables en  $a$ ,  $fg$  est différentiable en  $a$  et on a

$$\forall h \in E, d(fg)_a(h) = df_a(h)g(a) + f(a)dg_a(h)$$



**COMPOSITION DE DEUX FONCTIONS VECTORIELLES**

Soit  $f : U \rightarrow F$  différentiable en  $a, V$  un ouvert de  $F$  tel que  $f(U) \subset V$  et  $g : V \rightarrow G$  différentiable en  $f(a)$ . Alors  $g \circ f$  est différentiable en  $a$  et on a  $d(g \circ f)_a = dg_{f(a)} \circ df_a$ .



**COMPOSITION VECTORIELLE ET SCALAIRE**

Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\varphi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telles que  $f(U) \subset I$ . Si  $f$  est différentiable en  $a$  et  $\varphi$  dérivable en  $f(a)$ , alors  $\varphi \circ f$  est dérivable en  $a$  et  $d(\varphi \circ f)_a = \varphi'(f(a))df_a$



**COMPOSITION SCALAIRE ET VECTORIELLE**

Soit  $f : U \subset E \rightarrow F$  et  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E$  telles que  $\gamma(I) \subset U$ . Si  $\gamma$  est dérivable sur  $I$  et  $f$  est différentiable sur  $U$ , alors  $f \circ \gamma$  est dérivable sur  $I$  et on a :  $\forall t \in I, (f \circ \gamma)'(t) = df_{\gamma(t)}(\gamma'(t))$



**FONCTIONS COMPOSANTES**

Soit  $f : U \subset E \rightarrow F$ . Alors,  $f$  est différentiable si, et seulement si, les fonctions coordonnées de  $f$  dans une base de  $F$  le sont.



**DÉFINITION**

On appelle matrice jacobienne relative aux bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$  d'une application  $f : U \subset E \rightarrow F$  différentiable en  $a \in U$  la matrice de l'application linéaire  $df_a$  relative aux bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$

$$J_f(a) = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(df_a) \in \mathcal{M}_{p, n}(\mathbb{R})$$

En notant  $f_1, \dots, f_n$  les fonctions coordonnées de  $f$

$$J_f(a) = \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$$



**PROPRIÉTÉ**

Soient  $f : U \rightarrow F$  et  $g : V \rightarrow G$  de classe  $\mathcal{C}^1$  telles que  $f(U) \subset V$ . Si  $f$  est différentiable en  $a$  et  $g$  est différentiable en  $f(a)$ . On a

$$J_{g \circ f}(a) = J_g(f(a)) \times J_f(a)$$

**FONCTIONS DE CLASSE  $\mathcal{C}^k$**



**DÉFINITION**

Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . On appelle dérivée partielle d'ordre  $k$  de  $f$  en  $a$  tout vecteur  $\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}^{\alpha_1} \dots \partial x_{i_p}^{\alpha_p}}(a)$ , lorsqu'il existe, de  $F$  où  $i_1, \dots, i_p \in \{1, \dots, n\}$  et  $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{N}^*$  tels que  $\alpha_1 + \dots + \alpha_p = k$ . Toute application de la forme  $x \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}^{\alpha_1} \dots \partial x_{i_p}^{\alpha_p}}(x)$  où  $i_1, \dots, i_p \in \{1, \dots, n\}$  et  $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{N}^*$  tels que  $\alpha_1 + \dots + \alpha_p = k$ , lorsqu'elle est définie sur  $U$ , s'appelle application dérivée partielle d'ordre  $k$  de  $f$  sur  $U$ .



**DÉFINITION**

On dit que  $f$  est de classe :

- $\mathcal{C}^k$  ( $k \geq 1$ ) sur  $U$  si ses dérivées partielles d'ordre  $k$  existent et sont continues sur  $U$ .
- $\mathcal{C}^\infty$  sur  $U$  si  $\forall k \in \mathbb{N}^*, f$  est  $\mathcal{C}^k$  sur  $U$ .

On note

- On note  $\mathcal{C}^k(U, F)$  avec  $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$  l'ensemble des fonctions de  $U$  vers  $F$  de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $U$ .
- $\mathcal{C}^{k+1}(U, F) \subset \mathcal{C}^k(U, F)$  et  $\mathcal{C}^\infty(u, F) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^k(U, F)$

La notion de fonction de classe  $\mathcal{C}^k$  ne dépend pas du choix de la base  $\mathcal{B}$ .



**PROPRIÉTÉ**

$f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $U$  si et seulement si  $f$  est différentiable et  $df$  est continue sur  $U$  si et seulement si pour tout  $h \in E$  l'application  $D_h f$  existe et est continue sur  $U$ .

**MATRICE JACOBienne**

**SOMME**  
 Soit  $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ . Soient  $f, g : U \subset E \rightarrow F$  et  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .  
 Si  $f$  et  $g$  sont de classe  $C^k$  alors  $\lambda f + \mu g$  est de classe  $C^k$  et

$$\frac{\partial(\lambda f + \mu g)}{\partial x_i} = \lambda \frac{\partial f}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial g}{\partial x_i}$$

**COMPOSITION AVEC UNE APPLICATION BILINÉAIRE**  
 Soit  $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ . Soit  $f : U \subset E \rightarrow F, g : U \subset E \rightarrow G$   
 et  $B : F \times G \rightarrow H$  bilinéaire. Si  $f$  et  $g$  sont de classe  $C^k$  alors  
 $B(f, g)$  l'est aussi et

$$\frac{\partial B(f, g)}{\partial x_i} = B\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}, g\right) + B\left(f, \frac{\partial g}{\partial x_i}\right)$$

**PROPRIÉTÉ**  
 Soit  $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$

1. Si  $F$  est une  $\mathbb{K}$ -algèbre, alors  $C^k(U, F)$  est une sous-algèbre de  $\mathcal{C}(U, F)$
2. Si  $f \in C^k(U, F)$  et  $g \in C^k(U, \mathbb{K})$ , alors  $gf \in C^k(U, F)$ . Si de plus  $g$  ne s'annule pas sur  $U$  alors  $\frac{f}{g}$  est de classe  $C^k$  sur  $U$

**LIEN AVEC LES COMPOSANTES**  
 Soit  $f : U \subset E \rightarrow F$ . Alors  $f$  est de classe  $C^k$  sur  $U$  si et seulement si ses fonctions composantes sont de classe  $C^k$  sur  $U$

**PROPRIÉTÉ**  
 Soient  $f : U \subset E \rightarrow F$  et  $g : V \subset F \rightarrow G$  telles que  $f(U) \subset V$ .  
 Si  $f$  et  $g$  sont de classe  $C^k$  alors  $g \circ f$  l'est aussi et pour tout  $a \in U$

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x_j}(a) = \sum_{i=1}^p \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \cdot \frac{\partial g}{\partial y_i}(f(a))$$
 Règle de la chaîne  
 avec  $f_1, \dots, f_p$  les fonctions coordonnées de  $f$ .

**PROPRIÉTÉ**  
 Soient  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E$  et  $f : U \subset E \rightarrow F$  telles que  $\gamma(I) \subset U$ .  
 On note  $\gamma_1, \dots, \gamma_p$  les fonctions coordonnées de  $\gamma$ . Si  $\gamma$  et  $f$  sont de classe  $C^1$  alors  $f \circ \gamma$  l'est aussi et :

$$(f \circ \gamma)'(t) = df_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) = \sum_{i=1}^n x'_i(t) \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(t))$$

**PROPRIÉTÉ**  
 Soit  $f : U \subset E \rightarrow F$  une application de classe  $C^1$ .  
 Si  $\gamma : [0, 1] \rightarrow E$  est un arc de classe  $C^1$  inscrit dans  $U$  d'extrémités  $a = \gamma(0)$  et  $b = \gamma(1)$  alors  $f(b) - f(a) = \int_0^1 df_{\gamma(t)} \gamma'(t) dt$   
 En particulier si  $U$  est un ouvert connexe par arcs alors  $f$  est constante si, et seulement si,  $df = \vec{0}$

**THÉORÈME DE SCHWARZ**

**THÉORÈME DE SCHWARZ**  
 Soit  $f \in C^2(U, F)$ . Alors :  $\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ .

**FONCTIONS NUMÉRIQUES DE CLASSE  $C^1$**

$E$  désigne un espace euclidien dont on note  $(\cdot | \cdot)$  le produit scalaire

**GRADIENT**  
 Si  $f : U \subset E \rightarrow \mathbb{R}$  est une application de classe  $C^1$  alors pour tout  $a \in U$ , il existe un unique vecteur dans  $E$  noté  $\nabla f(a)$  et appelé gradient de  $f$  en  $a$  vérifiant  $\forall h \in E, D_h f(a) = (\nabla f(a) | h)$   
 De plus, si  $B = (e_1, \dots, e_p)$  est une BON de  $E$  alors

$$\nabla f(a) = \sum_{i=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) e_i$$

**PROPRIÉTÉ**  
 Si  $f, g : U \subset E \rightarrow \mathbb{R}$  sont de classe  $C^1$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , alors

1.  $\nabla(f + \lambda g) = \nabla f + \lambda \nabla g$
2.  $\nabla(fg) = f \nabla g + g \nabla f$
3. Si  $g$  ne s'annule pas sur  $U$ , alors  $\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g \nabla f - f \nabla g}{g^2}$

**SURFACES REPRÉSENTATIVES**

Soit  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  vue en les deux variables  $x$  et  $y$ .

**DÉFINITION**  
 On appelle surface représentative de  $f$  l'ensemble formé des  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  vérifiant l'équation  $S_f : z = f(x, y)$

**DÉFINITION**  
 Si  $f$  est différentiable en  $(x_0, y_0)$ , le plan d'équation cartésienne

$$z = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + f(x_0, y_0)$$

est appelé plan tangent à  $S_f$  au point  $(x_0, y_0, z_0)$ .

**PROPRIÉTÉ**  
 Si  $f$  est différentiable en  $(x_0, y_0)$  alors les tangentes à  $S_f$  au point  $(x_0, y_0, z_0)$  sont toutes incluses dans le plan tangent à  $S_f$  en  $(x_0, y_0, z_0)$ .

**DÉVELOPPEMENT DE TAYLOR-YOUNG D'ORDRE 2**

**PROPRIÉTÉ**  
 Soit  $f \in C^2(U)$ . Alors  $\forall h \in E$  tel que  $a + h \in U$  on a :

$$f(a + h) = f(a) + df_a(h) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) + o(\|h\|^2)$$

**APPLICATIONS AUX EXTRÊMUMS**

**MINIMUM**  
 Soit  $f : U \subset E \rightarrow \mathbb{R}$ . On dit que  $f$  admet un minimum (local) en  $a \in U$  si  $\forall x \in U, (f(x) \geq f(a))$   
 On dit que  $f$  admet un minimum local en  $a \in X$  si  $\exists \alpha > 0, \forall x \in U \cap B(a, \alpha), f(x) \geq f(a)$   
 On définit de même maximum et maximum local

**POINT CRITIQUE**  
 On dit qu'une application  $f : U \subset E \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  admet un point critique en  $a \in U$  si  $df_a = 0$ .

**CARACTÉRISATION DE POINTS CRITIQUES**  
 Soient  $B = (e_1, \dots, e_p)$  une base de  $E, f : U \subset E \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  et  $a \in U$ . On a équivalence entre :

1.  $a$  est point critique de  $f$ ;
2.  $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$ .

**PROPRIÉTÉ**  
 Si  $f : U \subset E \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  admet un extremum local en  $a \in U$  alors  $a$  est point critique de  $f$ .

**EXTRÊMUMS EN DIMENSION 2**  
 Soit  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2(U)$  qui admet un point critique  $a$ .  
 On note  $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b), s = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b)$  et  $t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)$ .  
 On suppose que  $\Delta' = s^2 - rt \neq 0$ . Alors :

1. Si  $s^2 - rt < 0$  et  $r > 0$  alors  $f$  admet un minimum local stricte en  $a$ .
2. Si  $s^2 - rt < 0$  et  $r < 0$  alors  $f$  admet un maximum local stricte en  $a$ .
3. Si  $s^2 - rt > 0$  alors  $a$  n'est pas un extrémum (On dit aussi  $a$  est un point col de  $f$ )

$\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .  $a < b$  deux éléments de  $\overline{\mathbb{R}}$ ,  $I$  et  $J$  deux intervalles

**GÉNÉRALITÉS SUR LES INTÉGRALES IMPROPRES**



**DÉFINITION**

Soit  $f : [a, b[ \rightarrow \mathbb{K}$  cpm. On dit que l'intégrale  $\int_a^b f(t)dt$  converge si  $\lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(t)dt$  existe dans  $\mathbb{K}$ . Dans ce cas on pose

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(t)dt$$

**i** On a une notion similaire avec  $f : ]a, b] \rightarrow \mathbb{K}$  cpm.



**LOCALISATION**

Soit  $f : [a, b[ \rightarrow \mathbb{K}$  une fonction cpm et  $c \in [a, b]$ . Alors l'intégrale  $\int_a^b f(t)dt$  converge ssi l'intégrale  $\int_c^b f(t)dt$  converge. En cas de convergence  $\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$



**INTÉGRALES PLUSIEURS FOIS IMPROPRES**

Soit  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{K}$  cpm. On dit que l'intégrale  $\int_a^b f(t)dt$  converge s'il existe  $c \in ]a, b[$  tel que les deux intégrales impropres  $\int_a^c f(t)dt$  et  $\int_c^b f(t)dt$  convergent. En cas de convergence :

$$\int_a^b f(t)dt := \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt = \lim_{\substack{x \rightarrow a^+ \\ y \rightarrow b^-}} \int_x^y f(t)dt.$$

**EXEMPLES FONDAMENTAUX**



**FAUSSES INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES**

Soit  $a < b \in \mathbb{R}$ ,  $f : [a, b[ \rightarrow \mathbb{K}$  cpm sur  $[a, b[$ . Si  $f$  admet une limite finie en  $b^-$  alors  $\int_a^b f(t)dt$  converge



**INTÉGRALES DE RIEMANN**

Soit  $\alpha$  un réel

- Riemann en  $+\infty$**  :  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$  converge  $\Leftrightarrow \alpha > 1$
- Riemann en 0** :  $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$  converge  $\Leftrightarrow \alpha < 1$

**CONVERGENCE ABSOLUE-INTÉGRABILITÉ**



**DÉFINITION**

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{K}$  cpm. On dit que l'intégrale  $\int_I f(t)dt$  converge absolument ou  $f$  est intégrable sur  $I$  ssi  $\int_I |f(t)|dt$  converge



**CRITÈRE DE DOMINATION**

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{K}$  et  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ , continues par morceaux  $I$ . Si  $|f| \leq g$  et si  $g$  intégrable sur  $I$ , alors  $f$  est intégrable sur  $I$



**CAS D'INTERVALLE BORNÉ**

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{K}$  cpm et bornée sur  $I$  et si l'intervalle  $I$  est borné, alors  $f$  est intégrable sur  $I$



**CONVERGENCE ABSOLUE ENTRAÎNE LA CONVERGENCE**

Si  $f : I \rightarrow \mathbb{K}$  cpm et intégrable sur  $I$ , alors  $\int_I f(t)dt$  converge



**SEMI-CONVERGENCE**

On dit qu'une intégrale est semi-convergente si elle est convergente sans qu'elle soit absolument convergente



**L'INTÉGRALE DE DIRICHLET**

L'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$  est semi-convergente.

**CRITÈRE DE COMPARAISON**

Dans cette section  $a \in \mathbb{R}$  et  $b \in \overline{\mathbb{R}}$  avec  $a < b$



**THÉORÈME DE COMPARAISON**

Soit  $f : [a, b[ \rightarrow \mathbb{K}$  et  $g : [a, b[ \rightarrow \mathbb{R}^+$  deux fonctions cpm sur  $[a, b[$ .

- Si  $f(t) = O(g(t))$  et  $\int_a^b g(t)dt$  converge alors  $\int_a^b f(t)dt$  converge et  $\int_a^b f(t)dt = O\left(\int_a^b g(t)dt\right)$
- Si  $f(t) = o(g(t))$  et  $\int_a^b g(t)dt$  converge alors  $\int_a^b f(t)dt$  converge et  $\int_a^b f(t)dt = o\left(\int_a^b g(t)dt\right)$
- Si  $f$  est positive et  $f(t) \sim g(t)$  alors  $\int_a^b g(t)dt$  et  $\int_a^b f(t)dt$  sont de même nature
  - En cas de convergence, on a  $\int_a^b f(t)dt \sim \int_a^b g(t)dt$
  - En cas de divergence, on a  $\int_a^b f(t)dt \sim \int_a^b g(t)dt$



**RÈGLE  $x^\alpha f(x)$  EN  $+\infty$**

Soit  $a \in \mathbb{R}$   $f : [a, +\infty[ \rightarrow \mathbb{K}$  cpm sur  $[a, +\infty[$

- Si  $\exists \alpha > 1$  tq  $f(x) \underset{+\infty}{\sim} O\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$ , alors  $\int_a^{+\infty} f(t)dt$  converge
- Si  $\exists \alpha \leq 1$  tq  $\frac{1}{x^\alpha} \underset{+\infty}{\sim} O(f(x))$ , alors  $\int_a^{+\infty} f(t)dt$  diverge



**INTÉGRALES DE BERTRAND**

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta} dx \text{ converge } \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha > 1 \\ \text{ou} \\ \alpha = 1 \text{ et } \beta > 1 \end{cases}$$



**$x^\alpha f(x)$  EN 0**

Soit  $a > 0$   $f : ]0, a] \rightarrow \mathbb{K}$  cpm  $]0, a]$

- Si  $\exists \alpha < 1$  tq  $f(x) \underset{0^+}{\sim} O\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$ , alors  $\int_0^a f(t)dt$  converge
- Si  $\exists \alpha \geq 1$  tq  $\frac{1}{x^\alpha} \underset{0^+}{\sim} O(f(x))$  alors  $\int_0^a f(t)dt$  diverge



**COMPARAISON SÉRIE INTÉGRALE**

Soit  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  une fonction décroissante cpm sur  $\mathbb{R}^+$ . L'intégrale  $\int_0^{+\infty} f(t)dt$  et la série  $\sum f(n)$  sont de même nature.

**CALCUL PRATIQUE DES INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES**



**CHANGEMENT DE VARIABLE**

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  cpm et  $\varphi : J \rightarrow I$  une bijection de classe  $C^1$  sur  $J$  vers  $I$  Alors les intégrales généralisées  $\int_J f(\varphi(x)) |\varphi'(x)| dx$  et  $\int_I f(t)dt$  sont de même nature. Si elles convergent on a :

$$\int_J f(\varphi(x)) |\varphi'(x)| dx = \int_I f(t)dt$$



**INTÉGRATION PAR PARTIES**

Soient  $u, v : I \rightarrow \mathbb{R}$  deux applications de classe  $C^1$  sur  $I$  telles que  $u, v$  admette des limites finies aux extrémités de  $a$  et  $b$  de  $I$ . Alors les deux intégrales  $\int_a^b u'(t)v(t)dt$  et  $\int_a^b u(t)v'(t)dt$  sont de même nature. En cas de convergence, on note  $[uv]_a^b = \lim_{b^-} u(x)v(x) - \lim_{a^+} u(x)v(x)$ , on a alors :

$$\int_a^b u(t)v'(t)dt = \lim_{b^-} u(x)v(x) - \lim_{a^+} u(x)v(x) - \int_a^b u'(t)v(t)dt$$

**LE THÉORÈME DE CONVERGENCE DOMINÉE**

**THÉORÈME DE CONVERGENCE DOMINÉE**

Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions de  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$  telle que :

- ◇ Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n \in C_m(I, \mathbb{K})$
- ◇  $f_n \xrightarrow{cv\&s} f \in C_m(I, \mathbb{K})$
- ◇ il existe  $\varphi \in C_m(I, \mathbb{R}^+)$  intégrable telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |f_n| \leq \varphi \quad \text{[hypothèse de domination]}$$

Alors :

- ◆ Les applications  $f_n$  et  $f$  sont intégrables sur  $I$  ;
- ◆ la suite  $\left(\int_I f_n\right)$  converge et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n = \int_I f$$

**i** Le théorème TCVD ne nécessite pas la convergence uniforme de la suite de fonctions  $(f_n)$ , mais la fonction limite doit être cpm sur  $I$ .

**INTÉGRATION TERME À TERME D'UNE SÉRIE**

**THÉORÈME DE CONVERGENCE DOMINÉE**

Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in C_m(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$  une suite de fonctions telle que

- ◇ Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction  $f_n$  est intégrable sur  $I$
- ◇ La série  $\sum f_n$  converge simplement sur  $I$  de somme  $f$  cpm sur  $I$  ;
- ◇ La série  $\sum \int_I |f_n|$  converge.

Alors  $f$  est intégrable sur  $I$  et on a l'interversion somme-intégral :

$$\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n \text{ et } \int_I \left| \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I |f_n|.$$



**ASTUCE**

Si la domination dans le cas des séries n'est pas accessible vous pouvez utiliser le TCVD appliqué à la suite des sommes partielles. En notant

$$S_n = \sum_{k=0}^n f_k \text{ et } S = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k$$

On peut aussi intégrer terme à terme.

**CONTINUITÉ PAR DOMINATION LOCALE**

**CONTINUITÉ PAR DOMINATION LOCALE**

Soit  $f : \begin{cases} A \times I \rightarrow \mathbb{K} \\ (x, t) \mapsto f(x, t) \end{cases}$  où  $A \subset \mathbb{R}^n$ . On suppose que :

- ◇  $\forall t \in I, x \mapsto f(x, t)$  est continue sur  $A$  ;
- ◇  $\forall x \in A, t \mapsto f(x, t)$  est cpm sur  $I$  ;
- ◇ Pour tout compact  $K$  contenu dans  $A$ , il existe  $\varphi_K \in C_m(I, \mathbb{R}^+)$  intégrable telle que

$$\forall (x, t) \in K \times I, |f(x, t)| \leq \varphi_K(t)$$

Alors :

- ◆  $\forall x \in A$ , la fonction  $t \mapsto f(x, t)$  est intégrable sur  $I$  ;
- ◆  $F : x \in A \mapsto \int_I f(x, t)dt$  est continue sur  $A$



Lorsque  $A$  intervalle de  $\mathbb{R}$ , on remplace  $K$  par  $[a, b]$



Dans la troisième assertion, on peut remplacer  $K$  par  $A$  et obtenir une domination globale



**CAS DE  $I = [a, b]$**

Soit  $f : A \times [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$  une fonction continue.

Alors  $F : x \in A \mapsto \int_a^b f(x, t)dt$  est continue sur  $A$ .

**RÉGULARITÉ PAR DOMINATION LOCALE**

**DÉRIVATION SOUS LE SIGNE  $\int$  PAR DOMINATION LOCALE**

Soit  $f : J \times I \rightarrow \mathbb{K}$  une fonction telle que

- ◇ Pour tout  $x \in J, t \mapsto f(x, t)$  est cpm et intégrable sur  $I$  ;
- ◇  $f$  admet sur  $J \times I$  une dérivée partielle  $\frac{\partial f}{\partial x}$  qui est continue par rapport à la première variable et cpm par rapport à la seconde
- ◇  $\forall [a, b]$  contenu dans  $J$  il existe  $\varphi_{[a,b]} \in C_m(I, \mathbb{R}^+)$  intégrable telle que

$$\forall (x, t) \in [a, b] \times I, \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi_{[a,b]}(t)$$

Alors  $F : x \in J \mapsto \int_I f(x, t)dt$  est de classe  $C^1$  sur  $J$  et

$$\forall x \in J, F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)dt \quad \text{(Formule de Leibniz)}$$



**CAS DE  $I = [a, b]$**

Soit  $f : J \times [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$  une fonction de classe  $C^n$  sur  $J \times [a, b]$ .

Alors  $F : x \in J \mapsto \int_a^b f(x, t)dt$  est de classe  $C^n$  sur  $J$



**CLASSE  $C^n$**

Soit  $f : J \times I \rightarrow \mathbb{K}$  une fonction et  $n \in \mathbb{N}^*$ .

On suppose que  $f$  admet des dérivées partielles  $\frac{\partial f}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^n f}{\partial x^n}$ . Si

- ◇ Pour tout  $x \in J, t \mapsto f(x, t)$  est cpm et intégrable sur  $I$  ;
- ◇  $\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$  et  $x \in J$ , l'application  $t \mapsto \frac{\partial^i f}{\partial x^i}(x, t)$  est cpm et intégrable sur  $I$  ;
- ◇  $\frac{\partial^n f}{\partial x^n}$  qui est continue par rapport à la première variable et cpm par rapport à la seconde
- ◇ Pour tout  $[a, b] \subset J$ , il existe  $\varphi_{[a,b]}^n \in C_m(I, \mathbb{R}^+)$  intégrable telle que :  $\forall (x, t) \in [a, b] \times I, \left| \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, t) \right| \leq \varphi_{[a,b]}^n(t)$

Alors la fonction  $F$ , définie sur  $J$  par  $F : x \mapsto \int_I f(x, t)dt$  est de classe  $C^n$  sur  $J$  et

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall x \in J, F^{(k)}(x) = \int_I \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)dt$$



**CAS DE  $I = [a, b]$**

Soit  $f : J \times [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$  une fonction de classe  $C^n$  sur  $J \times [a, b]$ .

Alors  $F : x \in J \mapsto \int_a^b f(x, t)dt$  est de classe  $C^n$  sur  $J$



**CLASSE  $C^\infty$**

Soit  $f : J \times I \rightarrow \mathbb{K}$  une fonction.

On suppose que

- ◇ Pour tout  $x \in J, t \mapsto f(x, t)$  est cpm et intégrable sur  $I$  ;
- ◇ Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , l'application  $f$  admet une dérivée partielle  $\frac{\partial^n f}{\partial x^n}$  continue par rapport à la première variable, cpm par rapport à la seconde
- ◇ Pour tout  $[a, b] \subset J$ , il existe  $\varphi_{[a,b]}^n \in C_m(I, \mathbb{R}^+)$  intégrable telle que :  $\forall (x, t) \in [a, b] \times I, \left| \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, t) \right| \leq \varphi_{[a,b]}^n(t)$

Alors la fonction  $F$ , définie sur  $J$  par  $F : x \mapsto \int_I f(x, t)dt$  est de classe  $C^\infty$  sur  $J$  et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in J, F^{(n)}(x) = \int_I \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, t)dt$$

$E$  désigne un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

**PRODUIT SCALAIRE ET ORTHOGONALITÉ**

**DÉFINITION**  
On appelle produit scalaire sur  $E$  toute forme  $\varphi$  bilinéaire, symétrique, définie positive. On note  $\langle x|y \rangle$  à la place de  $\varphi(x, y)$   
On appelle norme euclidienne de  $x \in E$  le réel  $\|x\| = \sqrt{\varphi(x|x)}$

**IDENTITÉS REMARQUABLES**  
Pour tout  $x, y \in E$

- $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x|y \rangle + \|y\|^2$
- $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x|y \rangle + \|y\|^2$
- $\langle x + y|x - y \rangle = \|x\|^2 - \|y\|^2$
- Parallélogramme**  $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$
- Polarisation** :  $\langle x|y \rangle = \frac{1}{2}(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)$

**INÉGALITÉS CLASSIQUES**  
Pour tous  $x, y \in E$

- Inégalité de Cauchy-Schwarz** :  $|\langle x|y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$   
Il y a égalité si, et seulement si,  $x$  et  $y$  sont colinéaires.
- Inégalité de Minkowski** :  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$   
Il y a égalité ssi  $x$  et  $y$  sont positivement liés

**DÉFINITION**  
La famille  $(x_i)_{i \in I}$  de vecteurs de  $E$  est dite

- orthogonale (FO) si  $\forall i, j \in I, i \neq j \Rightarrow \langle x_i, x_j \rangle = 0$ .
- orthonormale (FON) si  $\forall i, j \in I, \langle x_i, x_j \rangle = \delta_{ij}$ .

**PROPRIÉTÉ**  
Une famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.

**THÉORÈME DE PYTHAGORE**  
Si  $(x_1, \dots, x_n)$  est une FO, alors  $\left\| \sum_{k=0}^n x_k \right\|^2 = \sum_{k=0}^n \|x_k\|^2$ .

**ORTHOGONAL D'UNE PARTIE**

- Soit  $A \subset E$ . On appelle orthogonal de  $A$  l'ensemble  $\{x \in E, \forall a \in A, \langle x, a \rangle = 0\}$ . On le note  $A^\perp$ .
- Deux parties  $A, B \subset E$  sont dites orthogonales si  $\forall a \in A, \forall b \in B, \langle a, b \rangle = 0$ . On note  $A \perp B$ .
- Une famille  $(A_i)_{i \in I}$  de parties de  $E$  est dite orthogonale si les  $A_i$  sont deux à deux orthogonales.

**PROPRIÉTÉ**  
Soit  $A$  et  $B$  deux parties d'un préhilbertien  $E$

- $A^\perp$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .
- $A \perp A^\perp$  et  $A \cap A^\perp \subset \{0\}$ .
- $A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp$ .
- $A \perp B \iff A \subset B^\perp \iff B \subset A^\perp$ .
- $A^\perp = (\text{Vect}(A))^\perp$  et  $A \subset A^{\perp\perp}$ .
- $A \perp B \iff A \perp \text{Vect}(B) \iff \text{Vect}(A) \perp \text{Vect}(B)$ .

**SUPPLÉMENTAIRES ORTHOGONAUX**  
Deux sevs  $F$  et  $G$  sont dits supplémentaires orthogonaux s'ils sont supplémentaires et orthogonaux. On écrit  $E = F \oplus^\perp G$

**PROPRIÉTÉ**  
Soit  $F$  et  $G$  deux sous-espaces supplémentaires de  $E : E = F \oplus G$ , alors

$$F \perp G \iff G = F^\perp \iff F = G^\perp$$

ie si  $F$  admet un supplémentaire  $\perp$ , celui-ci est  $F^\perp$  en outre  $F^{\perp\perp} = F$ .

**PROPRIÉTÉ**  
Si  $(F_i)_{i=1}^n$  une famille finie de sous-espaces vectoriels deux à deux orthogonaux, la somme  $F_1 + \dots + F_n$  est directe  
On dit que les  $F_1, \dots, F_n$  sont en somme directe orthogonale

**DÉFINITION**  
Soit  $(F_i)_{i=1}^n$  une famille finie de sous-espaces vectoriels deux à deux orthogonaux.  
Si la somme directe  $\bigoplus_{1 \leq i \leq n} F_i$  égale  $E$ , on dit que  $(F_i)_{i=1}^n$  est une famille de sous-espaces supplémentaires orthogonaux

**PROPRIÉTÉ**  
Soit  $(F_i)_{i=1}^n$  est une famille de sous-espaces supplémentaires orthogonaux, on a :

$$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \sum_{\substack{j \in \llbracket 1, p \rrbracket \\ j \neq i}} F_j = F_i^\perp$$

**ESPACES EUCLIDIENS**

**PROPRIÉTÉ**  
Soit  $E$  un espace euclidien, pour tout sev  $F$  de  $E$ , on a :  $E = F \oplus F^\perp$

**PROPRIÉTÉ**

- Tout espace euclidien, non nul, admet une base orthonormale.
- Toute famille orthonormale d'un euclidien se complète en une BON.

**CALCUL AVEC UNE BON**  
Soit  $E$  un espace euclidien  $\dim E = n \in \mathbb{N}^*$  et  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une BON sur  $E$ . Soit  $x = \sum_{k=1}^n x_k e_k, y = \sum_{k=1}^n y_k e_k$ , alors :

- $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_k = \langle x, e_k \rangle$  et  $\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}$ .
- $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k$  et  $\|x - y\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2}$
- $\forall u \in \mathcal{L}(E), \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = (\langle e_i, u(e_j) \rangle)_{1 \leq i, j \leq n}$

**EXISTENCE DE SUPPLÉMENTAIRE ORTHOGONAL**  
Si  $F$  un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace vectoriel préhilbertien  $E$  alors les espaces  $F$  et  $F^\perp$  sont supplémentaires dans  $E$ .

**PROJECTION ET SYMÉTRIE ORTHOGONALES**

Soit  $F$  un sev de  $E$  tel que  $F$  et  $F^\perp$  sont supplémentaires dans  $E$ .

**DÉFINITION**  
On appelle projection  $\perp$  sur  $F$  la projection vectorielle  $p_F$  sur  $F //$  à  $F^\perp$ .

**CARACTÉRISATION DES PROJECTIONS ORTHOGONALES**  
Soit  $p \in \mathcal{L}(E)$  un projecteur. On a équivalence entre :

- $p$  est un projecteur orthogonal (ie  $\text{Im } p \perp \text{Ker } p$ )
- $\forall x, y \in E, \langle p(x)|y \rangle = \langle x|p(y) \rangle$ .
- $\forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$

**EXPRESSION DANS UNE BON**  
Si  $B = (e_1, \dots, e_p)$  est une base orthonormée de  $F$  alors

$$\forall x \in E, p_F(x) = \sum_{j=1}^p \langle x, e_j \rangle e_j$$

**DISTANCE À UN SEV**  
Soit  $x \in E$ . Pour tout  $y \in F, \|x - y\| \geq \|x - p_F(x)\|$  avec égalité si, et seulement si,  $y = p_F(x)$ . Donc  $d(x, F) = \|x - p_F(x)\|$

**ORTHONORMALISATION DE GRAM-SCHMIDT**  
Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une famille libre de  $E$ . Il existe une et une seule famille orthonormée  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  de  $E$  telle que :

- $\forall k \in \{1, \dots, n\}, \text{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ .
- $\forall k \in \{1, \dots, n\}, \langle \varepsilon_k, e_k \rangle > 0$ .

Cette famille est donnée par :

- $\varepsilon_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}$ .
- $\forall k \in \{2, \dots, n\}, \varepsilon_k = \frac{e_k - p_{k-1}(e_k)}{\|e_k - p_{k-1}(e_k)\|}$ . Avec  $P_i$  désigne le projecteur orthogonal sur  $\text{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_i)$

**SYMÉTRIE ORTHOGONALE**  
On appelle symétrie orthogonale par rapport à  $F$  la symétrie vectorielle  $s_F$  par rapport à  $F$  parallèlement à  $F^\perp$ .  
Si  $F$  est un hyperplan de  $E$ , on dit que  $s_F$  est la réflexion par rapport à  $F$ .

**CARACTÉRISATION DES SYMÉTRIES ORTHOGONALES**  
Soit  $s$  une symétrie de  $E$ . On a équivalence entre :

- $s$  est une symétrie orthogonale (ie  $\text{Ker}(s + \text{id}_E) \perp \text{Ker}(s - \text{id}_E)$ )
- $\forall x, y \in E, \langle s(x)|y \rangle = \langle x|s(y) \rangle$ .
- $\forall x \in E, \|s(x)\| = \|x\|$

**EXPRESSION DANS UNE BON**  
Si  $B = (e_1, \dots, e_p)$  est une BON de  $F$  alors

$$\forall x \in E, s_F(x) = 2 \sum_{j=1}^p \langle x, e_j \rangle e_j - x$$

**SUITES ORTHONORMALES, SUITES TOTALES**

$E$  un espace préhilbertien réel et  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de  $E$

**INÉGALITÉ DE BESSEL**  
 Si  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est orthonormale. Alors  $\forall x \in E$  la famille  $(\langle e_n | x \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$  est de carré sommable et  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \langle e_n | x \rangle^2 \leq \|x\|^2$

**FAMILLE TOTALE**  
 La famille  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est dite totale si l'espace vectoriel qu'elle engendre est dense dans  $E$ . Autrement-dit  $\text{Vect}((e_n)_{n \in \mathbb{N}}) = E$

**BASE HILBERTIENNE**  
 $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est dite base hilbertienne si elle est à la fois orthonormale et totale

**PROPRIÉTÉ**  
 Soit  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  base hilbertienne de  $E$  et  $P_n$  le projecteur orthogonal de  $E$  sur  $\text{Vect}(e_0, \dots, e_n)$ , alors  $\forall x \in E, P_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$

**ÉGALITÉ DE PARSEVAL**  
 Soit  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une base hilbertienne de  $E$ . Alors pour tout  $x \in E$  la famille  $(\langle e_i | x \rangle)_{i \in \mathbb{N}}$  est de carré sommable et  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \langle e_n | x \rangle^2 = \|x\|^2$ .

**ENDOMORPHISMES SYMÉTRIQUES**

**ENDOMORPHISME SYMÉTRIQUE**  
 $u \in \mathcal{L}(E)$  est symétrique si  $\forall x, y \in E, \langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$ .  
 $S(E)$  désigne l'ensemble des endomorphismes symétriques de  $E$

**STABILITÉ- IMAGE ET NOYAU**  
 Soit  $u \in S(E)$  et  $F$  un sev de  $E$  stable par  $u$ . Alors  $F^\perp$  est stable par  $u$

**CAS EUCLIDIEN**  
 Soit  $E$  un espace euclidien et  $u \in S(E)$ , alors  $\text{Im}(u) = (\text{Ker } u)^\perp$

**CARACTÉRISATION DES SYMÉTRIQUES**  
 Soit  $E$  un espace euclidien,  $\mathcal{B}$  une BON de  $E$  et  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Alors  
 $u \in S(u) \iff \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in S_n(\mathbb{R})$

**THÉORÈME SPECTRAL**  
 Tout endomorphisme symétrique d'un espace euclidien  $E$  est diagonalisable dans une base orthonormale.

**THÉORÈME SPECTRAL :VERSION MATRICIELLE**  
 Soit  $A \in S_n(\mathbb{R})$ , il existe  $P \in O_n(\mathbb{R})$  tel que  ${}^t P A P$  soit diagonale.

**EXTRÊMUM SUR LA SPHÈRE**  
 Soit  $u \in S(E)$ . Posons  $\lambda_{\min} = \min(\text{Sp}(u))$  et  $\lambda_{\max} = \max(\text{Sp}(u))$ .  
 Alors :  $\min_{\|x\|=1} \langle u(x), x \rangle = \lambda_{\min}$  et  $\max_{\|x\|=1} \langle u(x), x \rangle = \lambda_{\max}$

**EXTRÊMUM SUR LA SPHÈRE**  
 Soit  $A \in S_n(\mathbb{R})$ . Posons  $\lambda_{\min} = \min(\text{Sp}(A))$  et  $\lambda_{\max} = \max(\text{Sp}(A))$ .  
 Alors :  $\min_{\|X\|=1} ({}^t X A X) = \lambda_{\min}$  et  $\max_{\|X\|=1} ({}^t X A X) = \lambda_{\max}$

**APPLICATIONS AUX EXTREMA**  
 Soit  $f \in \mathcal{C}^2(U)$ . On suppose que  $f$  admet un point critique en  $a$  et soit  $Hf(a)$  sa matrice hessienne. Alors :  
 • Si  $\text{Sp}(Hf(a)) \subset \mathbb{R}_+^*$ , alors  $f$  admet un minimum local en  $a$ .  
 • Si  $\text{Sp}(Hf(a)) \subset \mathbb{R}_-^*$ , alors  $f$  admet un maximum local en  $a$ .  
 • Si  $Hf(a)$  admet deux valeurs propres de signes opposés, alors  $a$  est un point col ou selle.

**ENDOMORPHISMES ET MATRICES ORTHOGONALES**

$E$  désigne un espace euclidien de dimension finie  $n \geq 1$

**ENDOMORPHISME ORTHOGONAL**  
 On dit que  $u$  est orthogonal si  $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|$ .  
 $O(E)$ , l'ensemble des automorphismes orthogonaux, est un sous-groupe de  $(GL(E), \circ)$ , appelé le groupe orthogonal de  $E$ .

**PROPRIÉTÉ**  
 Si  $u \in O(E)$ , alors  $\text{Sp}(u) \subset \{-1, 1\}$ .

**PROPRIÉTÉS CARACTÉRISTIQUES**  
 Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :  
 1.  $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|$ ;  
 2.  $\forall x, y \in E, \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ ;  
 3.  $u$  transforme toute BON de  $E$  par  $u$  est une BON de  $E$ ;  
 4.  $u$  transforme une BON de  $E$  par  $u$  est une BON de  $E$ .

**MATRICES ORTHOGONALES**  
 Une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est dite orthogonale si  ${}^t A A = I_n$ .  
 $O_n(\mathbb{R})$ , l'ensemble de matrices orthogonales, est un sous-groupe de  $GL_n(\mathbb{R})$ , appelé groupe orthogonal d'ordre  $n$ .

**PROPRIÉTÉS CARACTÉRISTIQUES**  
 Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  de colonnes  $C_1, \dots, C_n$  et de lignes  $L_1, \dots, L_n$ . On a équivalence entre :  
 1. la matrice  $A$  est orthogonale  
 2. la famille  $(C_1, \dots, C_n)$  est orthonormale  
 3. la famille  $(L_1, \dots, L_n)$  est orthonormale.  
 4.  $A$  est la matrice de passage d'une BON à une BON

**PROPRIÉTÉ**  
 •  $A \in O_n(\mathbb{R})$ , alors  $\det A = \pm 1$ .  
 •  $O_n^+(\mathbb{R}) = \{M \in O_n(\mathbb{R}), \det M = 1\}$  est un sg de  $O_n(\mathbb{R})$   
 •  $O_n^-(\mathbb{R}) = \{M \in O_n(\mathbb{R}), \det M = -1\}$  n'est pas un groupe

**LIEN AVEC LES MATRICES**  
 Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $\mathcal{B}$  une BON de  $E$ . Alors  
 $u \in O(E) \iff \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in O_n(\mathbb{R})$   
 •  $O_n(\mathbb{R})$  est isomorphe à  $O(E)$ .  
 •  $O_n^+(\mathbb{R})$  est isomorphe à  $O^+(E) = \{u \in O(E); \det u = 1\}$ .  
 •  $O_n^-(\mathbb{R})$  est isomorphe à  $O^-(E) = \{u \in O(E); \det u = -1\}$ .

**RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES ORTHOGONAUX**

$E$  désigne un plan euclidien orienté.

**RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES ORTHOGONAUX**  
 Soit  $u \in O(E)$  avec  $n \geq 2$ . Il existe une base orthonormée  $\mathcal{B}$  de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  s'écrit :  $D = \begin{pmatrix} I_p & & & & & \\ & -I_q & & & & \\ & & R_1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & R_r \end{pmatrix}$   
 où pour tout  $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$ , on note :  $R_k = \begin{pmatrix} \cos \theta_k & -\sin \theta_k \\ \sin \theta_k & \cos \theta_k \end{pmatrix}$  avec  $\theta_k \in ]0, 2\pi[ \setminus \{\pi\}$  et  $p, q, r$  sont des entiers naturels tels  $p + q + 2r = n$  (si l'un de ces entiers est nul, les blocs de matrices correspondants n'existent pas).

**ISOMÉTRIES POSITIVES EN DIM 3**  
 Soit  $f \in O^+(E)$ , alors il existe une BON directe  $\mathcal{B} = (u, v, w)$  dans laquelle la matrice de  $f$  est de la forme  $\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$   
 $f$  est dite la rotation d'axe dirigé et orienté par  $u$  et d'angle  $\theta$ .  
 • Pour déterminer une telle base on prend  $u$  normé qui engendre  $\text{Ker}(f - id)$ ,  $v$  unitaire et orthogonal à  $u$  et  $w = u \wedge v$   
 • Pour déterminer  $\cos \theta$ , on utilise la trace de  $f$ ;  
 • le signe de  $\sin \theta$  est celui de  $\text{Det}(u, f(x))$  où  $x$  est un vecteur non colinéaire à  $u$

**ADJOINT D'UN ENDOMORPHISME**

**ADJOINT D'UN ENDOMORPHISME**  
 Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  alors  $\exists v \in \mathcal{L}(E)$  tel que  
 $\forall x, y \in E, \langle u(x), y \rangle = \langle x, v(y) \rangle$   
 $v$  s'appelle l'adjoint de  $u$  et on le note  $u^*$ .

**PROPRIÉTÉ**  
 Soient  $u, v \in \mathcal{L}(E)$ ,  $\mathcal{B}$  une BON de  $E$  et  $F$  sev de  $E$ . Alors :  
 1.  $(\alpha u + v)^* = \alpha u^* + v^*$ ,  $(u^*)^* = u$  et  $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$ ;  
 2.  $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \iff {}^t A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u^*)$   
 3.  $\text{rg}(u^*) = \text{rg}(u)$ ,  $\text{tr}(u^*) = \text{tr}(u)$ ,  $\det(u^*) = \det(u)$ ,  $\chi_{u^*} = \chi_u$  et  $\pi_{u^*} = \pi_u$ ;  
 4.  $\text{Ker}(u^*) = \text{Im}(u)^\perp$  et  $\text{Im}(u^*) = \text{Ker}(u)^\perp$ .  
 5.  $\text{Ker}(u^* \circ u) = \text{Ker}(u)$  et  $\text{Im}(u^* \circ u) = \text{Im}(u^*)$

$(\Omega, T, P)$  est un espace probabilisé

**VARIABLE ALÉATOIRE À DENSITÉ**



**VARIABLE ALÉATOIRE RÉELLE**

Une variable aléatoire réelle (VAR) est une application  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  où  $(\Omega, T, P)$  est un espace probabilisé telle que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , l'événement  $[X \leq x] \in T$ .



**PROPRIÉTÉ**

Soit  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , alors

$$X \text{ VAR} \Leftrightarrow \forall I \text{ intervalle de } \mathbb{R}, [X \in I] \in T$$



**IMAGE D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE RÉELLE**

Soit  $X_1, \dots, X_n$  des variables aléatoires réelles définies sur le même espace probabilisé  $(\Omega, T, P)$  et  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Alors

$$f(X_1, \dots, X_n) : \begin{cases} \Omega & \rightarrow \mathbb{R} \\ \omega & \mapsto f(X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)) \end{cases}$$

est une variable aléatoire réelle  $(\Omega, T, P)$ .

En particulier  $\sum_{i=1}^n X_i, \prod_{i=1}^n X_i, \min_{1 \leq i \leq n} X_i$  et  $\max_{1 \leq i \leq n} X_i$  sont des variables aléatoires réelles



**CAS PARTICULIER**

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle et  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction monotone par morceaux, alors  $f \circ X$  est une variable aléatoire réelle sur  $(\Omega, T, P)$ . On la note  $f(X)$



**EXEMPLE**

Si  $X$  est une variable aléatoire réelle sur  $(\Omega, T, P)$ , alors  $[X]$ , la partie entière de  $X$ , et  $\{X\}$ , la partie fractionnaire de  $X$ , sont des variables aléatoires réelles sur  $(\Omega, T, P)$



**STABILITÉ PAR CONVERGENCE SIMPLE**

Soit  $(X_n)$  une suite de variables aléatoires réelles sur  $(\Omega, T, P)$  qui converge simplement vers  $X$ , une application de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}$ . Alors  $X$  est une variable aléatoire réelle sur  $(\Omega, T, P)$

**VARIABLE ALÉATOIRE À DENSITÉ**

Pour une variable aléatoire réelle  $X$  on définit la fonction de répartition de  $X$ , que l'on note  $F_X$ , par  $F_X(x) = P(X \leq x)$  pour tout réel  $x$ .



**DÉFINITION**

Une variable aléatoire réelle  $X$  est dite de loi à densité (relative à la probabilité  $P$ ) si sa fonction de répartition  $F_X$

1. est continue sur  $\mathbb{R}$
2. de  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  privé d'un sous-ensemble fini  $F$  ( éventuellement vide )

On appelle alors densité de  $X$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f_X(t) = F'_X(t)$  pour  $t \in \mathbb{R} \setminus F$  et  $f_X(t) = 0$  pour  $t \in F$



**PROPRIÉTÉS CARACTÉRISTIQUES DE LA DENSITÉ**

Soit  $f_X$  une densité d'une variable aléatoire réelle  $X$  de fonction de répartition  $F$ . On a

1.  $f_X$  est à valeurs réelles positives
2.  $f_X$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , sauf éventuellement en un nombre fini de points
3.  $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) dt$  est convergente et  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1$

Inversement pour toute  $f$  fonction d'une variable réelle vérifiant les trois assertions précédentes, il existe un espace probabilisé et une VAR  $X$  sur cet espace dont la loi est à densité et dont la densité est  $f$



**RÈGLES DE CALCUL**

Soit  $X$  une variable aléatoire admettant une densité  $f$ .

1. Pour tout  $x$  réel :
  - (a)  $P(X = x) = 0$
  - (b)  $P(X < x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$
  - (c)  $P(X > x) = P(X \geq x) = \int_x^{+\infty} f(t) dt = 1 - F(x)$
2. Pour tout intervalle  $I$  d'extrémités  $a$  et  $b$  tels que  $a \leq b$  :

$$P(X \in I) = \int_a^b f(t) dt$$



**DÉFINITION**

Soit  $X$  une variable à densité et  $f$  une densité de  $X$ . Si  $f$  est nulle en dehors d'un intervalle  $[a; b]$ , alors on a  $P(X < a) = 0$  et  $P(X > b) = 0$ . On dit alors que  $X$  prend ses valeurs dans l'intervalle  $[a; b]$ .

**SOMME DE DEUX VARIABLES**

On rappelle que la loi de la somme de deux variables aléatoires discrètes indépendantes  $X$  et  $Y$  est donnée comme somme d'une série de la forme

$$P(X + Y = s) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x) P(Y = s - x)$$



**DENSITÉ DE LA SOMME D'UNE VAR ET D'UNE VAR À DENSITÉ**

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires réelles **indépendantes** dont les lois sont discrète pour  $X$  et à densité pour  $Y$ . Alors la loi de  $S = X + Y$  est à densité, de densité

$$s \mapsto \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x) \cdot f_Y(s - x)$$



**DENSITÉ DE LA SOMME DE DEUX VAR À DENSITÉ**

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires réelles **indépendantes** admettant respectivement des densités  $f_X$  et  $f_Y$ . Alors la loi de  $S = X + Y$  est à densité, de densité

$$f_S : s \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_Y(s - t) dt$$

Si de plus  $X$  et  $Y$  sont à valeurs positives, alors  $f_S$  est définie sur  $\mathbb{R}^+$  par  $f_S(s) = \int_0^s f_X(t) f_Y(s - t) dt$  et est nulle sur  $\mathbb{R}^*$

**ESPÉRANCE**



**DÉFINITION**

Soit  $X$  une VAR de densité  $f$ . Si l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt$  est absolument convergente alors on dit que  $X$  **admet une espérance** que l'on note  $\mathbb{E}(X)$  et on a :

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt$$



**DOMINATION**

Soit  $X$  et  $Y$  deux VAR sur l'espace probabilisé  $(\Omega, T, P)$ . Si  $Y$  admet une espérance et si  $|X| \leq Y$  alors  $X$  admet une espérance



**PROPRIÉTÉ**

Soient  $X$  et  $Y$  deux VAR admettant chacune une espérance.

1. Pour tout réels  $a$  et  $b$ , la variable  $aX + b$  admet une espérance et  $\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$
2.  $X + Y$  admet une espérance et  $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$ .
3. Si  $X \geq 0$  presque sûrement, alors  $\mathbb{E}(X) \geq 0$
4. Si  $X \geq Y$  presque sûrement, alors  $\mathbb{E}(X) \geq \mathbb{E}(Y)$
5. Inégalité triangulaire :  $|\mathbb{E}(X)| \leq \mathbb{E}(|X|)$
6. Si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, alors  $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ .



**THÉORÈME DU TRANSFERT**

Soient  $X$  une VAR de densité  $f$  et  $g$  une fonction continue sur  $\mathbb{R}$  sauf éventuellement en un nombre fini de points. Alors  $g(X)$  admet une espérance si, et seulement, si l'intégrale

$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) f(t) dt$  est absolument convergente. Au quel cas

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) f(t) dt$$

**MOMENTS, VARIANCE ET ÉCART-TYPE**



**DÉFINITION**

Soit  $r \in \mathbb{N}^*$  et  $X$  une VAR à densité  $f$ . On dit que  $X$  **admet un moment d'ordre**  $r$ , notée  $m_r(X)$ , si  $X^r$  admet une espérance et on a

$$m_r(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r f(x) dx$$



**PROPRIÉTÉ**

Soit  $r \in \mathbb{N}^*$  et  $X$  une VAR admettant un moment d'ordre  $r$ , alors pour tout  $s \in \llbracket 1, r \rrbracket$  la VAR  $X$  admet un moment d'ordre  $s$



**DÉFINITION**

Si la variable aléatoire  $X$  admet une espérance et si la variable  $(X - \mathbb{E}(X))^2$  admet une espérance, on appelle **variance de**  $X$  le réel

$$\mathbb{V}(X) = E\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right)$$

On appelle alors **écart-type** le réel  $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$



**THÉORÈME DE HUYGENS KÖEING**

Soit  $X$  une VAR à densité.  $X$  admet une variance si, et seulement, si  $X$  admet un moment d'ordre 2 et en cas d'existence, on a :

$$\mathbb{V}(X) = E\left(X^2\right) - \mathbb{E}(X)^2$$



**PROPRIÉTÉ**

Soit  $X$  une variable à densité admettant une variance. Alors pour tout réels  $a$  et  $b$ ,  $aX + b$  admet une variance et  $\mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X)$



**DÉFINITION**

Si  $X$  est une variable à densité telle que  $\sigma(X) = 1$ , on dit que  $X$  est une **variable réduite**.



**DÉFINITION**

Si  $X$  admet une espérance et un écart-type non nul, la variable  $X^* = \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$  est appelée **la variable centrée réduite associée à**  $X$ .

**LOIS USUELLES**

■ ■ **Loi uniforme**



**LOI UNIFORME**

Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b$ . On dit qu'une variable aléatoire  $X$  suit **la loi uniforme sur**  $[a; b]$ , et on note  $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a; b])$ , si elle admet pour densité la fonction  $f$  définie par :

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } t \in ]a; b[ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



**PROPRIÉTÉ**

La fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur  $[a; b]$  est :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a < x < b \\ 1 & \text{si } x \geq b \end{cases}$$



**PROPRIÉTÉ**

Soit  $X$  une VAR à densité d'une loi uniforme sur  $[a; b]$ . Alors

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

■ ■ **Loi gaussienne**



**LOI GAUSSIENNE DE PARAMÈTRES**

Soit  $\mu$  un réel, et  $\sigma$  un réel strictement positif. On dit que  $X$  est de **loi gaussienne de paramètres**  $(\mu, \sigma^2)$  ou de **loi normale de paramètres**  $(\mu, \sigma^2)$  si elle admet pour densité la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Lorsque  $\mu = 0$  et  $\sigma = 1$  on parle de la loi normale centrée réduite



**PROPRIÉTÉ**

Si  $X$  suit une loi normale  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  où  $\mu \in \mathbb{R}$  et  $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$ . Alors  $X$  admet une espérance et une variance :

$$\mathbb{E}(X) = \mu \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \sigma^2$$



**PROPRIÉTÉ**

$X$  suit une loi normale de paramètres  $(m, \sigma^2)$  si et seulement si  $X^* = \frac{X - m}{\sigma}$  suit la loi normale centrée réduite.

■ ■ **Loi de Gamma**



**LOI GAMMA**

Soit  $\alpha$  et  $\lambda$  deux réels strictement positifs. On dit qu'une variable aléatoire  $X$  suit la **loi Gamma de paramètre**  $(\alpha, \lambda)$  ; et on note  $X \hookrightarrow \Gamma(\alpha, \lambda)$ , si elle admet pour densité la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} \chi_{]0, +\infty[}(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$



**PROPRIÉTÉ**

Soit  $X$  une VAR de **loi Gamma de paramètre**  $(\alpha, \lambda)$  où  $\alpha, \lambda \in \mathbb{R}_+^*$ . Alors  $X$  admet une espérance et une variance et :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{\alpha}{\lambda} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \frac{\alpha}{\lambda^2}$$

■ ■ **Loi exponentielle**



**LOI EXPONENTIELLE**

Soit  $\lambda$  un réel **strictement positif**. On dit qu'une variable aléatoire  $X$  suit la **loi exponentielle de paramètre**  $\lambda$  ; et on note  $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ , si elle admet pour densité la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \chi_{]0, +\infty[}(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

**Remarque:**  $\mathcal{E}(\lambda) = \Gamma(1, \lambda)$



**PROPRIÉTÉ**

La fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre  $\lambda$  est :

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$



**PROPRIÉTÉ**

Si  $X$  suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda > 0$  alors  $X$  admet une espérance et une variance et :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

$(\Omega, T, P)$  un espace probabilisé

**INÉGALITÉS**

**INÉGALITÉ DE MARKOV**

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé  $(\Omega, T, P)$  telle que  $X(\Omega) \subset \mathbb{R}^+$  et possédant une espérance  $m = E(X)$ , alors on a

$$\forall \lambda > 0 \quad P[X \geq \lambda] \leq \frac{E(X)}{\lambda}.$$

**INÉGALITÉ DE BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV**

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé  $(\Omega, T, P)$  possédant un moment d'ordre 2, alors on a

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P[|X - E(X)| \geq \varepsilon] \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}.$$

**INÉGALITÉ DE JENSEN**

Si  $X$  est une VAR admettant une espérance, si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une application convexe sur  $\mathbb{R}$  et si  $Y = f(X)$  admet une espérance alors

$$f(E(X)) \leq E(f(X)) \quad \text{Inégalité de Jensen}$$

**CONVERGENCE EN PROBABILITÉ**

**CONVERGENCE EN PROBABILITÉ**

Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de variables aléatoires réelles et  $X$  une variable aléatoire réelles définies sur un espace probabilisé  $(\Omega, T, P)$ , on dit que  $(X_n)$  converge en probabilité vers  $X$  si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P[|X_n - X| \geq \varepsilon] = 0.$$

On écrit  $X_n \xrightarrow{P} X$

**PROPRIÉTÉ**

On considère  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions continues à valeurs réelles définies sur  $\mathbb{R}$  qui converge simplement sur  $\mathbb{R}$  vers l'application  $f$ . On considère  $X$  une VAR et on définit des variables aléatoires réelles par

$$X_n = f_n(X), \quad Y = f(X)$$

Alors la suite  $(X_n)$  converge en probabilité en  $Y$

**CONVERGENCE EN LOI**

**CONVERGENCE EN LOI**

Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de variables aléatoires réelles et  $X$  une variable aléatoire réelles définies sur un espace probabilisé  $(\Omega, T, P)$ , on note  $F_n$  la fonction de répartition de  $X_n$  et  $F$  celle de  $X$ . On dit que  $(X_n)$  converge en loi vers  $X$  si en tout point  $x$  où  $F$  est continue

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x).$$

On note  $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$

**CAS DE VARIABLES DISCRÈTES**

Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de variables aléatoires et  $Y$  une variable aléatoire définies sur un espace probabilisé  $(\Omega, T, P)$ , on suppose que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad X_n(\Omega) \subset Y(\Omega) \subset \mathbb{N}.$$

La convergence en loi de la suite  $(X_n)$  vers  $Y$  équivaut à :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = k) = P(Y = k).$$

**APPROXIMATION DE LA LOI DE POISSON PAR LA LOI BINOMIALE**

Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de variables aléatoires indépendantes. On suppose que  $X_n$  suit une loi binomiale  $\mathcal{B}(n, p_n)$  avec  $np_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda > 0$ , alors  $(X_n)$  converge en loi vers  $X$  qui suit une loi de poisson

$\mathcal{P}(\lambda)$ .

**PROPRIÉTÉ**

La convergence en probabilité implique la convergence en loi.

**THÉORÈMES LIMITES**

**LOI FAIBLE DES GRANDS NOMBRES**

Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite de variables aléatoires réelles **indépendantes** définies sur un espace probabilisé  $(\Omega, T, P)$ , de même loi, possédant une espérance  $m$  et une variance  $\sigma^2$ . Alors

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \xrightarrow{P} m$$

**THÉORÈME DE LA LIMITE CENTRÉE**

Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de variables aléatoires réelles définies sur un espace probabilisé  $(\Omega, T, P)$  indépendantes, de même loi, possédant une espérance  $m = E(X)$  et une variance  $\sigma^2 = V(X) > 0$ . Alors

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} - m \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$$

$F$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé de dimension finie  $n \geq 1$ ,  $\beta$  une base de  $F$ . Si  $u \in \mathcal{L}(F)$  et  $x \in F$ , on note  $u.x$  plutôt que  $u(x)$ . Soit  $a \in \mathcal{C}(I, \mathcal{L}(F))$  et  $b \in \mathcal{C}(I, F)$ .

**ÉQUAT-DIFF LINÉAIRES D'ORDRE 1**

**ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE LINÉAIRE DU PREMIER ORDRE**  
On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre toute équation du type :  $(L) : x' = a.x + b$ .  
On appelle équation homogène associée à  $(L)$  l'équation :  $(H) : x' = a.x$

**SOLUTION DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE LINÉAIRE**  
Une solution de l'équation différentielle linéaire  $(L)$  est une fonction  $\varphi \in \mathcal{D}(I, F)$  telle que :  $\forall t \in I, \varphi'(t) = a(t).\varphi(t) + b(t)$

**RÉGULARITÉ DES SOLUTIONS**  
Si  $\varphi$  est solution de  $(L)$ , alors  $\varphi \in \mathcal{C}^1(I, F)$ .  
Si  $a$  et  $b$  sont de classe  $\mathcal{C}^k$  alors  $\varphi$  sera de classe  $\mathcal{C}^{k+1}$ .

**THÉORÈME DE CAUCHY-LIPSCHITZ-LINÉAIRE**

**THÉORÈME DE CAUCHY-LIPSCHITZ-LINÉAIRE**  
Le problème de Cauchy :  $\begin{cases} x' = a(t).x + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$  où  $(t_0, x_0) \in I \times F$  admet une et une seule solution.

**STRUCTURE DE  $S_H$**   
1.  $S_H$  est un sev de  $\mathcal{C}^1(I, F)$  isomorphe à  $F$ ,  $\dim S_H = n$   
2.  $S_L$  est un sous-espace affine de  $\mathcal{C}^1(I, F)$  de direction  $S_H$

**WRONSKIEN**

**WRONSKIEN**  
Soient  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  une famille de fonctions de  $I$  à valeurs dans  $F$ . Pour tout  $t \in I$  la matrice  $W(t) = \text{Mat}_\beta(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$  est appelée **matrice wronskienne** en  $t$  du système  $\mathcal{H} = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  par rapport à la base  $\mathcal{B}$ .  
Le déterminant  $w(t) = \det W(t)$  est appelé le **wronskien** en  $t$  du système  $\mathcal{H} = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  par rapport à la base  $\mathcal{B}$

**BASE DE  $S_H$**   
Soit  $\mathcal{H} = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  une famille de  $n$  éléments de  $S_H$  espace solution de  $(H) : x' = a(t).x$ . Alors  
1. Pour tout  $t \in I, \text{rg}(H) = \text{rg}(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$   
2. Les trois affirmations suivantes sont équivalentes :  
(a)  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  est une base de  $S_H$  ;  
(b)  $\forall t \in I, w(t) \neq 0$  ;  
(c)  $\exists t_0 \in I / w(t_0) \neq 0$ .  
Au quel cas  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  est un système fondamental de solutions de  $(H)$

**VARIATION DES CONSTANTES**

**VARIATION DE LA CONSTANCE**  
Soit  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  un système fondamental de solutions de  $(H)$ .  
Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$  tel que  $\varphi = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_i$ . Alors  
 $\varphi$  est solution de  $(L) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i' \varphi_i = b$

**ÉQUA-DIFF LINÉAIRES À COEFS CONSTANTS**

Plus précisément, dans  $(L) : x' = a.x + b(t)$ ,  $a$  est constante.

**ÉTUDE DE  $(H) : x' = a.x$**   
1. Les solutions de  $(H)$  sont exactement les applications  $t \mapsto e^{ta}.x_0$  où  $x_0$  un vecteur de  $F$   
2. Pour tout  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times F$ , l'unique solution au problème de Cauchy en ce point est  
 $t \mapsto e^{(t-t_0)a}.x_0$

**ÉTUDE DE  $(L) : x' = a.x + b$**   
1. Les solutions de  $(L)$  sont exactement les applications  
 $t \in I \mapsto e^{ta}. \left( x_0 + \int_{t_0}^t e^{-sa} b(s) ds \right)$   
où  $x_0$  un vecteur de  $F$  et  $t_0 \in I$   
2. Pour tout  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times F$ , l'unique solution au problème de Cauchy en ce point est  
 $t \mapsto e^{(t-t_0)a}.x_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)a} b(s) ds$

**ÉTUDE PRATIQUE**

**SYSTÈME DIFFÉRENTIEL**  
Aux applications  $a$  et  $b$  sont associées les applications  $A : t \mapsto M_n(\mathbb{K})$  et  $B : t \mapsto M_{n,1}(\mathbb{K})$ , où, pour tout  $t \in I, A(t)$  et  $B(t)$  sont les matrices de  $a(t)$  et  $b(t)$  dans la base  $\mathcal{B}$ . On appelle système différentiel l'équation notée  $X' = A(t)X + B(t)$  dont les inconnues  $X$  sont à valeurs dans  $M_{n,1}(\mathbb{K})$ .

**CAS OÙ A EST DIAGONALISABLE**  
Si  $A$  est diagonalisable, notons  $(\lambda_j)_{1 \leq j \leq n}$  les valeurs propres de  $A$ ,  $(v_j)_{1 \leq j \leq n}$  leurs vecteurs propres associés et  $\varphi_j : t \mapsto e^{\lambda_j \cdot t} \cdot v_j$ . Alors  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  est un système fondamental de solution de  $H$

**CAS OÙ A EST TRIGONALISABLE**  
Si  $A$  est trigonalisable,  $\exists P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$  tel que  $P^{-1}AP = T$  matrice triangulaire supérieure. On effectue alors le changement de fonction inconnue défini par :  
 $Z = P^{-1}X \Leftrightarrow X = PZ$   
qui aboutit aux nouveaux systèmes différentiels :  
 $(L_2) : Z' = TZ + P^{-1}B(t)$   
 $(H_2) : Z' = TZ$   
On résout de tels systèmes par la méthode de la remontée

**A N'EST PAS TRIGONALISABLE**  
Si  $A$  n'est pas trigonalisable, dans ce cas  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , alors on résout le système différentiel avec le corps de base  $\mathbb{C}$  puis on cherche les solutions réelles via les parties réelles et imaginaires

**ÉQUA-DIFF LINÉAIRES (SCALAIRES) D'ORDRE 2**

Une équation différentielle linéaire d'ordre 2 est une équation du type :  $(L) : x'' + a(t).x' + b(t).x = c(t)$  où  $a, b, c \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$  et soit  $(H) : x'' + a(t).x' + b(t).x = 0$  l'équation homogène associée.  
Une solution de  $(L)$  est une fonction  $\varphi \in \mathcal{D}^2(I, \mathbb{K})$  telle que :  $\forall t \in I, \varphi''(t) + a(t).\varphi'(t) + b(t).\varphi(t) = c(t)$ .

En posant  $X = \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$ ,  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}$ , on se ramène à l'étude de l'équation linéaire du premier ordre  $X' = AX + B$

**LE PROBLÈME DE CAUCHY**  
 $\begin{cases} x'' + a(t).x' + b(t).x = c(t) \\ x(t_0) = u_0, x'(t_0) = v_0 \end{cases}$  où  $t_0 \in I, u_0, v_0 \in \mathbb{K}$   
admet une et une seule solution.

**STRUCTURE DES SOLUTIONS DE  $(L)$  ET DE  $(H)$**   
1. L'ensemble  $S_H$  des solutions de  $H$  est un sous-espace vectoriel de dimension 2 du  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $\mathcal{C}^2(I, \mathbb{K})$ .  
2. L'ensemble  $S_L$  des solutions de  $(L)$  est un sous-espace affine de  $\mathcal{C}^2(I, \mathbb{K})$  de direction  $S_H$ .

**MÉTHODE DE VARIATION DES CONSTANTES**

Soit  $(h_1, h_2)$  une base de  $S_H$  : pour tout  $f \in C^2(I, \mathbb{K})$ , il existe un unique couple  $(u_1, u_2)$  d'applications de  $C^1(I, \mathbb{K})$  tel que :  $f = u_1 \cdot h_1 + u_2 \cdot h_2$ . Alors

$$f \text{ solution de } (L) \iff \begin{cases} u_1' \cdot h_1 + u_2' \cdot h_2 = 0 \\ u_1' h_1' + u_2' h_2' = c \end{cases}$$

d'inconnues  $u_1'$  et  $u_2'$  dont la solution est  $u_1' = \frac{-h_2 c}{\omega}$  et  $u_2' = \frac{h_1 c}{\omega}$

**MÉTHODE DE VARIATION DE LA CONSTANTE OU DE LAGRANGE**

Si  $\varphi$  une solution de  $(H)$  ne s'annulant pas sur  $I$ , on pose  $x(t) = \varphi(t) \cdot z(t)$ . Alors  $x$  est solution de  $(L)$  (resp. de  $(H)$ ) si, et seulement, si  $y = z'$  est solution sur  $I$  de :

$$y' + \left( a + 2 \frac{\varphi'}{\varphi} \right) y = \frac{c}{\varphi} \quad (\text{resp } = 0)$$

**ÉQUAT-DIFF LINÉAIRES CONSTANTES DU SECOND ORDRE**

■ ■ Équation différentielle homogène

Soit  $a, b, c \in \mathbb{K}$  avec  $a \neq 0$  et  $(H)$  l'équation différentielle

$$(H) : ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$$

L'équation du second degré  $(EC) : ar^2 + br + c = 0$  est appelée équation caractéristique de l'équation différentielle  $ay'' + by' + cy = 0$

**PROPRIÉTÉ**

- Si  $(EC)$  possède des racines distinctes  $r_1$  et  $r_2$ , les solutions de l'équation homogène  $(H)$  sont les fonctions définies par  $y(t) = \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t}$  où  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$
- Si  $(EC)$  possède une racine double  $r$ , les solutions de l'équation homogène  $(H)$  sont les fonctions définies par  $y(t) = (\lambda_1 t + \lambda_2) e^{rt}$  où  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$

**PROPRIÉTÉ**

Soit  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Si l'équation  $ar^2 + br + c = 0$  possède des racines distinctes complexes conjuguées :

$$p + iq \text{ et } p - iq \quad \text{avec } (p, q) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$$

Les solutions réelles sont les fonctions :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & (\alpha \cos(qt) + \beta \sin(qt)) e^{pt} \end{cases}$$

où  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

■ ■ Reste polynôme-exponentiel

$$ay'' + by' + cy = d(t)$$

On étudie le cas d'un second membre  $d(t)$  de la forme  $P(t)e^{\alpha t}$  avec  $P \in \mathbb{K}[X]$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

**PROPRIÉTÉ**

L'équation  $ay'' + by' + cy = P(t)e^{\alpha t}$  admet une solution particulière de la forme  $y_p(t) = t^m Q(t)e^{\alpha t}$  où  $Q$  est une fonction polynomiale de même degré que  $P$

- Si  $\alpha$  n'est pas solution de  $(EC)$ , alors  $m = 0$
- Si  $\alpha$  est solution simple de  $(EC)$ , alors  $m = 1$
- Si  $\alpha$  est solution double de  $(EC)$ , alors  $m = 2$

**ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE NON LINÉAIRE**

■ ■ Equation du type résolu

On s'intéresse aux équations différentielles du type (résolu)

$$(E) : x' = f(t, x)$$

où  $f \in C^1(U, F)$  continue avec  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R} \times F$ .

**DÉFINITION**

On appelle solution de  $(E)$  tout couple  $(I, x)$  formé d'un intervalle d'intérieur non vide  $I$  et d'une fonction  $x : I \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable vérifiant :

$$\forall t \in I, (t, x(t)) \in U \text{ et } x'(t) = f(t, x(t))$$

On dit encore que  $x$  est une solution de  $(E)$  sur  $I$ .

**PROPRIÉTÉ**

Si  $(I, y)$  est une solution de  $(E)$  alors pour tout intervalle d'intérieur non vide  $J \subset I$ ,  $(J, y|_J)$  est aussi solution de  $(E)$ .

**SOLUTION MAXIMALE**

On appelle solution maximale de  $(E)$  toute solution  $\varphi : J \rightarrow F$  de  $(E)$  pour laquelle il n'existe pas de solution  $\tilde{\varphi} : K \rightarrow F$  de  $(E)$  tel que  $J \subsetneq K$  avec  $\tilde{\varphi}|_J = \varphi$ .

■ ■ Problème de Cauchy

On appelle problème de Cauchy un problème du type :

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad \text{où } (t_0, x_0) \in U$$

**THÉORÈME DE CAUCHY-LIPSCHITZ**

Le problème de Cauchy  $\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$  où  $f \in C^1(U, F)$ ,  $U$  ouvert de  $\mathbb{R} \times F$  admet une et une seule solution maximale  $(I, \varphi)$ , avec  $I$  un intervalle ouvert contenant  $t_0$ .

**PROPRIÉTÉ**

Toute fonction  $\varphi : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  solution de  $(E)$  est de classe  $C^1$ .

■ ■ Équations différentielles à variables séparables

**DÉFINITION**

Il s'agit d'équations différentielles du type :

$$(E) \quad y' = g(t)h(y)$$

où  $g \in C^1(D_1, \mathbb{R})$  et  $h \in C^1(D_2, \mathbb{R})$ .  $D_1$  et  $D_2$  deux intervalles ouverts de  $\mathbb{R}$

Dans ce qui suit  $\Omega$  est un ouvert non vide de  $\mathbb{C}$  et  $\tilde{\Omega} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + iy \in \Omega\}$ .  $\tilde{\Omega}$  est un ouvert non vide de  $\mathbb{R}^2$   
 $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction, on note  $\tilde{f}$  l'application définie sur  $\tilde{\Omega}$  par  $\tilde{f}(x, y) = f(x + iy)$  et on pose  
 $P : (x, y) \in \tilde{\Omega} \mapsto \Re f(x + iy)$  et  $Q : (x, y) \in \tilde{\Omega} \mapsto \Im f(x + iy)$ .  
 Pour tout  $z_0 \in \mathbb{C}$  et  $r \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ , on note

$$D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| < r\}$$

**FONCTIONS HOLOMORPHES**

**DÉFINITION**  
 On dit que  $f$  est  $\mathbb{C}$ -dérivable en  $z_0 \in \Omega$  si  $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$  existe dans  $\mathbb{C}$ . Auquel cas elle est notée  $f'(z_0)$

**PROPRIÉTÉ**  
 Si  $f$  est  $\mathbb{C}$ -dérivable en  $z_0 \in \Omega$  alors  $f$  est continue en  $z_0$ .

**FONCTION HOLOMORPHE**  
 Une fonction  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  est dite holomorphe, si elle est  $\mathbb{C}$ -dérivable en tout point de  $\Omega$  et si la fonction  $z \mapsto f'(z)$  est continue sur  $\Omega$ .  
 La fonction  $z \mapsto f'(z)$  est alors appelée la dérivée de  $f$ , notée  $f'$ .

**PROPRIÉTÉ**  
 $\mathcal{H}(\Omega)$  l'ensemble des fonctions holomorphes sur  $\Omega$ , est une  $\mathbb{C}$ -algèbre

**CONDITIONS DE CAUCHY-RIEMANN**  
 Soit  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction. Les assertions suivantes sont équivalentes :  
 1.  $f$  est holomorphe sur  $\Omega$ .  
 2.  $\tilde{f}$  est différentiable de  $C^1$  sur  $\tilde{\Omega}$  et vérifie l'équation d'Euler

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x, y) = 0.$$

3.  $P$  et  $Q$  sont de classe  $C^1$  sur  $\tilde{\Omega}$  et elles vérifient les équations d'Euler

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y).$$

**PROPRIÉTÉ**  
 On suppose que  $\Omega$  est ouvert connexe par arcs et  $f$  holomorphe sur  $\Omega$ . Alors  $f$  est constante sur  $\Omega$  si et seulement si  $f' = 0$  sur  $\Omega$ .

**HOLOMORPHIE ET SÉRIES ENTIÈRES**  
 Soient  $\sum a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence  $R > 0$  et de somme  $f$ . Alors  $f$  est infiniment  $\mathbb{C}$ -dérivable sur  $D(0, R)$  et on a

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall z \in D(0, R), f^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} k! C_{n+k}^k a_{n+k} z^n$$

**FONCTIONS ANALYTIQUES D'UNE VARIABLE COMPLEXE**

**FONCTIONS ANALYTIQUES**  
 On dit que  $f$  est analytique sur  $\Omega$  si pour tout  $z_0 \in \Omega$  il existe  $r > 0$  et une série entière  $\sum a_n z^n$  de rayon de convergence  $R \geq r$  tels que

$$\forall z \in D(z_0, r), f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

**PROPRIÉTÉ**  
 Soit  $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$  une application définie par une série entière dont le rayon de convergence  $R$  est non nul. Soit  $z_0$  un point de l'intérieur du disque de convergence. Alors la série entière  $\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} u^n$  a un rayon de convergence au moins égal à  $R - |z_0|$  et on a

$$\forall z \in D(z_0, R - |z_0|), f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

**ANALYTICITÉ DES FONCTIONS HOLOMORPHE**  
 On suppose que  $f$  est analytique sur  $\Omega$ . Alors :  
 1.  $f$  est holomorphe sur  $\Omega$ .  
 2.  $f$  est infiniment dérivable sur  $\Omega$ .  
 3.  $f$  admet un développement de Taylor au voisinage de tout point  $z_0 \in \Omega$ . Autrement dit,

$$\forall z_0 \in \Omega, \exists r > 0, \forall z \in D(z_0, r), f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

**PROPRIÉTÉ**  
 On suppose que  $f$  est holomorphe sur  $\Omega$ ,  $z_0 \in \Omega$  et  $R > 0$  tels que  $D(z_0, R) \subset \Omega$ .

1. Le nombre  $a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(z_0 + r e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta$  ne dépend pas du choix de  $0 < r < R$

2. La série entière  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  a un rayon de convergence au moins égal

$$\text{à } R, \text{ et on a l'égalité } \forall z \in D(z_0, R), f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

**COROLLAIRE**  
 1.  $f$  est holomorphe sur  $U$  ssi  $f$  est analytique sur  $\Omega$ .  
 2. Une fonction holomorphe sur  $\Omega$  est indéfiniment dérivable au sens complexe sur  $\Omega$  et toutes ses dérivées sont analytiques sur  $\Omega$ .  
 3. La somme d'une série entière de rayon de convergence non nul est analytique sur son disque ouvert de convergence.  
 4. Soit  $f$  holomorphe sur  $\Omega$ . On pose  $R = \sup\{r > 0 \mid D(z_0, r) \subset \Omega\} \in ]0, +\infty[ \cup \{+\infty\}$  :

$$\forall z \in D(z_0, R), f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n.$$

$$\forall 0 < r < R, \forall n \in \mathbb{N}, \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(z_0 + r e^{it}) e^{-int} dt.$$

**COROLLAIRE**  
 1. Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions analytiques sur  $\Omega$  et  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Alors  $f + g, \lambda f$  et  $f g$  sont analytiques sur  $\Omega$ . Si de plus,  $\forall z \in \Omega, g(z) \neq 0$  alors  $\frac{f}{g}$  est analytique sur  $\Omega$ .  
 2. Soit  $V$  un ouvert de  $\mathbb{C}$ . Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions analytiques sur  $\Omega$  et  $V$  respectivement avec  $f(\Omega) \subset V$ . Alors  $g \circ f$ , est analytique sur  $\Omega$ .

**PRINCIPE DES ZÉROS ISOLÉS**

**DÉFINITION**  
 Soit  $f \in \mathcal{H}(\Omega)$  et  $a \in \Omega$ .  
 1. On dit que  $a$  est un zéro de  $f$  si  $f(a) = 0$ .  
 2. On dit que  $a$  est un zéro isolé de  $f$  si  $a$  est un zéro de  $f$  et  $\exists \varepsilon > 0$  tel que  $\forall z \in D(a, \varepsilon) \setminus \{0\}, f(z) \neq 0$ .

**PRINCIPE DES ZÉROS ISOLÉS**  
 Si  $\Omega$  est un ouvert connexe par arcs et  $f$  une fonction non identiquement nulle holomorphe sur  $\Omega$  alors les zéros de  $f$  sont isolés.

**ATTENTION**  
 Le résultat est faux si l'ouvert n'est pas connexe par arcs. En effet, l'application  $f$  définie sur  $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$  par  $f(z) = 0$  si  $|z| < 1$  et  $f(z) = 1$  si  $|z| > 1$  est holomorphe, non nulle et tous ses zéros sont non isolés.

**COROLLAIRE**  
 1. Soient  $\Omega$  un ouvert connexe par arcs,  $f$  et  $g$  deux fonctions analytiques sur  $\Omega$ . Si  $\forall z \in \Omega, f(z)g(z) = 0$  alors  $f = 0$  ou  $g = 0$  sur  $\Omega$ .  
 2. Soient  $\Omega$  un ouvert connexe par arcs,  $f, g$  et  $h$  trois fonctions analytiques sur  $\Omega$  avec  $h$  non identiquement nulle sur  $\Omega$ . Si  $fh = gh$  sur  $\Omega$  alors  $f = g$  sur  $\Omega$ .

**PRINCIPE D'IDENTIFICATION**

**PRINCIPE D'IDENTIFICATION**  
 Soient  $\Omega$  un ouvert connexe par arcs,  $f$  et  $g$  holomorphes sur  $\Omega$ .  
 Si  $\exists (z_n) \in \Omega^{\mathbb{N}}$  à valeurs deux à deux distinctes et convergente dans  $\Omega$  telle que  $\forall n \in \mathbb{N}, f(z_n) = g(z_n)$  alors  $f = g$  sur  $\Omega$ .

**PRINCIPE D'IDENTIFICATION**  
 Soient  $\Omega$  un ouvert connexe par arcs,  $\sum a_n z^n$  et  $\sum b_n z^n$  deux séries entières de rayons de convergence non nuls et de sommes respectives  $f$  et  $g$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :  
 1.  $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = b_n$ .  
 2. Il existe une suite  $(z_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  de points deux à deux distincts qui tend vers 0 et telle que  $\forall n \in \mathbb{N}, f(z_n) = g(z_n)$ .