

Groupes:

1) Définition:

$G \neq \emptyset$ muni d'une loi $*$.

$(G, *)$ groupe si:

- 1) $*$ est associative.
 - 2) $*$ admet un élément neutre.
 - 3) Tout élément de G est symétrisable.
- H est abélien si $*$ est commutative.

2) Produit cartésien de groupes:

$(G_1, *)$ et (G_2, τ) 2 groupes:

$\forall (x, y), (z, t) \in G_1 \times G_2$:

$$(x, y) \cdot (z, t) = (x * y, y \tau t)$$

$\Rightarrow (G_1 \times G_2, \cdot)$ est un groupe produit cartésien d'élément neutre (e_{G_1}, e_{G_2}) .

3) Sous-groupes:

Caractérisation 1: $H \subset (G, \cdot)$

H est un sous grp de G si:

- $H \neq \emptyset$ ($e_G \in H$)
- $\forall (x, y) \in H^2: x \cdot y \in H$.
- $\forall x \in H, \exists y \in H: x \cdot y = e_G$.

Caractérisation 2:

H est un sous groupe de G si:

- $H \neq \emptyset$
- $\forall (x, y) \in H^2: x \cdot y^{-1} \in H$.

4) Intersection:

d'intersectⁿ quelconque de sous-groupes de G est un sous groupe de G .

Générateurs d'un groupe: $(G, \cdot)$

1) Groupe engendré:

Si A partie de G . le sous groupe engendré par A est le plus petit sous groupe de G contenant A (C): $\text{gr}(A)$. C'est l'intersectⁿ de tous les sous-groupes de G contenant A .

Rmq:

• si $A \neq \emptyset: \text{gr}(A) = \{e_G\}$.

• si $A \neq \emptyset$:

- si G noté additivement:

$$\text{gr}(A) = \{x \in G / \exists a_1, \dots, a_r \in A: x = \varepsilon_1 a_1 + \dots + \varepsilon_r a_r \text{ avec } \varepsilon_i = \pm 1\}$$

- si le groupe est noté multiplicativement.

$$\text{gr}(A) = \{x \in G / \exists a_1, \dots, a_r \in A: x = a_1^{\varepsilon_1} \dots a_r^{\varepsilon_r}, \text{ avec } \varepsilon_i = \pm 1\}.$$

2) Groupe monogène:

Si $a \in G: \text{gr}(\{a\}) = \text{gr}(a) = \langle a \rangle$ est appelé sous groupe monogène engendré par a .
 a est appelé 1 générateur du sous groupe.
et dans ce cas:

$$\text{Dans } (G, \cdot): \text{gr}(a) = \{a^k / k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\text{Dans } (G, +): \text{gr}(a) = \{ka / k \in \mathbb{Z}\}.$$

3) Groupe cyclique:

Un groupe cyclique est un groupe monogène et fini.

Rmq:

- * Tout groupe monogène est commutatif.
- * les sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ sont de la forme $n\mathbb{Z}$.
- * tout sous-grp d'un grpe cyclique est cyclique.

4) Théorème de Lagrange:

Si G groupe fini et H sous-groupe de G alors $\text{card}(H) \mid \text{card}(G)$.

5) Corollaire:

Tout sous-groupe de G de cardinal nombre premier est cyclique.

6) Centre d'un groupe:

Si $(G, \cdot)$ groupe, le centre de G est:

$$Z(G) = \{x \in G / \forall y \in G: x \cdot y = y \cdot x\}.$$

Sous-groupes distingués (H.P.):

1) Définition:

H sgrp de $(G, \cdot)$
 H est distingué si: $\forall x \in G: x^{-1} H x = H$
ie $\forall x \in G: H x = x H$.

2) Prop:

$Z(G)$ est un sgrp distingué de G .

3) Rmq:

Si G est commutatif alors tous les sgrps de G sont distingués.

si H sous grp de G :

$G/H = \{xH / x \in G\}$: l'ensemble quotient de la relatⁿ d'équivalence: $xRy \Leftrightarrow x^{-1}y \in H$.

Si $(x, y) \in G$, on pose $(xH)(yH) = xyH$.

4) Prop:

Si H un sous grp distingué alors $(G/H, \cdot)$ est groupe dit groupe quotient, d'élément neutre H .

5) Remq:

Si G est de cardinal fini;

$$\text{card } G/H = \frac{\text{card}(G)}{\text{card } H} \quad \left(\text{car } G = \bigcup_{x \in G/H} xH \right)$$

Morphisme de groupes:

1) Définition:

Si $(G, \cdot)$ et $(G', \cdot)$ et $f: G \rightarrow G'$

f est un morphisme de groupes si:

$$\forall (x, y) \in G^2: f(xy) = f(x) * f(y).$$

* L'ensemble $\ker f = \{x \in G / f(x) = e_{G'}\}$ est le noyau de f .

* L'ensemble $\text{Im } f = \{f(x) / x \in G\}$ est appelé l'image de f .

2) Propriétés:

- $f(e_G) = e_{G'}$
- $\forall x \in G: f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$
- $\forall n \in \mathbb{Z}: f(x^n) = (f(x))^n$
- Si H sous grp de G et H' sous grp de G'
Alors $f(H)$ sous grp de G'
et $f^{-1}(H')$ sous grp de G

3) Corollaire:

$\ker f$ est sous groupe de G

$\text{Im } f$ est sous groupe de G'

$$\text{où } \ker f = f^{-1}(\{e_{G'}\}) \text{ et } \text{Im } f = f(G)$$

4) Propriétés:

- f injectif si $\ker f = \{e_G\}$
- f surjectif si $\text{Im } f = G'$

5) Définition:

- Isomorphisme de groupes: morphisme de groupe bijectif.
- Endomorphisme de groupes: morphisme de groupe de $(G, \cdot)$ vers $(G, \cdot)$.
- Automorphisme de groupes: endomorphisme de groupes bijectif. L'ensemble: $\text{Aut}(G)$.

6) Remarques:

- La composée de 2 morphisme de groupes est un morphisme de groupes.
- $(\text{Aut}(G), \cdot)$ est un groupe.
- Si $f \in \text{Isom}(G, G')$ alors $f^{-1} \in \text{Isom}(G', G)$.
- $\varphi_a: G \rightarrow G$
 $x \mapsto axa^{-1}$ est dit automorphisme intérieur.
leur ensemble $\text{Int}(G)$.

Ordre d'un élmt d'un groupe:

1) Définition:

$(G, \cdot)$ un groupe et $a \in G$:

$$\varphi: (\mathbb{Z}, +) \rightarrow (G, \cdot) \text{ est morphisme de grp.}$$
$$k \mapsto a^k$$

Alors $\ker \varphi$ est un sous grpe de $\mathbb{Z}$.

$$\text{D'où } \exists n \in \mathbb{Z}: \ker \varphi = n\mathbb{Z}.$$

$$\text{et } \text{Im}(\varphi) = \langle a \rangle$$

- Si $n=0$: $\ker \varphi = \{0\}$

φ est injective donc φ isom de $\mathbb{Z}$ sur $\langle a \rangle$.

Dans ce cas, l'ordre de a est infini.

$\Rightarrow a$ est d'ordre infini si $\langle a \rangle$ est infini
 $\Leftrightarrow (\forall k \in \mathbb{Z}: a^k = e \Leftrightarrow k=0)$.

- Si $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\bar{f}: (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +) \rightarrow \langle a \rangle \text{ isomorphisme}$$
$$\bar{k} \mapsto a^k$$

$$\text{card}(\langle a \rangle) = n.$$

On dit de ce cas que a est d'ordre n :

$$\text{O}(a) = n.$$

2) Caractéristiques:

$$\varphi(a) = n \Leftrightarrow \text{card}(g(a)) = n.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^n = e \\ a^{n/k} = e \Rightarrow n/k. \end{cases}$$

3) Remarque:

Si $\varphi(a) = n$ alors:

$$g(a) = \{e, a, \dots, a^{n-1}\} = \bar{f}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}).$$

4) Propriétés:

Si G est fini

$$\text{Alors } \forall a \in G: \varphi(a) \mid \text{card}(G)$$

En plus si $\text{card}(G) = n$ alors $\forall a \in G: a^n = e$

5) Propriété:

Tout sous-groupe d'un groupe cyclique est cyclique.

Groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$: ($n \in \mathbb{N}^*$)

1) Congruence modulo n :

" $\equiv$ " est relatⁿ d'équivalence sur $\mathbb{Z}$

$$\bar{a} = a + n\mathbb{Z}$$

$$\text{On a : } \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{a + n\mathbb{Z} \mid a \in \mathbb{Z}\}.$$

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{n-1}\}$$

$$\text{Et } \forall (i_1, i_2) \in \{0, n-1\}: i_1 \neq i_2 \Rightarrow \bar{i}_1 \neq \bar{i}_2$$

2) Propriétés:

- $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ groupe commutatif d'elmt neutre $\bar{0} = n\mathbb{Z}$.
- $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ groupe cyclique engendré par 1.
- k générateur de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ si $k \wedge n = 1$.
- Tout groupe cyclique de cardinal n est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

3) Propriété:

Si G et G' cycliques et $\varphi: G \rightarrow G'$ isom.

Alors a générateur de $G \Leftrightarrow \varphi(a)$ générateur de G' .

4) Corollaire:

Les générateurs de $\mathbb{U}_n$ sont w^k tq $k \wedge n = 1$ où $w = e^{\frac{2i\pi}{n}}$

(3)

Indicateur d'Euler:

1) Déf:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*: \varphi(n) = \text{card} \{k \in \{0, n-1\} \mid k \wedge n = 1\}$$

2) Propriétés:

1. Si p est premier

- $\varphi(p) = p-1$
- $\forall a \in \mathbb{N}^*: \varphi(p^a) = p^a - p^{a-1}$

2. Si $n \wedge m = 1$, alors $\varphi(n.m) = \varphi(n) \cdot \varphi(m)$

3) Corollaire:

$$\text{Si } n = \prod_{i=1}^k p_i^{a_i}$$

$$\text{Alors } \varphi(n) = \prod_{i=1}^k (p_i^{a_i} - p_i^{a_i-1})$$

$$\varphi(n) = \prod_{i=1}^k (p_i^{a_i} - p_i^{a_i-1})$$

$$\varphi(n) = n \prod_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$$

Groupe symétrique.

1) Déf:

$(S_n, \circ)$ le grp des permutations de $\{1, n\}$ et dit le grp symétrique d'indice n .

$$\# S_n = n!$$

2) Cycles et transpositions:

$c = (a_1, \dots, a_p)$ est dit cycle si:

$$\begin{cases} \forall i \in \{1, p-1\}: c(a_i) = a_{i+1} \\ c(a_p) = a_1 \\ \forall x \notin \{a_1, \dots, a_p\}: c(x) = x \end{cases}$$

- l'ensemble $\{a_1, \dots, a_p\}$ est le support de c
- p est la longueur du cycle.
- la transposition est cycle de longueur 2: $c = (i, j)$
- Deux cycles à supports disjoints commutent.
- Tout cycle se décompose en produit de transposition (de façon non unique).

$$c = (a_1, \dots, a_p) = (a_1, a_2)(a_2, a_3) \dots (a_{p-1}, a_p) \\ = (a_1, a_{p-1})(a_{p-1}, a_{p-2}) \dots (a_1, a_2)$$

la parité du nbre de transpositions est la même.

3) Prop:

* Toute permutation se décompose en produit de cycle à supports disjoints.

* Toute permutation se décompose en produit de transposition.

4) Signature:

$$\varepsilon: (S_n, \circ) \longrightarrow (\{-1, 1\}, \times)$$

$$G = z_1 \dots z_r \mapsto (-1)^r \quad \text{où } z_i \text{ transposit}^2$$

est un morphisme de groupes.

5) Matrice de permutation:

La matrice de permutation associée à σ est:

$$P_\sigma = (e_{\sigma(i), j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$$

* Si E un K -ker de dim n , $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . On pose $\mu_\sigma \in \mathcal{L}(E)$:

$$\mu_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$$

$$\text{Alors } \text{mat}_B \mu_\sigma = P_\sigma$$

6) Propriétés:

$$* P_\sigma \cdot P_{\sigma'} = P_{\sigma \circ \sigma'}$$

$$* P_\sigma^{-1} = P_{\sigma^{-1}}$$

$$* {}^t P_\sigma = P_\sigma^{-1}$$

$$* \det P_\sigma = \varepsilon(\sigma)$$

7) Prop:

$$\text{d'applicat}^2 \quad s: (\mathbb{Z}, +) \longrightarrow (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$$

$$k \mapsto \bar{k}$$

est un morphisme de groupe canonique, dit la surjection canonique.

Anneaux et corps:

Si $A \neq \emptyset$ muni de 2 lois $+$ et $\times$.

1) Def: $(A, +, \times)$ anneau si:

- $(A, +)$ groupe commutatif
- $\times$ associative
- $\times$ distributive par $+$
- $\times$ admet un elmt neutre 1_A .

d'anneau $(A, +, \times)$ est dit commutatif si $\times$ est commutatif.

2) Def:

Un anneau est un corps si tout elmt est inversible par la 2^{ème} loi.

Sous-anneaux:

Si $(A, +, \times)$ anneau et $B \subset A$.

1) Def:

B sous-anneau de A si:

$$\begin{cases} (B, +) \text{ sous groupe de } (A, +) \\ B \text{ stable par } \times \\ 1_A \in B \end{cases}$$

$(B, +, \times)$ est un anneau pour les lois induites.

2) Caractérisation:

$B \subset A$ est un sous-anneau de A si:

$$\begin{cases} 1_A \in B \\ \forall (a, b) \in B^2, (a-b) \in B \text{ et } a \times b \in B. \end{cases}$$

Morphisme d'anneaux:

$(A, +, \times)$ et $(A', +, \times')$ deux anneaux

$$f: A \longrightarrow A'$$

1) Définition:

f est un morphisme d'anneaux si:

$$\forall (x, y) \in A^2, \begin{cases} f(x+y) = f(x) + f(y) \\ f(x \times y) = f(x) \times' f(y) \\ f(1_A) = 1_{A'} \end{cases}$$

$$\text{on a tjrs } f(0_A) = 0_{A'}$$

2) Propriétés:

Si B, B' deux sous anneaux de A et A' resp:

- $f(B)$ est un sous-anneau de A' .
- $f^{-1}(B')$ est un sous-anneau de A .
- Le noyau de f est: $\text{Ker } f = \{x \in A / f(x) = 0_{A'}\}$
- l'image de f est: $\text{Im } f = f(A) = \{f(x) / x \in A\}$
- tout morphisme d'un corps est injectif.
- $\text{Ker } f$ n'est pas un sous-anneau de A (car ne contient pas 1_A) mais $\text{Im } f$ est un sous-anneau de A' .

1) Règles de calcul d'un anneau : $(A, +, \times)$

- Si $a \in A$, $a \neq 0_A$, on pose $a^{-1} = a^{-1}$.
- $\forall k \in \mathbb{N}^*$: $a^k = \underbrace{a \times \dots \times a}_{k \text{ fois}}$
- $a^{k+1} = a^k \cdot a = a \cdot a^k$
- Binôme de Newton: Si $(a, b) \in A^2$: $a \times b = b \times a$
Alors $\forall n \in \mathbb{N}$: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

- $\forall a \in A$: $a \times 0_A = 0_A \times a = 0_A$
- $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\forall a \in A$: $ka = \underbrace{a + \dots + a}_{k \text{ fois si } k \in \mathbb{N}}$
 $= \underbrace{(-a) + \dots + (-a)}_{-k \text{ fois si } k \in \mathbb{Z}^-}$

4) Éléments inversibles d'un anneau:

- $a \in A$ est dit inversible de A ssi:
 $\exists b \in A$: $a \times b = b \times a = 1_A$.
leur ensemble est noté $U(A)$
- $(U(A), \times)$ est un groupe d'élmts inversibles de A

Anneau intègre: $(A, +, \times)$

1) Définition:

- Si $a \in A \setminus \{0\}$, a est dit un diviseur de 0 à droite (resp à gauche) ssi: $\exists b \in A \setminus \{0\}$: $b \times a = 0_A$ (resp $\exists b \in A \setminus \{0\}$: $a \times b = 0_A$)

Si A commutatif, a est dit diviseur de 0.

2) Def:

A est dit intègre ssi A commutatif sans diviseur de zéro, ssi A est commutatif et $\forall (a, b) \in A^2$, $a \times b = 0_A \Rightarrow a = 0_A$ ou $b = 0_A$

Remarques:

- * Tout corps commutatif est un anneau intègre.
- * Tout anneau intègre fini est un corps commutatif.

Ideaux d'un anneau commutatif:

Si $(A, +, \times)$ anneau commutatif et $I \subset A$.

1) Définition:

I est un idéal de A ssi:

- $(I, +)$ est sous-groupe de $(A, +)$.
- $\forall x \in I, \forall a \in A$: $(x \times a) \in I$.

2) Proposition:

I idéal de A : $\begin{cases} I \neq \emptyset \\ \forall (x, y) \in I: (x+y) \in I \\ \forall (x, a) \in I \times A: x \times a \in I \end{cases}$

Rmq:

- $\{0_A\}$ et A sont les idéaux triviaux de A .
- Si $a \in A$:
 $aA = \{a \times x / x \in A\}$ est un idéal de A et c'est le plus ^{petit} idéal, c'est l'idéal engendré par a , noté (a) . (appelé idéal principal).
- d'intersection quelconque d'idéaux de A est un idéal de A .

3) Propriétés:

- * le noyau d'un morphisme d'anneaux est un idéal.
- * Si I idéal de A tq $1_A \in I$ alors $I = A$.
- * Les idéaux d'un corps comm sont les idéaux triviaux
- * Si I idéal de A tq $\exists x \in U(A)$ et $x \in I$.

Alors $I = A$.

- * Si I et J deux idéaux de A .
 $I+J = \{x+y / (x, y) \in I \times J\}$ est idéal de A et c'est le plus petit idéal de A contenant $I \cup J$.

Produit cartésien d'anneaux:

Si $(A_1, +, \times)$ et $(A_2, +, \times)$:

$\forall (a, b) \in A_1 \times A_2$, $\forall (x, y) \in A_1 \times A_2$:

On note: $\begin{cases} (a, b) + (x, y) = (a+x, b+y) \\ (a, b) \times (x, y) = (a \times x, b \times y) \end{cases}$

1) Propriétés:

- * $(A_1 \times A_2, +, \times)$ anneau d'élmts neutres $(0_{A_1}, 0_{A_2})$ et $(1_{A_1}, 1_{A_2})$.

(xy) est inversible de $A_1 \times A_2$ ssi x et y sont inversibles de A_1 et y inv de A_2 .

$U(A_1 \times A_2) = U(A_1) \times U(A_2)$

Si $A_1, \dots, A_p$ ds anneaux alors $A_1 \times \dots \times A_p$ est un anneau.

Si A_1, A_2 deux anneaux.

$p_1: A_1 \times A_2 \rightarrow A_1$ la 1^{ère} project[°]
 $(x, y) \mapsto x$

$p_2: A_1 \times A_2 \rightarrow A_2$ la 2^{ème} project[°]
 $(x, y) \mapsto y$

deux morphismes d'anneaux surjectifs non injectifs.

$q_1: A_1 \rightarrow A_1 \times A_2$ n'est pas un morphisme d'anneaux
 $x \mapsto (x, 0_{A_2})$

Dérivabilité ds un anneau intègre:

1) Définition: $(a, b) \in A^2$ intègre.
 a divise b (a/b) ssi $\exists c \in A: b = a \cdot c$

2) Prop:

- $0_A \nmid a$ ssi $a = 0_A$
- $0_A = 0_A \times a, \forall a \in A$.
- $a/b \Leftrightarrow (b) \subset (a)$
 $\Leftrightarrow b \in (a)$

3) Définition: A intègre.

a et b sont associés ($a \sim b$) ssi a/b et b/a .
 ssi $(a) = (b)$.

4) Prop:

a et b sont associés ssi $\exists u \in U(A): b = u \cdot a$.

d'anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \cdot)$:

1) Propriété:

- des éléments de $\mathbb{Z}$ sont de la forme $n\mathbb{Z}$.
- $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \cdot)$ est anneau commutatif.
- $\phi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un morphisme
 $x \mapsto \bar{x}$

d'anneaux surjectifs, dit la surjection

canonique: $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{n-1}\}$

2) Prop:

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est inversible ds $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \Leftrightarrow k \wedge n = 1$.

$\text{card } U(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \text{card } \{k \in \{0, n-1\}: k \wedge n = 1\}$
 $= \varphi(n)$.

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est intègre $\Leftrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ corps
 $\Leftrightarrow n$ nombre premiers.

Morphisme d'anneaux et idéaux:

1) Définition, prop:

si $f: A \rightarrow A'$ morphisme d'anneaux

si I un idéal de A alors $f(I)$ est idéal de $f(A)$ (pas nécessairement de A')

si I' idéal de A' alors $f^{-1}(I')$ est idéal de A .

2) Prop:

$f^{-1}(I')$ est un sgpe de $(A, +)$.

Théorème chinois:

1) Théorème: si $n \wedge m = 1$.

$f: \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/nm\mathbb{Z}$
 $(\bar{x}_n, \bar{x}_m) \mapsto \bar{x}_{nm}$

est un isomorphisme d'anneaux.

2) Résolution: si $n \wedge m = 1$.

$\forall (a, b) \in \mathbb{N}^2: \exists x \in \mathbb{Z}, \begin{cases} x \equiv a[n] \\ x \equiv b[m] \end{cases}$

x est unique modulo nm .

et $S = x_0 + nm\mathbb{Z}$.

Méthode de résolution?

$n \wedge m = 1 \Rightarrow \exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2: nu + mv = 1$

$\Rightarrow \begin{cases} mv \equiv 1[n] \\ nu \equiv 1[m] \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} amv \equiv a[n] \\ bnu \equiv b[m] \end{cases}$

soit $x_0 = amv + bnu$

$S = \{x_0 + nmk / k \in \mathbb{Z}\}$.

g) relatives:

Si $n \wedge m = 1$: $\varphi(nm) = \varphi(m) \cdot \varphi(n)$

Si $n_1, \dots, n_p$ sont 2 premiers entre eux:

$$\text{Alors } \mathbb{Z} / \prod_{i=1}^p n_i \mathbb{Z} \sim \prod_{i=1}^p (\mathbb{Z} / n_i \mathbb{Z})$$

Si $n_1, \dots, n_p \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux et $a_1, \dots, a_p \in \mathbb{N}$.

Le système $\begin{cases} x \equiv a_1 [n_1] \\ \vdots \\ x \equiv a_p [n_p] \end{cases}$ admet une unique solutⁿ modulo $\prod_{i=1}^p n_i$

Algèbre:

Soit $A \neq \emptyset$ muni^e de 2 lois $+, \cdot$ et une lce notée $\bullet$.

1) Def.

$(A, +, \cdot, \bullet)$ est une $\mathbb{K}$ -algèbre si:

$$\begin{cases} (A, +, \cdot) \text{ anneau} \\ (A, +, \bullet) \text{ } \mathbb{K}\text{-Ker} \\ \forall (a, b) \in A^2, \forall \alpha \in \mathbb{K}: \alpha \cdot (a \cdot b) = (\alpha \cdot a) \cdot b = a \cdot (\alpha \cdot b) \end{cases}$$

d'algèbre est comm si l'anneau $(A, +, \cdot)$ est comm ie $\cdot$ est commutative.

Sous-algèbre:

1) Définition:

Si $(A, +, \cdot, \bullet)$ une $\mathbb{K}$ -algèbre et $B \subset A$:

B est une sous-algèbre de A si:

$$\begin{cases} B \text{ est un sous-anneau de } (A, +, \cdot) \\ \text{et } B \text{ est un sous-er de } (A, +, \bullet). \end{cases}$$

Par ces lois induits, toute sous-algèbre de $\mathbb{K}$ est une $\mathbb{K}$ -algèbre.

2) Propriétés:

B est une sous-algèbre si:

$$\begin{cases} 1_A \in B \\ \forall (x, y) \in B^2 \text{ et } \forall \lambda \in \mathbb{K}: \begin{cases} x + \lambda y \in B \\ x \cdot y \in B \end{cases} \end{cases}$$

Morphisme d'algèbre:

Si $(A, +, \cdot, \bullet)$ et $(B, +, \cdot, \bullet)$ ds algèbres et $f: A \rightarrow B$

1) Définition:

f est dit morphisme d'algèbre si f est un morphisme d'anneaux de $(A, +, \cdot)$ vers $(B, +, \cdot)$ et f est une applicatⁿ linéaire de $(A, +, \bullet)$ vers $(B, +, \bullet)$

2) Prop:

Alors f morphisme d'algèbre si:

$$\forall (x, y) \in A^2, \forall \alpha \in \mathbb{K}.$$

$$\begin{cases} f(\alpha x + y) = \alpha f(x) + f(y) \\ f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y) \\ f(1_A) = 1_B \end{cases}$$

Compléments :

L'anneau quotient :

A anneau comm et I idéal de A .

$\forall (x, y) \in A^2$: on pose $x \sim y \Leftrightarrow (x - y) \in I$.

$\sim$ est une relation d'équivalence sur A .

$$\forall x \in A, \bar{x} = x + I.$$

$\sim$ est compatible avec $+$ et $\times$.

On note $A/I = \{ \bar{x} / x \in A \}$

$$\text{on pose } \forall (\bar{x}, \bar{y}) \in (A/I)^2 : \begin{cases} \bar{x} + \bar{y} = \overline{x+y} \\ \bar{x} \times \bar{y} = \overline{x \times y} \end{cases}$$

$(A/I, +, \times)$ est un anneau commutatif d'éléments neutres $\bar{0} = I$ et $\bar{1}_A$.

A/I est dit l'anneau quotient par I .

Caractéristique d'un anneau.

1) Définition :

Soit A un anneau :

$$f : (\mathbb{Z}, +, \times) \rightarrow (A, +, \times) \\ k \mapsto k \cdot 1_A$$

f est un morphisme d'anneau.

$\ker f$ est un idéal de $\mathbb{Z}$.

Donc $\exists n \in \mathbb{Z} : \ker f = n\mathbb{Z}$.

• si $n = 0$: f est un isomorphisme de $\mathbb{Z}$ sur $\text{Im} f$.

Dans ce cas, $\text{caract}(A) = 0$.

$$\text{caract}(A) = 0 \Leftrightarrow (\forall k \in \mathbb{Z} : k \cdot 1_A = 0 \Rightarrow k = 0)$$

• si $n \in \mathbb{N}^*$: $\ker f = n\mathbb{Z}$

$$\forall k \in \mathbb{Z} : k \cdot 1_A = 0 \Leftrightarrow n \mid k.$$

Dans ce cas, $\text{caract}(A) = n$.

et $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est isomorphe à $\text{Im} f$.

$$\bar{f} : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \text{Im} f \\ \bar{k} \mapsto f(k) = k \cdot 1_A$$

2) Remq :

Soit $\text{caract}(A) = 0 \Rightarrow A$ est infini

($\text{Im} f$ est infini et f isom de $\mathbb{Z}$ sur $\text{Im} f$). (8)

3) Proposition :

Si A un anneau intègre :

$\text{caract}(A) = 0$ ou $\text{caract}(A) = p$ où p premier.

4) Autre définition light :

A unitaire dont l'élément neutre pour la loi $\cdot$ est noté e . Soit le morphisme d'anneaux.

$$f : \mathbb{Z} \rightarrow A \\ n \mapsto ne$$

• si $\ker f = \{0\}$ (i.e. : $ne = 0 \Rightarrow n = 0$)

On a : $\text{caract}(A) = 0$

• si $\ker f \neq \{0\}$: Alors $\ker f$ est un idéal de $\mathbb{Z}$ principal :

$$\exists ! c \in \mathbb{N}^* : \ker f = c\mathbb{Z}.$$

Et l'image $f(\mathbb{Z})$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
L'entier c est le plus petit entier $> 0 : ce = 0$

On dit que $\text{caract}(A) = c$.

$$\text{et } ne = 0 \Leftrightarrow c \mid n.$$

Anneau principal :

Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau commutatif

Un idéal I de A est dit principal si :

$$\exists x \in A : I = xA \text{ on note } I = (x)$$

L'anneau A est dit principal s'il est commutatif, unitaire, intègre et si tous les idéaux de A sont principaux.

Exemple : les anneaux de $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{R}[X]$ sont principaux

Polynôme d'endomorphisme:

1/ Polynôme minimal:

• L'espace $IK[u]$:

* E un K -espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$.

On pose $id = u^0$,

et $\forall k \in \mathbb{N}: u^{k+1} = u^k \circ u = u \circ u^k$

$\forall P \in IK[X]: P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$.

* On a: $P(u) = \sum_{k=0}^n a_k u^k = a_0 id_E + \dots + a_n u^n \in \mathcal{L}(E)$

d'application: $\varphi_u: IK[X] \rightarrow \mathcal{L}(E)$

$P \mapsto P(u)$

et un morphisme d'algèbre.

* En particulier:

$\forall P, Q \in IK[X]: P(u) \circ Q(u) = (P \cdot Q)(u) = Q(u) \circ P(u)$

$Im \varphi_u = IK[u] = \{P(u) / P \in IK[X]\}$

$IK[u]$ est une sous algèbre engendrée par u .
c'est la plus petite sous-alg contenant u .

* $I_u = Ker \varphi_u = \{P \in IK[X]: P(u) = 0\}$

C'est l'ensemble des polynômes annulateurs de u , c'est un idéal de $IK[X]$.

• Existence d'un polynôme minimal (p.m.):

* Si $I_u = \{0\}$: $IK[u]$ est isomorphe à $IK[X]$.

Donc u n'admet pas de p.m.

* Si $I_u \neq \{0\}$: $\exists! \pi_u$ unitaire tq:

$$I_u = \pi_u IK[X]$$

où π_u est le p.m. de u vérifiant:

$\rightarrow d^0 \pi_u \geq 1$

$\rightarrow d^0 \pi_u = 1 \Leftrightarrow u$ une homothétie.

$\rightarrow$ Si $P \in IK[X]: P(u) = 0$ alors π_u / P

$\rightarrow$ les inversibles de $IK[u]$ sont les $P(u)$ tq

$$P \wedge \pi_u = 1$$

$\rightarrow$ Si π_u inversible alors $IK[u]$ est corps.

Rmq. Si $\dim E < \infty$, tout endomorphisme de E admet un p.m.

• Propriété:

Si u admet un p.m. de degré r .

Alors $IK[u]$ est un IK -ker de $\dim r$.

et $(id, u, \dots, u^{r-1})$ base de $IK[u]$.

2/ Théorème de décomposition des noyaux:

Si $(P, Q) \in IK[X]^2$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.

• Théorème:

Si $D = P \wedge Q$, alors:

$$Ker D(u) = Ker P(u) \cap Ker Q(u)$$

• Corollaire:

Si $P \wedge Q = 1$ alors $Ker P(u) \cap Ker Q(u) = \{0\}$

• TDN:

Si $P \wedge Q = 1$, alors:

$$Ker (P \cdot Q)(u) = Ker P(u) \oplus Ker Q(u)$$

Si en plus, $(P \cdot Q)(u) = 0$

Alors $E = Ker P(u) \oplus Ker Q(u)$.

• TDN généralisé:

Si $P_1, \dots, P_r \in IK[X]$: $\exists a$ a premiers entre eux et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors:

$$Ker (\prod_{i=1}^r P_i)(u) = \bigoplus_{i=1}^r Ker P_i(u)$$

Si en plus, $(\prod_{i=1}^r P_i)(u) = 0$

Alors $E = \bigoplus_{i=1}^r Ker P_i(u)$

Sous espace stable par un endomorphisme:

1) Définition: F ser d'un IK -ker E et $u \in \mathcal{L}(E)$.

F est dit stable par u ou u -stable

ssi $u(F) \subset F$

ssi $x \in F \Rightarrow u(x) \in F$

2) Remarques:

* Si F stable par u alors $u|_F \in \mathcal{L}(F)$.

* Si $P \in IK[X]$, F ser de E stable par u .

$$P(u|_F) = P(u)|_F$$

3) Propriétés:

Si $(e_i)_{i \in I}$ génératrice de F , alors:

F est u -stable $\Leftrightarrow \forall i \in I, u(e_i) \in F$

7) Théorème :

Si $(u, v) \in \mathcal{L}(E)$: $u \circ v = v \circ u$.

Alors l'image et le noyau de l'un sont stable par l'autre.

8) Corollaire :

$\forall P \in \mathcal{K}(X)$: $\text{Ker } P(u)$ et $\text{Im } P(u)$ sont u -stables.

6) Propriété :

Si F est u -stable alors $u|_F \in \mathcal{L}(F)$.

et $\text{Ker } u|_F = F \cap \text{Ker } u$.

7) Théorème :

Si $\dim(E) = n$ et F sev de E tq $\dim F = p$.

$B_2 = (e_1, \dots, e_p)$ base de F

$e_{p+1}, \dots, e_n \in E$ tq : $B = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ base de E .

Alors : F est u -stable ssi $\text{mat}_B(u) = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}$

où $A_1 = \text{mat}_{B_2}(u|_F)$

8) Corollaire :

Si $E_1, \dots, E_p$ des sev de E avec $\dim E < \infty$

tq : $E = \bigoplus_{i=1}^p E_i$

et $B = \bigcup_{i=1}^p B_i$ (B_i base de E_i) base de E

adaptée à la somme directe.

Alors : les E_i sont u -stables ssi :

$\text{mat}_B(u) = \begin{pmatrix} A_1 & (0) \\ (0) & A_2 \dots A_p \end{pmatrix}$ où $A_i = \text{mat}_{B_i}(u|_{E_i})$

et $\det(u) = \prod_{i=1}^p \det A_i$

9) Propriété :

Si $\dim E < \infty$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ et F u -stable.

Alors $\pi_{u|_F} / \pi_u$.

10) Propriété :

Si $A = \begin{pmatrix} A_1 & & (0) \\ & A_2 & \\ (0) & & A_p \end{pmatrix}$ diagonale par blocs

Alors $\pi_A = \text{ppcm}(\pi_{A_1}, \dots, \pi_{A_p})$

éléments propres d'un endomorphisme en

1/ Valeur propre :

Def : E un $\mathbb{K}$ -ev et $u \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda \in \mathbb{K}$

λ est une valeur propre (vp) de u si :

$\exists x \in E \setminus \{0\} : u(x) = \lambda x$

x est le vecteur propre (vp) associé à λ .

Le spectre de u sur $\mathbb{K}$ $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(u)$ est l'ensemble des valeurs propres de u sur $\mathbb{K}$.

Rmq :

Si x vecteur propre alors αx l'est, car la droite engendré par x .

Propriétés :

* $\lambda \in \text{Sp}(u) \Leftrightarrow (u - \lambda \text{id})$ non injectif

* Si $\dim E < \infty$:

$\lambda \in \text{Sp}(u) \Leftrightarrow (u - \lambda \text{id})$ non inversible

$\Leftrightarrow \text{Ker}(u - \lambda \text{id}) \neq \{0\}$.

Corollaire :

* u est injectif ssi $0 \notin \text{Sp}(u)$

* Si $\dim E < \infty$:

u est inversible ssi $0 \notin \text{Sp}(u)$

2/ Sous-espace propre :

• Définition : Si $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(u)$

$\text{Ker}(u - \lambda \text{id}) = E_u(\lambda) = E_\lambda(u)$ est appelé le sous-espace propre de u associé à λ .

• Propriétés : Si $\lambda \in \text{Sp}(u)$, alors :

$E_\lambda(u) = \text{Ker}(u - \lambda \text{id})$ est u -stable

car $u \circ (u - \lambda \text{id}) = (u - \lambda \text{id}) \circ u$

Propriété :

Si $D = \mathbb{K}a$ une droite de E .

D est stable par $u \Leftrightarrow a$ est vp de u .

Propriété :

Si $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ des valeurs propres de u de $\lambda_i \neq \lambda_j$ alors :

$\sum_{i=1}^r E_{\lambda_i}(u)$ est directe.

Théorème :

Une famille de φ associés à des valeurs propres $\lambda \in \mathbb{C}$ est libre.

Propriété :

Si $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \text{Sp}(\mu)$ avec $x \in E \setminus \{0\}$
tq $\mu(x) = \lambda x$

Alors $P(\mu)(x) = P(\lambda)(x)$.

Corollaires :

* Si $\lambda \in \text{Sp}(\mu)$ alors $P(\lambda) \in \text{Sp}(P(\mu))$.
la réciproque est fautive.

* Si $P \in \mathbb{K}[X]$ tq $P(\mu) = 0$

Alors $\text{Sp}(\mu) \subset \{\lambda \in \mathbb{K} / P(\lambda) = 0\}$.

Propriétés :

* Si $\mu = \lambda \text{id}$ alors $\text{Sp}(\mu) = \{\lambda\}$

* Si $\nu = \mu + \alpha \text{id}$

Alors $\text{Sp}(\nu) = \{\lambda + \alpha / \lambda \in \text{Sp}(\mu)\}$.

et $E_{\lambda+\alpha}(\nu) = E_{\lambda}(\mu)$

* Si $\mu \in \mathcal{L}(E)$ et $\nu \in \text{GL}(E)$

Alors $\text{Sp}(\underbrace{\nu \circ \mu \circ \nu^{-1}}_{\text{conjugué de } \mu}) = \text{Sp}(\mu)$

et $E_{\lambda}(\nu \circ \mu \circ \nu^{-1}) = \nu(E_{\lambda}(\mu))$

Théorème :

Si $\dim E < \infty$

Alors $\lambda \in \text{Sp}(\mu) \Leftrightarrow \pi_{\mu}(\lambda) = 0$

Propriétés :

* Si $\mu \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$ alors $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(\mu) \neq \emptyset$ et $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(\mu) \neq \emptyset$
car π_{μ} admet une racine de $\mathbb{C}$.

* Si $\mu \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$ tq $\dim \pi_{\mu}$ est impair

Alors $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(\mu) \neq \emptyset$

* Si F un $\mathbb{K}$ -sev de E μ -stable.

Alors $\text{Sp}(\mu|_F) \subset \text{Sp}(\mu)$.

$\forall \lambda \in \text{Sp}(\mu|_F) : E_{\lambda}(\mu|_F) = F \cap E_{\lambda}(\mu)$

* Si $\dim(E) < \infty$ et μ nilpotent

Alors $\text{Sp}(\mu) = \{0\}$

Éléments propres d'une matrice carrée endomorphisme

1/ Valeur propre : $A \in \text{M}_n(\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

Définition :

λ est dite valeur propre de A si :

$\exists x \in \text{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\} : Ax = \lambda x$

x est dit vecteur propre associé à λ .

l'ensemble des vp de A sur $\mathbb{K}$ est $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$.

Propriété :

* $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(A) \Leftrightarrow (A - \lambda I_n)$ non inversible

* A inversible $\Leftrightarrow 0 \notin \text{Sp}(A)$

2/ Vecteur propre :

Définition :

$E_{\lambda}(A) = \text{Ker}(A - \lambda I_n)$ sous-espace propre de A associé à λ .

$\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(A) \Leftrightarrow \text{Ker}(A - \lambda I_n) \neq \{0\}$

Propriété :

$A \in \text{M}_n(\mathbb{K})$ et U_A l'endo canon associé à A .

$U_A : \text{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \longrightarrow \text{M}_{n,1}(\mathbb{K})$
 $x \longmapsto Ax$

Alors $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(A) = \text{Sp}_{\mathbb{K}}(U_A)$

Propriété :

Si $\mu \in \mathcal{L}(E)$ avec $\dim E = n < \infty$, B base de E

Alors $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(\mu) = \text{Sp}_{\mathbb{K}}(\text{mat}_B(\mu))$

Propriétés :

* Si $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in \text{M}_{n,1}(\mathbb{K}) : Ax = \lambda x$

Alors $\forall P \in \mathbb{K}[X] : P(A) \cdot x = P(\lambda)x$.

* Si $P(A) = 0$, alors

$\text{Sp}(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{K} / P(\lambda) = 0\}$.

* $\lambda \in \text{Sp}(A) \Leftrightarrow \pi_A(\lambda) = 0$.

* Si $H = A + \lambda I$

Alors $\text{Sp}(H) = \{\lambda + \alpha / \alpha \in \text{Sp}(A)\}$.

Poly caractéristique d'une matrice carrée ou d'un endomorphisme en dim < ∞ :

1/ Poly caractéristique d'une matrice :

• **Définition :** $A \in M_n(\mathbb{K})$ où $A = (a_{ij})$
le polynôme caractéristique de A est :

$$X_A = \det(XI_n - A)$$

$$\Rightarrow X_A(X) = \begin{vmatrix} X - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ -a_{n1} & \dots & \dots & X - a_{nn} \end{vmatrix}$$

• **Théorème :**

Si $A \in M_n(\mathbb{K})$, X_A est un polynôme unitaire de degré n .

$$X_A = X^n - \text{tr}(A)X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(A)$$

• **Cas particuliers :**

* Si $A \in M_2(\mathbb{K})$ où $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$X_A = X^2 - (a+d)X + ad - bc$$

* Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & * \\ 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$

$$X_A = \prod_{i=1}^n (X - a_{ii})$$

* Si $A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_n \\ 1 & & & | \\ & \ddots & & | \\ 0 & & 0 & a_{n-1} \end{pmatrix}$

$$X_A = X^n - \sum_{i=1}^{n-1} a_i X^i$$

• **Propriétés :**

* $\lambda \in \text{Sp}(A) \Leftrightarrow X_A(\lambda) = 0$

* $X_A = X_{tA}$, ainsi $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(A) = \text{Sp}_{\mathbb{K}}(tA)$

mais A et tA n'ont pas nécessairement les mêmes vecteurs propres.

* Si A et B sont semblables alors $X_A = X_B$.

$$\text{Donc } \text{Sp}_{\mathbb{K}}(A) = \text{Sp}_{\mathbb{K}}(B)$$

* Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ alors $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \Rightarrow \bar{\lambda} \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$

$$\text{En plus : } AX = \lambda X \Rightarrow A\bar{X} = \bar{\lambda}\bar{X}$$

* Si $\dim E = n$ alors $\text{card } \text{Sp}_{\mathbb{K}}(A) \leq n$. (17)

• **Remarques :**

* Si la somme des éléments de chaque ligne de A est de λ . Alors $\lambda \in \text{Sp}(A)$, associé au vecteur propre $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

* Si la somme de chaque colonne de A est de λ alors $\lambda \in \text{Sp}(A)$ (non associé nécessairement à $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$).

2/ Poly caractéristique d'un endo :

• **Définition :**

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tq $\dim E < \infty$
le poly caractéristique de u est le poly caractéristique de sa matrice ds une base qlq, noté X_u .

• **Propriétés :**

* Si $X_u = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)$

Alors $\sum_{i=1}^n \lambda_i = \text{Tr}(u)$, $\prod_{i=1}^n \lambda_i = \det(u)$

* Si $X_u = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)^{m_i}$, λ_i scs $\neq$

Alors $\sum_{i=1}^n m_i \lambda_i = \text{Tr} u$; $\prod_{i=1}^n \lambda_i^{m_i} = \det(u)$

* Si F un sev de E u -stable, alors :

$$X_{u|_F} \mid X_u$$

• **Remarques :**

→ Si $u \in \mathcal{L}(E)$ tq $\dim E$ impaire

$$\text{Alors } \text{Sp}_{\mathbb{R}}(u) \neq \emptyset$$

→ Si $A \in M_n(\mathbb{K})$ tq n impaire

$$\text{Alors } \text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \neq \emptyset$$

3) Ordre de multiplicité d'une vp :

Si $\lambda \in \text{Sp}(u)$, $\dim E < \infty$.

• **Définition :**

λ est vp de u d'ordre de multiplicité m

ssi λ est racine de X_u d'ordre de

multiplicité $m \in \mathbb{N}^*$.

$$\text{i.e. } (X - \lambda)^m \mid X_u \text{ et } (X - \lambda)^{m+1} \nmid X_u$$

$$\text{ssi } X_u = (X - \lambda)^m q \text{ avec } q(\lambda) \neq 0$$

- λ est vp simple de A (resp u) si λ est racine simple de χ_A (resp χ_u).

Propriétés:

- * si λ vp de u (resp de A) d'ordre de multiplicité $m \in \mathbb{N}^*$, alors:

$$1 \leq \dim E_\lambda(u) \leq m$$

$$(\dim E_\lambda(A))$$

- * si λ vp simple alors $\dim E_\lambda(u) = 1$

Remarques:

- si $u \in \mathcal{L}(E)$, $\dim E = n$, u nilpotent,

$$\text{Alors } \chi_u = X^n$$

- si $\text{tr}(u) = 1$.

$$\text{Alors } \chi_u = X^{n-1}(X - \text{tr}(u))$$

- si u un projecteur:

$$\text{Alors } \chi_u = X^{n-\text{tr}(u)}(X-1)^{\text{tr}(u)}$$

Théorème de Cayley Hamilton:

Énoncé:

Si $u \in \mathcal{L}(E)$, $\dim E < \infty$, $A \in M_n(\mathbb{K})$

$$\text{Alors } \chi_u(u) = 0. \text{ (resp } \chi_A(A) = 0)$$

le polynôme caractéristique est un polynôme annulateur.

Corollaire:

$\forall u \in \mathcal{L}(E)$, $\dim E < \infty$, $A \in M_n(\mathbb{K})$:

$$\pi_u / \chi_u \text{ et } \pi_A / \chi_A$$

Résultat:

si $u \in \mathcal{L}(E)$, $n = \dim(E) \geq 1$

$\forall P \in \mathbb{K}[X]: P(u) \in \text{vect}(id, u, \dots, u^{n-1})$

Propriété:

$u \in \mathcal{L}(E)$ (resp $A \in M_n(\mathbb{K})$) tq

χ_u (resp χ_A) est scindé. Alors,

u nilpotent (resp A nilpotent)

ssi $\text{sp}(u) = \{0\}$

ssi $\chi_u = X^n$.

Diagonalisation:

$u \in \mathcal{L}(E)$, $\dim(E) = n \geq 1$, $A \in M_n(\mathbb{K})$.

1/ Conditions de diagonalisation.

Définition:

- * u est diagonalisable ssi $\exists B$ base de E tq:

$$B = (e_1, \dots, e_n) \text{ tq:}$$

$\text{mat}_B(u) = D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ diagonale.

$$\text{ou } \forall i \in [1, n]: u(e_i) = \lambda_i e_i$$

- * $A \in M_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si A est semblable à une matrice diagonale c'est:

$$\exists P \in GL_n(\mathbb{K}): P^{-1}AP = D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

Propriétés:

- * si u est diagonalisable alors $\forall B$ base de E , $\text{mat}_B(u)$ est diagonalisable.

- * A est diagonalisable si l'endomorphisme canoniquement associé à A est diagonalisable.

$$\begin{aligned} \mu_A: M_{n,1}(\mathbb{K}) &\rightarrow M_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X &\mapsto AX \end{aligned}$$

Théorème:

les assertions suivantes sont équivalentes:

- * u diagonalisable.
- * E admet une base formée de vp de u .
- * $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(u) \neq \emptyset: E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(u)} E_\lambda(u)$
- * $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(u) \neq \emptyset$, $\dim E = \sum_{\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(u)} \dim E_\lambda(u)$
- * χ_u est scindé et $\forall \lambda \in \text{Sp}(u): \dim E_\lambda(u) = m(\lambda)$ où m est l'ordre de multiplicité.
- * $E = \bigoplus_{i=1}^r E_i$ tq E_i stable par u et $u|_{E_i}$ est une homothétie.

Propriété: Cond suffisante mais pas nécessaire.

si χ_u scindé à racine simple. Alors u est diagonalisable. ($\Leftarrow$)

Théorème: Is pss:

- * u diagonalisable
- * u annule un poly scindé à racine simple.
- * π_u est scindé à racine simple.

1. Cas particuliers :

1. si $\lambda q(u) = 1$.
u diagonalisable ssi $\text{Tr}(u) \neq 0$.
2. si $\text{sp}_{\mathbb{K}}(u) = \{\lambda\}$
u diagonalisable ssi $u = \lambda \text{id}$
3. si u nilpotent.
u diagonalisable ssi $u = 0$
4. si C matrice compagnon.
C diagonalisable ssi χ_C scindé à racine simple.
5. si F ser de E u-stable.
u diagonalisable $\Rightarrow$ u/F diagonalisable.

• Propriétés :

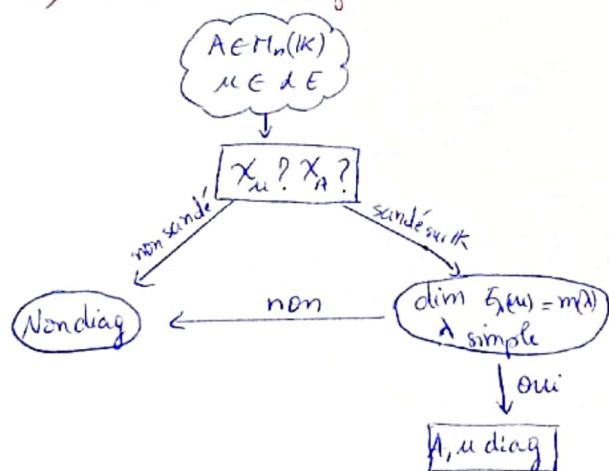
Si u diagonalisable et F ser de E u-stable
Alors u/F diagonalisable ssi F admet
une base formée de v.p. de u

• Corollaire :

Si χ_u est scindé à racine simple.

Alors l'ordre de ser de E u-stable et de
comp est $\binom{n}{p} = C_n^p$.

2) Plan de diagonalisation :



3) Projecteurs spectraux :

Si $u \in L(E)$, $\dim E < \infty$ tq u diagonalisable.

$$\text{Donc } E = \bigoplus_{i=1}^n E_{\lambda_i}(u)$$

$$\text{Sp}(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\} \text{ où}$$

les λ_i sont $\neq$ et $\neq$.

• Définition :

$\forall i \in \{1, \dots, r\}$, les projecteurs p_i sur $E_{\lambda_i}(u)$
parallèlement à $\bigoplus_{j=1, j \neq i}^n E_{\lambda_j}(u)$ sont
appelés les projecteurs spectraux.

• Théorème :

- * $\sum_{i=1}^n p_i = \text{id}_E$
- * $p_i \circ p_j = \delta_{ij} p_i$
- * $u = \sum_{i=1}^n \lambda_i p_i$
- * $\forall Q \in \mathbb{K}[X] : Q(u) = \sum_{i=1}^n Q(\lambda_i) p_i$
- * les p_i sont polynômes en u.

• Remq :

- * Si $\lambda \in \text{sp}(u)$ tq $\lambda \neq 0$
Alors $E_{\lambda}(u) \subset \text{Im } u$.
($u(x) = \lambda x \Rightarrow x = u(\frac{1}{\lambda} \cdot x) \in \text{Im}(u)$)

Triagonalisation : $u \in L(E)$, $\dim E < \infty$

• Définition :

- * u est triagonalisable ssi $\exists B$ base de E
tq $\text{mat}_B(u) \in T_{n,s}(\mathbb{K})$ (st triang sup)
- * $A \in M_n(\mathbb{K})$ est triagonalisable ssi A
est semblable à une matrice triangulaire
supérieure, ie :

$$\exists P \in GL_n(\mathbb{K}) : P^{-1}AP = T \in T_{n,s}(\mathbb{K})$$

• Rappel sur $T_{n,s}$:

$$\rightarrow A = (a_{ij}) \in T_{n,s}(\mathbb{K}) \text{ si } i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$$

$$\rightarrow \text{Si } B = (e_1, \dots, e_n) \text{ base de } E,$$

$$\text{mat}_B(u) \in T_{n,s}(\mathbb{K}) \text{ ssi :}$$

$$\forall i \in \{2, \dots, n\} : u(e_i) \in \text{vect}(e_1, \dots, e_i)$$

$$\rightarrow \text{si } B = (e_n, \dots, e_1)$$

$$\text{mat}_B(u) \text{ est triang inf.}$$

$$\rightarrow T_{n,s} \text{ est stable par produit et addition.}$$

• Propriétés :

- * u est triagonalisable ssi sa matrice
dans une base qsq est triagonalisable.

$A \in M_n(K)$ est trigonalisable ssi l'endo uniaériquement associée à A l'est.

Théorème : ds pss :

- u est trigonalisable
- X_u est scindé ds $K[X]$
- u annule un polynôme scindé ds $K[X]$.

• Corollaire :

- * Dans $\mathbb{C}$, tout endo est trigonalisable.
- * Dans $\mathbb{C}$, toute matrice est trigonalisable.

Sous-espace caractéristique :

• Définition :

Si X_u est scindé : $X_u = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)^{m_i}$

$\forall i \in [1, r]$: $F_i = \ker(u - \lambda_i \text{id})^{m_i}$ est app. le $i^{\text{ème}}$ sous-espace caractéristique de u .

• Propriété :

- * $\forall i \in [1, r]$: F_i est stable par u .
- * $E = \bigoplus_{i=1}^r F_i$
- * $\varphi(u/F_i) = \{\lambda_i\}$
- * $\dim(F_i) = m_i$

• Théorème de décomposition de Dunford :

Si X_u est scindé ds $K[X]$, alors $\exists d$ diagonalisable et n nilpotent tq : $u = n + d$ avec $dn = nd$ et la décomposition est unique.

Application de la réduction :

1/ Les suites à récurrence simultanée :

Déterminer $(u_n), (v_n), (w_n)$ de $\mathbb{R}$ tq :

$$u_0 = 1, v_0 = -1, w_0 = 2$$

$$\text{et } \begin{cases} u_{n+1} = 2u_n - v_n + w_n \\ v_{n+1} = -u_n + 2v_n - w_n \\ w_{n+1} = u_n - v_n + 2w_n \end{cases}$$

$$\text{Soit } X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$$

$$\text{On a : } X_{n+1} = AX_n \quad \text{où } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$\text{Alors } X_n = A^n X_0$$

$$\text{Or } A \text{ diag : } \exists P : P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^n = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^n & 0 \\ 0 & 0 & \mu^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$\Rightarrow X_n = \left(P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^n & 0 \\ 0 & 0 & \mu^n \end{pmatrix} P^{-1} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2/ Suites à récurrence linéaire :

Soit $(u_n) \in K^N$ tq :

$$(u_0, u_1, \dots, u_p) = (\alpha_0, \dots, \alpha_p)$$

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+p+1} = a_0 u_{n+p} + a_1 u_{n+p-1} + \dots + a_p u_n$$

$$E = \{u_n \in K^N / \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+p+1} = \sum_{k=0}^p a_k u_{n+p-k}\}$$

est l'ker de dim $p+1$.

$$E \rightarrow K^{p+1}$$

$$(u_n) \mapsto (u_0, \dots, u_p)$$

$$\text{Soit : } X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ \vdots \\ u_{n+p} \end{pmatrix}$$

$$\text{Alors } X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ \vdots \\ u_{n+p+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ a_p & \dots & a_1 & a_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ \vdots \\ u_{n+p} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X_{n+1} = C X_n$$

$$\Rightarrow X_n = C^n X_0$$

3/ Résolution de système différentiel :

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11} x_1(t) + \dots + a_{1n} x_n(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) = a_{n1} x_1(t) + \dots + a_{nn} x_n(t) \end{cases}$$

où $\forall i \in [1, n]$: $x_i : I \rightarrow K$ dérivable et $(a_{ij}) \in M_n(K)$

A diagonalisable $\Rightarrow \exists P \in GL_n(K) : P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

$$(S) \Leftrightarrow X'(t) = AX(t) \quad \text{où } X : I \rightarrow M_{n,1}(K)$$

$$t \mapsto \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

$$\text{Soit : } X(t) = PY(t)$$

$$\text{où } Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$$

$$(S) \Leftrightarrow PY'(t) = APY(t)$$

$$\Leftrightarrow Y'(t) = DY(t) \quad \text{où } D = P^{-1}AP$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_1'(t) = \lambda_1 y_1(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) = \lambda_n y_n(t) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \forall i \in [1, n] : y_i(t) = c_i e^{\lambda_i t}$$

Partique de trigonalisation :

$\mu \in \lambda(E)$ où $\dim(E) = 2$ ou 3
tp μ trigonalisable mais non diagonalisable.

1/ $\dim(E) = 2$:

On aura : $\chi_\mu = (X - \lambda)^2$

$\dim E_\lambda(\mu) = 1$ (μ non diag)

$\Rightarrow E_\lambda(\mu) = \text{vect}(e_1)$

Soit $e_2 \in E$ tq $B = (e_1, e_2)$ base de E .

$$\text{mat}_B \mu = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} ; \alpha \neq 0$$

Soit $B' = (\alpha e_1, e_2)$ base de E

$$\text{mat}_{B'} \mu = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

2/ $\dim(E) = 3$:

1^{er} cas : $\chi_\mu = (X - \lambda_1)^2 (X - \lambda_2)$; $\lambda_1 \neq \lambda_2$

Soit $v = \mu - \lambda_1 \text{id}$

$$\chi_v = X^2 (X - \lambda) \text{ où } \lambda = \lambda_2 - \lambda_1$$

$\dim E_0(v) = \dim \ker v = 1$ (μ non diag)

$\dim E_\lambda(v) = 1$.

Ainsi $E_\lambda(v) = \text{vect}(e_1)$ et $E_0(v) = \text{vect}(e_2)$

Soit $e_3 \in E$: $B = (e_1, e_2, e_3)$ base de E .

$$\text{mat}_B v = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \beta \neq 0 \text{ car } \text{rg } v = 2$$

Soit $e_3' = x e_1 + y e_2 + z e_3$

$$v(e_3') = e_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda x + \alpha z = 0 \\ \beta z = 1 \end{cases}$$

$$\text{Alors } x = -\frac{\alpha}{\lambda \beta} \text{ et } z = \frac{1}{\beta}$$

$$\text{Donc } e_3' = -\frac{\alpha}{\lambda \beta} e_1 + \frac{1}{\beta} e_3.$$

Soit $B' = (e_1, e_2, e_3')$ base de E

$$\text{mat}_{B'} v = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{mat}_B(\mu) = \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

2^{eme} cas : $\chi_\mu = (X - \lambda)^3$

Soit $v = \mu - \lambda \text{id}$

$\chi_v = X^3$ donc v nilpotent.

• Si $v^2 \neq 0$:

Alors $\exists x \in E \setminus \{0\} : v^2(x) \neq 0$

$B = (v^2(x), v(x), x)$ base de E .

$$\text{mat}_B v = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{mat}_B \mu = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

• Si $v^2 = 0$:

Donc $\dim v \cap \ker v$:

$$\text{rg } v + \dim \ker v = \dim(E) = 3$$

$$\Rightarrow \text{rg}(v) \leq \frac{3}{2}$$

$$\text{ou } 1 \leq \text{rg } v$$

$$\text{Alors } \text{rg}(v) = 1.$$

$$\text{Donc } \dim \ker v = 2$$

Soit (e_1, e_2) base de $\ker v$

et soit $e_3 \in E$ tq $B = (e_1, e_2, e_3)$ base de

$$\text{on a : } \text{mat}_B v = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Alors } \text{mat}_B \mu = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \alpha \\ 0 & \lambda & \beta \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

1) Norme: $\mathbb{K}$ sous corps de $\mathbb{C}$ et E un $\mathbb{K}$ -ev.

1) Une norme:

• Def: Une norme sur E est une app

$$N: E \rightarrow \mathbb{R}^+ \text{ tq.}$$

$$- \forall x \in E: N(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad (\text{séparation})$$

$$- \forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}: N(\lambda x) = |\lambda| N(x) \quad (\text{homogénéité})$$

$$- \forall (x, y) \in E^2: N(x+y) \leq N(x) + N(y) \quad (\text{inégalité triangulaire}).$$

Rmq: $N(x)$ est noté $\|x\|$.

• Def:

Un $\mathbb{K}$ -ev muni d'une norme N est dit un espace vectoriel normé (EVN) noté (E, N) .

• Remarque:

Si N une norme sur E , alors:

$$* N(0) = 0$$

$$* \forall x \in E, N(x) \geq 0.$$

• Propriétés: Inégalité triangulaire renversée.

Si N une norme sur E alors:

$$\forall (x, y) \in E^2: |N(x) - N(y)| \leq N(x-y) \leq N(x) + N(y)$$

2) Distance associée à une norme:

• Définition:

Si $(E, \|\cdot\|)$ un EVN. On appelle distance associée à $\|\cdot\|$ sur E toute app d tq.

$$d: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto \|x - y\|$$

• Propriétés:

$$- \forall (x, y) \in E^2: d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y \quad (\text{séparation})$$

$$- \forall (x, y) \in E^2: d(x, y) = d(y, x) \quad (\text{symétrie}).$$

$$- \forall (x, y, z) \in E^3: d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

3) Norme d'algèbre:

• Définition:

Si $(E, +, \cdot, \times)$ une $\mathbb{K}$ -algèbre.

Une norme $\|\cdot\|$ est dit une norme d'algèbre

$$\text{si } \forall (a, b) \in E^2: N(a \cdot b) \leq N(a) \cdot N(b).$$

2) Rappel: $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$

$M = \sup(A) \Leftrightarrow M$ est le plus petit des majorants

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A: x \leq M \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A: M - \varepsilon < x \leq M \end{cases}$$

$$- A \subset B \Rightarrow \sup(A) \leq \sup(B)$$

$$- \sup(\emptyset) = -\infty.$$

4) Sous espace vectoriel normé:

* Si (E, N) un EVN et F un sev de E .

$$N|_F: F \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$x \mapsto N(x)$$

est une norme sur F dite norme induite sur F par N .

* (F, N) est un EVN.

* Tout sev d'un EVN est un EVN.

5) Espace vectoriel normé produit cartésien:

Si $(E_1, N_1) \dots (E_p, N_p)$ des EVN.

$$\forall (x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \dots \times E_p:$$

$$\text{On pose } N_\infty(x_1, \dots, x_p) = \max_{1 \leq i \leq p} N_i(x_i)$$

$\Rightarrow N_\infty$ est une norme sur $E_1 \times \dots \times E_p$

dite norme infinie produit.

$(E_1 \times \dots \times E_p, N_\infty)$ est dit un EVN produit.

6) Norme euclidienne:

• Définition:

Si E un espace préhilbertien, le produit scalaire de $(x, y) \in E^2$ est noté $\langle x | y \rangle$.

• Inégalité de Cauchy-Schwarz:

$$\forall (x, y) \in E^2: |\langle x | y \rangle| \leq \langle x | x \rangle^{\frac{1}{2}} \langle y | y \rangle^{\frac{1}{2}} \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

Il y a égalité si (x, y) liés.

• Inégalité de Minkowski:

$$\forall (x, y) \in E^2: \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Il y a égalité si les vecteurs x et y sont positivement liés.

Norme euclidienne:

Si E un espace préhilbertien.

d'application: $E \rightarrow \mathbb{R}^+$
 $x \mapsto \langle x|x \rangle^{\frac{1}{2}} = \|x\|$ est

une norme sur E dite norme euclidienne.

7) Normes usuelles de $\mathbb{K}^n$:

Norme 1:

$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$: on note $\|(x_1, \dots, x_n)\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$

Norme 2:

$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$: $\|(x_1, \dots, x_n)\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$

Norme infinie:

$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$: $\|(x_1, \dots, x_n)\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$

Rmq:

$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_1 \leq n \|x\|_\infty$

8) Normes de $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{K})$:

$E = \mathcal{C}([a,b], \mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$ -ev.

Norme 1:

$\forall f \in E$: $\|f\|_1 = \int_{[a,b]} |f|$

Norme 2:

$\forall f \in E$: $\|f\|_2 = \left(\int_{[a,b]} |f|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$

Norme infinie:

$\forall f \in E$: $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$

Rmq:

$\forall f \in E$: $\|f\|_1 \leq \sqrt{b-a} \|f\|_2 \leq (b-a) \|f\|_\infty$

9) Distance d'un vecteur à une partie:

E un $\mathbb{K}$ -ev et $A \subset E$ tq $A \neq \emptyset$.

Définition:

Soit $x \in E$.

La distance de x à A est:

$d(x, A) = \inf \{ d(x, y) / y \in A \}$

$d(x, A) = \inf \{ \|x - y\| / y \in A \}$

Rmq:

$\{ d(x, y) / y \in A \}$ est une partie de $\mathbb{R}_+$ non vide et minorée par 0 donc admet une borne inf

Propriétés:

Si $A \subset B$, $A \neq \emptyset$, alors:

$\forall x \in E$: $d(x, A) \geq d(x, B)$

Propriétés:

Si $A \subset E$, $A \neq \emptyset$, alors:

$\forall (x, y) \in E^2$: $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$

10) Norme dans $M_n(\mathbb{K}) \sim \mathbb{K}^{n^2}$:

Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$.

Norme 1:

$\forall A \in M_n(\mathbb{K})$: $N_1(A) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$

Norme 2:

$\forall A \in M_n(\mathbb{K})$: $N_2(A) = \left(\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$

Norme infinie:

$\forall A \in M_n(\mathbb{K})$: $N_\infty(A) = \max_{1 \leq i,j \leq n} |a_{ij}|$

n) Partie bornée et application bornée:

Si $A \subset E$.

Définition:

A est bornée ds E si:

$A \neq \emptyset$ ou $\exists M > 0$, $\forall x \in A$: $\|x\| < M$.

Propriétés:

* Si A est bornée et $B \subset A$, alors B est bornée.

* d'intersection qdq de parties bornées est bornée.

* la réunion finie de parties bornées est une partie bornée.

* Toute partie finie est bornée (réunion de singletons).

Définition:

Si $A \subset E$ et F un $\mathbb{K}$ -ev.

$f: A \rightarrow F$ est dite bornée ssi $f(A)$ est bornée dans F .

sii $\forall x \in A$: $\|f(x)\|_F \leq M$.

1.2) Boule et sphère :

$(E, \|\cdot\|)$ est un EVN, $a \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}^+$

• Définition :

- Boule ouverte de centre a et de rayon λ :

$$B(a, r) = \{x \in E / d(a, x) < r\}.$$

$$B(a, r) = \{x \in E / \|a - x\| < r\}.$$

- Boule fermée de centre a et de rayon r :

$$B_f(a, r) = \{x \in E / d(a, x) \leq r\}$$

$$B_f(a, r) = \{x \in E / \|a - x\| \leq r\}.$$

- Sphère de centre a et de rayon r :

$$S(a, r) = \{x \in E / d(a, x) = r\} \\ = \{x \in E / \|a - x\| = r\}.$$

Rmq :

- Si $\lambda = 0$, $B(a, 0) = \emptyset$, $B_f(a, 0) = \{a\}$

- $B(0, 1)$: boule unité (ouverte).

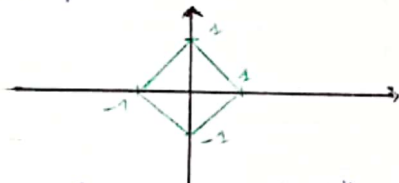
- $B_f(0, 1)$: boule unité (fermée).

• Tracé des boules unités pour les 3 normes usuelles de $\mathbb{R}^2$.

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

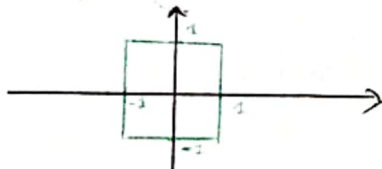
$$B_f(0, 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y)\|_1 \leq 1\}$$

$$B_f(0, 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$$



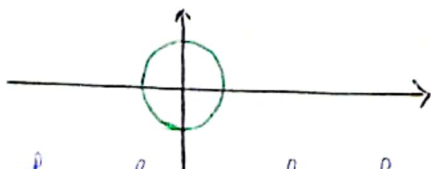
$$B_f(0, 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y)\|_\infty \leq 1\}.$$

$$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max(|x|, |y|) \leq 1\}.$$



$$B_f(0, 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y)\|_2 \leq 1\}$$

$$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1\}.$$



dsq'on change la norme, la surface reste la m[^]e, mais la topologie change.

(3)

• Propriété :

Toute boule est un ensemble convexe.

• Rmq :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^+ : B(a, r) = a + B(0, r)$$

$$= \{a + x / x \in B(0, r)\}.$$

• Rappel sur un ensemble convexe :

si $A \subseteq E$: $(E, \|\cdot\|)$ est un evn.

* Def :

$$\forall (x, y) \in E^2.$$

On appelle segment d'extrémités x et y :

$$[x, y] = \{(1-t)x + ty / t \in [0, 1]\}.$$

* Def :

A est dit convexe si $A = \emptyset$

$$\text{ou } \forall (x, y) \in A^2 : [x, y] \subset A.$$

$$\text{ssi : } A = \emptyset \text{ ou } \forall (x, y) \in A^2 : \forall t \in [0, 1] :$$

$$(1-t)x + ty \in A.$$

* Rmq :

• Un ensemble est convexe ds $\mathbb{R}$ si c'est un intervalle.

• Une fonction convexe doit être déf de A vers $\mathbb{R}$ où A est un convexe.

II - Suites dans un EVN :

1) suites.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un EVN.

• Def : On appelle suite d'elmts de E toute fctn : $u : \mathbb{N} \rightarrow E$, notée $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

leur ensemble est $E^{\mathbb{N}}$.

• Propriété :

$E^{\mathbb{N}}$ est un lker (scr de $\mathcal{F}(\mathbb{N}, E)$)

• Définition :

Une suite $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ est dite bornée si :

$$\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \|u_n\| \leq M.$$

2) suite convergentes :

$(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ et $l \in E$

• Définition :

(u_n) est convergente : $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} l$ si $(\|u_n - l\|) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$

• Propriétés :

$u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} l \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow \|u_n - l\| < \epsilon$

$\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow u_n \in B(l, \epsilon)$

Théorème :

Si $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} l$ alors l est unique.

• Propriété :

Toute suite convergente est bornée.

• Propriété :

Si $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}, (v_n) \in E^{\mathbb{N}}, (\alpha_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, \alpha \in \mathbb{K}, l_1, l_2 \in E$

* $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} l \Rightarrow \|u_n\| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} l$

* $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \Rightarrow \|u_n\| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$

* $\begin{cases} u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} l_1 \\ \alpha_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \alpha \end{cases} \Rightarrow \alpha u_n + v_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \alpha l_1 + l_2$

* Si $\alpha_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ et (u_n) bornée alors $(\alpha_n u_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

* Si (α_n) bornée et $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty$ alors $(\alpha_n u_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$

* Si $\alpha_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \alpha$ et $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} l_1$ alors $(\alpha_n u_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \alpha l_1$

• Propriété :

d'ensemble des suites convergentes, d'éléments de E est un $\mathbb{K}$ er, noté $\Lambda(E)$ et l'app :

$\Lambda(E) \rightarrow E$ est linéaire
 $u_n \mapsto l - u_n$

• Propriété :

d'ensemble des suites bornées est un $\mathbb{K}$ er, noté $B(\mathbb{N}, E)$.

$\forall (u_n) \in B(\mathbb{N}, E) : \|u_n\|_{\infty} = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|u_n\|_E$

et une norme sur $B(\mathbb{N}, E)$.

• Théorème (passage de E à $\mathbb{K}$) :

Si E un $\mathbb{K}$ er n° de dim finie, $p \in \mathbb{N}^+$.

$B = (e_1, \dots, e_p)$ base de E .

$(u_n) \in E^{\mathbb{N}} : \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sum_{i=1}^p u_{n,i} e_i$

avec $\forall i \in \{1, \dots, p\} : (u_{n,i}) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$

et $l = \sum_{i=1}^p l_i e_i \in \mathbb{K}^p$

Micro : $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} l \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, p\} : u_{n,i} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} l_i$
(ds $\mathbb{K}$)

• Propriété :

$(E_1, N_1), \dots, (E_p, N_p)$ ds $\mathbb{K}$ er.

$(u_n) \in (E_1 \times \dots \times E_p)^{\mathbb{N}}$.

$\forall n \in \mathbb{N} : u_n = (u_{n,1}, \dots, u_{n,p})$

avec $(u_{n,i})_n \in E_i^{\mathbb{N}}$.

et $l = (l_1, \dots, l_p) \in E_1 \times \dots \times E_p$.

Alors :

$u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} l$ ds $E_1 \times \dots \times E_p$ si $\forall i \in \{1, \dots, p\} : u_{n,i} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} l_i$ ds E_i

• Corollaire :

Si $(u_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

(u_n) converge ds $\mathbb{C} \Leftrightarrow (\operatorname{Re}(u_n))_n$ et $(\operatorname{Im}(u_n))_n$ conv ds $\mathbb{R}$.

et dans ce cas :

$\lim u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re}(u_n) + i \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Im}(u_n)$

3) Suite extraite : $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$

• Définition :

On app suite extraite de (u_n) ou sous suite

de (u_n) , toute suite $(v_n = u_{\varphi(n)})$ où :

$\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ suite croissante.

• Rmq :

$\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ st $\uparrow$ alors $\forall n \in \mathbb{N} : \varphi(n) \geq n$.

• Théorème :

Si $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} l$ alors toute sous suite de (u_n) converge vers la m même limite.

• Propriété :

Si $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ et $l \in E$ tq (u_{2n}) et (u_{n+1})

convergent vers la m même limite l .

Alors $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} l$.

4) Valeur d'adhérence :

• Définition :

Si $a \in E$, a est dite valeur d'adhérence de la suite $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ si a est limite d'une suite extraite de (u_n) .

car : $\exists \varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strict $\uparrow$

et $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a$.

Théorème :

Si $x_n \rightarrow l$ alors l est son unique valeur d'adhérence.

l'écritique est fautive.

Th: Bolzano Weierstrass dans $\mathbb{K}$:

Toute suite bornée d'éléments de $\mathbb{K}$ admet une valeur d'adhérence de $\mathbb{K}$.

5) Comparaison des normes :

Soient N_1 et N_2 deux normes de E .

Définition :

N_1 et N_2 sont dites équivalentes si :

$$\exists (\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 : \forall x \in E : \alpha N_1(x) \leq N_2(x) \leq \beta N_1(x)$$

on note $N_1 \sim N_2$.

$\Rightarrow$ Il s'agit d'une relation d'équivalence sur l'ensemble des normes sur E .

Propriété :

* $N_1 \sim N_2$ si les app $\frac{N_1}{N_2}$ et $\frac{N_2}{N_1}$ sont bornées sur $E \setminus \{0\}$.

* N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes si :

$$\exists (x_n) \in (E \setminus \{0\})^\mathbb{N} : \frac{N_1(x_n)}{N_2(x_n)} \rightarrow 0 \text{ ou } \frac{N_2(x_n)}{N_1(x_n)} \rightarrow \infty$$

Théorème :

$N_1 \sim N_2$ si toute suite (x_n) de E qui converge vers 0 pour l'une des normes converge vers 0 pour l'autre. (ou vers $l \in E$).

Rmq :

si $(x_n) \in E^\mathbb{N} : x_n \rightarrow l$ pour cette norme, elle converge vers l pour toute autre norme équivalente.

Théorème :

si E est un EVN de dim $< \infty$, alors toutes les normes de E sont équivalentes.

1) Distance associée à une norme :

Si E un ensemble non vide et :

$d: E \times E \rightarrow \mathbb{R}^+$ qui vérifie les propriétés de la distance associée à une norme, alors (E, d) est dit un espace métrique.

Rmq:

Tout EVN est un espace métrique.

la réciproque est fautive, car un espace métrique peut ne pas être un espace vectoriel.

2) Suite de Cauchy: $(x_n) \in E^n$.

Définition:

(x_n) est dite de Cauchy ds E si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall (n, m) \in \mathbb{N}^2:$$

$$\text{et } \begin{cases} n \geq N \\ m \geq N \end{cases} \Rightarrow \|x_n - x_m\| < \varepsilon.$$

Proposition:

(x_n) est de Cauchy dans E si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall (n, p) \in \mathbb{N}^2: n \geq N: \|x_{n+p} - x_n\| < \varepsilon$$

Propriété:

$$(x_n) \text{ est de Cauchy si } \sup_{p \in \mathbb{N}} \|x_{n+p} - x_n\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Propriété:

$$(x_n) \text{ est convergente ds } E \Rightarrow (x_n) \text{ de Cauchy ds } E.$$

Propriété:

Toute suite de Cauchy est bornée.

Propriété:

Toute suite de Cauchy qui admet une valeur d'adhérence converge vers cette valeur d'adhérence.

Propriété:

Dans $\mathbb{K}$, (u_n) converge si (u_n) de Cauchy.

1) Voisinage :

• Définition :

$(E, \|\cdot\|)$ un EVN et $a \in E$.

Une partie V de E est dite un voisinage de a si E si $\exists r > 0, B(a, r) \subset V$.

leur ensemble est noté $\mathcal{V}_E(a)$.

• Propriétés :

- * Tout voisinage de a contient a .
- * Si V est un voisinage de a et $V \subset A$ alors $A \in \mathcal{V}_E(a)$.
- * $\{a\}$ n'est pas un voisinage de a .
- * la réunion quelconque de voisinages de a est un voisinage de a .
- * d'intersection finie de voisinages de a est un voisinage de a .

• Propriété :

$\forall r > 0, B(a, r)$ est un voisinage de chacun de ses points.

• Caractérisation de lim d'une suite par les voisinages :

Soit $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ et $l \in E$.

$$x_n \rightarrow l \Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{V}(l), \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow x_n \in V$$

2) Ouvert dans un EVN :

• Définition :

Une partie $\emptyset$ de E est un ouvert de E si $\emptyset = \emptyset$ ou $\emptyset$ est un voisinage de chacun de ses points.

• Propriété :

$\emptyset \subset E$, $\emptyset$ ouvert de E si :

$\emptyset = \emptyset$ ou $\forall a \in \emptyset, \exists r > 0 : B(a, r) \subset \emptyset$.

• Propriétés :

- * la réunion quelconque d'ouverts de E est un ouvert de E .
- * d'intersection finie d'ouverts de E est un ouvert de E .
- * $\emptyset$ et E sont des ouverts.
- * Toute boule ouverte est un ouvert.

3) Fermé dans un EVN :

• Définition :

Une partie F de E est un fermé de E si C_E^F est un ouvert de E .

• Propriétés :

- * la réunion finie de fermés de E est un fermé de E .
- * d'intersection quelconque de fermés de E est un fermé de E .
- * $\emptyset$ et E sont des fermés.
- * Toute boule fermée de E est un fermé.
- * Tout singleton $\{a\}$ est un fermé de E .
- * Toute partie finie de E est un fermé de E .

4) Intérieur, adhérence, frontière :

• Intérieur :

Soit $A \subset E$, on appelle intérieur de A le plus grand ouvert de E , contenu ds A , noté $\overset{\circ}{A}$.

C'est la réunion de tous les ouverts inclus dans A : $\overset{\circ}{A} = \bigcup_{\substack{\text{Ouverts} \\ \emptyset \subset A}} \emptyset$

$\Rightarrow \overset{\circ}{A}$ est un ouvert.

• Adhérence :

$A \subset E$, on appelle adhérence de A le plus petit fermé de E contenant A , noté $\bar{A}$.

C'est l'intersection de tous les fermés contenant A :

$$\bar{A} = \bigcap_{\substack{F \text{ fermé} \\ A \subset F}} F$$

$\Rightarrow \bar{A}$ est un fermé

• Frontière :

la frontière de A est noté $F_r(A)$:

$$F_r(A) = \bar{A} \setminus \overset{\circ}{A} = \bar{A} \cap C_E^{\overset{\circ}{A}}$$

$\Rightarrow F_r(A)$ est un fermé de E .

• Théorème :

$$\overset{\circ}{A} \subset A \subset \bar{A}$$

$$C_E^{\overset{\circ}{A}} = \overline{C_E^A}$$

$$C_E^{\bar{A}} = \overset{\circ}{C_E^A}$$

A est un ouvert de E si $\overset{\circ}{A} = A$

A est un fermé de E si $\bar{A} = A$

• Définition :

- * Un élément $x \in A^\circ$ est dit intérieur à A .
- * Un élément $x \in \bar{A}$ est dit adhérent à A .

• Théorème :

- $A \subseteq E$ et $A \neq \emptyset$.
- * $a \in A^\circ \Leftrightarrow A$ est un voisinage de a .
- $\Leftrightarrow \exists \lambda > 0, B(a, r) \subset A$

- * $a \in \bar{A} \Leftrightarrow \forall \lambda > 0, B(a, r) \cap A \neq \emptyset$

• Caractérisation séquentielle de l'adhérence :

$x \in \bar{A}$ ssi $\exists (x_n) \in A^{\mathbb{N}} : x_n \rightarrow x$.

• Corollaire :

Si $A \subseteq E$ et $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ tq : $x_n \rightarrow l$.
alors $l \in \bar{A}$.

• Caractérisation séquentielle des fermés :

$A \subseteq E, A \neq \emptyset$

A est un fermé de $E \Leftrightarrow$ toute suite convergente d'éléments de A , sa limite appartient à A .

• Propriétés :

$$* A \subset B \Rightarrow \bar{A} \subset \bar{B}$$

$$* A \subset B \Rightarrow \bar{A} \subset \bar{B}$$

$$* \bar{A} \subset \overline{\text{vect}(A)}$$

* si F un ser de E :

$$F \neq E \Rightarrow \bar{F} \neq \emptyset$$

$$* \overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

$$\bar{A \cap B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\bar{A \cup B} \subset \overline{A \cap B}$$

$$* x \in \bar{A} \Leftrightarrow d(x, A) = 0.$$

5) Partie dense :

• Définition :

A est dite dense de E ssi $\bar{A} = E$.

• Def (HP) :

$A, B \subseteq E$ non vides :

A est dense de B ssi $B \subset \bar{A}$.

• Caractérisation :

* A est dense dans E ssi $\forall x \in E, \exists (x_n) \in A^{\mathbb{N}} : x_n \rightarrow x$.

* A est dense de E ssi $\forall x \in E, \forall \lambda > 0 : B(x, r) \cap A \neq \emptyset$

Topologie induite : $A \subseteq E, A \neq \emptyset$

1) Voisinage de A : (Voisinage relatif)

$V \subseteq E$ est dit voisinage de a de A ssi $\exists U$ un voisinage de a de E tq : $V = U \cap A$.

leur ensemble est noté : $\mathcal{V}_A(a)$.

2) Ouvert de A :

• Définition :

$O \subset A$ est un ouvert de A ssi : $\exists O_1$ ouvert de E tq $O = O_1 \cap A$.

• Remarque :

Si A est un ouvert de E alors tout ouvert de A est un ouvert de E .

• Propriété :

O ouvert de $A \Leftrightarrow O$ voisinage de A de chacun de ses points.

3) Fermé de A :

• Définition : $F \subset A$.

F est un fermé de A ssi $\exists F_1$ fermé de E tq $F = F_1 \cap A$.

• Remarque :

Un fermé de A peut ne pas être un fermé de E .

4) Diamètre d'une partie.

• Définition :

On appelle diamètre de A , noté :

$$\text{diam}(A) = \begin{cases} +\infty & \text{si } A \text{ non bornée} \\ \sup\{d(x, y) / (x, y) \in A^2\} \end{cases}$$

• Exemple :

$$\text{diam}[a, b] = \text{diam}[a, b]$$

$$= \text{diam}[a, b[$$

$$= \text{diam}]a, b]$$

1) Limite :

• Définition :

E et F deux evn, $A \neq \emptyset$ et $A \subseteq E$.

$$f: A \rightarrow F$$

Si $a \in \bar{A}$, on dit que f admet une limite qd $x \rightarrow a$ ssi :

$$\exists (E, F, \forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0 : \forall x \in A : \|x - a\| < \alpha \Rightarrow \|f(x) - l\| < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow \exists (E, F, \forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0 : x \in B(a, \alpha) \cap A \Rightarrow f(x) \in B(l, \epsilon)$$

si f admet une limite, alors elle est unique.

• Caractérisation séquentielle : $a \in \bar{A}$.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \Leftrightarrow \forall (x_n) \in A^{\mathbb{N}} \text{ tq } x_n \rightarrow a \text{ alors } f(x_n) \rightarrow l$$

• Théorème : $a \in \bar{A}$

f admet une limite en a ssi :

$$\forall (a_n) \in A^{\mathbb{N}} : a_n \rightarrow a, f(a_n) \text{ converge vers } l$$

• Corollaire :

$$a \in \bar{A} \text{ et } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$$

$$\text{Alors } l \in \overline{f(A)}$$

• Propriétés :

$$a \in \bar{A}, l \in F, l' \in F.$$

$$f, g : A \rightarrow F$$

$$* \text{ si } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \\ \lim_{x \rightarrow a} g(x) = l' \end{cases}$$

$$\text{Alors : } \forall \alpha \in \mathbb{K}, \lim_{x \rightarrow a} (\alpha f(x) + g(x)) = \alpha l + l'$$

$$* \text{ si } \varphi : A \rightarrow \mathbb{K} \text{ tq } \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \lambda \in \mathbb{K}$$

$$\text{et si } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow a} (\varphi(x) \cdot f(x)) = \lambda l.$$

↑ scalaire.

• Théorème :

$f: A \subseteq E \rightarrow F$ et $g: B \subseteq F \rightarrow G$ tq $f(A) \subset B$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \in F \\ \lim_{y \rightarrow l} g(y) = l' \in G \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} g \circ f(x) = l'$$

• Caractérisation de lim par les voisinages :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \Leftrightarrow \forall v \in \mathcal{V}_F(l), \exists u \in \mathcal{V}_E(a) : f(u) \subset v$$

$$\Rightarrow \forall v \in \mathcal{V}_F(l), \exists u \in \mathcal{V}_A(a) : f(u) \subset v.$$

2) Continuité :

• Définition :

$A \subseteq E, a \in A$ et $f: A \rightarrow F$

f est continue en $a \in A$ si f admet une

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

f continue sur $A \Leftrightarrow f$ continue en tt pt de A .

leur ensemble est noté $\mathcal{C}(A, F)$ un Ker .

$$\mathcal{C}(A, F) = \{ f: A \rightarrow F, f \text{ continue sur } A \}.$$

• Propriété :

f continue en a :

$$\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0 : \forall x \in A : \|x - a\| < \alpha \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, f(B(a, \alpha) \cap A) \subset B(f(a), \epsilon).$$

$$\Leftrightarrow \forall v \in \mathcal{V}_F(f(a)), \exists u \in \mathcal{V}_A(a) : f(u) \subset v$$

$$\Leftrightarrow \forall v \in \mathcal{V}_F(f(a)), \exists u \in \mathcal{V}_A(a) : f(u) \subset v.$$

• Caractérisation séquentielle de la continuité :

f continue en A ssi $\forall (a_n) \in A^{\mathbb{N}} : a_n \rightarrow a \Rightarrow f(a_n) \rightarrow f(a)$

$$(\text{càd } \lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = f(\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n))$$

• Propriété :

$\mathcal{C}(A, \mathbb{K})$ est une $\mathbb{K}$ -algèbre commutative.

• Propriété :

Si f est continue en a et $f(a) \neq 0$ alors il existe un voisinage de a ds A sur lequel f ne s'annule pas.

• Propriété :

* Toute f est polynomiale de plusieurs variables

$$f: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$$

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i_1, \dots, i_n} a_{i_1, \dots, i_n} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}$$

* Toute fraction rationnelle est continue

$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{P(x_1, \dots, x_n)}{Q(x_1, \dots, x_n)} \text{ sur son } D_f.$$

• Théorème :

$$\text{Si } f: A \subseteq E \rightarrow F_1 \times \dots \times F_p \text{ où } f_i: A \rightarrow F_i$$

$$x \mapsto (f_1(x), \dots, f_p(x))$$

f est continue en a si :

$$\forall i \in [1, p] : f_i \text{ est continue en } a.$$

Remq: la notion de continuité est invariante en changeant une norme en une norme équivalente.

Théorème:

Si $\dim F = p < \infty$ et $B = (e_1, \dots, e_p)$ base de F .

$$f: A \subset E \rightarrow F$$

$$x \mapsto f(x) = \sum f_i(x) e_i \quad \text{où } f_i: A \rightarrow \mathbb{K}$$

f est continue en $a \in A$ si $\forall i \in \{1, \dots, p\}$: f_i est continue en a .

Théorème:

$f: E \rightarrow F$ et $g: E \rightarrow F$
 $A \subset E$ alors:

$$\begin{cases} A \text{ est dense dans } E \\ f \text{ et } g \text{ sont continues sur } E \\ f|_A = g|_A \end{cases} \Rightarrow f = g \text{ sur } E$$

Théorème:

$f: A \subset E \rightarrow F$, la p.sse:

- * f continue sur A
- * l'image réciproque de tout ouvert de F est un ouvert de A .
- * l'image réciproque de tout fermé de F est un fermé de A .

Propriété:

- Si f et g continues de $A \subset E \rightarrow \mathbb{R}$
- d'ensemble: $\Theta = \{x \in A : f(x) < g(x)\}$ est un ouvert de A .
- d'ensemble: $\bar{\Theta} = \{x \in A : f(x) \leq g(x)\}$ est un fermé de A .
- la composée de 2 fct² cont est continue.
- Si $\varphi: A \rightarrow \mathbb{K}$, continue en A et ne s'annule pas sur A . Alors $\frac{1}{\varphi}$ est continue sur A .
- Si $f: A \rightarrow F$ et $\varphi: A \rightarrow \mathbb{K}$ continue sur A et φ ne s'annule pas sur A , alors $\frac{f}{\varphi}$ est continue sur A .

5) Continuité uniforme:

Définition:

f est continue uniformément sur A :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall (x, y) \in A^2: \|x - y\| < \alpha$$

$$\Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon.$$

la continuité uniforme est la continuité uniforme.

f uniformément cont sur A si:

$$\forall (x_n) \in A^{\mathbb{N}}, \forall (y_n) \in A^{\mathbb{N}}, \|x_n - y_n\| \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \|f(x_n) - f(y_n)\| \rightarrow 0.$$

Propriété:

f unif^t cont sur $A \Rightarrow f$ cont sur A .

la réciproque est fautive.

4) fonction lipschitzienne:

$$f: A \subset E \rightarrow F$$

Définition: soit $k \in \mathbb{R}_+$.

* f est dite k -lipschitzienne si:

$$\forall (x, y) \in A^2: \|f(x) - f(y)\|_F \leq k \|x - y\|_E.$$

* f est dite lipschitzienne si $\exists k \in \mathbb{R}_+ \text{ tq } f \text{ est } k\text{-lipschitzienne.}$

Exemples:

* Toute norme sur E est 1-lipschitzienne.

* $A \subset E, A \neq \emptyset$

$$f: E \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto d(x, A) \quad \text{est } 1\text{-lipschitzienne}$$

* Si $(E_i, N_i) \dots (E_p, N_p)$ des evn.

$$p_i: E_1 \times \dots \times E_p \rightarrow (E_i, N_i) \quad \text{est } 1\text{-lipschitzien}$$

$$x = (x_1, \dots, x_p) \mapsto x_i$$

$$(N_i(p_i(x)) - N_i(p_i(y))) = N_i(x_i - y_i) \leq N_i(x - y).$$

Propriété:

Si f est k -lipschitzienne et g k' -lipschitzienne de $A \rightarrow F$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, alors:

$$1) \quad \alpha f: A \rightarrow F \quad \text{est } |\alpha| \cdot k\text{-lip.}$$

$$x \mapsto \alpha f(x)$$

$$2) \quad f + g: A \rightarrow F \quad \text{est } (k + k')\text{-lip}$$

$$x \mapsto f(x) + g(x)$$

$$3) \quad \text{Si } f: A \subset E \rightarrow F \text{ et } g: B \subset F \rightarrow G$$

$$\text{by } f(A) \subset B.$$

Alors $g \circ f$ est kk' -lipschitzienne.

Définition:

f est dite contractante si f est k -lipschitzienne avec $k \in]0, 1[$.

• **Propriété:**
 Si I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ tq
 f est continue sur I et dérivable sur I
 Alors f est lipschitzienne sur I et f'
 est bornée sur I .

• **Théorème:**
 Toute fct³ lipschitzienne sur A est unif^t
 continue sur A . l'éciproque est fausse.

5) **Continuité des app linéaires:**
 soient E, F deux esn, $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

• **Théorème:**

les pssent:

- * f est continue sur E .
- * f est continue en 0_E .
- * f est bornée sur $B_f(0, 1)$.
- * f est bornée sur la sphère $S(0, 1)$.
- * $\exists k \geq 0, \forall x \in E: \|f(x)\| \leq k \|x\|$
- * f est lipschitzienne.

• **Notation:**

$\mathcal{L}_c(E, F)$: l'ensemble des app linéaires de
 $E \rightarrow F$ continues.

• **Propriété:**

$\mathcal{L}_c(E, F)$ est un $\mathbb{K}$ ev et l'app:

$$\mathcal{L}_c(E, F) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$u \mapsto \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|u(x)\|$$

est une norme sur $\mathcal{L}_c(E, F)$.

la norme de u est notée $\|u\|$.

• **Rmq:**

- * la continuité des app lin est invariante
 en changeant les normes en des normes
 équivalentes.

- * $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est cont si l'app: $x \mapsto \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}$
 est bornée sur $E \setminus \{0\}$.

- * Une app lin n'est pas continue si
 $\exists (x_n) \in (E \setminus \{0\})^\omega: \frac{\|u(x_n)\|}{\|x_n\|} \rightarrow +\infty$

• **Théorème:**

si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\dim E < \infty$

Alors u est continue.

(Donc tous vérifient si u linéaire et $\dim E < \infty$)

6) **Normes subordonnées:**

si N une norme sur E et N' sur F .

et $u \in \mathcal{L}(E, F)$

• **Propriété:**

$\mathcal{L}_c(E, F) \rightarrow \mathbb{R}$

$$u \mapsto \sup_{\|x\|_E \leq 1} N'(u(x))$$

est une norme sur $\mathcal{L}_c(E, F)$, dite
 norme subordonnée (ou associée) aux
 normes N et N' sur E et F resp, noté
 $\|u\|$ associé à N et N' .

• **Propriété:**

si $u \in \mathcal{L}_c(E, F)$, alors:

$$\|u\| = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|u(x)\|_F$$

$$= \sup_{x \neq 0} \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E}$$

$$= \sup_{\|x\|_E = 1} \|u(x)\|_F$$

$$= \inf \{k \in \mathbb{R}_+ / \forall x \in E: \|u(x)\|_F \leq k \|x\|_E\}$$

Rmq:

- si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\exists k \geq 0: \forall x \in E, \|u(x)\|_F \leq k \|x\|_E$

Alors u est continue et $\|u\| \leq k$.

- $\forall x \in E, \|u(x)\|_F \leq \|u\| \cdot \|x\|_E$
- Pour calculer $\|u\|$, on cherche un $k \geq 0$
 $\forall x \in E: \|u(x)\|_F \leq k \|x\|_E$ et pour mg
 $\|u\| = k$, il suffit de trouver $x_0 \in E \setminus \{0\}$
 $\|u(x_0)\|_F = k \|x_0\|_E$

$$(\text{car } k = \frac{\|u(x_0)\|_F}{\|x_0\|_E} \leq \|u\|)$$

ou on cherche une suite $(x_n) \in (E \setminus \{0\})^\omega$:

$$\frac{\|u(x_n)\|_F}{\|x_n\|_E} \rightarrow k$$

$$(\text{car on aura: } \frac{\|u(x_n)\|_F}{\|x_n\|_E} \leq \|u\|)$$

$$\text{et } n \rightarrow +\infty: k \leq \|u\|$$

Rmq: $\|id\| = 1$

②

Propriétés:

- * Soit $u \in \mathcal{L}_c(E, F)$ alors:
- * $\forall x \in E, \|u(x)\| \leq \|u\| \cdot \|x\|$
- * Si $v \in \mathcal{L}_c(E, F)$ et $u \in \mathcal{L}_c(E, G)$

$$\text{Alors } \|u \circ v\| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

Alors $\|\cdot\|$ est une norme d'algèbre sur $\mathcal{L}_c(E)$

- * $u \in \mathcal{L}_c(E), \forall k \in \mathbb{N}, \|u^k\| \leq \|u\|^k$

4) Continuité des app^{linéaires}:

Si $(E_1, N_1), \dots, (E_p, N_p)$ des evn. Et (F, N) un evn.

$$f: E_1 \times \dots \times E_p \rightarrow F \quad \text{app } p\text{-linéaire}$$

$$(x_1, \dots, x_p) \mapsto f(x_1, \dots, x_p)$$

Rmq:

Si $\exists i \in \{1, p\} : x_i = 0$

$$\text{Alors } f(x_1, \dots, x_p) = 0$$

$$\text{Car } E \rightarrow F \quad \text{linéaire}$$

$$f \mapsto (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_p)$$

Théorème:

Si f p -linéaire, les psses:

- * f cont sur $E_1 \times \dots \times E_p$.
- * f bornée sur $\overline{B}_{N_1}(0,1) \times \dots \times \overline{B}_{N_p}(0,1)$
- * f continue en $(e_1, \dots, e_p)$
- * $\exists k \geq 0, \forall (x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \dots \times E_p:$

$$\|f(x_1, \dots, x_p)\| \leq k N_1(x_1) \dots N_p(x_p).$$

Théorème:

Si $E_1 \times \dots \times E_p$ sont de $\dim < \infty$.

Alors toute app p -linéaire de $E_1 \times \dots \times E_p$ vers F est continue.

8) Compacité:

$(E, \|\cdot\|)$ un evn et $A \subset E$.

Définition:

A est dit compact si $A = \phi$ ou toute suite d'éléments de A admet une valeur d'adhérence de A , i.e:

$$\forall (a_n) \in A^\mathbb{N}, \exists \varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \text{ str } \varphi: a_{\varphi(n)} \rightarrow a \in A.$$

Théorème:

Si A compact alors A fermé borné ($\Leftrightarrow$).

Théorème:

Tout fermé d'un compact est un compact.

Propriété:

Si A et B deux compacts de E et F (resp) alors $A \times B$ est un compact de $E \times F$.
de produit cartésien d'un nbre fini de compact est un compact.

Théorème:

Si A un compact de E et $f: A \rightarrow F$

Alors f continue sur $A \Rightarrow f$ ungt cont sur A

Théorème:

d'image d'un compact par une app continue est un compact.

i.e si $f: A \subset E \rightarrow F$ continue et A compact de E alors $f(A)$ compact de F .

Théorème:

Si $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ continue et A compact

Alors f est bornée et atteint ses bornes.

i.e $\exists (a,b) \in A^{\mathbb{R}}, f(a) = \inf \{f(x) / x \in A\}$.

et $f(b) = \sup \{f(x) / x \in A\}$.

Corollaire:

Si $f: A \rightarrow F$ continue et A compact.

Alors f est bornée et $\exists (a,b) \in A^E$,

$$\|f(a)\| = \inf \{\|f(x)\| / x \in A\}.$$

$$\|f(b)\| = \sup \{\|f(x)\| / x \in A\}.$$

Théorème:

Toute suite d'un compact qui admet une unique valeur d'adhérence converge vers celle va, i.e si A compact et $(x_n) \in A^\mathbb{N}$

alors (x_n) converge $\Leftrightarrow (x_n)$ admet une unique va.

Théorème de Bolzano Weierstrass (ds $\mathbb{K}^d$):

Dans $\mathbb{K}^d$ (ds $\mathbb{N}^*$), toute suite bornée admet une valeur d'adhérence.

Théorème de Weierstrass:

Dans un evn de $\dim < \infty$, toute suite bornée admet une valeur d'adhérence.

Théorème:

Dans un evn de $\dim < \infty$:

A compact $\Leftrightarrow A$ fermé bornée.

g) Bilan: EVN de $\dim$ finie.

Théorème:

Toutes les normes sont équivalentes.

Propriétés:

- * A compact ssi A fermé borné.
- * Si $u \in \mathcal{L}(F, F)$ et $\dim F < \infty$: u est continue.
- * Si $f: E_1 \times \dots \times E_p \rightarrow F$ avec $\forall i \in [1, p]$ $\dim E_i < \infty$ alors f continue.
- * Tout sev de $\dim < \infty$ d'un evn est fermé.
- * Si $f: A \subset E \rightarrow F$ avec $\dim F = m < \infty$
 $B' = (e'_1, \dots, e'_m)$ base de F .

$$\forall x \in E: f(x) = \sum_{i=1}^m f_i(x) e'_i \text{ où } f_i: A \rightarrow \mathbb{K}$$

$\rightarrow$ et $a \in A$. $f(x)$ admet une lim qd $x \rightarrow a$

ssi $\forall i \in [1, m]$: $f_i(x)$ admet une lim qd $x \rightarrow a$

$$\text{avec } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \sum_{i=1}^m \lim_{x \rightarrow a} f_i(x) e'_i$$

$\rightarrow f$ continue en $a \in A$, ssi $\forall i \in [1, m]$: f_i continue en a .

10) Partie convexe:

Segment:

On appelle segment de E d'extrémités x et y :

$$[x, y] = \{(1-t)x + ty \mid t \in [0, 1]\}.$$

Homéomorphisme:

Un homéomorphisme est une bijection bicontinue; f et f^{-1} continues.

Rmq:

Dans $\mathbb{R}$, tout segment $[a, b]$ est homéomorphe.

11) Partie étoilée:

Définition:

Soit $A \subset E$, $A \neq \emptyset$ et $x_0 \in A$.

* A est dite étoilée par rapport à x_0 ssi $\forall x \in A$, $[x_0, x] \subset A$. 

* A est dite étoilée ssi $\exists x_0 \in A$ tq A est étoilée par rapport à x_0 .

(5)

12) Partie connexe par arcs:

Définition:

A est dite cpa ssi $A = \emptyset$ ou $\forall (x, y) \in A^2$
 $\exists f: [0, 1] \rightarrow A$ continue tq $f(0) = x$ et $f(1) = y$.
 i.e. $\forall (x, y) \in A^2$: x et y sont reliés par un chemin continu ds A .

Prop:

Toute partie convexe est cpa.

Théorème:

Toute partie étoilée est cpa.

Propriétés:

$A_1, \dots, A_p$ ds parties cpa de E , tq $\exists i \in [1, p]$
 $\forall i \in [1, p]$: $A_i \cap A_0 \neq \emptyset$.
 Alors $\bigcup_{i=1}^p A_i$ est cpa.

Propriété:

Si $A_1, \dots, A_p$ sont cpa alors $A_1 \times \dots \times A_p$ cpa.

13) Composantes connexes par arcs:

Définition:

On appelle composante cpa de $x \in E$ le plus grand (C) cpa de A contenant x .

Remarque:

sur $A \neq \emptyset$, on définit:

$x R y \Leftrightarrow x$ et y sont reliés par un chemin continu ds A .

$$\Leftrightarrow \exists \gamma: [0, 1] \rightarrow A \text{ continue et } \gamma(0) = x \text{ et } \gamma(1) = y.$$

R est une relation d'équivalence sur A .

Proposition:

$$C_x = \text{cl}(x) [R] = \bar{x} [R].$$

* $\bar{x}$ est cpa.

* $x \in \bar{x}$

* si C un cpa $C \subset A$: $x \in C$

$$\text{Alors } C \subset \bar{x}.$$

$$\text{D'où } C_x = \bar{x}.$$

Propriétés:

* $x \in C_x$

* si $x \neq y$ alors $\begin{cases} C_x \cap C_y = \emptyset \\ C_x \neq C_y \end{cases}$

$$\bigcup C_x = A.$$

Théorème :
Les cpa de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

Théorème :
L'image d'un cpa par une app continue est un cpa.

11) Propriété des valeurs intermédiaires:

Définition :

Si $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$

On dit que f possède la prop des valeurs intermédiaires ssi $f(A)$ est cpa de $\mathbb{R}$.

($f(A)$ est un intervalle).

Théorème :

Si $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ continue et A cpa.

Alors f possède la prop des valeurs intermédiaires.

Théorème :

Si $D \neq \emptyset$

Si D est cpa de $\mathbb{R}$ et $f : D \rightarrow \{a, b\}$,

continue, alors f est constante.

Théorème :

Si D est cpa, alors les seules parties à la fois ouvertes et fermées de D sont

D ou $\emptyset$.

Def $(x_n) \in E^N$ est dite de Cauchy si $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall (n, m) \in \mathbb{N}^2$:

$$\left\{ \begin{array}{l} n \geq N \\ m \geq N \end{array} \right\} \Rightarrow \|x_n - x_m\| < \varepsilon.$$

ou: $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall (n, p) \in \mathbb{N}^2$:

$$n \geq N \Rightarrow \|x_{n+p} - x_n\| < \varepsilon.$$

$$\text{ou: } \sup_{p \in \mathbb{N}} \|x_{n+p} - x_n\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Toute suite de Cauchy est bornée.

Soit $(x_n) \in E^N$ une suite de Cauchy.

Alors: $\exists n_0, \forall (m, p) \in \mathbb{N}^2: (m \geq n_0 \text{ et } n \geq n_0) \Rightarrow \|x_m - x_n\| \leq 1$

On pose: $M = \max \{ \|x_0\|, \dots, \|x_{n_0-1}\|, 1 + \|x_{n_0}\| \}$

Soit $k \in \mathbb{N}$:

* si $k \in [0, n_0 - 1]$: $\|x_k\| < M$

* si $k \geq n_0$: $\|x_k\| \leq \|x_k - x_{n_0}\| + \|x_{n_0}\| \leq 1 + \|x_{n_0}\| \leq M$.

Ainsi: $\forall k \in \mathbb{N}, \|x_k\| \leq M$

Donc (x_n) est bornée.

Toute suite convergente est de Cauchy.

Soit $(x_n) \in E^N$ une suite convergente vers l .

Alors $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \|x_n - l\| < \varepsilon$.

$$\begin{aligned} \text{Soit } n \geq N: \|x_n - x_q\| &= \|x_n - l + l - x_q\| \\ &\leq \|x_n - l\| + \|x_q - l\| \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Donc (x_n) est bien de Cauchy.

Une suite de Cauchy a plus une valeur d'adhérence et si elle en a une, elle converge vers cette valeur d'adhérence:

Soit $(x_n) \in E^N$ une suite de Cauchy de E .

Donc $\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall (n, m) \in \mathbb{N}^2: \left\{ \begin{array}{l} n \geq N_1 \\ m \geq N_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \|x_n - x_m\| < \frac{\varepsilon}{2}$

Si (x_n) admet une valeur d'adhérence $a \in E$,

$\exists \varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement $\uparrow$:

$\exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_2: \|x_{\varphi(n)} - a\| < \frac{\varepsilon}{2}$

Soit $N = \max(N_1, N_2)$

$$\begin{aligned} \forall n \geq N: \|x_n - a\| &= \|x_n - x_{\varphi(n)} + x_{\varphi(n)} - a\| \\ &\leq \|x_n - x_{\varphi(n)}\| + \|x_{\varphi(n)} - a\| \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

Donc $x_n \rightarrow a$.

(Suites de Cauchy)

Dans $\mathbb{R}$, (x_n) converge ssi (x_n) de Cauchy.

$\Rightarrow$ Tjs vrai

$\Leftarrow$ Si $(x_n) \in \mathbb{R}^N$ une suite de Cauchy, montrons que (x_n) converge.

1^{ère} méthode.

On a: (x_n) de Cauchy donc bornée.

et (x_n) à valeurs dans $\mathbb{R}$.

D'après Th. de Bolzano Weierstrass: (x_n) admet une sous-suite convergente, donc admet une valeur d'adhérence, donc converge vers cette valeur d'adhérence.

2^{ème} méthode.

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé et: $U_n = \{x_k; k \geq n\}$.

(x_n) est de Cauchy donc bornée.

et U_n non vide, donc majorée et minorée.

Alors U_n admet une borne sup et une borne inf.

Soit $v_n = \sup U_n$ et $w_n = \inf U_n$.

Montrons que (v_n) et (w_n) sont adjacentes.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a: $U_{n+1} \subset U_n$ (par construction)

Soit $k \geq n+1$: $x_k \leq \sup \{x_k; k \geq n\} = v_n$

$$\Rightarrow v_{n+1} \leq v_n$$

et soit $k \geq n+1$: $x_k \geq \inf \{x_k; k \geq n\} = w_n$

$$\Rightarrow w_{n+1} \geq w_n$$

Alors $(v_n) \downarrow$ et $(w_n) \uparrow$.

or par construction: $w_n \leq x_n \leq v_n$

Soit $\varepsilon > 0$: (x_n) est de Cauchy, alors:

$\exists N \in \mathbb{N}, \forall (m, p) \in \mathbb{N}^2, \left\{ \begin{array}{l} m \geq N \\ p \geq N \end{array} \right\} : |x_m - x_p| < \varepsilon$

Soit $k \geq m$ don $|x_k - x_p| < \varepsilon$

$$\Rightarrow x_k \leq x_p + \varepsilon$$

$$\Rightarrow v_m \leq x_p + \varepsilon \quad (\text{par passage au sup})$$

D'autre part: $x_p \geq v_m - \varepsilon$

$$\Rightarrow w_n \geq v_m - \varepsilon \quad (\text{par passage à l'inf})$$

Donc $\forall \varepsilon > 0: \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N: 0 \leq v_m - w_m \leq \varepsilon$

Alors $(v_n - w_n) \rightarrow 0$.

Donc (v_n) et (w_n) sont adjacentes et

converge vers la même limite l

D'où (x_n) converge aussi vers l .

E est de dimension finie si la sphère unité $S(0,1)$ est un compact.

$\Rightarrow$ On a E de dimension finie et $S(0,1)$ fermé bornée alors $S(0,1)$ compact

$\Leftarrow$ Soit $S(0,1)$ compact :

• Soit F un sev de E tq $\dim F < \infty$:

Ilq $\exists x \in F$ tq $d(x, F) = d(x, F)$.

On a F sev de dim finie alors F est fermé.

On pose $m = d(x, F) = \inf_{a \in F} \|x - a\|$

Donc $\exists (a_n) \in F^n : \|x - a_n\| \rightarrow m$ (C.S de la borne inf)

et $\forall n \in \mathbb{N} : \|a_n\| = \|a_n - x + x\| \leq \|a_n - x\| + \|x\|$

et $\|x - a_n\|$ converge donc bornée.

D'où $\exists n > 0 : \|a_n\| \leq n + \|x\|$

D'où (a_n) bornée.

et $\dim E < \infty \Rightarrow$ TBK : $\exists \varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ st $\uparrow$:

$a_{\varphi(n)} \rightarrow a \in F$

et F est fermé $\Rightarrow a \in F$.

et $\|x - a_{\varphi(n)}\| \rightarrow \|x - a\|$

et $(\|x - a_{\varphi(n)}\|)$ s.suite de $(\|x - a_n\|)$

D'où $\|x - a_{\varphi(n)}\| \rightarrow m$.

Alors $m = \|x - a\| = d(x, F)$.

D'où $\exists a \in F : d(x, F) = d(x, a)$.

• On suppose que $F \neq E$, soit $a \in E \setminus F$ et $x \in F$ et $d(a, F) = \|a - x\|$. Posons $b = \frac{x - a}{\|x - a\|}$.

Ilq $d(b, F) = 1$ et $\|b\| = 1$

On a $\|b\| = 1$.

On a : $d(b, F) = \inf_{y \in F} \|b - y\|$.

Psq $0 \in F$ alors $\|b - 0\| \geq d(b, F)$

$\Rightarrow d(b, F) \leq 1$.

D'autre part : soit $y \in F$.

$$\begin{aligned} \|y - b\| &= \left\| y - \frac{x - a}{\|x - a\|} \right\| = \frac{\|y\| \|x - a\| - \|x - a\|}{\|x - a\|} \\ &= \frac{\|a - x\|}{\|x - a\|} \end{aligned}$$

où $z = x - y\|a - x\| \in F$.

Donc $\|a - z\| \geq d(0, F) = \|a - x\|$

D'où $\|y - b\| \geq 1$.

$\Rightarrow d(b, F) \geq 1$.

Ainsi $d(b, F) = 1$.

• On suppose que E est de dim finie.

Construire une suite $(b_n) \in E^n$ tq : $\|b_n\| = 1$

et $d(b_n, \text{vect}(b_0, \dots, b_{n-1})) = 1$.

Psq E est de dim finie alors $E \neq F$.

Soit $\exists x \in E \setminus F$.

On pose $b_0 = \frac{x}{\|x\|}$ et $d(b_0, \text{vect}(\emptyset)) = d(b_0, \{0\}) = 1$.

Supposons construits $(b_0, \dots, b_n)$ tq : $\forall i \in \{0, \dots, n\}$ $\|b_i\| = 1$ et $d(b_i, F_n) = 1$ où $F_n = \text{vect}(b_0, \dots, b_n)$.

On a : $E \neq F_n$.

Donc $\exists a \in E \setminus F_n$ et $x \in F_n$ tq : $\|a - x\| = d(a, F_n)$

Soit $b_{n+1} = \frac{x - a}{\|x - a\|}$.

Alors $d(b_{n+1}, F_n) = 1$ et $\|b_{n+1}\| = 1$.

Réurrence établie.

• Démontrer que $S(0,1)$ n'est pas compact :

Supposons par l'absurde que $S(0,1)$ est un compact.

On a : $(b_n) \in S(0,1)^{\mathbb{N}}$ donc $\exists \varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ st $\uparrow$ tq : $b_{\varphi(n)} \rightarrow l \in S(0,1)$.

et $b_{\varphi(n)} \in \text{vect}(b_0, \dots, b_{\varphi(n)-1})$

Alors $d(b_{\varphi(n+1)}, b_{\varphi(n)}) \geq d(b_{\varphi(n+1)}, \text{vect}(b_0, \dots, b_{\varphi(n)-1}))$

en tendant $n \rightarrow +\infty$.

$0 \geq 1$ Absurde.

Alors $S(0,1)$ n'est pas compact.

• Conclusion :

On a mq : si E de dim infinie alors $S(0,1)$

n'est pas compact. Par contraposée, $S(0,1)$

est compact $\Rightarrow E$ est de dim $< \infty$.

Th. de Riesz démontré.

Borel-Lesbesgue

K est compact si [c'est tout recouvrement
de K : $K \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{U}_i$ par des ouverts $\mathcal{U}_i \subset E$,
on peut extraire un ^{sous} recouvrement fini, c'est
à dire qu'il existe $i_1, \dots, i_n$: $K \subset \mathcal{U}_{i_1} \cup \dots \cup \mathcal{U}_{i_n}$].
[] : Propriété de Borel-Lesbesgue.

• $\forall \varepsilon > 0, \exists p > 0$ et $x_1, \dots, x_p$ éléments de E tq
 $K \subset \bigcup_{i=1}^p B(x_i, \varepsilon)$: (K1)

Supposons par l'absurde : $\exists \varepsilon > 0, \forall p > 0$ et
 $\forall (x_1, \dots, x_p) \in K, K \not\subset \bigcup_{i=1}^p B(x_i, \varepsilon)$.

Soit $x_1 \in K$ alors $x_1 \notin B(x_1, \varepsilon)$. Posons $y_0 = x_1$.

Donc $\exists y_2 \in K, y_2 \notin B(y_0, \varepsilon)$ i.e. $\|y_2 - y_0\| > \varepsilon$.

Supposons construits $y_0, \dots, y_n$ tq :

$$i \neq j \Rightarrow \|y_i - y_j\| > \varepsilon$$

Donc p.sq on a $K \not\subset \bigcup_{i=1}^n B(y_i, \varepsilon)$ alors

$$\exists y_{n+1} \in K \text{ tq } y_{n+1} \notin \bigcup_{i=1}^n B(y_i, \varepsilon)$$

$$\text{Donc } \forall i \in \{0, \dots, n\} : \|y_{n+1} - y_i\| > \varepsilon$$

P.sq $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$ et K compact, alors

$$\exists \varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \text{ strictement } \nearrow \text{ tq } y_{\varphi(n)} \rightarrow p \in K$$

$$\text{Alors } \|y_{\varphi(n+1)} - y_{\varphi(n)}\| \rightarrow 0.$$

$$\text{or } \|y_{\varphi(n+1)} - y_{\varphi(n)}\| > \varepsilon \text{ Absurde.}$$

Donc le résultat.

1) Dérivabilité:

Fonction
d'une variable réelle

I un intervalle de $\mathbb{R}$, $I \neq \emptyset$. E un evn.

$$f: I \rightarrow E, \quad a \in I$$

• Définition:

* f dérivable en a si $t \mapsto \frac{f(t) - f(a)}{t - a}$ admet une limite qd $t \xrightarrow{t \neq a} a$, appelée dérivée de f en a , noté $f'(a)$.

* f est dérivable à droite en a si $t \mapsto \frac{f(t) - f(a)}{t - a}$ admet une limite à droite, appelé la dérivée de f à droite en a , noté $f'_d(a)$.

$$f'_d(a) = \lim_{\substack{t \rightarrow a \\ t > a}} \frac{f(t) - f(a)}{t - a}$$

$$f'_g(a) = \lim_{\substack{t \rightarrow a \\ t < a}} \frac{f(t) - f(a)}{t - a}$$

* f est dérivable en a si f dérivable à droite et à gauche en a et $f'_g(a) = f'_d(a)$.

• Remarque:

Si $a \in \bar{A}$, $A \subset E$.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \Leftrightarrow f(x) - l = o(1) \\ \Leftrightarrow f(x) = l + o(1).$$

• Propriété:

f dérivable en a :

$$f(t) = f(a) + (t - a)f'(a) + o(t - a) \quad (DL_a^1(f))$$

• Corollaire:

f dérivable en $a \Leftrightarrow f$ continue en a .

• Définition:

f est dite dérivable sur I si f dérivable en tout pt de I . leur ensemble est noté $D(I, E)$.

• Définition:

f est de classe C^1 sur $I \rightarrow E$ si f dérivable sur I et l'app. $f': I \rightarrow E$ continue sur I .

leur ensemble est noté $C^1(I, E)$.

• Propriété:

$C^1(I, E)$ est un Ker .

• Propriété:

- $D(I, E)$ est un Ker

- $D: (I, E) \rightarrow \mathcal{F}(I, E)$ est linéaire.

- $f \mapsto f'$

• Théorème:

Si $\dim E = p$ et $B = (e_1, \dots, e_p)$ base de E

$$f: I \rightarrow E, \quad t \mapsto f(t) = \sum_{k=1}^p f_k(t) e_k \quad \text{ou } f_k: I \rightarrow \mathbb{K}$$

Alors f est dérivable en a si:

$\forall k \in \{1, \dots, p\}: f_k$ est dérivable en a et dans

$$\text{ce cas: } f'(a) = \sum_{k=1}^p f'_k(a) e_k.$$

• Corollaire:

Si $f: I \rightarrow \mathbb{C}$.

f dérivable en a si $\text{Re}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont dérivables en a et dans ce cas:

$$f'(a) = (\text{Re}(f))'(a) + i(\text{Im}(f))'(a).$$

• Corollaire:

$f \in D(I, E) \Leftrightarrow \forall k \in \{1, \dots, p\}: f_k \in D(I, \mathbb{K})$.

$f \in C^1(I, E) \Leftrightarrow \forall k \in \{1, \dots, p\}: f_k \in C^1(I, \mathbb{K})$.

• Propriété:

Si $\varphi: I \rightarrow \mathbb{K}$

et $f: I \rightarrow E$

et $\varphi \cdot f: I \rightarrow E$
 $t \mapsto \varphi(t) f(t)$.

φ et f dérivables en $a \Rightarrow \varphi \cdot f$ dérivable en a .

• Effet d'une app linéaire:

Si $\dim E < \infty$

et $f: I \rightarrow E$ et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

alors $u \circ f: I \rightarrow F$
 $t \mapsto u(f(t))$.

• Théorème:

f est dérivable en $a \Rightarrow u \circ f$ dérivable en a .

$$\text{Et ds ce cas: } (u \circ f)'(a) = u(f'(a)).$$

• Corollaire:

Si E un evn de $\dim < \infty$ et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

$f \in C^1(I, E) \Rightarrow (u \circ f) \in C^1(I, F)$

$$(\text{car } (u \circ f)' = u \circ f')$$

3) Effet d'une app multilinéaire:

Si E, F esm de $\dim < \infty$ et G un esm.

$$B: E \times F \rightarrow G \quad \text{bilinéaire.}$$

$$(x, y) \mapsto B(x, y)$$

$$f: I \rightarrow E, \quad g: I \rightarrow F \quad \text{l'app.}$$

$$t \mapsto f(t) \quad t \mapsto g(t)$$

on note: $B(f, g): I \rightarrow G$

$$t \mapsto B(f(t), g(t))$$

• Théorème:

Si f et g dérivables en $a \in I$. Alors

$$B(f(t), g(t)) \text{ dérivable en } a, \text{ et ds a cas.}$$

$$B(f, g)'(a) = B(f'(a), g(a)) + B(f(a), g'(a)).$$

• Corollaire:

Si $f \in \mathcal{D}(I, E)$ et $g \in \mathcal{D}(I, F)$, $\dim E, F < \infty$.

$$B: E \times F \rightarrow G$$

Alors $B(f, g) \in \mathcal{D}(I, G)$

$$\text{et } B(f, g)' = B(f', g) + B(f, g').$$

• Corollaire:

Si $f \in C^1(I, E)$ et $g \in C^1(I, F)$

$$\text{et } B: E \times F \rightarrow G \text{ bilinéaire.}$$

$$\text{et } \dim E, F < \infty.$$

Alors $B(f, g) \in C^1(I, G)$.

• Propriété:

Si $\varphi \in \mathcal{D}(I, \mathbb{K})$ et $f \in \mathcal{D}(I, E)$, $\dim E < \infty$.

Alors $(\varphi f) \in \mathcal{D}(I, E)$

$$\text{et } \forall t \in I: (\varphi f)'(t) = \varphi'(t) f(t) + \varphi(t) f'(t)$$

• Corollaire:

$\mathcal{D}(I, \mathbb{K})$ (resp $C^1(I, \mathbb{K})$) est une $\mathbb{K}$ -algèbre.

• Propriété:

Si E un espace euclidien et $(f, g) \in \mathcal{D}^2(I, E)$

Alors $\langle f, g \rangle: I \rightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{D}^2(I, \mathbb{R})$

$$t \mapsto \langle f(t), g(t) \rangle$$

$$\text{et } \langle f, g \rangle'(t) = \langle f'(t), g(t) \rangle + \langle f(t), g'(t) \rangle.$$

• Corollaire:

Si $E_1, \dots, E_p$ des esm de $\dim < \infty$.

$$H: E_1 \times \dots \times E_p \rightarrow F \text{ (esm)} \quad p\text{-linéaire.}$$

Et $\forall i \in \{1, \dots, p\}: f_i: I \rightarrow E_i$ dérivable en $a \in I$.

on note: $B(f_1, \dots, f_p): I \rightarrow F$

$$t \mapsto H(f_1(t), \dots, f_p(t))$$

Alors $B(f_1, \dots, f_p)$ est dérivable en a , et:

$$B(f_1, \dots, f_p)'(a) = B(f_1'(a), \dots, f_p(a)) + \dots + B(f_1(a), \dots, f_p'(a))$$

4) Composées de fct² dérivables:

Soit I et J 2 intervalles de $\mathbb{R}$, E un esm de $\dim < \infty$

$$\varphi: I \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad f: J \rightarrow E$$

$$\varphi(I) \subset J \quad f \circ \varphi: I \rightarrow E$$

• Théorème:

Si φ dérivable sur I et f dérivable sur J .

Alors $f \circ \varphi$ est dérivable sur I .

$$\text{et } \forall t \in I, (f \circ \varphi)'(t) = \varphi'(t) \cdot f'(\varphi(t)).$$

• Propriété:

Si $\varphi: I \rightarrow \mathbb{K}$ dérivable en a et ne s'annule pas au voisinage de a .

Alors $\frac{1}{\varphi}$ est dérivable en a .

$$\text{et } \left(\frac{1}{\varphi}\right)'(a) = -\frac{\varphi'(a)}{\varphi(a)^2}.$$

• Corollaire:

$\varphi: I \rightarrow \mathbb{K}$ et $f: I \rightarrow E$ dérivable en a et φ ne s'annule pas au voisinage de a .

Alors $\frac{f}{\varphi}: I \rightarrow E$ est dérivable en a .

$$t \mapsto \frac{f(t)}{\varphi(t)}$$

$$\text{et } \left(\frac{f}{\varphi}\right)'(a) = \frac{\varphi(a) f'(a) - \varphi'(a) f(a)}{(\varphi(a))^2}.$$

• Propriété:

$C^1(I, E)$ est un $\mathbb{K}$ ev.

* Si $f \in C^2(I, E)$ et $\varphi \in C^1(I, \mathbb{K})$ alors $(\varphi f) \in C^2(I, E)$.

* Si $f \in C^1(I, E)$ et $\varphi \in C^1(I, \mathbb{K})$ tq φ ne s'annule pas sur I .

$$\text{Alors } \frac{f}{\varphi} \in C^2(I, E).$$

• Théorème:

La composée de fct² de classe C^1 est de C^1 .

$$\text{Si } \varphi: I \rightarrow \mathbb{R} \quad C^1 \text{ sur } I$$

$$f: J \rightarrow E \quad C^1 \text{ sur } J$$

$$\text{Alors } (f \circ \varphi) \in C^1(I, E).$$

5) Dérivée d'ordre supérieure :

$$f: I \rightarrow E$$

d'ensemble des fct^s k-fois dérivables sur I
et noté $D^k(I, E)$.

• Définition :

f est dite de classe C^k sur I si $f \in D^k(I, E)$
et $f^{(k)}$ continue sur I.

• Propriété :

$f: I \rightarrow E$ et $\dim E = p < \infty$.

$B = (e_1, \dots, e_p)$ base de E.

$$f: I \rightarrow E \quad t \mapsto f(t) = \sum_{k=1}^p f_k(t) e_k \quad \text{où } f_k: I \rightarrow \mathbb{K}.$$

si $p \in \mathbb{N}^*$, $f \in D^p(I, E) \Leftrightarrow \forall k \in [1, p]: f_k \in D^p(I, \mathbb{K})$.

et $f \in C^p(I, E) \Leftrightarrow \forall k \in [1, p]: f_k \in C^p(I, \mathbb{K})$

$$\text{et } \forall t \in I: f^{(p)}(t) = \sum_{k=1}^p f_k^{(p)}(t) e_k.$$

• Corollaire :

si $f: I \rightarrow \mathbb{C}$

$f \in D^p(I, \mathbb{C}) \Leftrightarrow \operatorname{Re}(f) \text{ et } \operatorname{Im}(f) \in D^p(I, \mathbb{R})$.

$f \in C^p(I, \mathbb{C}) \Leftrightarrow \operatorname{Re}(f) \text{ et } \operatorname{Im}(f) \in C^p(I, \mathbb{R})$

• Propriété :

$D^p(I, E)$ un $\mathbb{K}$ -ev
 $C^p(I, E)$ un $\mathbb{K}$ -ev.

si $f \in C^p(I, E)$ alors $\forall k \in [1, p]: f \in C^k(I, E)$.

$f \in C^0(I, E) \Leftrightarrow f$ continue sur I.
et on pose $f^{(0)} = f$.

• Théorème de Leibniz :

si $B: E \times F \rightarrow G$ bilinéaire ($\dim E, F < \infty$)

$f \in D^n(I, E)$ et $g \in D^n(I, F)$

Alors $B(f, g): I \rightarrow G \in D^n(I, G)$
 $t \mapsto B(f(t), g(t))$

$$\text{et } \forall t \in I: B(f, g)^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B(f^{(k)}(t), g^{(n-k)}(t))$$

• Corollaire :

si $f \in C^n(I, E), g \in C^n(I, F)$

$B: E \times F \rightarrow G$ tq $\dim E, F < \infty$

Alors $B(f, g) \in C^n(I, G)$.

(3)

• Corollaire :

* $f \in D^n(I, E)$ et $\varphi \in D^n(I, \mathbb{K})$, $\dim E < \infty$.

Alors $(\varphi \cdot f) \in D^n(I, E)$

$$\text{et } (\varphi f)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \varphi^{(k)} f^{(n-k)}$$

* $f \in C^n(I, E)$ et $\varphi \in C^n(I, \mathbb{K})$, $\dim E < \infty$.

Alors $(\varphi f) \in C^n(I, E)$.

• Propriété :

$(D^n(I, \mathbb{K}), +, \cdot, \times)$ est une $\mathbb{K}$ -algèbre.

$(C^n(I, \mathbb{K}), +, \cdot, \times)$ est une $\mathbb{K}$ -algèbre.

• Théorème :

si $\varphi \in C^n(I, \mathbb{R})$ tq $\varphi(I) \subset J$ et $f \in C^n(J, E)$.

Alors $(f \circ \varphi) \in C^n(I, E)$.

6) C^k -difféomorphisme :

si I et J 2 intervalles de $\mathbb{R}$, $p \in \mathbb{N}^*$.

• Définition :

f est dite un C^p -difféomorphisme de I vers J si :

- f bijective de I vers J

- f de classe C^p sur (I, J).

- $f^{-1} \in C^p(J, I)$

• Caractérisation (*)

f est C^p -difféom si :

- f est de classe C^p sur I.

- $f(I) = J$.

- $\forall t \in I: f'(t) \neq 0$.

Intégral d'une fct^s vectorielle elle sur un sgmt :

7) Fonction en escalier :

• Définition :

soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tq $a < b$.

$f: [a, b] \rightarrow E$, E un evn de dim $p < \infty$.

$B = (e_1, \dots, e_p)$ base de E.

f est dite en escalier sur $[a, b]$ si $\exists G = (a_0, \dots, a_n)$

subdivision de $[a, b]$ tq $\forall i \in [0, n-1]:$

$f|_{[a_i, a_{i+1}[} = c_i \in E$

leur ensemble est noté $\mathcal{E}([a, b], E)$.

• Remq :

* $\mathcal{E}([a, b], E)$ est un $\mathbb{K}$ -ev.

* Toute fct^s en escalier est bornée.

5) fonction continue par morceaux sur $[a, b]$.

Definition:

f est continue par morceaux sur $[a, b]$ si $\exists \mathcal{G} = (a_i)_{i=0, \dots, n}$ de $[a, b]$ tq: $\forall i \in [0, n-1]$:

$f|_{[a_i, a_{i+1}]}$ est continue sur $]a_i, a_{i+1}[$ et prolongeable par continuité sur $[a_i, a_{i+1}]$.

Leur ensemble est noté $CM([a, b], E)$.

Rmq:

* $CM([a, b], E)$ est un K -ev.

* si $f \in CM([a, b], E)$ alors f est bornée sur $[a, b]$.

* si $f \in CM([a, b], E)$ alors f admet un nombre fini de pts de discontinuité de $[a, b]$.

9) Intégrale d'une fct^{sc} CM :

Si $f: [a, b] \rightarrow E$ CM sur $[a, b]$.
 $\forall t \in I; f(t) = \sum_{k=1}^p f_k(t) e_k$.

Propriété:

$I(f) = \sum_{k=1}^p \left(\int_{[a, b]} f_k \right) e_k$ est indépendante de la base $B = (e_1, \dots, e_p)$ choisie de E .

Definition:

Si $f \in CM([a, b], E)$ alors $\forall k \in [1, p]$:

$f_k \in C([a, b], K)$. On appelle intégrale sur $[a, b]$: $\int_{[a, b]} f = \sum_{k=1}^p \left(\int_{[a, b]} f_k \right) e_k$.

Propriété:

Si f est en escalier sur $[a, b]$ et $\mathcal{G} = (a_i)_{i=0, \dots, n}$ une subdivision adaptée à f sur $[a, b]$

$(f|_{[a_i, a_{i+1}]} = v_i)$ alors:

$$\int_{[a, b]} f = \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) v_k.$$

Propriété:

$f \in CM([a, b], \mathbb{C})$ si $\text{Re}(f)$ et $\text{Im}(f) \in CM([a, b], \mathbb{R})$

$$\text{et } \int_{[a, b]} f = \int_{[a, b]} \text{Re}(f) + i \int_{[a, b]} \text{Im}(f)$$

Propriété:

Si f et $g \in CM([a, b], E)$ tq $f = g$ sur $[a, b]$

sauf peut-être en un nombre fini de pts.

$$\text{Alors } \int_{[a, b]} f = \int_{[a, b]} g.$$

Propriété:

d'op: $CM([a, b], E) \rightarrow E$
 $f \mapsto \int_{[a, b]} f$ est linéaire.

Relation de Charles:

Si $f \in CM([a, b], E)$ et $c \in [a, b]$.

$f|_{[a, c]}$ et $f|_{[c, b]}$ sont CM sur $[a, c]$

$$\text{et } [c, b] \text{ et } \int_{[a, b]} f = \int_{[a, c]} f + \int_{[c, b]} f.$$

somme de Riemann:

Def: Si $f \in CM([a, b], E)$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, la somme de Riemann de f d'ordre n est $S_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a + k \cdot \frac{b-a}{n})$

Th: si $f \in CM([a, b], E)$ alors:

$$S_n(f) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{[a, b]} f.$$

Extension:

Si $f \in CM([a, b], E)$ et $\mathcal{G} = (a_i)_{i=0, \dots, n}$ subdiv adaptée à f .

$\forall i \in [0, n-1]$: soit $\alpha_i \in [a_i, a_{i+1}]$.

$$S(f, \mathcal{G}, \alpha) = \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) f(\alpha_i).$$

$\delta =$ le pas de $(\mathcal{G}) = \max\{a_{i+1} - a_i\} \mid i \in [0, n-1]$

Th:

Si $f \in CM([a, b], E)$

$$S(f, \mathcal{G}, \alpha) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \int_{[a, b]} f.$$

Propriété: (Inégalité de la moyenne) (*)

Si $f \in CM([a, b], E)$ alors $\|f\| \in CM([a, b], \mathbb{R}_+)$

$$\text{et } \left\| \int_{[a, b]} f \right\| \leq \int_{[a, b]} \|f\|.$$

Corollaire:

Si $f \in CM([a, b], E)$.

$$\text{Alors } \left\| \int_{[a, b]} f \right\|_{\infty} \leq (b-a) \|f\|_{\infty}^{[a, b]}.$$

Extension:

Si $(a, b) \in \mathbb{R}^2$:

$$\int_a^b f(t) dt = \begin{cases} \int_{[a, b]} f & \text{si } a < b \\ -\int_{[b, a]} f & \text{si } b < a \\ 0 & \text{si } a = b. \end{cases}$$

Remarque:

* Si $f(t) = \sum_{k=1}^p f_k(t) e_k$.

$$\text{alors } \int_a^b f(t) dt = \sum_{k=1}^p \left(\int_a^b f_k(t) dt \right) e_k$$

* Si $c, a, b \in \mathbb{R}$.

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt.$$

Dérivation et primitive:

1) Primitive:

• Définition:

Si I un intervalle de $\mathbb{R}$, $I \neq \emptyset$.

Si $f \in \mathcal{C}(I, E)$. On appelle primitive de f sur I toute application $F: I \rightarrow E$, dérivable sur I

et $\forall t \in I: F'(t) = f(t)$

F est de classe C^1 sur I .

• Propriétés:

* Si $f \in \mathcal{C}^0(I, E)$ et $a \in I$.

l'app: $f: I \rightarrow E$ a l'unique

$$x \mapsto \int_a^x f(t) dt$$

primitive de f qui s'annule en a .

* $\forall (\alpha, \beta) \in I^2: \int_\alpha^\beta f(t) dt = F(\beta) - F(\alpha)$.

* Deux primitives de $f \in \mathcal{C}^0(I, E)$ diffèrent d'une constante.

• Rmq:

$\forall G$ une primitive de f sur I ,

$$\forall (\alpha, \beta) \in I: \int_\alpha^\beta f(t) dt = G(\beta) - G(\alpha)$$

Si $f \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{K})$ et $g \in \mathcal{C}^2(I, E)$.

$$\forall (a, b) \in I^2: \int_a^b f'(t)g(t) dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t) dt$$

• Théorème:

Si $f \in \mathcal{C}^2(I, E)$ et $g \in \mathcal{C}^2(I, F)$.

$B: E \times F \rightarrow G$ bilinéaire, $\dim E, F < \infty$.

Alors:

$$\int_a^b B(f'(t), g(t)) dt = B(f(t), g(t)) \Big|_a^b - \int_a^b B(f(t), g'(t)) dt$$

• Intégration par parties généralisée:

Si $f \in \mathcal{C}^n(I, E)$ et $g \in \mathcal{C}^n(I, F)$

$B: E \times F \rightarrow G$ bilinéaire, $\dim F, E < \infty$

Alors:

$$\int_a^b B(f^{(n)}(t), g(t)) dt = \sum_{k=0}^{n-1} B(f^{(k)}(t), g^{(n-k+1)}(t)) \Big|_a^b + (-1)^n \int_a^b B(f(t), g^{(n)}(t)) dt$$

12) Changement de variable:

• Définition:

I un intervalle de $\mathbb{R}$ ($I \neq \emptyset$) et

$f: I \rightarrow E$ continue.

φ une app de classe C^1 de $[\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}: \varphi(\alpha) \in I$

$$\text{Alors } \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t) dt = \int_\alpha^\beta \varphi'(u) f(\varphi(u)) du$$

Exemple de variable récurrent:

$$u = \tan\left(\frac{t}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} \sin(t) = \frac{2u}{1+u^2} \\ \cos(t) = \frac{1-u^2}{1+u^2} \\ dt = \frac{2du}{1+u^2} \end{cases}$$

• Remarques:

* Si f est T -périodique, alors $\forall a \in \mathbb{R}$.

$$\int_a^{a+T} f(u) du = \int_a^{a+T} f(u) du$$

13) Inégalité des accroissements finis:

Si l'ensemble d'arrivée d'une fonction n'est pas égal à $\mathbb{R}$, l'égalité des acc finis (IAF) est en général fautive ($f: t \mapsto e^{it}$).

• Théorème (IAF) (*):

Si $f: [a, b] \rightarrow E$ ($\dim E < \infty$) tq:

- 1- f continue sur $[a, b]$
- 2- f dérivable sur $]a, b[$
- 3- f' bornée sur $]a, b[$.

$$\text{Alors } \|f(b) - f(a)\| \leq \pi(b-a) \text{ où } \pi = \sup_{t \in I} \|f'(t)\|$$

• Corollaire:

Si $f: I \rightarrow E$ tq:

- 1- f continue sur I
- 2- f dérivable sur I
- 3- f' bornée sur $]a, b[$.

$$\text{Alors } \forall (a, b) \in I^2: \|f(b) - f(a)\| \leq \sup_{t \in I} \|f'(t)\| (b-a)$$

• Corollaire 2:

Si $f: I \rightarrow E$ continue sur I et dérivable sur I

Alors f est lipschitzienne si f' est bornée sur I .

• Corollaire 3:

Si I un intervalle de $\mathbb{R}$.

$f: I \rightarrow E$, tq f continue sur I et dérivable sur I

Alors f est constante sur I si $f' = 0$ sur I .

13) Prolongement de app. de classe C^1 ($f \in \mathcal{C}^1$):

Théorème:

Si $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^E$: $a < b$ tel que:

- 1- f continue sur $[a, b]$.
- 2- f de classe C^1 sur $]a, b[$
- 3- $f'(x)$ admet une limite qd $x \rightarrow a$

alors: f est de classe C^1 sur $[a, b]$ et $f'(a) = l$.

Corollaire:

Si $f: [a, b] \rightarrow E$ tq:

- 1- f continue sur $[a, b]$
- 2- f est de classe C^1 sur $]a, b[$

3- $\forall k \in \{1, p\}: f^{(k)}(x)$ admet une limite $l_k \in E$ qd $x \rightarrow a$.

Alors: f est de classe C^p sur $[a, b]$ et

$$\forall k \in \{1, p\}: f^{(k)}(a) = l_k.$$

14) Effet d'une application linéaire:

Théorème:

Si f est continue par morceaux sur $[a, b] \rightarrow E$ (dim $E < \infty$) et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

Alors $u \circ f \in \mathcal{C}^1([a, b], F)$

$$\text{et } \int_{[a, b]} u \circ f = u \left(\int_{[a, b]} f \right).$$

15) Formules de Taylor:

Formule de Taylor avec reste intégrale:

Si $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, E)$, I un intervalle de $\mathbb{R}$, $I \neq \emptyset$.

Alors $\forall (a, b) \in I^2$:

$$f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

Formule de Taylor $\Rightarrow$ Corollaire:

Si $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, E)$ et $a \in I$.

$$\forall x \in I: f(x) = f(a) + \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(a+u(x-a)) du$$

Inégalité de Taylor Lagrange:

Si $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, E)$ alors $\forall (a, b) \in I^2$:

$$\left\| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| \leq \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t \in [a, b]} \|f^{(n+1)}(t)\| \quad (6)$$

Taylor Young (der limite):

Développement limite:

$f: I \rightarrow E, x_0 \in I$.

On dit que f admet un DL en x_0 , à l'ordre

$$\text{si } f(x) = a_0 + (x-x_0)a_1 + \dots + (x-x_0)^n a_n + o((x-x_0)^n), \quad x \rightarrow x_0$$

avec $a_i \in E$.

Formule de Taylor-Young:

Si $f \in \mathcal{C}^n(I, E)$ alors $\forall x_0 \in I$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + o((x-x_0)^n), \quad x \rightarrow x_0$$

Corollaire:

Si $f \in \mathcal{C}^n(I, E)$ alors f admet un $DL_n(x_0)$

Corollaire 2:

Si f admet un $DL_n(x_0)$ et F une primitive de f

Alors F admet un $DL_{n+1}(x_0)$ qui s'écrit:

$$F(x) = F(x_0) + \sum_{k=0}^n \frac{(x-x_0)^{k+1}}{k+1} a_k + o((x-x_0)^{n+1})$$

$$\text{où } f(x) = \sum_{k=0}^n (x-x_0)a_k + o((x-x_0)^n)$$

Théorème de relèvement: (*)

Si $f \in \mathcal{C}^p(I, \mathbb{C})$, $p \geq 1$.

tq $\forall t \in I: |f(t)| = 1$.

Alors $\exists \theta: I \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^p tq

$$\forall t \in I: f(t) = e^{i\theta(t)}$$

θ est appelé un relèvement de f .

Notation:

Si E et F deux $\mathbb{R}$ evn de dim $< \infty$ n'et p $\in \mathbb{N}$:

$\mathcal{B}(e_1, \dots, e_n)$ base de E

$\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_p)$ base de F .

$\forall x \in E: x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ sera identifié $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

$\forall y \in F: y = \sum_{k=1}^p y_k e'_k$ sera identifié $(y_1, \dots, y_p) \in \mathbb{R}^p$.

Si U un ouvert de E :

$$f: U \rightarrow F$$

$\forall x \in U: f(x) \in F$;

$$f(x) = \sum_{i=1}^p f_i(x) e'_i \Leftrightarrow (f_1(x), \dots, f_p(x))$$

$$\text{ou } f_i: U \rightarrow \mathbb{R}.$$

f est identifié:

$$U \text{ (ouvert de } \mathbb{R}^n) \rightarrow F$$

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_p(x_1, \dots, x_n))$$

Fonction partielle.

U ouvert de E , $a \in U$; $a = (a_1, \dots, a_n)$

$$f: U \rightarrow F$$

• Définition: $\forall i \in [1, n]$.

On appelle i ème fonction partielle de f en a :

$$f_{i,a}: \mathbb{R} \rightarrow F$$

$$t \mapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_n)$$

• Remarque:

le domaine de définition de $f_{i,a}$:

$$D_{i,a} = \{t \in \mathbb{R} / (a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_n) \in U\}.$$

• Proposition:

$$f_{i,a}: t \mapsto f(a + (t - a_i)e_i)$$

• Rmq:

Si f continue en $a = (a_1, \dots, a_n)$ alors:

$\forall i \in [1, n]$: $f_{i,a}$ est continue en a .

La réciproque est fautive.

Dérivée suivant un vecteur.

$$f: U \rightarrow F, a \in U \text{ et } v \in E \setminus \{0\} \text{ tq}$$

• Définition:

On dit que f admet une dérivée en a suivant le vecteur $v \in E \setminus \{0\}$ si:

l'app: $t \mapsto \frac{f(a+tv) - f(a)}{t}$ admet une lim

qd $t \rightarrow 0$ et $t \neq 0$.

Cette limite est notée $f'_v(a)$ ou $D_v f(a)$, dite la dérivée de f en a suivant v .

• Remarques:

* On peut tjrs trouver t tq $\|a+tv\| \leq r$ pour que $(a+tv) \in U$.

* f admet une dérivée en a suivant v si:

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} \text{ existe } (= D_v f(a))$$

$$\text{et ds ce cas: } f(a+tv) = f(a) + t D_v f(a) + o(t)$$

Dérivée partielle:

$$f: U \rightarrow F, a \in U.$$

• Définition:

$\forall i \in [1, n]$, on dit que f admet une i ème dérivée partielle en a si f admet une dérivée en a suivant le vecteur e_i , et est notée $D_i f(a)$ ou $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.

• Remarque:

$$\text{qd il existe, } \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(a + te_i) - f(a)}{t}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{t}$$

* l'existence des dérivées partielles en a n'implique pas la continuité en a .

• Définition:

On dit que f admet une i ème dérivée partielle sur U si f admet une dérivée partielle en tout $p \in U$.

$$\text{On définit: } \frac{\partial f}{\partial x_i}: U \rightarrow F$$

$$a \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).$$

dite app i ème dérivée partielle.

• Propriétés:

* Linéarité:

Si $f, g: U \rightarrow F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, admettant une i ème dérivée partielle en $a \in U$.

alors $(\lambda f + g)$ admet une $i^{\text{ème}}$ dérivée partielle en a et : $D_i(\lambda f + g)(a) = \lambda D_i f(a) + D_i g(a)$

* si $f: U \rightarrow F : \forall x \in U : f(x) = \sum_{k=1}^p f_k(x) e_k'$

et $f_k: U \rightarrow \mathbb{R}$

alors f admet une $i^{\text{ème}}$ dérivée partielle en a

ssi $\forall k \in [1, p] : f_k$ admet une $i^{\text{ème}}$ dérivée partielle en a , et ds ce cas :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \sum_{k=1}^p \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(a) e_k'$$

Fonction différentiable :

U ouvert de E , $a \in U$ tq $f: U \rightarrow F$.

• Définition :

f est dite différentiable en a ssi $\exists \varphi \in d(E, F)$,

$\forall h \in E, a+h \in U$.

$$f(a+h) = f(a) + \varphi(h) + o(\|h\|)$$

• Proposition : (*)

Si f est différentiable en a alors $\exists ! \varphi \in d(E, F)$:

$$f(a+h) = f(a) + \varphi(h) + o(\|h\|)$$

φ est app la différentielle de f en a , notée

$$df_a : E \rightarrow F$$

$$h \mapsto df_a(h).$$

• Remq :

ssi f différentiable en a :

$$f(a+h) = f(a) + df_a(h) + o(\|h\|)$$

$$f(a+h) = f(a) + df_a(h) + \|h\| \varepsilon(h)$$

avec $\varepsilon(h) \rightarrow 0$

$$df_a \in d(E, F).$$

• Proposition :

Toute fonction différentiable en a est continue en a .

• Proposition :

Si $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow F$ (I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$)

Alors f dérivable $\Leftrightarrow f$ différentiable en a

et $df_a : \mathbb{R} \rightarrow F$

$$h \mapsto h f'(a)$$

(car $f(a+h) = f(a) + h f'(a) + o(h)$)

• Définition :

Si $f: U \subset E \rightarrow F$

f est différentiable sur U si f est différentiable en tout point de U .

Dans ce cas : $df: U \rightarrow d(E, F)$

non
linéaire
par / à a

$$a \mapsto df_a : E \rightarrow F$$

$$h \mapsto df_a(h)$$

linéaire par / à h .

• Proposition (*) :

L'ensemble des fonctions différentiables en a est un $\mathbb{R}$ -ev. Si f et g différentiables en a et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $(\lambda f + g)$ est différentiable en a .

$$d(\lambda f + g)_a = \lambda df_a + dg_a.$$

• Proposition :

Si $f \in d(E, F)$ alors f est différentiable sur E , et $\forall a \in E : df_a = f$.

• Proposition :

Si $f: U \rightarrow F$

$$\forall x \in U : f(x) = \sum_{k=1}^p f_k(x) e_k'$$

f est différentiable en a ssi $\forall k \in [1, p] : f_k$ différentiable en a et dans ce cas :

$$df_a = \sum_{k=1}^p df_{k,a} e_k'$$

$$\text{càd : } \forall h \in E : df_a(h) = \sum_{k=1}^p df_{k,a}(h) e_k'$$

• Remarque (*) :

Si $f: U \subset E \rightarrow F$

Si f est différentiable en a alors f admet en a une dérivée suivant tout $v \in E \setminus \{0\}$:

$$D_v f(a) = df_a(v).$$

• Corollaire :

Si f différentiable en a alors f admet une $i^{\text{ème}}$ dérivée partielle en a :

$$\forall i \in [1, n] : \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = df_a(e_i)$$

• Remarque :

$$\text{Si } h = \sum_{k=1}^n h_k e_k$$

Si f est différentiable en a :

$$df_a(h) = df_a\left(\sum_{k=1}^n h_k e_k\right) = \sum_{k=1}^n h_k df_a(e_k).$$

$$df_a(h) = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$$

Notation :

on pose : $dx_i = e_i^*$ donc $dx_i(h) = h_i$

$$\text{Donc } df_a(h) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) dx_i(h)$$

$$\Rightarrow df_a = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) dx_i$$

Définition :

Si $f: U \rightarrow F$

f est dite de classe C^1 sur U si :

$\forall i \in [1, n]$: f admet une dérivée partielle sur U : $\frac{\partial f}{\partial x_i}$

qui est continue sur U .

leur ensemble est noté $\mathcal{C}^1(U, F)$.

Propriété :

f est de classe C^1 sur U si f est différentiable sur U . et $df: U \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$ continue sur U .
 $a \mapsto df_a$

Exemple :

Si E euclidien.

d'app: $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^1 sur E .
 $x \mapsto \|x\|^2$

car f est différentiable et

$$\forall x \in E : df_x : E \rightarrow \mathbb{R}$$

$$h \mapsto 2\langle x|h \rangle$$

$$df: E \rightarrow \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) \text{ est linéaire et dim } E < \infty$$

$$x \mapsto 2\langle x| \cdot \rangle \text{ donc continue}$$

Proposition (*) :

Si $B: E \times F \rightarrow G$ bilinéaire alors

B est de classe C^1 sur $E \times F$.

et $\forall (x, y) \in E \times F$:

$$df_{(x,y)}: E \times F \rightarrow G$$

$$(h, k) \mapsto B(x, k) + B(h, y)$$

Proposition :

$$dB: E \times F \rightarrow \mathcal{L}(E \times F, G)$$

$$(x, y) \mapsto dB_{(x,y)}: E \times F \rightarrow G$$

$$(h, k) \mapsto B(x, k) + B(h, y)$$

dB est linéaire sur $E \times F$ et $\dim(E \times F) < \infty$

Donc dB est de classe C^1 sur $E \times F$.

Théorème :

Si $f: U \rightarrow E$ et $g: U \rightarrow F$.

et $B: E \times F \rightarrow G$ bilinéaire

Alors si f et g sont différentiables en a , alors

$$B(f, g): U \rightarrow G$$

est différentiable en a

$$x \mapsto B(f(x), g(x))$$

et :

$$dB(f, g)_a = B(df_a, g(a)) + B(f(a), dg_a)$$

càd : $\forall h \in E$:

$$dB(f, g)_a(h) = B(df_a(h), g(a)) + B(f(a), dg_a(h))$$

Corollaire :

Si $f \in \mathcal{C}^1(U, E)$ et $g \in \mathcal{C}^1(U, F)$

et $B: E \times F \rightarrow G$ bilinéaire.

Alors $B(f, g) \in \mathcal{C}^1(U, G)$.

et $\forall i \in [1, n]$:

$$\frac{\partial B(f, g)}{\partial x_i}(a) = B\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(a), g(a)\right) + B\left(f(a), \frac{\partial g}{\partial x_i}(a)\right)$$

(en prenant $h = e_i$ ds ♥)

Proposition (*) :

Si $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}$ et $f: U \rightarrow E$ différentiable sur U .

Alors $\varphi \cdot f$ est diff. sur U .

$$\text{et } \forall a \in U : d(\varphi f)_a = d\varphi_a \cdot f(a) + \varphi(a) df_a$$

càd $\forall h \in E$:

$$d(\varphi f)_a(h) = d\varphi_a(h) \cdot f(a) + \varphi(a) \cdot df_a(h)$$

Corollaire (*) :

$(f, g) \in \mathcal{C}^1(U, E)$ et $\mathcal{C}^1(U, F)$ resp.

et $B: E \times F \rightarrow G$ bilinéaire

Alors $B(f, g)$ est de classe C^1 sur U .

Corollaire :

Si $\varphi \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ et $f \in \mathcal{C}^1(U, E)$.

Alors $(\varphi \cdot f) \in \mathcal{C}^1(U, E)$

Proposition :

Si f différentiable en a , $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ tq $f(a) \neq 0$

Alors $\exists v \in \mathcal{V}(a) : f|_v \neq 0$.

Alors $\left(\frac{1}{f}\right)|_v$ est différentiable en a

$$\text{et } d\left(\frac{1}{f}\right)_a = -\frac{df_a}{(f(a))^2}$$

$$(d(\frac{1}{f}))_a = d(1/a) = 0$$

Corollaire :

Si $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ et f ne s'annule pas sur U .

Alors $\left(\frac{1}{f}\right) \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$.

Corollaire 2 :

Si $f \in C^2(U, K)$ et $g \in C^2(U, E)$ et f ne s'annule pas sur U .

Alors $(\frac{g}{f})$ est de classe C^2 sur U .

$$\text{et } d\left(\frac{g}{f}\right)_a = \frac{dg_a f(a) - g(a) df_a}{(f(a))^2}$$

En particulier :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{g}{f}\right)(a) = \frac{\frac{\partial g}{\partial x_i}(a) f(a) - g(a) \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)}{(f(a))^2}$$

Corollaire :

* Toute fonction polynomiale de plusieurs variables (n variables) est de classe C^1 sur K^n .

* Toute fraction rationnelle est de classe C^1 sur son domaine de définition.

Théorème (*) :

Si $f: U \subset E \rightarrow F$

et $g: V \subset F \rightarrow G$

tg $f(U) \subset V$

Alors si f différentiable en a et g différentiable en $f(a)$ alors $(g \circ f)$ en a et :

$$d(g \circ f)_a = dg_{f(a)} \circ df_a$$

Corollaire :

Si $f \in C^2(U \subset E, F)$ et $g \in C^1(V \subset F, G)$

tg $f(U) \subset V$.

Alors $g \circ f \in C^2(U, G)$.

Remarque :

Si I un intervalle de $\mathbb{R}$ ($I \neq \emptyset$).

et $f: I \rightarrow E$ tg f dérivable en a .

Alors f différentiable en a .

$$\forall h \in \mathbb{R}: df_a(h) = h \cdot f'(a)$$

En particulier : $f'(a) = df_a(1)$.

Dérivée d'une fct² le long d'un chemin :

Théorème (*) :

Si I un intervalle de $\mathbb{R}$ tg $I \neq \emptyset$.

$\varphi: I \rightarrow E$ (Rem de $\dim(E)$)

(4)

U un ouvert de E et $g: U \rightarrow F$
tg $\varphi(I) \subset U$.

Alors si f est différentiable sur U et φ dérivable en I alors $(f \circ \varphi)$ est dérivable sur I et :

$$(f \circ \varphi)'(t) = df_{\varphi(t)}(\varphi'(t))$$

En particulier, si $f: (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, \dots, x_n)$.

$$\text{et } \varphi: I \rightarrow E \\ t \mapsto (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)).$$

$$(f \circ \varphi)'(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\varphi(t)) \varphi_i'(t)$$

Corollaire :

Si $\varphi \in C^2(I, E)$ et $f \in C^2(U, F)$ avec $\varphi(I) \subset U$

Alors $(f \circ \varphi) \in C^2(I, F)$.

Matrices jacobiniennes et jacobien :

Si U un ouvert de E , $B = (e_1, \dots, e_n)$ base de E

$f: U \rightarrow F$, $B' = (e'_1, \dots, e'_p)$ base de F .

$$x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto (f_1(x), \dots, f_p(x))$$

tg f différentiable en $a \in U$.

Définition :

On appelle matrice jacobienne de f en a dans les bases B et B' , la matrice de $df_a \in \mathcal{L}(E, F)$ ds les bases B et B' , notée $Jf(a)$.

Théorème : si f diff en a :

$$Jf(a) = \begin{pmatrix} df_a(e_1) & \dots & df_a(e_n) \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

Définition :

Si $n=p$ et f différentiable en a . On appelle Jacobien de f en a .

le déterminant de la matrice jacobienne de f en a , noté $|Jf(a)|$.

Propriété (*) :

Si $f: U \rightarrow F$ $\dim F = p$
 $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_p(x_1, \dots, x_n))$

$g: V \subset F \rightarrow G$ $\dim G = q$
 $(y_1, \dots, y_q) \mapsto g(y_1, \dots, y_q)$

tg $f(U) \subset V$

Soit $a \in U$, f est différentiable en a et g différentiable en $f(a)$. Alors $g \circ f$ est diff en a .

$$J(g \circ f)_a = Jg_{f(a)} \cdot Jf_a$$

Th: dérivées partielles composées: (*)

$$\forall i \in [1, n] : \forall j \in [1, q] :$$

$$f \in C^1(U, F) \text{ et } g \in C^1(V, G) : f(U) \subset V.$$

$$\frac{\partial (g \circ f)_i}{\partial x_i}(a) = \sum_{k=1}^p \frac{\partial g_k}{\partial y_k}(f(a)) \cdot \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(a).$$

↳ Formule de chaîne.

Corollaire:

Si $f \in C^1(U, F)$ et $g \in C^1(V, \mathbb{R})$ tq $f(U) \subset V$.

Alors $\forall i \in [1, n] : \forall a \in U :$

$$\frac{\partial g \circ f}{\partial x_i}(a) = \sum_{k=1}^p \frac{\partial g}{\partial y_k}(f(a)) \cdot \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(a)$$

Gradient d'une fonction numérique:

Soit E un espace euclidien, le p.s. est noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$
 U un ouvert de E . $f: U \rightarrow \mathbb{R}$.

Théorème (*):

Soit $a \in U$.

Si f différentiable en a alors $\exists ! \vec{\nabla}_a f \in E$.

$$\forall h \in E : df_a(h) = \langle \vec{\nabla}_a f, h \rangle$$

$\vec{\nabla}_a f$ est appelé le gradient de f en a , noté $\text{grad} f_a$.

Proposition (*):

$B = (e_1, \dots, e_n)$ b.o.n de E et f différentiable en a .

$$\text{Alors } \text{grad} f(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) e_i.$$

Notation:

Si E euclidien, U ouvert de E .

$f: U \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable.

$\text{grad} f_a$ est noté $\nabla f(a)$.

Interprétation géométrique du gradient:

Si E euclidien et U un ouvert de E .

Th (*): $f: U \rightarrow \mathbb{R}$

Si f est différentiable en $a \in U$, alors $\nabla f_a(a)$ est le vecteur colinéaire et de m sens que le vecteur unitaire suivant lequel la dérivée de f est maximale.

Extremums locaux:

Si E euclidien, U un ouvert de E et $f: U \rightarrow \mathbb{R}$.

Définition:

On dit que f présente un max local en $a \in U$ si $\exists r > 0 : \forall x \in U \cap B(a, r) : f(x) \leq f(a)$.

On dit que f présente un min local en $a \in U$, si $\exists r > 0, \forall x \in U \cap B(a, r) : f(x) \geq f(a)$.

On dit que f présente un extremum local en $a \in U$ si f présente un maximum ou un minimum local en a .

Point critique:

On dit que $a \in U$ est un pt critique de f si les dérivées partielles de f en a existent et $\forall i \in [1, n] : \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$.

$$\text{ssi } \nabla f(a) = 0.$$

$$\text{ssi } df_a = 0.$$

Théorème (*):

Si f présente un extremum local en a alors a un pt critique de f .

la réciproque est fautive.

Vecteur tangent à une partie:

Soit X une partie $\neq \emptyset$ de E et $\vec{v} \in E \setminus \{0\}$ et $x \in X$.

Définition:

On dit que $\vec{v}$ est un vecteur tangent à X en x si $\exists \varepsilon > 0$ et $\exists \gamma :]\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow E$.

$$\text{tq: } 1. \forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[: \gamma(t) \in X : (\gamma(-\varepsilon, \varepsilon) \subset X)$$

$$2. \gamma \text{ dérivable en } 0.$$

$$3. \gamma(0) = x \text{ et } \gamma'(0) = \vec{v}$$

ligne de niveau:

On appelle ligne de niveau d'une fonction

$$f: U \rightarrow \mathbb{R} :$$

$$X_k = \{x \in U : f(x) = k\}. \quad k \text{ une constante.}$$

Théorème (*):

Si f une app différentiable sur U et X_k une ligne de niveau de f , alors tout vecteur tangent à X_k est orthogonal à $\nabla f(x)$.

Extension (Hr):

• Définition:

On appelle surface de $\mathbb{R}^3$, toute partie S de $\mathbb{R}^3$
 $S = \{(x, y, z) \in U, f(x, y, z) = 0\}$ où f est app
de classe C^1 sur $U \subset \mathbb{R}^3$.

On dit que f est un paramétrage cartésien des
 $\Pi\left(\frac{x}{y}\right) \in S$ et dit régulier si. $\nabla f(x, y, z) \neq 0$.
sinon, il est dit stationnaire.

Rmq:

Si $f(x, y, z) \mapsto z = h(x, y)$

Alors tout point de $S = \{(x, y, z) \in U: f(x, y, z) = 0\}$
 $= \{(x, y, z) \in U: z = h(x, y)\}$.

est régulier, car $\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 1 \neq 0$.

• Définition:

On appelle plan tangent à S en pt régulier

$\Pi_0\left(\frac{x_0}{y_0}\right)$ de S , le plan passant par Π_0 et $\perp$ à
 $\nabla f(\Pi_0)$.

• Proposition (*):

Si $\Pi_0\left(\frac{x_0}{y_0}\right) \in S$ un pt régulier, l'équation
du plan tangent en Π_0 :

$$(x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) + (z - z_0) \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0$$

Théorème des accroissements finis:

• Théorème (*):

Si E un evn et U un ouvert de E .

$f: U \rightarrow F$ de classe C^1 sur U , et

$\gamma: [0, 1] \rightarrow U$ de classe C^1 .

On pose $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$.

$$\text{Alors } \int_0^1 df_{\gamma(t)} \gamma'(t) dt = f(b) - f(a)$$

• Corollaire:

Si E euclidien et $f: U \rightarrow \mathbb{R}$

$\gamma: [0, 1] \rightarrow U$ de C^1 tq: $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$

$$\text{On a: } \int_0^1 \langle \nabla f(\gamma(t)) | \gamma'(t) \rangle dt = f(b) - f(a)$$

• Corollaire (*):

Si $f \in C^2(U, F)$ avec U cpa alors f est constante
sur U si $\forall x \in U, df_x = 0$

• Corollaire (*): Inégalité des accroissements finis:

Si $f \in C^1(U, F)$ (f différentiable suffit),

U convexe. On suppose $\exists M \geq 0, \forall x \in U: \|df_x\| \leq M$.

Alors $\forall (a, b) \in U: \|f(b) - f(a)\| \leq M \|b - a\|$.

Champ de vecteurs:

Soit E un espace euclidien et U un ouvert de E

• Définition:

On appelle champ de vecteurs de U , toute
application: $V: U \rightarrow E$.

• Définition:

On dit qu'un champ de vecteurs V dérive d'un
potentiel (scalaire) si $\exists f \in C^1(U, \mathbb{R}): V = \nabla f$ sur U

• Théorème:

Soit V un champ de vecteur de $U: \rightarrow E$ continu
dérivant d'un potentiel (scalaire) $f \in C^1(U, \mathbb{R})$

pour tout chemin paramétré: $\gamma: [0, 1] \rightarrow U$
de classe C^1 , on pose $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$.

$$\text{Alors } \int_0^1 \langle V(\gamma(t)) | \gamma'(t) \rangle dt = f(b) - f(a)$$

(car $\nabla f = V$)

Dérivées partielles d'ordre supérieures et fonctions de classe $C^k, k \geq 1$:

Soit E un $\mathbb{R}$ -evn de $\dim < \infty$, $U \subset E, U$ ouvert.

$f: U \rightarrow F$ ($\mathbb{R}$ -evn de $\dim < \infty$) tq f admet
une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ sur U

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(a + te_i) - f(a)}{t} \right)$$

et $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ admet une dérivée partielle en a par / à x_j ,

on dit que f admet une dérivée partielle seconde
par / à x_j et x_i en a , on le note:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)(a).$$

Si f admet une dérivée partielle seconde sur U par /
à x_i et x_j , $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ sur U .

et si $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ admet une dérivée partielle p / à x_k ,

on dit que f admet une dérivée partielle 3^{ème}

par rapport à x_k , on a et on note $\frac{\partial f}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j} \right)$

Par récurrence, il existe :

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} \left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_{k-1}}} \right)$$

avec $(i_1, \dots, i_k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^k$.

Fonction de classe C^k :

• Définition :

$f: U \rightarrow F$ et $k \in \mathbb{N}^*$, f est dite de classe C^k sur U si f admet des dérivées partielles d'ordre k par rapport à $x_{i_1} \dots x_{i_k}$, $\forall (i_1, \dots, i_k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^k$ et qui sont continues sur U .

càd : $\forall (i_1, \dots, i_k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^k$.

$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}$ existe et continue sur U .

leur ensemble est noté $C^k(U, F)$.

• Remarque :

$f \in C^k(U, F)$ alors $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$: $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in C^{(k-1)}(U, F)$
($C^0(U, F)$ les app cont de $U \rightarrow F$).

• Théorème :

$C^k(U, F)$ est un $\mathbb{K}$ -ev.

$C^k(U, \mathbb{K})$ est une $\mathbb{K}$ -algèbre.

• Propriété :

si $(e_1^*, \dots, e_p^*)$ base de F .

$$f: U \rightarrow F, \forall x \in U, f(x) = \sum_{i=1}^p f_i(x) e_i^*$$

Alors f est de classe C^k sur $U \Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket$: $f_i \in C^k(U, \mathbb{K})$

• Définition :

f est dite de classe C^∞ sur U si f est de classe C^k sur U , $\forall k \in \mathbb{N}$. leur ensemble est noté $C^\infty(U, F)$.

• Remarque :

$$C^\infty(U, F) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C^k(U, F)$$

• Théorème de Schwarz :

si $f: U \rightarrow F$ et $a \in U$ tq f admet des dérivées partielles secondes $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ en a

Alors : si $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ sont continues en a .

$$\text{Alors } \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a).$$

• Corollaire :

si f est de classe C^2 sur U . Alors $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$:

$$\forall a \in U, \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a).$$

• Corollaire :

si $f \in C^k(U, F)$, $\forall a \in U$, $\forall (i_1, \dots, i_k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^k$.

$\forall \sigma$ une permutation de $\{i_1, \dots, i_k\}$.

$$\text{On a : } \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(a) = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_{\sigma(1)}} \dots \partial x_{i_{\sigma(k)}}}(a)$$

Formule de Taylor :

• Théorème :

si f une application de classe C^2 sur U et $a \in U$.

$\forall h \in E$, $(a+h) \in U$: $h = \sum_{i=1}^n h_i e_i^*$

Alors :

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i h_j + o(\|h\|)$$

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i + \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a) h_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i h_j \right) + o(\|h\|)$$

• En particulier (*) :

si U un ouvert de $\mathbb{R}^2$: $f \in C^2(U, \mathbb{R})$.

$(a, b) \in U$: $(h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$: $(a+h_1, b+h_2) \in U$.

$$f(a+h_1, b+h_2) = f(a, b) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) h_2 \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) h_1^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) h_1 h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) h_2^2 \right) + o(\|h\|)$$

• Matrice hessienne :

si $f \in C^2(U, \mathbb{R})$

on appelle matrice hessienne de f en a :

$$Hf(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right) \quad \text{diag. car symétrique}$$

• Propriété :

si a un pt critique de f .

* si $\text{sp}(Hf(a)) \subset \mathbb{R}_+^*$ alors f présente un min local en a .

* si $\text{sp}(Hf(a)) \subset \mathbb{R}_-^*$, " " max local en a .

si $0 \in \text{Sp}(Hf(a))$ on ne peut rien conclure.

Corollaire (*):

- Si $f \in C^2(U, \mathbb{R})$ avec U un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
- $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)$, $s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)$, $t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)$ (Notation de Hesse)
- tel que a un pt critique pour f , alors:
- * Si $s^2 - rt < 0$ et $r > 0$, alors f présente un min local en a .
 - * Si $s^2 - rt < 0$ et $r < 0$, alors f présente un max local en a .
 - * Si $s^2 - rt > 0$, f ne présente ni min ni max en a .
 - * Si $s^2 - rt = 0$, alors doute.

Equations aux dérivées partielles:

1) D'ordre 1: U ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ de C^1 .

- * $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ sur U :
 $f(x, y) = g(y)$ avec $g \in C^1(I, \mathbb{R})$
- * $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ sur U :
 $f(x, y) = h(x)$ avec $h \in C^1(I, \mathbb{R})$.

• De second ordre.

Si $f \in C^2(U, \mathbb{R})$, U ouvert de $\mathbb{R}^2$.

- * $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$:
 $\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = 0$
 $\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = h(y)$
 $\Rightarrow f(x, y) = x h(y) + g(y)$
Et puis, on fait réciproquement.
- * $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$
 $\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = 0$
 $\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = h(y)$, $h \in C^1(I, \mathbb{R})$
 $\Rightarrow f(x, y) = H(y) + g(x)$ avec $g \in C^1(I, \mathbb{R})$
Et réciproquement.

Extremum liée, multiplicateur de Lagrange:

$$X = \{x \in U : g(x) = 0\}$$

• Théorème:

U un ouvert de E : f et g de C^1 de U vers $\mathbb{R}$.

Si $f|_X$ admet un extremum local en $a \in X$,
et $dg(a) \neq 0$
Alors $\exists \lambda \in \mathbb{R}$: $df(a) = \lambda dg(a)$
 λ est dit multiplicateur de Lagrange, associé à la contrainte $g(x) = 0$.

Differentielle usuelle:

• $f: E \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \|x\|^2$ de C^1 car différentiable

et $df_x: E \rightarrow \mathbb{R}$
 $h \mapsto 2\langle x|h \rangle$

• $f: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$
 $M \mapsto M^2$

soit $N \in M_n(\mathbb{R}), h \in M_n(\mathbb{R})$:
 $f(N+H) = (N+H)^2 = N^2 + NH + HN + H^2$

$= f(N) + (NH + HN) + H^2$

on $\exists c$ tq $\|H^2\| \leq c \|H\|^2$

$\Rightarrow \frac{\|H^2\|}{\|H\|} \leq c \|H\|$

$\Rightarrow H^2 = o(\|H\|)$

Donc $df_N(H) = NH + HN$ linéaire.

• $f: GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$
 $M \mapsto M^{-1}$

* $f(I_n + H) = (I_n + H)^{-1}$

on $(I_n - H)(I_n + H) = I_n - H^2$

$\Rightarrow (I_n + H)(I_n - H) + H^2 = I_n$

$\Rightarrow (I_n + H)^{-1} = I_n - H + \underbrace{H^2}_{o(H)} (I_n + H)^{-1}$

Donc: $df_{I_n} H \mapsto -H$

* $f(M+H) = (M+H)^{-1} = (I_n + M^{-1}H)^{-1} M^{-1}$
 $= (I_n + M^{-1}H + o(H))^{-1} M^{-1}$
 $= M^{-1} \bullet M^{-1}H M^{-1} + o(H)$

Donc $df_M(H) = -M^{-1}H M^{-1}$

• $f: M_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$
 $A \mapsto \det(A)$

$\det(A) = \sum_{k=1}^n a_{kk} A_{kk} \leftarrow$ cofacteur d'indice (k,k)

$D_{ij} f(A) = \frac{\partial f}{\partial a_{ij}}(A) = A_{ij}$

$\frac{\partial f}{\partial a_{ij}}$ continue (car polynomiale) $\Rightarrow f$ de C^1

et $df_A(H) = \sum_{i,j} \frac{\partial f}{\partial a_{ij}}(A) h_{ij} = \sum_{i,j} A_{ij} h_{ij}$

or $(\text{tcom}(A)H)_{ij} = \sum_{k=1}^n (\text{tcom}(A))_{ik} H_{kj}$
 $= \sum_{k=1}^n A_{ki} H_{kj}$

$\Rightarrow \text{tr}(\text{tcom}(A)H) = \sum_{i,j} A_{ij} H_{ij}$

Alors: $df_A(H) = \text{tr}(\text{tcom}(A)H)$

• $f: M_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$
 $M \mapsto \text{tr}(M^k)$

o. $M_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ et $\psi: M_n(\mathbb{K}) \rightarrow M_n(\mathbb{K})$ de C^1
 $M \mapsto \text{tr}(M)$ et $\psi: M_n(\mathbb{K}) \rightarrow M_n(\mathbb{K})$ (multilinéaire)

$d\psi_M = \psi$

Alors $f = \psi \circ \psi$ et ψ sur $M_n(\mathbb{K})$
on montre par récurrence que:

$(M+H)^k = M^k + \sum_{i=0}^{k-1} M^i H M^{k-1-i} + o(\|H\|)$

Donc ψ diff en M : $d\psi_M(H) = \sum_{i=0}^{k-1} M^i H M^{k-1-i}$

Donc $df_M(H) = d\psi_{\psi(M)} \circ d\psi_M(H)$
 $= \text{tr} \left(\sum_{i=0}^{k-1} M^i H M^{k-1-i} \right)$
 $= \sum_{i=0}^{k-1} \text{tr}(M^{k-1-i} H)$
 $= k \text{tr}(M^{k-1} H)$

• $f: E \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \|x\| = \langle x|x \rangle^{\frac{1}{2}}$

1ere meth:

$f(x+h) = \|x+h\|$

or $\|x+h\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x|h \rangle + \|h\|^2$
 $= \|x\|^2 \left(1 + 2\langle \frac{x}{\|x\|^2}, h \rangle + \frac{\|h\|^2}{\|x\|^2} \right)$

$\Rightarrow \|x+h\| = \|x\| \left(1 + 2\langle \frac{x}{\|x\|^2}, h \rangle + \frac{\|h\|^2}{\|x\|^2} \right)^{\frac{1}{2}}$

or $(1+h)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}h + o(h)$

$\Rightarrow f(x+h) = \|x\| \left(1 + \langle \frac{x}{\|x\|}, h \rangle + o(h) \right)$
 $= \|x\| + \langle \frac{x}{\|x\|}, h \rangle + o(h)$

Donc $\nabla f(x) = \frac{x}{\|x\|}$

2eme methode:

soit $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$

$f(x) = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$

$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x_i}{\|x\|} = \frac{x_i}{\|x\|}$

$\nabla f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) e_i$

$= \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\|x\|} e_i$

$= \frac{x}{\|x\|}$

• Dérivée suivant un vecteur :

$$D_v f(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} = f'_v(a)$$

$$f(a+tv) = f(a) + t D_v f(a) + o(t)$$

• Dérivée partielle :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = D_{e_i} f(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+te_i) - f(a)}{t}$$

• Différentielle :

$$f(a+h) = f(a) + df_a(h) + o(\|h\|)$$

$$f(k+h) = f(a) + df_a(h) + \|h\| \varepsilon(h)$$

• Dérivable $\Rightarrow$ différentiable $\Rightarrow$ continue.

$$f \in \mathcal{L}(E, F) \Rightarrow df_a = f$$

• f différentiable $\Rightarrow f$ admet une dérivée partielle suivant tout vecteur : $D_v f(a) = df_a(v)$

• f différentiable $\Rightarrow f$ admet une $i^{\text{ème}}$ dérivée partielle en a : $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a) = d^2_{f,a}(e_i)$

• si $h = \sum_{k=1}^n h_k e_k$ et f différentiable en a :

$$df_a(h) = \sum_{k=1}^n h_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$$

• f de $\mathcal{C}^2 \Leftrightarrow \forall i \in \{1, n\}$, f admet $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ continu sur U .

• f de $\mathcal{C}^1 \Leftrightarrow f$ différentiable et df continue sur U

• Bilineaire en dim finie $\Rightarrow$ de $\mathcal{C}^2$

$$dB(f, g)_a(h) = B(df_a(h), g(a)) + B(f(a), dg_a(h))$$

$$\frac{\partial^2 B(f, g)}{\partial x_i^2}(a) = B\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a), g(a)\right) + B\left(f(a), \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2}(a)\right)$$

$$d(g \circ f)_a = dg_{f(a)} \circ df_a$$

$$\text{si } f \text{ dérivable : } df_a(h) = h \cdot f'(a)$$

$$\text{si } f \text{ diff et } \varphi \text{ dérivable : } (f \circ \varphi)'(t) = df_{\varphi(t)}(\varphi'(t))$$

$$\text{Matrice jacobienne : } Jf(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

$$f \text{ diff en } a \text{ et } g \text{ en } f(a) : T(g \circ f)_a = Tg_{f(a)} \cdot Jf(a)$$

• Formule de Chaine : f, g de $\mathcal{C}^2$.

$$\frac{\partial^2 g \circ f}{\partial x_i^2}(a) = \sum_{k=1}^p \frac{\partial^2 g}{\partial y_k^2}(f(a)) \cdot \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i^2}(a)$$

$$f \text{ diff} \Rightarrow \exists ! v_a : df_a(h) = \langle v_a, h \rangle$$

$\leftarrow$ gradient de f en a

$$\text{grad } f(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) e_i = \nabla f(a)$$

$$\text{TAF : } f \text{ de } \mathcal{C}^1 \text{ et } \gamma : [a, b] \rightarrow U \text{ de } \mathcal{C}^1, \gamma(a) = a \text{ et } \gamma(b) = b.$$

$$\Rightarrow \int_a^b df_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) = f(b) - f(a) = \int_a^b \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt$$

$\hookrightarrow$ on prend généralement $\gamma(t) = tx$.

• f de $\mathcal{C}^2(U, F)$ avec $U \subset \mathbb{R}^n$:

$$f \text{ est sur } U \Leftrightarrow \forall x \in U : df_x = 0$$

• IAF : f différentiable, U convexe, $\exists \eta, \forall a, b \in U, \|df_a\| \leq \eta$

$$\text{Alors } \forall (a, b) \in U^2 : \|f(b) - f(a)\| \leq \eta \|b - a\|$$

• Th de Schwartz :

$$\text{si } f \text{ de } \mathcal{C}^2 \text{ sur } U : \forall i, j, \forall a : \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$$

$$\text{matrice hessienne : } Hf(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right) \text{ sym réelle}$$

$$a \text{ pt critique de } f \Leftrightarrow \forall i, \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \text{ existe et } = 0.$$

$$\Leftrightarrow \nabla f(a) = 0$$

$$\Leftrightarrow df_a = 0$$

• si f présente un extremum local en $a \Rightarrow a$ pt critique

• si a pt critique def :

$$\hookrightarrow \text{si } \text{Sp}(Hf(a)) \subset \mathbb{R}_+^* \Rightarrow \text{min local en } a$$

$$\hookrightarrow \text{si } \text{Sp}(Hf(a)) \subset \mathbb{R}_-^* \Rightarrow \text{max local en } a$$

$$\hookrightarrow \text{si } 0 \in \text{Sp}(Hf(a)) \Rightarrow \text{rien conclure}$$

• si f de $\mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$, U de $\mathbb{R}^n$.

$$s = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a), \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a), \quad r = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)$$

et a pt critique.

$$\hookrightarrow s^2 - rt < 0 \text{ et } s > 0 \Rightarrow \text{min local en } a$$

$$\hookrightarrow s^2 - rt < 0 \text{ et } r < 0 \Rightarrow \text{max local en } a$$

$$\hookrightarrow s^2 - rt > 0 \Rightarrow \text{ni min ni max}$$

$$\hookrightarrow s^2 - rt = 0 \Rightarrow \text{doute}$$

• Extremum lié : f, g de $\mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ et $f|_X$ admet un extrem local et $dg(a) \neq 0$ alors $\exists ! \lambda \in \mathbb{R} : df(a) = \lambda dg(a)$

Série dans un EVN

Soit E un evn de $\dim E < \infty$.

Généralités:

• Définition:

On appelle série de E ; tout couple $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de suites de E tq: $\forall n \in \mathbb{N}: S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.
 $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n est dit le terme général de la série, noté $\sum_{n \geq 0} u_n$ et S_n la somme partielle d'indice n ou d'ordre n de la série.

• Rmq:

la série peut ne pas être définie qu'à partir, $n \in \mathbb{N}$ elle est notée: $\sum_{n \geq n_0} u_n$ et $S_n = \sum_{k=n_0}^n u_k$

• Opérations algébriques sur les séries:

* Somme:

Si $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ deux séries de E .

On définit leur somme: $\sum_{n \geq 0} u_n + \sum_{n \geq 0} v_n = \sum_{n \geq 0} (u_n + v_n)$

* Multiplication par un scalaire:

Si $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série de E et $\lambda \in \mathbb{K}$.

on pose: $\lambda \cdot \sum_{n \geq 0} u_n = \sum_{n \geq 0} \lambda u_n$

* Produit de Cauchy dans $\mathbb{K}$:

Si $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ deux séries de $\mathbb{K}$

on pose: $(\sum_{n \geq 0} u_n) (\sum_{n \geq 0} v_n) = \sum_{n \geq 0} w_n$

où $w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k} = \sum_{k=0}^n u_{n-k} v_k = \sum_{i+j=n} u_i v_j$

Rmq

On peut avoir deux séries numériques (ds $\mathbb{K}$) qui convergent mais leur produit de Cauchy diverge (m grossièrement).

• Théorème:

* d'ensemble des séries de E est un $\mathbb{K}$ -ev.
 (ser de $E^{\mathbb{N}} \times E^{\mathbb{N}}$)

* d'ensemble des séries de $\mathbb{K}$ muni de $+, \cdot$ est une $\mathbb{K}$ -algèbre commutative.

• Définition:

Une série de $\mathbb{K}$ est dite numérique. (R)

Convergence et divergence:

• Définition:

Soit $\sum u_n$ une série de E . elle est dite conv si la suite (S_n) de sommes partielles est convergente.

Et dans ce cas: $S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ est appelée la

somme de la série, noté $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$.

la série non convergente est dite divergente.

• Définition:

Si $\sum u_n$ converge, on appelle reste d'ordre

n de la série $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$.

on a donc: $S = \sum_{k=0}^{\infty} u_k = S_n + R_n$.

$\Rightarrow R_n = S - S_n$.

• Propriété:

Si $\sum u_n$ converge alors $R_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

• Rmq:

$\forall n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = S_n - S_{n-1}$.

et si la série converge: $u_n = R_{n-1} - R_n$.

• Théorème (lien entre suite et série):

Soit $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$.

la suite (u_n) converge si la série $\sum_{n \geq 1} (u_n - u_{n-1})$ converge.

(car $S_n = \sum_{k=1}^n (u_k - u_{k-1}) = u_n - u_0$).

• Définition:

la série $\sum (u_n - u_{n-1})$ est dite série télescopique associée à la suite (u_n) .

• Rmq:

On ne change pas la nature d'une série en changeant un nombre fini de termes.

• Théorème:

L'ensemble des séries de E convergentes est un $\mathbb{K}$ -ev, noté $\Lambda(E)$, et

l'application: $\Lambda(E) \rightarrow E$ est linéaire

$(\sum u_n) \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} u_n$

• Remarque:

si $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ et $(v_n) \in E^{\mathbb{N}}$ tq $\sum (u_n + v_n)$ converge alors (u_n) et (v_n) sont de même nature.

Th: condition nécessaire de convergence:

$$\sum u_n \text{ converge} \Rightarrow u_n \rightarrow 0.$$

$$(\text{car } u_n = S_n - S_{n-1}).$$

Définition:

la série $\sum u_n$ tq $u_n \not\rightarrow 0$ est dite divergente grossièrement. la récip est fautive ($\sum \frac{1}{n}$ div)

Série absolument convergente:

Soit $\|\cdot\|$ une norme sur E .

Définition:

$\sum u_n$ est dite absolument convergente ssi $\sum \|u_n\|$ converge ds $\mathbb{R}_+$.

Théorème:

Si $B = (e_1, \dots, e_p)$ base de E et $\sum u_n$ une série de E tq: $\forall n \in \mathbb{N}: u_n = \sum_{k=1}^p u_{n,k} e_k, u_{n,k} \in \mathbb{K}$.

$\sum u_n$ conv ds $E \Leftrightarrow \forall k \in \{1, \dots, p\}: \sum_{n=0}^{\infty} u_{n,k} e_k$ conv ds $\mathbb{K}$ et dans ce cas de convergence,

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{k=1}^p \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_{n,k} \right) e_k.$$

Corollaire:

$\sum u_n$ une série de $\mathbb{C}$ est convergente ssi

$\sum \operatorname{Re}(u_n)$ et $\sum \operatorname{Im}(u_n)$ convergent.

$$\text{et dans ce cas: } \sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Re}(u_n) + i \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Im}(u_n)$$

Théorème: (*)

Toute série absolument convergente est convergente.

Définition:

Une série convergente qui n'est pas absolument convergente est dite semi-convergente.

Série alternée:

Soit $\sum u_n$ une série réelle.

Définition:

$\sum u_n$ est dite alternée ssi $\forall n \in \mathbb{N}: u_n u_{n+1} < 0$.

Rmq:

$$\sum u_n \text{ est alternée ssi } u_n = \begin{cases} (-1)^n |u_n| \\ (-1)^{n+1} |u_n| \end{cases}$$

Théorème (C.S.C.A): (*)

Si $\sum u_n$ est alternée tq:

1. $(|u_n|)$ décroissante.

2. $|u_n| \rightarrow 0$.

clé:

1. $\sum u_n$ converge

2. Sa somme partielle est comprises entre deux sommes partielles.

$$3. \forall n \in \mathbb{N}: |R_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \right| \leq |u_{n+1}|$$

4. le signe de la somme S est égal au signe de son premier terme.

Série à termes positifs (sàtp):

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs.

Th fondamental pour les sàtp: (*)

$\sum u_n$ converge ssi la suite (S_n) de sommes partielles est majorée, et dans ce cas:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} S_n$$

Rmq:

1) Une s.à.t.p. est soit convergente, soit de somme $\pm \infty$.

2) Si $\sum u_n$ conv: $\forall n \in \mathbb{N}: S_n \leq S$.

Théorème: 1^{er} th de comparaison: (*)

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux sàtp (à partir de n_0).

$$\forall n \geq n_0: 0 \leq u_n \leq v_n.$$

Alors: 1. $\sum v_n$ conv $\Rightarrow \sum u_n$ conv.

$$\text{et dans ce cas: } \sum_{n=n_0}^{\infty} u_n \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} v_n$$

2. $\sum u_n$ div $\Rightarrow \sum v_n$ div

Corollaire:

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sàtp.

$$\text{tq } u_n = O(v_n) \text{ ou } u_n = o(v_n).$$

Alors: 1. $\sum v_n$ conv $\Rightarrow \sum u_n$ conv

2. $\sum u_n$ div $\Rightarrow \sum v_n$ div

Corollaire:

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à tp tq $u_n \sim v_n$.

Alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

• Théorème de comparaison logarithmique : (*)
 Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ 2 séries à termes strictement positifs à par et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

Alors : 1. $\sum v_n$ conv $\Rightarrow \sum u_n$ conv.

$$\forall n \geq n_0 : \sum_{k=n}^{+\infty} u_k \leq \frac{u_{n_0}}{v_{n_0}} \sum_{k=n}^{+\infty} v_k$$

2. Si $\sum u_n$ div $\Rightarrow \sum v_n$ div

• Rmq :

$$\text{si } \exists r \in]0, 1[\text{ tq } \forall n \geq n_0 : 0 < \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq r$$

Alors $\sum u_n$ conv.

$$\text{et } \forall n \geq n_0 : \sum_{k=n}^{+\infty} u_k \leq u_0 \frac{\lambda^{n-n_0}}{1-r}$$

(il suffit de prendre $v_n = r^n$).

• Th: Règle de D'Alembert : (*)

Si $\sum u_n$ une sàt strictement positif à par :

$$\text{tq } \frac{u_{n+1}}{u_n} \longrightarrow l \in \mathbb{R}_+.$$

Alors : 1) si $l < 1$; $\sum u_n$ conv

2) si $l > 1$; $\sum u_n$ div.

3) si $l = 1$: doute.

4) si $l = 1^+$: div grossièrement.

5) si $l = 1^-$: on ne peut rien conclure.

Comparaison série et intégrale :

Si $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ C.P. sur $[a, b[$, $b \in \mathbb{R}$

• Définition :

On dit que l'intégral $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge ssi l'application : $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ admet une limite finie qd $x \rightarrow b$

• Théorème :

si $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue, positive et décroissante.

Alors : 1. la série de terme général $u_n = \left(\int_{n-1}^n f(t) dt \right)$ converge.

2. $\sum f(n)$ converge ssi $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge.

• Théorème : Règle de n^o u_n : (*)

Si $\sum u_n$ une série à tp, alors,

$$\star \text{ si } \exists \alpha > 1 : n^\alpha u_n \rightarrow l \in [0, +\infty[$$

Alors $\sum u_n$ converge.

$$\star \text{ si } \exists \alpha \leq 1 : n^\alpha u_n \rightarrow l \in]0, +\infty]$$

Alors $\sum u_n$ diverge.

Sommation des relations de comparaison :

1. Cas de convergence :

• Théorème : (*)

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques tq :

1. $v_n \geq 0$ (à par)
2. $u_n = o(v_n)$ (resp $u_n = O(v_n)$)
3. $\sum v_n$ converge.

Alors :

1. $\sum u_n$ converge (m absolu)
2. $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = o\left(T_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$

(Resp $R_n = O(T_n)$).

• Théorème :

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à tp.

$u_n \sim v_n$ et $\sum v_n$ converge.

Alors : $\sum u_n$ converge et $\left(R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right) \sim \left(T_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$

2. Cas de divergence :

• Théorème :

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques tq :

1. $u_n = o(v_n)$ (resp $u_n = O(v_n)$)
2. $v_n \geq 0$ à par n_0 .
3. $\sum v_n$ divergente

$$\text{Alors : } \sum_{k=0}^n u_k = o\left(\sum_{k=0}^n v_k\right)$$

$$\text{(resp } \sum_{k=0}^n u_k = O\left(\sum_{k=0}^n v_k\right))$$

• Corollaire :

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux sàtp (à par)

tq $u_n \sim v_n$ et $\sum v_n$ diverge

$$\text{Alors } \sum_{k=0}^n u_k \sim \sum_{k=0}^n v_k$$

Série géométrique d'une algèbre de dim $< \infty$:

Soit A une algèbre normée et de dim $< \infty$.

$\forall x \in A$, on note $\|x\|$, la norme de x .

• **Théorème: (*)**

Si $x \in A$, $\|x\| < 1$, alors la série géométrique $\sum x^n$ converge absolument donc convergente.

et on a, $(1_A - x)$ inversible dans A .

$$(1_A - x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

• **Corollaire: (*)**

l'ensemble de elmts inversibles de A est un ouvert.

• **Corollaire: (*)**

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\|\cdot\|$ d'algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Alors $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{B}_n(0, \|A\|)$.

Exponentielle d'un élément d'une algèbre normée d'une dim $< \infty$.

Soit A une algèbre normée et de dim $< \infty$ et $a \in A$.

• **Théorème: (*)**

la série $\sum \frac{a^n}{n!}$ converge absolument donc converge. Sa somme: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ est appelée l'exponentielle de a , notée $\exp(a)$ ou e^a .

• **Théorème: (*)**

Si $a, b \in A$: $a \times b = b \times a$

Alors $\exp(a+b) = \exp(a) \cdot \exp(b)$.

• **Corollaire:**

$\forall a \in A$, $\exp(a)$ est inversible et $\exp(a)^{-1} = \exp(a^{-1})$

Famille sommable d'un élément de $\mathbb{K}$.

Ensembles dénombrables.

• **Définition:**

Un ensemble I est dit dénombrable ssi

$I = \emptyset$ ou I est équipotent à $\mathbb{N}$.

• **Définition:**

I est dit au plus dénombrable si I est fini ou I dénombrable.

• **Rmq:**

I est au plus dénombrable si $I = \emptyset$ ou I est équipotent à une partie de $\mathbb{N}$.

• **Théorème: (*)**

Si P une partie infinie de $\mathbb{N}$ alors $\exists!$ biject² strictement croissante de $\mathbb{N} \rightarrow P$.

• **Théorème:**

I est dénombrable si $\exists$ une suite croissante $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'ensembles finis $\subset I$ tq $I = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$

$(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite une suite exhaustive d'ensemble finis de I .

Exemples

$$\mathbb{N} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [0, n] \cap \mathbb{D}.$$

$$\Rightarrow \mathbb{N}^2 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [0, n] \times [0, n] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{(i, j) \in \mathbb{N}^2; i+j \leq n\}.$$

$$\mathbb{Z} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-n, n] \cap \mathbb{D}.$$

• **Proposition:**

Si I et J sont dénombrables alors $I \times J$ l'est.

(Car $I = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$, $J = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_n$ alors $I \times J = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n \times J_n$)

• **Théorème: (*)**

Si I est au plus dénombrable et $\exists$ une surjection de $I \rightarrow J$. Alors J est au plus dénombrable.

• **Théorème: (*)**

Si $(I_i)_{i \in I}$ une famille dénombrable (I dénom), d'ensembles dénombrables disjoints l'a l.

Alors $\bigcup_{i \in I} I_i$ est dénombrable.

Famille sommable de réels positifs.

soit I un ensemble dénombrable. On note

$$\mathcal{P}_f(I) = \{J \subset I / J \text{ est fini}\}.$$

soit $U = (u_i)_{i \in I}$ une famille de réels positifs

$$U \in \mathbb{R}_+^I$$

$\forall J \in \mathcal{P}_f(I)$, on note $S_J(U) = \sum_{i \in J} u_i$

• **Définition:**

la famille $U = (u_i)_{i \in I}$ de réels positifs est dite sommable si: $\exists \pi > 0$, $\forall J \in \mathcal{P}_f(I)$: $S_J(U) \leq \pi$

Dans ce cas, $S(U) = \sup_{J \in \mathcal{P}_f(I)} S_J(U)$ app la somme de la famille sommable.

Def:
Si $(u_i)_{i \in I} \in \mathbb{R}_+^I$ st sommable

Alors $\forall j \in J(I) : S_j(u) = \sum_{i \in j} u_i \leq S(u)$.

Théorème (*)

Si (I_n) une suite exhaustive de I $(I_n)^\uparrow$,
 I_n fini, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n = I$.

Alors la famille $(u_i)_{i \in I} \in \mathbb{R}_+^I$ est sommable ssi la
suite $(S_n(u) = \sum_{i \in I_n} u_i)$ est majorée ssi
 $(S_n(u))$ st convergente.

et dans ce cas : $S(u) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(u) = \sup_{n \in \mathbb{N}} S_n(u)$

Théorème de la suite I_n choisie:

On pose : $K_n = I_n \cup J_n$, (K_n) une suite exhaustive
de I . $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{K_n}(u) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{J_n}(u) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{I_n}(u)$

Applications:

1) Si $I = \mathbb{Z}$, $u = (u_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{Z}}$

$u = (u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est sommable ssi : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$(S_n = \sum_{k=-n}^n u_k)$ converge (majorée)

et $S(u) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=-n}^n u_k$

on le note : $S(u) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n$.

2) $(u_{n,m}) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$

* Si $I_n = [0, n] \times [0, n]$:

$u = (u_{n,m})_{n,m \in \mathbb{N}}$ st sommable ssi $(\sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^n u_{kj})$
converge (majorée)

et dans ce cas : $S(u) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n u_{ij})$
 $= \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} u_{ij}$

* Si $I_n = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2 : i+j \leq n\}$.

$u = (u_{n,m})_{(n,m) \in \mathbb{N}^2}$ sommable ssi $(\sum_{(i,j) \in I_n} u_{ij})$
converge (majorée), ssi $(\sum_{k=0}^n \sum_{i+j=k} u_{ij})$
convergente (majorée).

et dans ce cas : $S(u) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sum_{k=0}^n \sum_{i+j=k} u_{ij})$

(5)

Théorème (comparaison):

Si $u = (u_i)_{i \in I} \in \mathbb{R}_+^I$ et $v = (v_i)_{i \in I} \in \mathbb{R}_+^I$
tg $\forall i \in I : 0 \leq u_i \leq v_i$.

Alors si $v = (v_i)_{i \in I}$ st sommable alors
 $u = (u_i)_{i \in I}$ st sommable et ds ce cas :

$$S(u) \leq S(v).$$

et si $u = (u_i)_{i \in I}$ n'est pas sommable, alors
 $v = (v_i)_{i \in I}$ non sommable.

Théorème:

Si $u = (u_i)_{i \in I}$ et $v = (v_i)_{i \in I}$ deux
familles sommables de réels positifs, alors :

$\forall \lambda \in \mathbb{R}_+ : (\lambda u_i + v_i)_{i \in I}$ st sommable.

et dans ce cas :

$$S(\lambda u + v) = \lambda S(u) + S(v)$$

Notation : $\sum_{i \in I} (\lambda u_i + v_i) = \lambda \sum_{i \in I} u_i + \sum_{i \in I} v_i$.

Théorème (*)

$u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs st
dite sommable ssi $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge

et dans ce cas : $S(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$

Convergence commutative:

Définition:

Si $\sum u_n$ une série numérique. $\sum u_n$
st dite commutativement convergente ssi :

$\forall \sigma$ bij. de $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, la série $\sum u_{\sigma(n)}$
convergente et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$

Exple:

$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ conv et $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-2}}{n} = \ln(2)$.

En prenant ds la somme un terme positif
suivi de 2 termes négatifs.

Théorème (*)

Toute série à termes positifs convergente
st commutativement convergente.

Suite double sommable:

Soit $I = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $u = (u_{n,m})_{(n,m) \in \mathbb{N}^2}$ une suite double de réels positifs.

Théorème:

$u = (u_{n,m})_{(n,m) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable si

la suite $S_n(u) = \left(\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n u_{ij} \right)$ est majorée

ssi la suite (S_n) est convergente.

Et dans ce cas: $S(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} u_{n,m}$

Théorème de sommation par paquet.

Si Λ un ensemble dénombrable, I un ensemble dénombrable tq $(I_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une partition de I .

la famille $u = (u_i)_{i \in I} \in \mathbb{R}_+^I$ est sommable si:

1. $\forall \lambda \in \Lambda$: la famille $(u_i)_{i \in I_\lambda}$ est sommable.

soit $S_\lambda(u) = \sum_{i \in I_\lambda} u_i$

2. la famille $(S_\lambda(u))_{\lambda \in \Lambda}$ est sommable.

Et ds ce cas: $S(u) = \sum_{i \in I} u_i = \sum_{\lambda \in \Lambda} \left(\sum_{i \in I_\lambda} u_i \right)$

Corollaire:

$(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une partition de I (dénumérable)

et $(u_i)_{i \in I} \in \mathbb{R}_+^I$ est sommable si:

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, la suite $(u_i)_{i \in I_n}$ est sommable.

on pose $S_n = \sum_{i \in I_n} u_i$

2. la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} S_n$ converge.

Et ds ce cas: $S(u) = \sum_{i \in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty} S_n$

Corollaire 2 (Th de Fubini: cas réel positif):

Si $u = (u_{n,m})_{n,m \in \mathbb{N}}$ une suite double de réels positifs. Alors $u = (u_{n,m})_{n,m \in \mathbb{N}}$ est sommable ssi

1. $\forall n \in \mathbb{N}$: la série $\sum_{m \in \mathbb{N}} u_{n,m}$ conv

et on pose: $S_n = \sum_{m=0}^{+\infty} u_{n,m}$

2. la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} S_n$ conv

ssi:

1. $\forall m \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_{n,m}$ conv et

on pose: $S_m = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,m}$

2. la série $\sum_{m \in \mathbb{N}} S_m$ conv

ssi:

1. $\forall n \in \mathbb{N}$: la famille $(u_{ij})_{(i,j) \in I_n}$, avec

$I_n = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2 : i+j=n\}$, est sommable

et on pose: $S_n = \sum_{i+j=n} u_{i,j}$

2. la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} S_n$ converge.

Et ds ce cas:

$$S(u) = \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} u_{i,j} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{(i,j) \in I_n} u_{i,j} \right)$$

$$= \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,m} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{i+j=n} u_{i,j} \right)$$

En effet:

1* $I_n = \{(n,m) / m \in \mathbb{N}\}$

2* $I_m = \{(n,m) / n \in \mathbb{N}\}$

3* $I_n = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2 : i+j=n\}$.

Famille sommable d'éléments de $\mathbb{K}$:

Soit I un ensemble dénombrable et $u = (u_i)_{i \in I}$ une famille de $\mathbb{K}$ c-à-d: $u \in \mathbb{K}^I$.

Définition:

la famille $u = (u_i)_{i \in I}$ est sommable ssi la famille de nbres réels positifs: $(|u_i|)_{i \in I}$ est sommable. Leur ensemble est noté $\ell^1(\mathbb{K})$.

Remarques:

Si $(u_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I$ et $(v_i)_{i \in I} \in \mathbb{R}_+^I$ tq:

$\forall i \in I: |u_i| \leq v_i$ tq $(v_i)_{i \in I}$ est sommable alors $(u_i)_{i \in I}$ est sommable.

Calcul de la somme d'une famille sommable:

1 - Cas réel:

Si $u = (u_i)_{i \in I}$ une famille de réels.

On pose: $\forall i \in I: \begin{cases} u_i^+ = \max(u_i, 0) \\ u_i^- = \max(-u_i, 0) \end{cases}$

On a: $\forall i \in I: \begin{cases} u_i = u_i^+ - u_i^- \\ |u_i| = u_i^+ + u_i^- \end{cases}$

Donc $\begin{cases} u_i^+ = \frac{|u_i| + u_i}{2} \\ u_i^- = \frac{|u_i| - u_i}{2} \end{cases}$

• Théorème : (*)

Si $\mu = (\mu_i)_{i \in I} \in \mathbb{R}^I$

Alors $\mu = (\mu_i)_{i \in I}$ est sommable ssi les familles des réels positifs $\mu^+ = (\mu_i^+)_{i \in I}$ et $\mu^- = (\mu_i^-)_{i \in I}$ sont sommables.

On définit la somme de $\mu = (\mu_i)_{i \in I}$, par :

$$\sum_{i \in I} \mu_i = \sum_{i \in I} \mu_i^+ - \sum_{i \in I} \mu_i^-$$

2 - Cas de $\mathbb{C}$:

Si $\mu = (\mu_i)_{i \in I} \in \mathbb{C}^I$

• Théorème : (*)

la famille $\mu = (\mu_i)_{i \in I} \in \mathbb{C}^I$ est sommable ssi les familles de nombres réels : $(\operatorname{Re}(\mu_k))_{k \in I}$ et $(\operatorname{Im}(\mu_k))_{k \in I}$ sont sommables et ds ce cas :

on définit : $S(\mu) = \sum_{k \in I} \mu_k = \sum_{k \in I} \operatorname{Re}(\mu_k) + i \sum_{k \in I} \operatorname{Im}(\mu_k)$

3 - Dans le cas de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ ($\mathbb{K}$) :

• Théorème : (*)

Si $\mu = (\mu_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I$ est sommable, alors pour toute suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ exhaustive de parties finies de I , la suite $(S_{J_n}(\mu) = \sum_{i \in J_n} \mu_i)_n$ est convergente et ds ce cas :

$$S(\mu) = \sum_{i \in I} \mu_i = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{J_n}(\mu)$$

• Théorème :

Si $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ alors la suite $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable ssi la série $\sum \mu_n$ converge absolument et ds ce cas : $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu_n$.

• Théorème : (*)

Toute série absolument conv et commutative est convergente.

• Th de sommation par paquets :

soit Λ un ensemble dénombrable : $(I_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une sommation une partition de I .

Alors $\mu = (\mu_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I$ est sommable :

1. $\forall \lambda \in \Lambda$: $(\mu_i)_{i \in I_\lambda}$ est sommable
on pose $s_\lambda = \sum_{i \in I_\lambda} \mu_i$
2. $(s_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ est sommable.

et ds ce cas :

$$S(\mu) = \sum_{i \in I} \mu_i = \sum_{\lambda \in \Lambda} \left(\sum_{i \in I_\lambda} \mu_i \right)$$

• Corollaire :

Si $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une partition de I , alors la famille : $\mu = (\mu_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I$ est sommable ssi :

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, la famille $(\mu_i)_{i \in I_n}$ est sommable et on pose $S_n = \sum_{i \in I_n} \mu_i$
2. la série de réels positifs : $\sum S_n$ converge.

On a donc : $S(\mu) = \sum_{i \in I} \mu_i = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{i \in I_n} \mu_i \right)$

Suite double sommable d'éléments de $\mathbb{K}$:

Si $\mu = (\mu_{n,m})_{n,m \in \mathbb{N}}$ une suite double d'éléments de $\mathbb{K}$.

• Théorème :

$\mu = (\mu_{n,m})_{n,m \in \mathbb{N}}$ est sommable ssi :

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, n fixé : la série $\sum_{m \in \mathbb{N}} |\mu_{n,m}|$ converge.
on pose $S_n = \sum_{m=0}^{+\infty} |\mu_{n,m}|$
2. la série de réels positifs : $\sum_{n \in \mathbb{N}} S_n$ conv.

ssi :

1. $\forall m \in \mathbb{N}$, m fixé : $\sum_{n \in \mathbb{N}} |\mu_{n,m}|$ converge.
on pose $S_m = \sum_{n=0}^{+\infty} |\mu_{n,m}|$
2. $\sum S_m$ converge

et ds ce cas : $S(\mu) = \sum_{(n,m) \in \mathbb{N}^2} \mu_{n,m}$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \mu_{n,m}$$

$$= \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \mu_{n,m} \quad (\text{Fubini}).$$

• Corollaire :

$\mu = (\mu_{n,m})_{n,m \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}^2}$ est sommable ssi :

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, n fixé : $(\mu_{i,j})_{i+j=n}$ est sommable
et on pose : $S_n = \sum_{i+j=n} |\mu_{i,j}|$
2. la série $\sum S_n$ converge.

et ds ce cas : $S(\mu) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{i+j=n} \mu_{i,j} \right)$

• Propriété :

$\ell^2(\mathbb{K}) = \{ \mu = (\mu_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I, \text{ sommable} \}$ est un $\mathbb{K}$ -ev norme et $\forall \mu = (\mu_i)_{i \in I} \in \ell^2(\mathbb{K})$: $\|\mu\| = \sum_{i \in I} |\mu_i|$

Produit de Cauchy de deux séries:

- Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries de $\mathbb{K}$.
leur produit de Cauchy est la série $\sum w_n$
où $w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k} = \sum_{k=0}^n u_{n-k} v_k = \sum_{i+j=n} u_i v_j$

• Théorème: (*)

Si $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries absolument conv
alors la suite double $u = (a_n b_m)_{n,m} \in \mathbb{N}^2$ est
sommable et $S(u) = \sum_{(n,m) \in \mathbb{N}^2} a_n b_m = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right) \left(\sum_{m=0}^{+\infty} b_m \right)$

• Th: produit de Cauchy: (*)

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries abs conv, alors
leur produit de Cauchy $\sum w_n$ est absolument
convergent et on a:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right)$$

Cas réel positif :

Sommable : $u = (u_i)_{i \in I} \in \mathbb{R}^{+I}$ une famille de réels positifs, indexée par un ensemble dénombrable I .

Pour toute partie non vide et finie J de I , on note :

$$S_J(u) = \sum_{i \in J} u_i \text{ la somme partielle relative à } J.$$

* La famille u est sommable si l'ensemble $\{S_J(u) / J \subset I, J \text{ finie}\}$ est majoré.

Dans ce cas, la somme de u est :

$$S(u) = \sum_{i \in I} u_i = \sup \{S_J(u) / J \subset I, J \text{ finie}\}.$$

Rmq :

Toute sous famille d'une famille sommable est sommable.

Exemple :

Pour $I = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$: $u_{p,q} = \left| \frac{1}{p^2 - q^2} \right|$ si $p \neq q$ et $u_{p,p} = 0$

$\mathbb{N}$ n'est pas dénombrable, car la sous famille

$$(u_{(k+1,p)})_{p \geq 0} = \left(\frac{1}{(k+1)^2} \right)_{p \geq 0} \text{ n'est pas sommable.}$$

Théorème de sommation par paquets :

* $u = (u_i)_{i \in I} \in \mathbb{R}^{+I}$ famille de réels positifs indexée par I et $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une partition de I .

* la famille u est sommable si $\forall n \in \mathbb{N}$, la sous-famille $(u_i)_{i \in I_n}$ est sommable et la série $\sum_{n \geq 0} \left(\sum_{i \in I_n} u_i \right)$ est convergente.

$$\text{Dans ce cas : } S(u) = \sum_{i \in I} u_i = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i \in I_n} u_i \right)$$

Exemple 1 :

* Pour quelles valeurs α , la famille $u = \left(\frac{1}{(p+q+1)^\alpha} \right)_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ est-elle sommable ?

⇒ On considère la partition :

$$I_n = \{(p,q) \in \mathbb{N}^2 : p+q+1 = n\}, n \geq 1$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \sum_{(p,q) \in I_n} \frac{1}{(p+q+1)^\alpha} = \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{n^\alpha} = \frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{\alpha-1}} \text{ converge si } \alpha > 2.$$

Donc u est sommable si $\alpha > 2$.

Dans ce cas, d'après TSPP :

$$\sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} \frac{1}{(p+q+1)^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha-1}} = \zeta(\alpha-1)$$

Exemple 2 :

* Pour $n \geq 1$, d_n : le nbre de diviseurs de n .
Soit $0 < x < 1$. On a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{p=1}^{\infty} d_p x^p$

$$\Rightarrow \text{On écrit : } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} x^{nm}$$

$$\text{On pose } u = (x^{nm})_{n,m \geq 1}.$$

On considère la partition :

$$I_p = \{(n,m) \in \mathbb{N}^{*2} / mn = p\}, p \geq 1.$$

$$\forall p \in \mathbb{N}^* : \sum_{(n,m) \in I_p} x^{nm} = \sum_{(n,m) \in I_p} x^p = d_p x^p.$$

$$\sum_{p \geq 1} d_p x^p \text{ converge car dominé par } p x^p$$

Donc u est sommable.

D'où le résultat.

Cas réel ou complexe :

Sommable :

* $u = (u_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I$ famille de réels ou complexes, indexée par un ensemble I dénombrable.

* u est sommable si $v = (|u_i|)_{i \in I} \in \mathbb{R}^{+I}$ est sommable.

Cas réel :

$$\text{On pose } \forall i \in I : \begin{cases} u_i^+ = \max(u_i, 0) \\ u_i^- = \max(-u_i, 0) \end{cases}$$

$$\text{Alors } \begin{cases} u_i = u_i^+ - u_i^- \\ |u_i| = u_i^+ + u_i^- \end{cases}$$

$u = (u_i)_{i \in I} \in \mathbb{R}^I$ est sommable si u^+ et u^-

le sont et ds ce cas :

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{i \in I} u_i^+ - \sum_{i \in I} u_i^-$$

Cas complexes :

$$\forall i \in I, u_i = \operatorname{Re}(u_i) + i \operatorname{Im}(u_i)$$

$u = (u_i)_{i \in I} \in \mathbb{C}^I$ est sommable si $(\operatorname{Re}(u_i))$ et $(\operatorname{Im}(u_i))$

le sont et ds ce cas :

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{i \in I} \operatorname{Re}(u_i) + i \sum_{i \in I} \operatorname{Im}(u_i)$$

Exemple:

* Pour quelles valeurs du complexe z , la famille $u = (n z^{nm})_{(n,m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*}$ est sommable?

$\Rightarrow$ Étudions la sommabilité de $v = (n z^{nm})_{(n,m)}$.

si $|z| \geq 1$, c'est non sommable.

si $|z| < 1$: on considère, $I_n = \mathbb{N}^* \times \{n\}$, $n \geq 1$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*: \sum_{(p,q) \in I_n} |q z^{pq}| = \frac{\ln z^n}{1 - |z|^n} \sim \ln z^n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Donc $\sum \frac{\ln z^n}{1 - |z|^n}$ converge.

Théorème de sommabilité par paquet:

* $u = (u_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I$ et I_n partition de I .

* u est sommable si $\forall n \in \mathbb{N}$, la sous-famille $(u_i)_{i \in I_n}$ l'est et $\sum_{n \geq 0} \left(\sum_{i \in I_n} |u_i| \right)$ converge.

Dans ce cas:

$$s(u) = \sum_{i \in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{i \in I_n} u_i \right)$$

Exemple:

* η, ξ est DSE sur $]1, +\infty[$:

$\Rightarrow$ On a ξ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $I =]1, +\infty[$.

$$\text{et } \forall k \geq 1, \forall k \in \mathbb{N}, \xi^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-\ln(n))^k}{n^x}.$$

On cherche à m.g.

$$\forall x_0 > 1, \exists \eta > 0: \xi(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\xi^{(k)}(x_0) (x - x_0)^k}{k!},$$

$$\text{lsq } |x - x_0| < \eta.$$

On considère la famille:

$$u = \left(\frac{-\ln(n)^k (x - x_0)^k}{n^{x_0} k!} \right)_{(n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}}$$

On considère la partition:

$$I_n = \{n\} \times \mathbb{N}, \quad n \geq 1$$

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*: \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|(x - x_0) \ln(n)|^k}{n^{x_0} k!} &= \frac{1}{n^{x_0}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|\ln(n)|^k}{k!} |x - x_0|^k \\ &= \frac{1}{n^{x_0}} e^{|(x - x_0) \ln(n)|} = \frac{|x - x_0|}{n^{x_0}} \frac{1}{e^{x_0 - |x - x_0|}} \end{aligned}$$

Pour $\eta = x_0 - 1$ et $|x - x_0| < \eta$:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{x_0 - |x - x_0|}} \text{ existe}$$

Donc, d'après TSPP: u est sommable lsq $|x - x_0| < \eta$.

et on a:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\xi^{(k)}(x_0) (x - x_0)^k}{k!} &= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-\ln(n))^k (x - x_0)^k}{n^{x_0} k!} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{x_0}} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-\ln(n))^k (x - x_0)^k}{k!} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{x_0}} \frac{1}{e^{x_0 - (x - x_0)}} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} = \xi(x) \end{aligned}$$

Suites et séries de fct^e

Suites de fct^e
 E un evn de dim $< \infty$.

$A \subseteq E, A \neq \emptyset$.

Suites de fonctions:

Définition:

On appelle suite de fct^e de $A \rightarrow E$ toute suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathcal{F}(A, E))^{\mathbb{N}}$.

Rmq:

de domaine de définition d'une suite f_n et l'un des domaines de def de f_n .

Convergence simple d'une suite de fonctions:

Définition:

Soit (f_n) une suite de fct^e de $A \rightarrow F$. On dit qu'elle converge simplement sur A si:

$\forall x \in A$, la suite $(f_n(x))$ converge ds E .

d'apr: $f: x \mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ st aff la lim simple de (f_n) .

Définition:

Si (f_n) une suite définie sur A . On appelle domaine de convergence simple de (f_n) :

$D = \{x \in A, f_n(x) \text{ converge ds } E\}$.

Propriété:

(f_n) converge simplement vers f sur A si:

$\forall x \in A, \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow \|f_n(x) - f(x)\|_F < \epsilon$

Convergence uniforme:

Définition:

Soit (f_n) une suite de fct^e de $A \rightarrow F$ et $f: A \rightarrow F$,

on dit que (f_n) converge uniformément vers f sur A , si:

1. $(f_n - f)$ bornée par rapport à x .

2. $\|f_n - f\|_{\infty} \rightarrow 0$

On note $f_n \xrightarrow[A]{C.U.} f$

Théorème:

Si $f_n \xrightarrow[A]{C.U.} f$ alors $f_n \xrightarrow[A]{C.S.} f$

(car $\forall x \in A: \|f_n(x) - f(x)\|_F \leq \|f_n - f\|_{\infty} \rightarrow 0$).

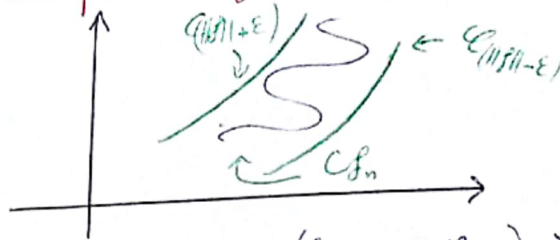
La réciproque st fausse.

Théorème:

$f_n \xrightarrow[A]{C.U.} f$ si:

$\forall \epsilon > 0, \exists N_{\epsilon} \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_{\epsilon}, \|f_n(x) - f(x)\|_F < \epsilon$.

Interprétation géométrique de la C.U.



Ces tube de la tube $(C_{f, \epsilon}, C_{f, -\epsilon})$ à par

Propriété: (*)

si 1. $f_n \xrightarrow[A]{C.U.} f$

2. $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ bornée sur A .

Alors f st bornée sur A .

Rmq:

la prop permet de montrer parfois que la convergence n'est pas uniforme.

Corollaire:

Si $B(A, F) = \{f: A \rightarrow F / f \text{ st bornée sur } A\}$.

Alors $(B(A, F), \|\cdot\|_{\infty})$ st un fermé.

Propriété:

1. Si $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{L}(E, F)$ et $f_n \xrightarrow[E]{C.S.} f$ alors $f \in \mathcal{L}(E, F)$

2. Si A convexe de $E: (f_n): A \rightarrow F$, tq $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ st convexe et $f_n \xrightarrow[A]{C.S.} f$ Alors f st convexe.

3. Si $f_n: \mathbb{R} \rightarrow F$ T. périodique, $\forall n \in \mathbb{N}$, et $f_n \xrightarrow[\mathbb{R}]{C.S.} f$ alors f st T. périodique.

Définition (convergence uniforme sur tout compact):

Si (f_n) une suite de fct^e de: $A \rightarrow F$, on dit (f_n) converge uniformément sur tout compact de A vers f si: $\forall K \subset A, K$ compact, $(f_n|_K)_{n \in \mathbb{N}}$ converge unif^t ds K vers $f|_K: K \rightarrow F$.

• Remarque :

Si $f_n : A \subset \mathbb{R} \rightarrow F$

* Si A_+^* (resp $\mathbb{R}_+^*$) : pour montrer que $f_n \xrightarrow{CU} f$ sur tout compact de $\mathbb{R}_+^*$ (resp de $\mathbb{R}^*$), il suffit de mq $f_n \xrightarrow{CU} f$ sur $(a, +\infty[$, $a > 0$, (resp $]-\infty, a]$, $a < 0$).

* Si $A = \mathbb{R}$: pour mq la convergence uniforme sur tout compact, il suffit de montrer la convergence uniforme sur $[-n, n]$, avec $n > 0$.

• Théorème :

Si $(f_n)_n$ une suite de fct² de $A \rightarrow F$ tq $f_n \xrightarrow{C.S} f$ sur A .

Alors : $f_n \xrightarrow{CU} f$ si $\left| \begin{array}{l} \exists (\alpha_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}} \text{ (} \alpha_n \text{ ne d'p'd pas de } n \text{)} \\ \forall x \in A : \|f_n(x) - f(x)\| \leq \alpha_n \end{array} \right.$

Th généralisé de Weierstrass :

Convergence uniforme et $\lim_{x \rightarrow a}$:

• Théorème : (*)

Si (f_n) une suite de fct² de $A \rightarrow F$ et $a \in \bar{A}$:

hyp : $\left| \begin{array}{l} 1. \forall n \in \mathbb{N} : f_n(x) \text{ admet une lim } l_n \text{ q'd } x \rightarrow a \\ 2. \text{ la suite } (f_n) \text{ CU vers } f \text{ sur } A. \end{array} \right.$

C/c : $\left| \begin{array}{l} 1. \text{ la suite } (l_n) \text{ converge ds } F \text{ vers } l \in F \\ 2. f(x) \text{ admet une lim q'd } x \rightarrow a \text{ et } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \text{ c'ad : } \\ \lim_{x \rightarrow a} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \right). \end{array} \right.$

• Remarque

1) Le th donne des condit^e suffisantes d'intervention des limites q'd $x \rightarrow a$ et $n \rightarrow +\infty$

2) Le théorème est parfois utilisé pour mq la non convergence uniforme, c'ad :

Si $f_n \xrightarrow{C.S} f$ et on a : $\lim_{x \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$

Alors la conv n'est pas uniforme.

Convergence uniforme et continuité :

• Théorème :

Si (f_n) une suite de fct² de $A \rightarrow F$, $a \in A$:

hyp : $\left| \begin{array}{l} 1. \text{ Si } \forall n \in \mathbb{N}, f_n \text{ est continue en } a. \\ 2. \text{ Si } f_n \text{ converge vers } f \text{ sur } A. \end{array} \right.$

Alors f est continue en a .

(Il suffit de prendre $f_n = f_n(a)$ ds le th précédent)

• Remarque :

1. Le th donne des conditions suffisantes de la continuité de limite de f_n .

2. Le th est parfois utilisé pour montrer la non convergence uniforme, c'ad :

Si $f_n \xrightarrow{C.S} f$ sur A et toutes les f_n sont continues en a mais f ne l'est pas, alors la convergence n'est pas uniforme.

• Corollaire 1 :

Si (f_n) une suite de fct² de $A \rightarrow F$.

hyp : $\left| \begin{array}{l} 1. \forall n \in \mathbb{N}, f_n \text{ continue sur } A. \\ 2. f_n \xrightarrow{CU} f \text{ sur } A. \end{array} \right.$

C/c : f est continue sur A .

• Corollaire 2 : (*)

Si (f_n) une suite de fct² de $A \rightarrow F$.

hyp : $\left| \begin{array}{l} 1. \forall n \in \mathbb{N}, f_n \text{ continue sur } A \\ 2. (f_n) \text{ CU sur tout compact de } A. \end{array} \right.$

C/c : f est continue sur A .

Convergence uniforme et intégrat² sur un segment :

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$

(f_n) une suite de fct² de $[a, b] \rightarrow F$.

• Théorème : *

hyp : $\left| \begin{array}{l} 1. \forall n \in \mathbb{N}, f_n \text{ est continue sur } [a, b]. \\ 2. f_n \xrightarrow{CU} f \text{ sur } [a, b]. \end{array} \right.$

C/c : $\left| \begin{array}{l} 1. f \text{ est continue sur } [a, b] \\ 2. \text{ la suite } \left(\int_a^b f_n(t) dt \right) \text{ converge ds } F. \\ 3. \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b f(t) dt, \text{ c'ad } \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a, b]} f_n = \int_{[a, b]} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n. \end{array} \right.$

Convergence et primitive:

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$; $I \neq \emptyset$.

(f_n) une suite d'application de $I \rightarrow F$. soit $a \in I$.

Théorème: *

- hyp: $\left\{ \begin{array}{l} 1. \forall n \in \mathbb{N}, f_n \text{ continue sur } I \\ 2. (f_n) \text{ converge unif sur tout sgmt de } I. \end{array} \right.$

c/c: $f_n: x \mapsto \int_a^x f_n(t) dt$ converge unif sur tout sgmt de I vers $F: x \mapsto \int_a^x f(t) dt$.

Convergence et dérivation:

Théorème:

Si (f_n) une suite d'application de $I \rightarrow F$.

- hyp: $\left\{ \begin{array}{l} 1. \forall n \in \mathbb{N}: f_n \text{ de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } I. \\ 2. (f_n) \text{ converge simplement vers } f \text{ sur } I. \\ 3. (f'_n) \text{ conv unif sur tout sgmt de } I. \end{array} \right.$

c/c: $\left\{ \begin{array}{l} 1. f \text{ est de } \mathcal{C}^1 \text{ sur } I \text{ et } \forall x \in I: f'(x) = g(x) \\ \quad \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n(x) \right) = \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n \right)'(x) \\ 2. (f_n) \text{ converge unif vers } f \text{ sur tout sgmt de } I. \end{array} \right.$

Corollaire:

Soit $p \in \mathbb{N}$ et $f_n: I \rightarrow F$

- hyp: $\left\{ \begin{array}{l} 1. \forall n \in \mathbb{N}, f_n \text{ de classe } \mathcal{C}^p \text{ sur } I. \\ 2. (f_n) \text{ conv simplement sur } I \text{ vers } f. \\ 3. \forall k \in \mathbb{N}, p-1 \leq k: (f_n^{(k)}) \text{ CS sur } I \text{ vers } g_k. \\ 4. (f_n^{(p)}) \text{ CU sur tout sgmt de } I \text{ vers } g_p. \end{array} \right.$

c/c: $\left\{ \begin{array}{l} 1. f \text{ est de classe } \mathcal{C}^p \text{ sur } I \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}, p-1 \leq k: \\ \quad \forall x \in I: f^{(k)}(x) = g_k(x). \\ 2. \forall k \in \mathbb{N}, p-1 \leq k: (f_n^{(k)}) \text{ conv unif sur tout sgmt de } I \text{ vers } g_k \text{ (avec } g_0 = f). \end{array} \right.$

Corollaire:

- hyp: $\left\{ \begin{array}{l} 1. f_n \text{ de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } I, \forall n \in \mathbb{N}. \\ 2. (f_n) \text{ conv simplement sur } I \text{ vers } f. \\ 3. \forall k \in \mathbb{N}: (f_n^{(k)}) \text{ CU sur tout sgmt de } I \text{ vers } g_k. \end{array} \right.$

c/c: $\left\{ \begin{array}{l} f \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } I \text{ et:} \\ \quad \forall x \in I: f^{(k)}(x) = g_k(x) \text{ et } g_0 = f. \end{array} \right.$

Série de fonctions:

Soit A une partie de E :

Série de fonctions:

Définition:

on appelle série de fonctions de A toute série $\sum f_n$ où (f_n) est une suite d'app de $A \rightarrow F$.

Exple:

$$\sum e^{-n^2 x} \text{ où } f_n: x \mapsto e^{-n^2 x}$$

Définition:

Pour la série de fonction $\sum f_n$:

$\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est appelé terme général de la série.

Convergence simple:

Définition:

On dit que la série $\sum f_n$ converge simplement sur A si: $\forall x \in A$: la série $\sum f_n(x)$ converge dans F et de ce cas: l'app: $A \rightarrow F: x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ est appelé la somme de la série.

Théorème:

$\sum f_n$ C.S sur A si la suite de $f_n^{(0)}$: $S_n: x \mapsto \sum_{k=0}^n f_k(x)$ converge simp sur A . et de ce cas:

$$\forall x \in A: \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^n f_k(x) \right)$$

Définition:

Si $\sum f_n$ une série de $f_n^{(0)}$ de $f_n^{(0)}$ de $A \rightarrow F$. on appelle domaine de conv simple de $\sum f_n$:

$$D = \{x \in A / \sum f_n(x) \text{ conv ds } F\}.$$

Théorème (CN de convergence simple):

$\sum f_n$ C.S sur $A \Rightarrow$ la suite (f_n) C.S sur A vers 0.

Proposition:

Si $\sum f_n$ C.S sur A , on définit $\forall n \in \mathbb{N}$.

$$R_n: x \mapsto \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \text{ dite le reste d'ordre } n,$$

alors (R_n) converge simplement vers l'application nulle sur A .

$$\text{Car: } \forall x \in A: R_n(x) = S(x) - S_n(x)$$

$$\text{et } S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$$

$$\text{et } S_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x)$$

Convergence absolue :

Si $\sum f_n$ une série de fct^o de $A \rightarrow F$.

• Définition :

On dit la série $\sum f_n$ converge absolument sur A

ssi : $\forall x \in A : \sum \|f_n(x)\|_F$ converge de $\mathbb{R}_+$,

ssi : $\sum \|f_n\|$ converge simplement sur A .

Exple :

$\sum \frac{(-1)^{n-2}}{n^x}$ conv simple sur $]0, +\infty[$ (LSCA)

$\sum \frac{(-1)^n}{n^x}$ conv simple sur $]1, +\infty[$

• Théorème :

Si $\sum f_n$ CA sur A alors $\sum f_n$ C.S. sur A .

Convergence uniforme d'une série de fct^o :

Si $\sum f_n$ une série de fct^o de $A \rightarrow F$.

$\forall n \in \mathbb{N} : S_n : A \rightarrow F$ (la suite des sommes partielles)
 $x \mapsto \sum_{k=0}^n f_k(x)$

• Définition :

On dit que la série $\sum f_n$ converge uniformément sur A ssi la suite (S_n) converge unif^t sur A .

• Théorème :

$\sum f_n$ CU sur $A \Leftrightarrow \begin{cases} 1. \sum f_n$ C.S. sur A \\ 2. $\|R_n\|_{\infty}^A \rightarrow 0$. \\ (R_n CU sur A vers l'app 0).

• Th (CN de convergence uniforme) : (*)

$\sum f_n$ CU sur $A \Rightarrow \|f_n\|_{\infty}^A \rightarrow 0$.

Exple :

$\sum \frac{(-1)^{n-2}}{n^x}$ ne conv pas unif^t sur $]0, +\infty[$,

car : $\sup_{x \in]0, +\infty[} \left| \frac{(-1)^{n-2}}{n^x} \right| = 1 \not\rightarrow 0$

Convergence normale d'une série de fct^o :

Si $\sum f_n$ une série de fct^o de $A \rightarrow F$.

• Définition :

On dit que $\sum f_n$ converge normalement sur A

ssi : $\forall n \in \mathbb{N} : f_n$ est bornée sur A/x et $\sum \|f_n\|_{\infty}$ converge de $\mathbb{R}_+$.

• Théorème : (*)

$\sum f_n$ converge normalement sur A (CN sur A)

ssi : $\exists (a_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ (ne dépend de x), $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in A : \|f_n(x)\| \leq a_n$ et $\sum a_n$ converge. (4)

• Théorème : (+) (*)

Si $\sum f_n$ une série à valeurs réelles $\forall x \in A$:

$\sum f_n(x)$ alternée vérifiant le critère spécifique pour certaines séries alternées.

Alors $\sum f_n$ CU sur $A \Leftrightarrow \|f_n\|_{\infty} \rightarrow 0$.

Exple :

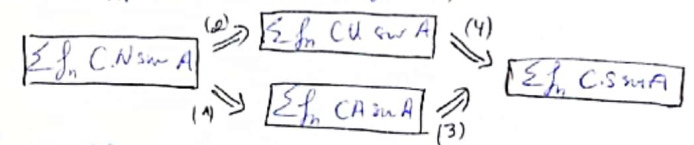
$\sum \frac{(-1)^{n-2}}{n^x}$ CU sur $[a, +\infty[$, $\forall a > 0$.

$|f_n(x)| = \frac{(-1)^{n-2}}{n^x} = \frac{1}{n^x}$

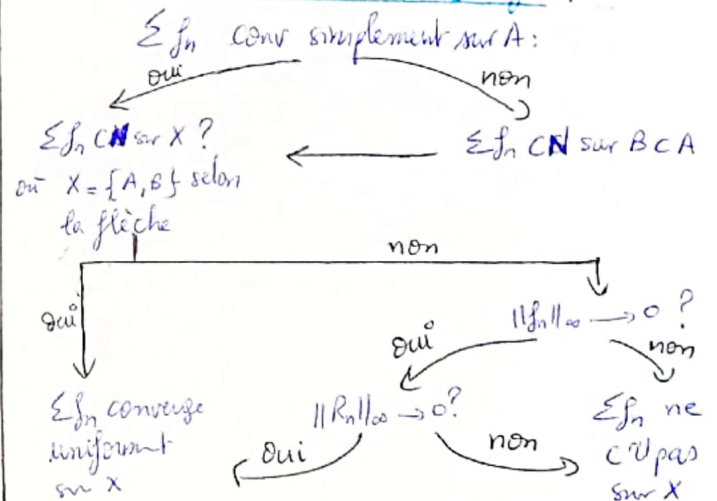
et $\|f_n\|_{\infty}^{[a, +\infty[} = \frac{1}{n^a} \rightarrow 0$.

• Théorème : Modes de convergence : (*)

Si $\sum f_n$ une série de fct^o, on a :



Plan d'étude d'une série de fct^o :



• Rmq :

la réciproque de (2) est fautive.

Théorèmes généraux des séries de fct^o :

Convergence et limite :

• Théorème : (d'involution linéaire et somme) : (*)

Si $\sum f_n$ série de fct^o de $A \rightarrow F$ et $a \in \bar{A}$.

Rq : $\forall n \in \mathbb{N} : f_n(x)$ admet une lim t_n qd $x \rightarrow a$.

• $\sum f_n$ converge unif^t sur A .

Alors :

- $\sum t_n$ converge de F .
- Si $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ admet une lim qd $x \rightarrow a$ et $\lim_{x \rightarrow a} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} t_n$.
- $\lim_{x \rightarrow a} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$

Convergence et continuité:

Théorème: (continuité de la somme d'une série de fct²)

soit $\sum f_n$ une série de fct² de $A \rightarrow F$.

• $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n continue sur A .

• $\sum f_n$ convergente unif^t sur tout compact K de A .

Alors $S: x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est continue sur A .

Théorème: (*)

soit A une algèbre normée de dim finie.

d'op: $\mu: \mathbb{B}(0,1) \rightarrow A$

$$a \mapsto (1-a)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n$$

est continue sur $\mathbb{B}(0,1)$

Théorème: (*)

Soit A une algèbre normée de dim finie

d'op: $\exp: A \rightarrow A$ est continue
 $a \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}$

Convergence et intégrale: interversion $\sum$ et $\int_{[a,b]}$

Si $\sum f_n$ une série de fct² de $[a,b] \rightarrow F$.

Théorème:

hyp:

- $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[a,b]$.
- $\sum f_n$ conv unif^t sur $[a,b]$.

ck:

- la série $\sum f_n$ converge dans F
- $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est continue sur $[a,b]$
- $\int_{[a,b]} (\sum_{n=0}^{+\infty} f_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{[a,b]} f_n$

Remarque:

* le théorème donne des CS d'interversion.

* Parfois, on peut intervertir $\int_{[a,b]}$ et $\sum$ sans qu'il y ait la convergence uniforme.

Convergence et dérivation terme à terme de $\sum f_n$

Si $\sum f_n$ une série de fct² d'intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans F .

Théorème:

hyp:

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I .
2. $\sum f_n$ C.S sur I .
3. $\sum f'_n$ CU sur $\forall$ segment de I .

ck:

1. $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I
et $\forall x \in I, (\sum_{n=0}^{+\infty} f_n)'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n(x)$
2. $\sum f_n$ CU sur $\forall$ segment de I .

Théorème:

Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

hyp:

- $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathcal{C}^p$ sur I .
- $\forall k \in [0, p-1], \sum f_n^{(k)}$ C.S sur I .
- $\sum f_n^{(p)}$ CU sur $\forall$ segment de I .

ck:

1. $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est de classe $\mathcal{C}^p$ sur I
et $\forall k \in [1, p], \forall x \in I, (\sum_{n=0}^{+\infty} f_n)^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}(x)$
2. $\forall k \in [0, p], \sum f_n^{(k)}$ CU sur $\forall$ segment de I .

Théorème: (*)

Soit A une algèbre normée de dim finie, o.t.

Alors: $e_a: \mathbb{R} \rightarrow A$
 $t \mapsto \exp(ta) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n a^n}{n!}$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \mathbb{R}, (e_a^{(k)})(t) = a^k \cdot e_a(t)$

Théorème d'approximation:

Théorème: (*)

Toute fonction continue sur $[a, +\infty[$ est limite uniforme d'une suite de fct² en escalier sur $[a,b]$ cad, si $f \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{K})$, $\exists (f_n) \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{K})^\omega$.

$$\|f - f_n\|_{\infty}^{[a,b]} \rightarrow 0.$$

Remarque:

$$(\mathcal{C}[a,b], F) \subset (\mathcal{C}([a,b], F), \|\cdot\|_\infty)$$

Si $f \in \mathcal{C}([a,b], F)$:

$$\forall \varepsilon > 0: \mathcal{B}(f, \varepsilon) \cap \mathcal{E}([a,b], F) \neq \emptyset$$

$$\forall \varepsilon > 0: \exists \varphi \in \mathcal{C}([a,b], F), \|f - \varphi\|_\infty < \varepsilon.$$

Corollaire: (*)

Toute fct² continue par morceaux sur un segment $[a,b] \subset \mathbb{R}$ est limite uniforme d'une suite de fct² en escalier.

Théorème de Stone Weierstrass:

Si f continue sur un segment $[a,b] \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$, alors:

f a limite uniforme d'une suite de P_n polynômes sur $[a, b]$.

cad. $\forall \epsilon \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, $\exists p_n$ une suite de polynômes : $\|f - p_n\|_{\infty} \rightarrow 0$.

Donc. $\forall \epsilon > 0$, $\exists p_\epsilon$ polynôme, $\forall x \in [a, b]$.

$$|p_\epsilon(x) - f(x)| < \epsilon.$$

• Remq.

le th est faux si f continue (en général) sur I qui n'est pas un segment de $\mathbb{R}$ (TD).

La fonction Gamma Γ

• Définition

La fonction Γ d'Euler :

$$\forall x > 0 : \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

($t \mapsto t^{x-1} e^{-t}$ étant intégrable).

• Propriétés :

1) $\forall x > 0 : \Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$ (intégrer par parties)

2) $\Gamma(1) = 1$

3) $\forall n \in \mathbb{N}^* : \Gamma(n) = (n-1)!$

• $\forall x > 0 : \Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]0, +\infty[:$

On pose, $f_n :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$

$$t \mapsto \begin{cases} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} & \text{si } t \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$\Rightarrow f_n$ est CM sur $]0, +\infty[$

$\forall t > 0 : f_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \chi_{[0, n]} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} t^{x-1} e^{-t} = f(t)$

$f_n \xrightarrow{CS} f$ et $f \in \mathcal{C}^1(]0, +\infty[, \mathbb{R})$.

• Domination :

$\forall t \in]0, +\infty[:$

soit $t \in]0, +\infty[: f_n(t) = \exp(n \ln(1 - \frac{t}{n})) \cdot t^{x-1}$

$\leq \exp(-\frac{t}{n}) t^{x-1}$

$\leq e^{-t} t^{x-1} = \varphi(t)$

Donc $\forall t > 0 : |f_n(t)| \leq \varphi(t)$

et $\varphi \in \mathcal{C}^1(]0, +\infty[, \mathbb{R}^+)$

Au voisinage de 0 : $e^{-t} t^{x-1} \sim \frac{1}{t^{1-x}}$

et $t \mapsto \frac{1}{t^{1-x}}$ est intégrable sur $]0, 1]$ si :

$1-x < 1$ c'est-à-dire $x > 0$.

Pour $x > 0 : e^{-t} t^{x-1} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$

et $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$

Donc $\varphi \in \mathcal{L}^1(]0, +\infty[, \mathbb{R}^+)$

D'après TCD : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \int_0^{+\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) dt$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = \Gamma(x)$

• $B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt, \forall x, y > 0$

1. $B(x, y)$ bien définie :

$g : t \mapsto t^{x-1} (1-t)^{y-1}$ cont, ≥ 0 sur $]0, 1[$

Au voisinage de 0 : $g(t) \sim t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}}$ intégrable

si $x > 0$.

Au voisinage de 1 : $g(t) \sim \frac{1}{(1-t)^{1-y}}$ intégrable

au voisinage de 1 si $y > 0$.

Donc g est intégrable sur $]0, 1[$.

2. $B(x+1, y) = \int_0^1 \frac{x}{x+y} B(x, y) :$

$B(x+1, y) = \int_0^1 t^x (1-t)^{y-1} dt$

$= \int_0^1 \left(\frac{t}{1-t}\right)^x (1-t)^{x+y-1} dt$

$= - \int_0^1 \left(\frac{t}{1-t}\right)^x \left(\frac{(1-t)^{x+y}}{x+y}\right)' dt$

$= \frac{x}{x+y} \int_0^1 \left(\frac{t}{1-t}\right)^{x-1} (1-t)^{x+y} \frac{1}{(1-t)^2} dt$

$= \frac{x}{x+y} \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$

$= \frac{x}{x+y} B(x, y)$

3) $\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^x n!}{\prod_{k=0}^n (x+k)}$

• $\Gamma\left(\frac{1}{x}\right) = \sqrt{\pi}$:

On a: $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt \stackrel{u=\sqrt{t}}{=} 2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$

• Γ est continue sur $]0, +\infty[$:

$f:]0, +\infty[\times]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, t) \mapsto t^{x-1} e^{-t}$

$\forall x \in]0, +\infty[$, $t \mapsto t^{x-1} e^{-t} \in C^0([0, +\infty[, \mathbb{R})$

$\forall t \in]0, +\infty[$: $x \mapsto t^{x-1} e^{-t}$ continue sur $]0, +\infty[$.

Soit $[a, b] \subset]0, +\infty[$:

$\forall x \in [a, b]$: $\forall t \in]0, +\infty[$: $|f(x, t)| = t^{x-1} e^{-t}$
 $\leq \begin{cases} t^{b-1} e^{-t} & \text{si } t \geq 1 \\ t^{a-1} & \text{si } t < 1 \end{cases}$

Soit $\varphi:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$
 $t \mapsto \begin{cases} t^{b-1} e^{-t} & \text{si } t \geq 1 \\ t^{a-1} & \text{si } t < 1 \end{cases}$

La fct $\varphi \in C^0([0, +\infty[, \mathbb{R})$

Au voisinage de 0: $\varphi(t) = \frac{1}{t^{1-a}}$, $a > 0$

Donc φ intégrable sur $]0, 1[$

Au voisinage de $+\infty$: $\varphi(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$

Donc φ intégrable sur $[1, +\infty[$.

Donc φ intégrable sur $]0, +\infty[$.

Donc Γ est continue sur $]0, +\infty[$.

• $\Gamma'(x) \sim \frac{1}{x}$:

On a: $\forall x > 0$: $\Gamma'(x+1) = x \Gamma'(x)$

Or Γ continue en 1.

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \Gamma(x+1) = \Gamma(1) = 1$.

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} x \Gamma'(x) = 1$

$\Rightarrow \Gamma'(x) \sim \frac{1}{x}$

• Γ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$:

Soit $f:]0, +\infty[\times]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, t) \mapsto t^{x-1} e^{-t} = e^{(x-1)\ln(t) - t}$

* $\forall x > 0$: f est C^1 sur $]0, +\infty[$ et intégrable.

* $\forall (x, t) \in]0, +\infty[\times]0, +\infty[$: $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \ln(t) t^{x-1} e^{-t}$

$t \mapsto \ln(t) t^{x-1} e^{-t}$ est C^1 sur $]0, +\infty[$

$x \mapsto \ln(t) t^{x-1} e^{-t}$ est continue sur $]0, +\infty[$

* Soit $[a, b] \subset]0, +\infty[$:

$\forall (x, t) \in [a, b] \times]0, +\infty[$: $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| = |\ln(t)| t^{x-1} e^{-t}$

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} \leq \begin{cases} -\ln(t) t^{a-1} & \text{si } t \in]0, 1[\\ \ln(t) t^{b-1} e^{-t} & \text{si } t > 1 \end{cases}$

Soit $\varphi: t \mapsto \begin{cases} -\ln(t) t^{a-1} & \text{si } t \in]0, 1[\\ \ln(t) t^{b-1} & \text{si } t > 1 \end{cases}$

φ est C^1 sur $]0, +\infty[$.

Au voisinage de 0: $\varphi(t) = \frac{-\ln(t)}{t^{1-a}}$

On a: $1-a < 1$

Soit δ tq $1-a < \delta < 1$

$t^\delta \varphi(t) = -t^{\delta-(1-a)} \ln(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0$

$\varphi(t) = o\left(\frac{1}{t^\delta}\right)$

et $0 < \delta < 1 \Rightarrow t \mapsto \frac{1}{t^\delta}$ intég sur $]0, 1[$

Au voisinage de $+\infty$:

$\varphi(t) = \ln(t) t^{b-1} e^{-t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$

Alors $\varphi \in L^1([0, +\infty[, \mathbb{R})$

$\Rightarrow \Gamma \in C^1$ sur $]0, +\infty[$.

et $\forall x \in]0, +\infty[$: $\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} \ln(t) t^{x-1} e^{-t} dt$.

• de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$:

$f:]0, +\infty[\times]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, t) \mapsto t^{x-1} e^{-t} = e^{(x-1)\ln(t) - t}$

Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

* $\forall x \in]0, +\infty[$: $t \mapsto t^{x-1} e^{-t}$ C^1 et intég sur $]0, +\infty[$

* $\forall t \in]0, +\infty[$: $x \mapsto t^{x-1} e^{-t}$ est C^p sur $]0, +\infty[$.

et $\forall k \in \mathbb{N}^*$: $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) = \ln^k(t) t^{x-1} e^{-t}$.

* $\forall k \in [1, p]$: $\forall x \in]0, +\infty[$: $t \mapsto \ln^k(t) t^{x-1} e^{-t}$

est C^1 sur $]0, +\infty[$.

* $\forall k \in [1, p-1]$: $\forall x \in]0, +\infty[$: $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) = \ln^k(t) t^{x-1} e^{-t}$

Au voisinage de 0:

$\left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) \right| = |\ln(t)|^k t^{x-1} e^{-t} \sim |\ln(t)|^k t^{x-1}$

On a: $1-x < 1$.

On prend γ tq: $1-x < \gamma < 1$.

On a: $t^\gamma |\ln(t)|^k t^{x-1} = t^{\gamma-(1-x)} |\ln(t)|^k \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0$

$\Rightarrow \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) \right| = o\left(\frac{1}{t^\gamma}\right)$ si $\gamma < 1$

$\Rightarrow \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)$ est intégrable sur $]0, 1[$.

Au voisinage de $+\infty$: $\left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) \right| \sim o\left(\frac{1}{t^2}\right)$

$\Rightarrow \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

$\exists p \in (1, p-1) : \forall x \in]0, +\infty[$

$$t \mapsto \frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x, t) \in L^1(]0, +\infty[, \mathbb{R})$$

Dominat

Soit $[a, b] \subset]0, +\infty[$:

$$\forall (x, t) \in [a, b] \times]0, +\infty[: \left| \frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x, t) \right| = |\ln(t)| t^{x-1} e^{-t} \\ \leq \varphi(t) = \begin{cases} |\ln(t)| t^{a-1} & \text{si } a \leq 1 \\ |\ln(t)|^p t^{b-1} e^{-t} & \text{sinon} \end{cases}$$

φ est CN sur $]0, +\infty[$:

* Au voisinage de 0 : $\varphi(t) = |\ln(t)|^p t^{a-1} \quad (a-1 < 1)$

$\Rightarrow \varphi$ intégrable sur $]0, 1[$

* Au voisinage de $+\infty$: $\varphi(t) \sim o\left(\frac{1}{t^2}\right)$

$\Rightarrow \varphi$ intégrable sur $]1, +\infty[$.

$\Rightarrow \varphi \in L^1(]0, +\infty[, \mathbb{R})$.

gc : Γ est $\mathcal{C}^p$ sur $]0, +\infty[$ et ce $\forall p \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow \Gamma$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$.

Γ est strictement convexe sur $]0, +\infty[$.

$$\forall x \in]0, +\infty[: \Gamma''(x) = \int_0^{+\infty} \ln^2(t) t^{x-1} e^{-t} dt > 0.$$

D'où Γ strictement convexe.

$$\exists ! c \in]1, 2[: \Gamma'(c) = 0.$$

Γ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[1, 2]$.

$$\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1.$$

$\Rightarrow$ d'après Rolle : $\exists c \in]1, 2[: \Gamma'(c) = 0$.

or Γ' est strictement $\nearrow$ alors c est unique.

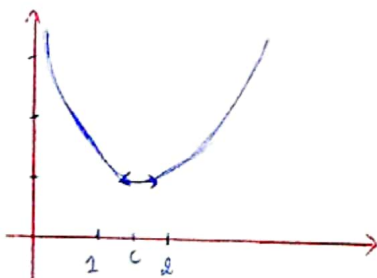
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \Gamma(x) = +\infty :$$

On a : Γ est strictement $\nearrow$ sur $]x, +\infty[$:

$$\forall x > c : \Gamma(x) \geq \Gamma'(x) = (x-1)!$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \Gamma(x) = +\infty \quad \left| \begin{array}{l} \text{ou } \Gamma(n+1) = n! \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \Gamma(n) = +\infty \end{array} \right.$$

Allure de Γ :



Γ' est logarithmiquement convexe :

$$\forall x > 0 : f(x) = \ln(\Gamma(x))$$

f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$.

$$f'(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} ; f''(x) = \frac{\Gamma(x)\Gamma''(x) - (\Gamma'(x))^2}{(\Gamma(x))^2}$$

$$\text{On a : } \Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} \ln(t) t^{x-1} e^{-t} dt \\ = \int_0^{+\infty} \ln(t) (t^{x-1} e^{-t})^{\frac{1}{2}} (t^{x-1} e^{-t})^{\frac{1}{2}} dt$$

$$\text{Soit } \varphi(t) = \ln(t) (t^{x-1} e^{-t})^{\frac{1}{2}} \text{ et } \psi(t) = (t^{x-1} e^{-t})^{\frac{1}{2}}.$$

On a : $\varphi, \psi \in L^1(]0, +\infty[, \mathbb{R})$.

$$\Gamma'(x) = \langle \varphi, \psi \rangle \text{ ou } \langle \varphi, \psi \rangle = \int_0^{+\infty} \varphi(t) \psi(t) dt$$

Donc par Cauchy Schwartz :

$$(\Gamma'(x))^2 \leq \|\varphi\|^2 \|\psi\|^2$$

$$\leq \int_0^{+\infty} \ln^2(t) t^{x-1} e^{-t} dt \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

$$\leq \Gamma''(x) \Gamma(x)$$

D'où $\forall x > 0 : f''(x) \geq 0$.

$\Rightarrow f$ est convexe.

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \ln(x) + o(1) :$$

$$\text{Soit } K(x) = \Gamma'(x) - \Gamma(x) \ln(x)$$

$$= \int_0^{+\infty} \ln(t) t^{x-1} e^{-t} dt - \int_0^{+\infty} \ln(x) t^{x-1} e^{-t} dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \ln\left(\frac{t}{x}\right) t^{x-1} e^{-t} dt$$

$$\text{or } 1 - \frac{x}{t} \leq \ln\left(\frac{t}{x}\right) \leq \frac{t}{x} - 1.$$

$$\text{Donc } \int_0^{+\infty} \left(1 - \frac{x}{t}\right) t^{x-1} e^{-t} dt \leq K(x) \leq \int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{x} - 1\right) t^{x-1} e^{-t} dt$$

$$\Rightarrow \Gamma'(x) - x \int_0^{+\infty} t^{x-2} e^{-t} dt \leq K(x) \leq \frac{1}{x} \Gamma(x+1) - \Gamma(x)$$

$$\Rightarrow \Gamma'(x) - x \Gamma'(x-1) \leq K(x) \leq 0$$

$$\Rightarrow \Gamma'(x) - \frac{x}{x-1} \Gamma'(x-1) \leq K(x) \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-x} \leq \frac{K(x)}{\Gamma(x)} \leq 0$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{K(x)}{\Gamma(x)} = 0$$

$$\text{Donc } K(x) = o(\Gamma(x))$$

$$\text{Donc } \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \ln(x) + o(1)$$

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\frac{1}{x} - \gamma + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+x)}$$

soit $x > 0$.

$$\forall n \in \mathbb{N}: \Gamma(x+n+1) = \prod_{k=0}^n (x+k) \Gamma(x)$$

$$\text{D'où } \ln(\Gamma(x)) = \ln(\Gamma(x+n+1)) - \sum_{k=0}^n \ln(x+k)$$

$$\Rightarrow \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \frac{\Gamma'(x+n+1)}{\Gamma(x+n+1)} - \sum_{k=0}^n \frac{1}{x+k}$$

$$\Rightarrow \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\frac{1}{x} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x+k} - \ln(n) \right) + \ln(n) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x+k} + \ln(x+n+1) + \frac{\Gamma'(x+n+1)}{\Gamma(x+n+1)} - \ln(x+n+1)$$

$$\Rightarrow \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\frac{1}{x} + \ln(x+n+1) - \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{x+k} - \frac{1}{k} \right)$$

$$- \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \right) + \frac{\Gamma'(x+n+1)}{\Gamma(x+n+1)} - \ln(x+n+1)$$

$$\Rightarrow \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\frac{1}{x} + x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(x+k)} - \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} - \ln(n) \right)$$

$$+ \ln \left(\frac{x+n+1}{n} \right) + \frac{\Gamma'(x+n+1)}{\Gamma(x+n+1)} - \ln(x+n+1)$$

$$\Rightarrow \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\frac{1}{x} - \gamma + x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(x+k)}, \quad \forall x > 0.$$

Pour $x=1$.

$$\Gamma'(1) = 1 - \gamma + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = -\gamma.$$

$$\forall \alpha > 0: \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{e^t - 1} dt = \zeta(\alpha+1) \Gamma(\alpha+1):$$

$$f_\alpha: t \mapsto \frac{t^\alpha}{e^t - 1} \text{ continue, } \geq 0 \text{ sur }]0, +\infty[$$

Au voisinage de 0:

$$f_\alpha(t) \sim t^{\alpha-1} = \frac{1}{t^{1-\alpha}} \text{ intég si } \alpha > 0.$$

Au voisinage de $+\infty$:

$$f_\alpha(t) \sim o\left(\frac{1}{t^2}\right) \text{ intégrable sur }]1, +\infty[.$$

$$\Rightarrow f_\alpha \text{ est intégrable sur }]0, +\infty[.$$

$$\forall t > 0: f_\alpha(t) = \frac{t^\alpha e^{-t}}{1 - e^{-t}}, \quad \forall t > 0: e^{-t} < 1$$

$$\Rightarrow f_\alpha(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} t^\alpha e^{-nt}$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} f_\alpha(t) dt = \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} t^\alpha e^{-nt} dt$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*: \text{ soit } f_n(t) = t^\alpha e^{-nt}$$

$$f_n \text{ est continue sur } [0, +\infty[\text{ et intég sur } [0, +\infty[.$$

$$\bullet \text{ soit } t > 0: \int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt = \int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-nt} dt$$

$$\text{on pose } u = nt \Rightarrow du = n dt$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt = \int_0^{+\infty} \frac{u^\alpha}{n^{\alpha+1}} e^{-u} \frac{du}{n}$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{n^{\alpha+1}}$$

$$\text{et } \alpha+1 > 1 \Rightarrow \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{\alpha+1}} \Gamma(\alpha+1) \text{ converge.}$$

$$\text{Donc } \sum_{n \geq 1} \int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt \text{ converge.}$$

Donc par le théorème d'inversion:

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{e^t - 1} dt = \zeta(\alpha+1) \Gamma(\alpha+1).$$

Séries entières.

Soit $(a_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

• Définition:

On appelle série entière, toute série de fonctions $\sum f_n$ où $f_n: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. On la note $\sum a_n z^n$.
 $z \mapsto a_n z^n$

• Exemple

* $\sum \frac{z^n}{n!}$, avec $a_n = \frac{1}{n!}$.

* $\sum \frac{1}{n!} z^{2n}$, avec $a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2p \\ \frac{1}{p!} & \text{si } n = 2p+1 \end{cases}$

* $\sum z^{n^2}$, avec $a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ n'est pas carré} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$

Opérations algébriques sur les séries.

• Somme:

Si $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux s.e.
 leur somme est la s.e.: $\sum (a_n + b_n) z^n$.

• Multiplication par un scalaire:

Si $\sum a_n z^n$ une s.e. et $\lambda \in \mathbb{K}$.
 $\lambda \cdot \sum a_n z^n$ est la série entière $\sum (\lambda a_n) z^n$.

• Produit de Cauchy de 2 s.e. (*)

Si $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux s.e.
 On appelle leur produit de Cauchy la s.e.:

$$\sum c_n z^n \text{ où } c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^n a_{n-k} b_k = \sum_{i+j=n} a_i b_j$$

Rmq:

Si on pose $u_n(z) = a_n z^n$ et $v_n(z) = b_n z^n$.

le produit de Cauchy des séries $u_n(z)$ et $v_n(z)$

$$\text{est } \sum w_n(z) \text{ où } w_n(z) = \sum_{k=0}^n u_k(z) v_{n-k}(z) \\ = \sum_{k=0}^n a_k z^k b_{n-k} z^{n-k} \\ = \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) z^n = c_n z^n$$

• Prop:

L'ensemble des s.e. muni des lois $+$, $\cdot$, $\times$ est une $\mathbb{K}$ -algèbre commutative.

• Définition:

Si $a_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$
 $x \mapsto a_n x^n$

On dit que $\sum a_n x^n$ est une s.e. de variables réelles.

Si en plus $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\sum a_n x^n$ est dite s.e. réelle de variable réelle.

Rayon de convergence:

• Prop: (*)

Si $\sum a_n z^n$ une s.e. et $r \in \mathbb{R}^+$ tq la suite $a_n r^n$ est bornée, alors $a_n z^n = O\left(\left(\frac{z}{r}\right)^n\right)$

• Lemme d'Abel: (*)

Si $\sum a_n z^n$ une s.e. tq $\exists r > 0$; la suite $(a_n r^n)$ bornée, alors $\sum a_n z^n$ CA sur le disque ouvert $\tilde{B}(0, r)$.

• Remarque:

Si $\sum a_n z^n$ une s.e. et $z_0 \in \mathbb{C}^*$ $(a_n z_0^n)$ bornée
 Alors $\sum a_n z^n$ CA sur $\tilde{D}(0, |z_0|)$.

• Prop: (*)

L'ensemble:

$I = \{r \in \mathbb{R}_+ / \sum a_n r^n \text{ CA}\}$ est un intervalle de $\mathbb{R}^+$, contenant 0.

$R = \sup I$ dans $\bar{\mathbb{R}}_+$ est app. le rayon de convergence de la s.e. $\sum a_n z^n$.

• Rmq:

Si I est bornée, $R \in \mathbb{R}_+$

Si I n'est pas bornée, $R = +\infty$.

• Prop: (*)

Si $\sum a_n z^n$ une s.e. de rayon de conv. R .

$$\text{Alors } R = \sup \{r \in \mathbb{R}_+ / (a_n r^n) \text{ bornée}\} \\ = \sup \{r \in \mathbb{R}_+ / a_n r^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0\}$$

Disque ouvert et intervalle ouvert de convergence:

• Définition:

* Si $\sum a_n z^n$ une s.e. de rayon de conv. R , le disque ouvert $\tilde{D}(0, R) = \{z \in \mathbb{C} / |z| < R\}$ est appelé le disque ouvert de convergence.

* Si $\sum a_n x^n$ est une s.e. de variable réelle.

$I =]-R, R[$ est dit l'intervalle ouvert de conv.

• Rmq:

* $\forall z \in \tilde{D}(0, R): \sum a_n z^n \subset \mathbb{A}$

* Si $z \in \mathbb{C}: |z| > R: \sum a_n z^n$ div. gross (car $|z| \notin I$
 Donc $(a_n z^n)$ n'est pas bornée).

Rmq:

* Si $\lambda_0 \in \mathbb{R}_+^*$, $\sum a_n r_0^n$ conv

Alors $\bar{D}(q, r_0) \subset \bar{D}(0, R) \Rightarrow r_0 < R$.

* Si $\lambda_0 \in \mathbb{R}_+^*$, $\sum a_n \lambda_0^n$ div, $R \leq r_0$.

* $R = +\infty \Leftrightarrow \forall z \in \mathbb{C} : \sum a_n z^n \text{ CA}$.

• Prop:

Si $\sum a_n z^n$ une s.e. entière de rayon R .

Alors $R = \sup \{ \lambda \in \mathbb{R}_+ / \sum a_n \lambda^n \text{ CA} \}$.

$R = \sup \{ \lambda \in \mathbb{R}_+ / \sum a_n \lambda^n \text{ CV} \}$.

$R = \sup \{ \lambda \in \mathbb{R}_+ / (a_n \lambda^n) \text{ borné} \}$.

$R = \sup \{ \lambda \in \mathbb{R}_+ / a_n \lambda^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \}$.

• Th. Règle de D'Alembert: (*) (*)

Si $\sum a_n z^n$ une s.e. tq: a_n ne s'annule pas à par et $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \rightarrow \ell$.

Alors le rayon de convergence est $R = \frac{1}{\ell}$,

avec $\frac{1}{0} = +\infty$ et $\frac{1}{+\infty} = 0$.

Rmq:

la règle de D'Alembert n'est pas applicable ds le cas où $\sum a_n z^n$ est lacunaire.

• Rmq: (*)

Si $\sum a_n z^n$ une s.e., on pose $u_n(z) = a_n z^n$.

On peut appliquer la règle de D'Alembert à la série numérique: $\sum u_n(z)$.

Si $\left| \frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)} \right| \rightarrow \ell(z)$

tq $\ell(z) < 1$ si $|z| < r_0$ ($r_0 > 0$) alors $R = r_0$.

• Définition:

* Si $\sum a_n z^n$ une s.e. de rayon de conv $R > 0$,

Alors l'app: $f: \bar{D}(0, R) \rightarrow \mathbb{C}$ st app la

somme de la s.e. $\sum a_n z^n$.

* Si $\sum a_n x^n$ une s.e. de variable réelle

$f:]-R, R[\rightarrow \mathbb{C}$
 $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

• Rmq:

* Si $\sum a_n z^n$ une s.e. (non lacunaire) tq,

$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = P(n)$ où P un polynôme non nul.

Alors $R = 1$.

* Si $a_n = F(n)$ où F fraction rationnelle.

Alors $R = 1$.

• Théorème:

Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$:

1. des s.e. $\sum a_n z^n$ et $\sum |a_n| z^n$ ont m R.

2. des s.e. $\sum a_n z^n$ et $\sum \lambda a_n z^n$ ont m R.

• Théorème (comparaison de conv): (*)

Si $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux s.e. de rayon R_a et R_b (resp) tq $|a_n| \leq |b_n|$ à par.

Alors $R_a \geq R_b$.

• Théorème:

Si $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux s.e. de rayon de convergence resp R_a et R_b .

1. si $|a_n| = o(|b_n|)$ ou $|a_n| = O(|b_n|)$

Alors $R_a \geq R_b$

2. si $|a_n| \sim |b_n|$ alors $R_a = R_b$.

Rayon et opération algébrique sur les s.e.:

• Rayon de convergence de la somme: (*)

Si $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux s.e. de rayon de conv R_a et R_b (resp). Alors le rayon de conv de la s.e. $\sum (a_n + b_n) z^n$ st $R \geq \min(R_a, R_b)$.

Si en plus $R_a \neq R_b$ alors $R = \min(R_a, R_b)$

• Exemple:

$\sum z^n$ et $\sum -z^n$ de rayon 1 mais le rayon de la somme st $+\infty$.

• Rayon de conv du produit de Cauchy: (*)

Si $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux s.e. de rayons de conv R_a et R_b (resp) alors $\sum c_n z^n$ leur produit de Cauchy st de rayon de conv

$R \geq \min(R_a, R_b)$

* Régularité de la somme d'une s.e.

• Théorème : (*)

Si $\sum a_n z^n$ une s.e. de rayon de conv $R > 0$
 Alors $\sum a_n z^n$ conv unif sur tout compact
 du $\bar{D}(0, R)$.

• Corollaire :

$\forall \lambda \in]0, R[: \sum a_n \lambda^n \subset N$ sur $\bar{D}(0, r)$

• Remarque :

$\sum a_n z^n$ ne converge pas (en général) sur $\bar{D}(0, R)$

Ex: $\sum z^n$ de rayon 1 mais $\sup_{|z| \leq 1} |z^n| = 1 \nrightarrow 0$

• Théorème :

Si $\sum a_n z^n$ une s.e. de rayon de conv $R > 0$

Alors sa somme $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est
 continue sur $\bar{D}(0, R)$.

• Exemple d'étude sur le cercle de convergence : (*)

1^{er} cas : Si $\sum a_n z^n$ une s.e. de rayon $R \in \mathbb{R}_+^*$

tg $\sum a_n R^n \subset A$, alors : $\sum a_n z^n \subset N$ sur $\bar{D}(0, R)$

Ex: :

$\sum (-1)^n z^n$, $R=1$ et $\sum (-1)^n \frac{1}{n}$ conv

Mais la série converge pas pour $z = -1 \in \bar{D}(0, 1)$

2^{ème} cas :

Si $\sum a_n x^n$ une s.e. réelle de variables réelles
 de rayon de conv $R \in \mathbb{R}_+^*$ tg $\sum a_n R^n$ est
 alternée vérifiant la C.S.C.A.

Alors $\sum a_n x^n \subset N$ sur $[0, R]$.

* Séries entières de variables réelles :

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ une s.e. de rayon $R > 0$.

• Définition :

1. $\sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1} = \sum_{n \geq 0} (n+1) a_{n+1} x^n$ est app. la
 série entière dérivée première de $\sum a_n x^n$.

2. $\sum_{n \geq 2} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n \geq 0} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n$ est
 dite la s.e. dérivée seconde de $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$. (3)

Par récurrence : $\forall p \in \mathbb{N}^*$, la série entière

$$\sum_{n \geq p} n(n-1) \dots (n-p+1) a_n x^{n-p} = \sum_{n \geq 0} \frac{(n+p)!}{n!} a_{n+p} x^n$$

est appelée la s.e. dérivée p -ème de $\sum a_n x^n$

• Théorème : (*)

des s.e. $\sum a_n x^n$ et $\sum \frac{a_n}{n!} x^{n+1}$ ont m même rayon de conv.

• Corollaire :

Une série entière $\sum a_n x^n$ et toutes ses s.e.
 dérivées ont m même rayon de convergence.

• Théorème : (*)

Si $\sum a_n x^n$ une s.e. de rayon de conv $R > 0$.

Alors la somme $S :]-R, R[\rightarrow \mathbb{C}$
 $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -R, R[$.

et $\forall p \in \mathbb{N}^* : \forall x \in]-R, R[:$

$$S^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{\infty} n(n-1) \dots (n-p+1) a_n x^{n-p} \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+p)!}{n!} a_{n+p} x^n$$

• Prop : (*)

Si $\sum a_n x^n$ une s.e. de rayon de conv $R > 0$

Alors $S :]-R, R[\rightarrow \mathbb{C}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -R, R[$
 $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

et on a : $\forall n \in \mathbb{N} : a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!}$

et donc $\forall x \in]-R, R[: S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S^{(n)}(0)}{n!} x^n$

• Corollaire : (*)

Si $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ coïncident se tg :

$\exists \alpha > 0 : \forall x \in]-\alpha, \alpha[: \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$

Alors $\forall n \in \mathbb{N} : a_n = b_n$

• Remarque :

Le th est parfois utilisé pour mq's 1 fct²
 est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Intégration de la somme d'une s.e. :

• Théorème :

Si $\sum a_n x^n$ une s.e. de rayon de conv $R > 0$,
 alors $\forall [\alpha, \beta] \subset]-R, R[:$

$$\int_{\alpha}^{\beta} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\alpha}^{\beta} (a_n x^n) dx$$

Corollaire.

Si $\sum a_n x^n$ une s.e. de rayon de conv $R > 0$,
alors $\forall x : |x| < R$

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

(primitive de $x \mapsto \sum a_n x^n$)

Fonction développable en série entière (DSE):

• Définition: $f: D \rightarrow \mathbb{C}$

On dit qu'une fonction est développable en s.e. en 0 (DSE(0)) ssi:

$\exists$ une s.e. $\sum a_n z^n$ de rayon de conv $R > 0$,
 $\forall z \in U \cap \tilde{D}(0, r) : f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$

Exple.

$$* \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad (|z| < 1)$$

$$* \exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

• Définition:

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et f une fonction définie au voisinage de $z_0: U \rightarrow \mathbb{C}$, f développable en s.e. en z_0 (DSE(z_0)) ssi: $g \mapsto f(z_0 + g)$ est DSE(0)
c-à-d: $\exists r > 0: \forall z \in U \cap \tilde{B}(z_0, r): f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$

• Théorème:

L'ensemble des fct^s DSE(0) est une $\mathbb{K}$ -algèbre
si f et g DSE(0):

$\Rightarrow \exists r > 0, \forall z \in \tilde{B}(0, r):$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

$$\Rightarrow \lambda \in \mathbb{C}: (\lambda f + g)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda a_n + b_n) z^n, \quad \forall z \in \tilde{B}(0, r)$$

• Théorème:

si f est DSE(0) alors ce développement est unique.

Fonction DSE(0) d'une variable réelle:

si f une app. d'une variable réelle.

• Théorème:

si f est DSE(0) alors f est de C^∞ au voisinage de 0.

• Définition:

si f est de classe C^∞ au voisinage de 0.

On appelle la série de Taylor (Mac-laurin) de f en 0: $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

• Théorème:

si f est de classe C^∞ au voisinage de 0 et DSE(0), alors f coïncide avec la somme de la série de Taylor au vois de 0.

• Prop:

si f est de classe C^∞ et DSE(0) tq:

$$\exists r > 0, \forall x \in]-r, r[: f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Alors: 1. paire $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}: a_{2n+1} = 0$

2. impaire $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}: a_{2n} = 0$

• Théorème:

si f est de classe C^∞ au voisinage de 0.

Alors f est DSE(0) ssi $\exists r > 0: \forall x \in]-r, r[:$

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

• Corollaire:

si f de classe C^∞ au vois de 0. f est DSE(0)

s si $\exists r > 0: \forall x \in]-r, r[: \left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \right| \rightarrow 0$

• Propriété: (*)

si f est de classe C^∞ au voisinage de 0 et $\exists n \geq 0$,

$$\exists r > 0: \forall x \in]-r, r[: \left| f^{(n)}(x) \right| \leq M$$

Alors f est DSE(0)

$$\text{et } \forall x \in]-r, r[: f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

Technique de DSE(0):

• Primitive de DSE(0):

si f est DSE(0) alors toute primitive F de f est DSE(0).

$$\text{si } \forall x \in]-r, r[: f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$F(x) = F(0) + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} \frac{x^n}{n}$$

Exple.

$$* \ln(1-x) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad R=1$$

$$\text{Car } \ln(1-x) = - \int_0^x \frac{dt}{1-t}$$

$$* \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \quad R=1$$

$$* \operatorname{Arctan}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad R=1$$

• Dérivées de DSE(0) connues:

Si f est DSE(0) alors toutes ses dérivées sont DSE(0)

Si $\forall x \in]-1, 1[: f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

$\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]-1, 1[:$

$$f^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-p+1) a_n x^{n-p}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+p)!}{n!} a_{n+p} x^n$$

Et le m rayon de conv.

Exple.

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, R=1$$

en dérivant p fois :

$$\frac{p!}{(1-x)^{p+1}} = \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-p+1) x^{n-p} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+p)!}{n!} x^n$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(1-x)^{p+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+p)!}{n! p!} x^n, R=1.$$

• Opérations algébriques sur DE(0):

- Somme: (voir exo 21)

- Produit de DSE(0): (exo 22)

- Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle. (exo 23)

Utilisation d'équation différentielle linéaire:

Si f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0 et vérifie une équation différentielle linéaire avec des conditions initiales. On cherche une se $\sum a_n x^n$ dont la somme vérifie la m équation diff avec les m conditions initiales.

Unité de la solution donne: $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$
(voir exo 24)

Théorème de convergence radial d'Abel:

So $\sum a_n x^n$ une se de rayon de conv $R \in \mathbb{R}_+^*$,
tq la série $\sum a_n R^n$ converge.

Alors $\lim_{x \rightarrow R^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$

Exple.

1) $\forall x \in]-1, 1[: \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}, R=1$

et $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ st alternée vérifiant CSCA,
donc convergente.

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Donc $-\ln(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$

2) $\forall x \in]-1, 1[: \operatorname{Arctan}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, R=1.$

Pour $x=R=1$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \text{ SCSCA.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

ce pour

étude de se (transf
sur le bord d'Abel)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $I \neq \emptyset$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Intégrale généralisée :

Soit $(a, b) \in \mathbb{R} \times \bar{\mathbb{R}}$ tq $a < b$.

$f: [a, b[\rightarrow \mathbb{K}$ continue par morceaux.

• Définition :

On dit que l'intégrale $\int_a^b f$ est convergente si : $F: x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ admet une limite finie quand $x \rightarrow b$, et ds ce cas cette limite est notée $\int_a^b f(t) dt$.

Rmq :

la définition peut être appliquée au cas où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$: $a < b$.

• Définition : (Intégrable) :

On note $I = [a, b[$, $(a, b) \in \mathbb{R} \times \bar{\mathbb{R}}$: $a < b$.

si $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$.

f est dite intégrable sur I si $\int_a^b |f|$ converge. (on dit $\int_a^b f$ est absolument convergente).

• Proposition :

L'ensemble : $E = \{f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K}), \int_a^b f \text{ converge}\}$ est un $\mathbb{K}$ -ev.

L'app : $E \rightarrow \mathbb{K}$ est une forme linéaire.
 $f \mapsto \int_a^b f$

• Théorème :

Si f est continue par morceaux et positive, $\int_a^b f$ converge si $F: x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est majorée.

et ds ce cas : $\int_a^b f = \sup_{x \in [a, b[} F(x)$

• Prop :

Si f est continue par morceaux et positive sur $I = [a, b[$, f est intégrable sur I si $\int_a^b f$ converge. Et ds ce cas :

$$\int_a^b f = \lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f(t) dt = \sup_{x \in [a, b[} F(x)$$

• Théorème :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$

* $f: x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ si $\alpha > 1$

* $f: x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est intégrable sur $]0, 1]$ si $\alpha < 1$

• Théorème : (*) (*)

Si f intégrable sur $I = [a, b[$, alors $\int_a^b f$ converge. La réciproque est fautive.

Rmq :

Toujours citer que f est continue sur $[a, b[$ avant de montrer l'intégrabilité ou la convergence.

• Théorème :

Si f et g sont continues par morceaux sur I et positives, tq $f \leq g$ sur I .

Alors : $\begin{cases} f \text{ intégrable sur } I \Rightarrow g \text{ intégrable sur } I \\ \text{et ds ce cas : } \int_a^b f \leq \int_a^b g \\ f \text{ non intégrable} \Rightarrow g \text{ non intégrable sur } I \end{cases}$

• Notation :

L'ensemble $\{f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K}), f \text{ intégrable sur } I\}$ est noté $L^1(I, \mathbb{K})$.

• Théorème :

Si f et g continues par morceaux et positives sur $I = [a, b[$ tq $f(x) = o(g(x))$ (resp θ)

Alors : $\begin{cases} g \text{ intégrable sur } I \Rightarrow f \text{ intégrable sur } I \\ f \text{ non intégrable} \Rightarrow g \text{ non intégrable sur } I \end{cases}$

• Proposition : (*)

Si f et g sont $\mathcal{C}^0$ sur $I = [a, b[$ et positives : tq $f(x) \sim g(x)$, alors : f intégrable sur I si g intégrable sur I .

Fonction Γ d'Euler :

• Théorème : (*)

Soit $x \in \mathbb{R}$. L'app : $t \mapsto t^{x-1} e^{-t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ si $x > 0$.

On pose, $\forall x: \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$

• Remarques :

- $\forall x > 0: \Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$ (integ par parties)
- $\Gamma(1) = 1$ (calcul)
- $\forall n \in \mathbb{N}^*: \Gamma(n) = (n-1)!$ (recurrence)

• Théorème : (*)

Si f est continue, positive et intégrable sur $I = [a, b[$ et $\int_I f = 0$ alors $f \equiv 0$ sur I .

Théorème (intég par parties):

Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I = [a, b[$.

tg deux des 3 expressions: $\int_a^x f'g$ et $\int_a^x fg'$ et $[f(t)g(t)]_a^x$ admettent une l.f. finie.

$$\text{Alors } \int_a^b f'g = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b fg'$$

Th: changement de variable: (*)

Si f une fonction continue sur $I = [a, b[$.

φ une fonction, strictement croissante de $[\alpha, \beta[\rightarrow [a, b[$ bijective et de classe $\mathcal{C}^1$.

Alors les 2 intégrales: $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ sont de même nature.

Et dans le cas de convergence:

$$\text{On a: } \int_a^b f(t)dt = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Intégration des relations de comparaison:

Cas d'intégrabilité:

Théorème: (*) $I = [a, b[$ (reste intégral)

$$\text{hyp: } \begin{cases} 1 - f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K}) \\ 2 - g \in L^2(I, \mathbb{K}) \\ 3 - f(x) = o(g(x)) \quad (\text{resp } 0) \end{cases}$$

$$\text{c/c: } \begin{cases} \int_\alpha^b f(t)dt = o\left(\int_\alpha^b g(t)dt\right) \quad (\text{resp } 0) \\ f \text{ intégrable sur } [a, b[\end{cases}$$

Théorème: (*) (intégrale partielle)

Si $f: [a, b[\rightarrow \mathbb{K}$ et $g: [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ avec g positive

$$\text{tg } f(x) = o(g(x)) \quad (\text{resp } 0) \text{ et } g \text{ non intégrable}$$

$$\text{Alors } \int_a^x f(t)dt = o\left(\int_a^x g(t)dt\right) \quad (\text{resp } 0)$$

Corollaire:

Si $f: [a, b[\rightarrow \mathbb{K}$ et $g: [a, b[\rightarrow \mathbb{R}_+$

tg $f(x) \sim g(x)$ et g non intégrable sur $[a, b[$

$$\text{on a: } \int_a^x f(t)dt \sim \int_a^x g(t)dt$$

Convergence en moyenne et convergence en moyenne quadratique:

Proposition:

$L_c^1(I, \mathbb{K}) = \{f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K}), f \text{ intégrable sur } I\}$

$L_c^1(I, \mathbb{K}) = \mathcal{C}(I, \mathbb{K}) \cap L^1(I, \mathbb{K})$ et un $\|\cdot\|$

Proposition:

Si f est bornée sur I et I bornée, alors:

$$\forall f \in L_c^1(I, \mathbb{K}), N_1(f) \leq \ell(I) \|f\|_\infty$$

où $\ell(I)$ = la longueur de I .

Définition:

Soit (f_n) une suite de fct^{cs} de $L_c^2(I, \mathbb{K})$.

(f_n) converge en moyenne vers f sur I si:

$$N_2(f_n - f) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Proposition: (*)

Si une suite (f_n) de fct^{cs} bornée de $L_c^2(I, \mathbb{K})$ et $f_n \xrightarrow[I]{\text{conv}} f$ avec I bornée.

Alors f_n converge vers f en moyenne et ds ce cas: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n = \int_I \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n$

Proposition: (v):

$$\text{On pose } N_2: L_c^2(I, \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{R} \\ f \mapsto \int_I |f|^2$$

N_2 est une norme sur $L_c^2(I, \mathbb{K})$.

Convergence en moyenne quadratique:

Définition:

Soit: $f: I \rightarrow \mathbb{K}$ $\mathcal{C}^1$ sur I .

f est dite de carré intégrable (ou de carré sommable) si $|f|^2$ est intégrable.

On note: $L^2(I, \mathbb{K}) = \{f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K}), |f|^2 \text{ intégrable}\}$.

Résultat:

On note $\ell^2 = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \sum |u_n|^2 \text{ converge}\}$.

Proposition : (*)

l'application : $\varphi : L_c^2(I, \mathbb{R}) \times L_c^2(I, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$

est un produit scalaire et $\|f\|_2 = \sqrt{\int_I |f|^2}$.

Proposition :

d'ap : $N_2 : L_c^2(I, \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{R}$ et $f \mapsto \left(\int_I |f|^2 \right)^{1/2}$ est une norme sur $L_c^2(I, \mathbb{K})$, dite norme de la convergence en moyenne quadratique.

Définition :

Une suite f_n de $L_c^2(I, \mathbb{K})$ converge en moyenne quadratique vers f si $N_2(f_n - f) \rightarrow 0$.

Proposition : (*)

Si $(f, g) \in L_c^2(I, \mathbb{K})$

$$|\varphi(f, g)| \leq N_2(f, g) \leq N_2(f) + N_2(g)$$

Corollaire :

φ est continue sur $L_c^2(I, \mathbb{R}) \times L_c^2(I, \mathbb{R})$.

Convergence dominée :

Soit f_n une suite de fct^{cs} $\subset \mathbb{R}$ de $I \rightarrow \mathbb{K}$

Théorème : (TCD) :

1) (f_n) CS vers $f \in C\mathbb{R}(I, \mathbb{K})$

2) $\exists \varphi \in L^1(I, \mathbb{R}^+)$; $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I : |f_n(x)| \leq \varphi(x)$
(hyp de domination)

$$\text{c/c : } \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} : f_n \text{ est intégrable sur } I \\ f \text{ est intégrable sur } I \\ \int_I f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_I f_n \right) \text{ réel} \\ \int_I \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n \end{cases}$$

TCD pour une famille de fct^{cs} : ()**

Si I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$.

$(f_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ une famille de fct^{cs} $C\mathbb{R}, I \rightarrow \mathbb{K}$
et λ_0 un pt adhérent à J .

tg : 1. Il existe $F \in C\mathbb{R}(I, \mathbb{K})$: $\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} f_\lambda(t) = F(t), \forall t \in I$
2. $\exists \varphi \in L^1(I, \mathbb{R}^+) : \forall \lambda \in J, \forall t \in I : |f_\lambda(t)| \leq \varphi(t)$

c/c : 1. $\forall \lambda \in J, f_\lambda \in L^1(I, \mathbb{K})$ et $F \in L^1(I, \mathbb{K})$
2. $\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \int_I f_\lambda = \int_I F$ ($\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \int_I f_\lambda = \int_I \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} f_\lambda$)

Théorème d'inversion de Σ et $\int_I$:

Soit Σf_n une série de fct^{cs} $C\mathbb{R}$ de $I \rightarrow \mathbb{K}$ tq :

1. Σf_n CS sur I
2. $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in L^1(I, \mathbb{K}) \xrightarrow{C\mathbb{R}} \text{Intégrable sur } I$
3. $\Sigma \int_I |f_n|$ converge

c/c : $\bullet f : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ est intégrable sur I
 $\bullet \int_I \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_I f_n$

Rmq :

le théorème donne des cond suffisantes d'inversion, parfois on peut intervertir et pourtant $\Sigma \int_I |f_n|$ diverge
Fonction déf par intégrale sur un intervalle qdq
(intégrale à paramètre) :

Il s'agit d'étudier les fct^{cs} : $F : x \mapsto \int_I f(x, t) dt$

*** Limite de F :**

Théorème :

Si I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f : J \times I &\rightarrow \mathbb{K} \\ (x, t) &\mapsto f(x, t) \end{aligned}$$

hyp : $\bullet \forall \lambda \in J : t \mapsto f(\lambda, t)$ est $C\mathbb{R}$ sur I .
 $\bullet \exists F$ une fct^{cs} $C\mathbb{R} : I \rightarrow \mathbb{K}$.
 $\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} f(\lambda, t) = F(t)$
 $\bullet \exists \varphi \in L^1(I, \mathbb{R}^+) : \forall (\lambda, t) \in J \times I : |f(\lambda, t)| \leq \varphi(t)$

c/c : 1. $\forall \lambda \in J : t \mapsto f(\lambda, t)$ est intégrable sur I

2. F est intégrable sur I

$$\begin{aligned} 3. \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \int_I f(\lambda, t) dt &= \int_I F(t) dt \\ \text{soit } \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \int_I f(\lambda, t) dt &= \int_I \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} f(\lambda, t) dt \end{aligned}$$

*** Continuité de F :**

Théorème : (*)

Soit $A \subseteq \mathbb{R}$ (evn de dim $< \infty$), $A \neq \emptyset$.

I un intervalle de $\mathbb{R} : I \neq \emptyset$

$$\begin{aligned} f : A \times I &\rightarrow \mathbb{K} \\ (x, t) &\mapsto f(x, t) \end{aligned}$$

hyp : $\bullet \forall t \in I : f(t, \cdot) : x \mapsto f(x, t)$ continue sur A
 $\bullet \forall x \in A : f(x, \cdot) : t \mapsto f(x, t)$ $C\mathbb{R}$ sur I
 $\bullet \exists \varphi \in L^1(I, \mathbb{R}^+) : \forall (x, t) \in A \times I : |f(x, t)| \leq \varphi(t)$

c/c : $F : x \mapsto \int_I f(x, t) dt$ est continue sur A .

Corollaire:

- hyp. 1. $\forall t \in I: f(\cdot, t): x \mapsto f(x, t)$ continue sur A
 2. $\forall x \in A: f(x, \cdot): t \mapsto f(x, t)$ C 1 sur I
 3. $(\forall K \text{ compact, } K \subset A): \exists \varphi_K \in L^1(I, \mathbb{R}_+)$ tq
 $\forall (x, t) \in K \times I: |f(x, t)| \leq \varphi_K(t)$

c/c: $F: x \mapsto \int_I f(x, t) dt$ est continue sur A .

* Dérivation:

Soit I et J deux intervalles d'intérieurs non vides.

$$f: I \times J \rightarrow \mathbb{K}$$

$$(x, t) \mapsto f(x, t)$$

• Théorème: (*)

- hyp. * $\forall x \in J: t \mapsto f(x, t)$ st C 1 sur I et intég sur I
 * $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe sur $J \times I$ et
 - $\forall x \in I: t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ C 1 sur I
 - $\forall t \in I: x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ continue sur J
 * $\exists \varphi \in L^1(I, \mathbb{R}_+), \forall x \in J: \forall t \in I: \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t)$

c/c: $F: x \mapsto \int_I f(x, t) dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J
 et $\forall x \in J: F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$
 (Formule de Leibniz)

• Corollaire:

$$f: I \times J \rightarrow \mathbb{K}$$

$$(x, t) \mapsto f(x, t)$$

- hyp. 1. $\forall x \in J, t \mapsto f(x, t) \in L^1(I, \mathbb{K})$
 2. $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe sur $J \times I$ tq:
 * $\forall x \in J: t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ C 1 sur I
 * $\forall t \in I: x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ continue sur J
 3. $\forall S$ segment de $J: \exists \varphi_S \in L^1(I, \mathbb{R}_+):$
 $\forall (x, t) \in S \times I: \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi_S(t)$

c/c: $F: x \mapsto \int_I f(x, t) dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J
 et $\forall x \in J: F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$

Rmq:

Le théorème de dérivation sous le signe $\int_I$

est en général énoncé:

$$f: J \times I \rightarrow \mathbb{K}$$

$$(x, t) \mapsto f(x, t)$$

- hyp. 1. $\forall x \in J: t \mapsto f(x, t)$ C 1 sur I et intégrable
 2. $\forall t \in I: x \mapsto f(x, t)$ st $\mathcal{C}^1$ sur J
 3. $\forall x \in J: t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ st C 1 sur I
 4. $\forall S$ un segment de $J: \exists \varphi_S \in L^1(I, \mathbb{R}_+)$
 $\forall (x, t) \in S \times I: \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi_S(t)$

c/c: $F: x \mapsto \int_I f(x, t) dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J .

$$\forall x \in J: F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$$

• Corollaire: (*)

si $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$.

$$f: J \times [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$$

$$(x, t) \mapsto f(x, t)$$

tq f st de classe $\mathcal{C}^1$ sur $J \times [a, b]$.

Alors $F: x \mapsto \int_a^b f(x, t) dt$ st de classe $\mathcal{C}^1$ sur J
 et $\forall x \in J: F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$.

• Théorème: (réurrence sur p)

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. $f: J \times I \rightarrow \mathbb{K}$
 $(x, t) \mapsto f(x, t)$

- hyp. 1. $\forall x \in J: t \mapsto f(x, t)$ C 1 et intég sur I .
 2. $\forall t \in I: x \mapsto f(x, t)$ st de classe $\mathcal{C}^p$ sur J .
 3. $\forall k \in [1, p-1]: \forall x \in J: t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)$ st
 C 1 et intégrable sur I .
 4. $\forall x \in J: t \mapsto \frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x, t)$ C 1 sur I .
 5. $\forall S$ un segment de $J, \exists \varphi_S \in L^1(I, \mathbb{R}_+)$
 tq $\forall (x, t) \in S \times I: \left| \frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x, t) \right| \leq \varphi_S(t)$

c/c: $F: x \mapsto \int_I f(x, t) dt$ de classe $\mathcal{C}^p$ sur J .

$$\text{et } \forall x \in J: \forall k \in [1, p-1]: F^{(k)}(x) = \int_I \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) dt$$

Rmq:

$f:]a, b[\rightarrow \mathbb{K}, a \in \mathbb{R}, b \in \overline{\mathbb{R}}$ continue et
 prolongeable par continuité en a .

Alors f est intégrable sur $]a, c]$, $a < c < b$.

(si I bornée et f bornée sur $I \Rightarrow f$ intég sur I)

Etudier la convergence d'une série

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k.$$

la série étant $\sum_{n \geq 1} u_n$

Alterné (CSCA) (réelle):

• $|u_n|$ décroissante

• $|u_n| \rightarrow 0$.

→ $\sum u_n$ converge.

→ $S_{2n} \leq S \leq S_{2n+1}$

→ $|R_n| \leq |u_{n+1}|$

→ S est de même signe que u_n .

SATP: Th Fond:

$\sum u_n$ conv $\Leftrightarrow S_n$ majoré

Th de comparaison:

$0 \leq u_n \leq v_n$

$\sum v_n$ conv $\Rightarrow \sum u_n$ conv

$\sum u_n$ div $\Rightarrow \sum v_n$ div

u_n, v_n satp:

* $u_n = O(v_n)$ ($u_n = o(v_n)$)

1. $\sum u_n$ div $\Rightarrow \sum v_n$ div

2. $\sum v_n$ conv $\Rightarrow \sum u_n$ conv

* $u_n \sim v_n$.

$\sum u_n$ et $\sum v_n$ de même nature

Comp. logarithmique:

* $\sum u_n, \sum v_n$ satp strict:

$\forall n \geq n_0, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$

$\sum u_n$ div $\Rightarrow \sum v_n$ div

$\sum v_n$ conv $\Rightarrow \sum u_n$ conv

* $\exists r \in]0, 1[$ tel $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq r \Rightarrow \sum u_n$ conv

D'Alembert:

$\sum u_n$ satp: $\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow l \in \mathbb{R}_+$

1. $l < 1$: $\sum u_n$ conv

2. $l > 1$: $\sum u_n$ div

3. $l = 1$: doute

4. $l = 1$ dir grossit

5. $l = 1$: rendre

Série Intégrale:

si $f: [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue, positive, décroissante:

→ $\sum f(n)$ converge ssi $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge

→ la série $\sum u_n$ est

$u_n = \int_n^{n+1} f(t) dt - f(n)$ converge

Règle de $n^u u_n$:

$\sum u_n$ satp:

$\exists \alpha > 1, n^u u_n \rightarrow l \in]0, +\infty[$

$\Rightarrow \sum u_n$ converge.

$\exists \alpha \leq 1, n^u u_n \rightarrow l \in]0, +\infty[$

$\Rightarrow \sum u_n$ diverge

Somma de rel de comp:

* Convergence:

$v_n \geq 0$

$u_n = O(v_n)$

$\sum v_n$ conv

$\Rightarrow \sum u_n$ conv.

$R_n = o(T_n)$

* Divergence:

$v_n \geq 0$

$u_n = O(v_n)$

$\sum v_n$ div.

$\Rightarrow \sum u_k = O(\sum_{k=0}^n v_k)$

Equivalents:

$\sum u_n, \sum v_n$ satp:

$u_n \sim v_n$ et $\sum v_n$ div

→ $\sum_{k=0}^n u_k \sim \sum_{k=0}^n v_k$

Série géométrique:

si $\|x\| < 1 \Rightarrow \sum x^n$ conv. abs.

et $(1-x)$ inversible

et $(1-x)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$

Exponentielle:

$\sum \frac{a^n}{n!}$ converge abs.

Sa somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}$

app exp de a

Produit de Cauchy

$(\sum_{n \geq 0} u_n) (\sum_{n \geq 0} v_n) = \sum_{n \geq 0} \omega_n$

où $\omega_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}$

Suite/série:

(u_n) conv ssi $\sum u_n - u_{n-2}$ conv

Modes de convergence

Suites de fonctions:

Conv simple (CS)

* $\forall x \in A, (f_n(x))$ converge de E
 cad:

* $\forall x \in A, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N},$
 $n \geq N \Rightarrow \|f_n(x) - f(x)\|_F < \varepsilon$

$\Downarrow$
 conserve: la linéarité
 la convexité
 la périodicité

Conv uniforme (CU)

$f_n \xrightarrow{CU} f$ sur A :

* 1. $(f_n - f)$ bornée par $1/n$
 2. $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$

* $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall x \in A, \forall n \geq N,$
 $\|f_n(x) - f(x)\|_F < \varepsilon.$

* $\exists \alpha_n \in \mathbb{R}_+^n, \forall x \in A: \|f_n(x) - f(x)\| \leq \alpha_n$
 et $\alpha_n \rightarrow 0$

$\Downarrow$
 conserve: la bornitude
 continuité
 ...

Séries de f_n^e :

Convergence uniforme?

$\Downarrow$
 Conv absolue?

oui

Convergence
 normale?

oui

Conv uniforme ✓

non

définition de la CU

$\Downarrow$
 $\|f_n\|_\infty \rightarrow 0$?

oui

$\|f_n\|_\infty \rightarrow 0$?

(f_n CU sur A vers 0)

oui

CU sur A

non

Pas de Conv
 uniforme

non

Pt être majorat^e
 uniforme du
 reste

oui

Pas de Conv
 uniforme

① f_n bornée par $1/n$
 $\sum \|f_n\|_\infty$ converge
 ② $\exists \alpha_n \in \mathbb{R}_+^n: \|f_n(x)\| \leq \alpha_n$
 $\sum \alpha_n$ converge

Forme bilinéaire

• Définition:

On appelle forme bilinéaire sur E toute app.

$$\varphi: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto \varphi(x, y)$$

tq: $\begin{cases} \forall y \in E: \varphi_y: x \mapsto \varphi(x, y) \text{ est linéaire} \\ \forall x \in E: \varphi_x: y \mapsto \varphi(x, y) \text{ est linéaire} \end{cases}$
 leur ensemble est noté $\mathcal{L}_2(E)$.

• Définition:

Si $\varphi \in \mathcal{L}_2(E)$, on définit:

$$t\varphi: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto \varphi(y, x)$$

• Définition (sym-antisym):

- Si $\varphi \in \mathcal{L}_2(E)$, φ est dite symétrique ssi $t\varphi = \varphi$.

cad $\forall (x, y): \varphi(x, y) = \varphi(y, x)$. Leur ensemble est $\mathcal{S}_2(E)$.

- φ est dite antisymétrique ssi $t\varphi = -\varphi$.
 leur ensemble est noté $\mathcal{A}_2(E)$.

• Prop:

$\mathcal{S}_2(E)$ et $\mathcal{A}_2(E)$ sont des scv de $\mathcal{L}_2(E)$

$$t\varphi \in \mathcal{L}_2(E) = \mathcal{S}_2(E) + \mathcal{A}_2(E)$$

$$\left(\varphi = \frac{\varphi + t\varphi}{2} + \frac{\varphi - t\varphi}{2} \right)$$

• Prop: (*)

$\varphi \in \mathcal{A}_2(E)$ ssi $\forall x \in E: \varphi(x, x) = 0$.

Matrice d'une forme bilinéaire:

Si $\dim E < \infty$, $\dim E = n \in \mathbb{N}^*$.

$B(e_1, \dots, e_n)$ base de E et $\varphi \in \mathcal{L}_2(E)$.

• Définition:

On appelle matrice de φ ds la base B :

$$\text{mat}_B \varphi = (\varphi(e_i, e_j))_{\substack{1 \leq i, j \leq n}}$$

• Prop: (*)

$$\text{Si } \begin{cases} x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \\ y = \sum_{j=1}^n y_j e_j \end{cases} \rightarrow \begin{cases} X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$A = \text{mat}_B \varphi = (a_{ij}) \text{ où } a_{ij} = \varphi(e_i, e_j)$$

$$\text{Alors: } \varphi(x, y) = {}^t X A Y$$

$$= \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i y_j$$

• Prop: (*)

$f: \mathcal{L}_2(E) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ est un isomorphisme.

$$\varphi \mapsto \text{mat}_B(\varphi)$$

$$\text{et donc } \dim \mathcal{L}_2(E) = (\dim E)^2$$

• Rmq:

Si $A = (a_{ij}) = \text{mat}_B \varphi$ et $B = (e_1, \dots, e_n)$

Alors: $a_{ij} = {}^t E_i A E_j$ où $E_i = \text{mat}_B e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = e_i$

• Définition:

Si $A \in M_n(\mathbb{R})$, on appelle forme bilinéaire, canoniquement associée à A la forme bilinéaire φ de $M_{n,1}(\mathbb{R})$, tq $\text{mat}_B(\varphi) = A$.

$$\left(\varphi: M_{n,1}(\mathbb{R}) \times M_{n,1}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \right)$$

$$(X, Y) \mapsto {}^t X A Y$$

• Formule de changement de base:

Si $B = (e_1, \dots, e_n)$ et $B' = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases de E et $P = P_B^{B'}$, $\varphi \in \mathcal{L}_2(E)$

$$\begin{aligned} \forall x = \sum_{i=1}^n x_i e_i &\rightarrow X = \text{mat}_B x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^n x'_i e'_i \rightarrow X' = \text{mat}_{B'} x = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \quad (X = P X') \\ A = \text{mat}_B \varphi &\text{ et } A' = \text{mat}_{B'} \varphi \end{aligned}$$

• Prop: (*)

$$\text{On a: } A' = {}^t P A P$$

• Def:

Si $(A, B) \in M_n(\mathbb{R})$. Ils sont dit congruents ssi:

$$\exists P \in GL_n(\mathbb{R}): B = {}^t P A P$$

• Prop:

La relatⁿ "être congruents" est une relatⁿ d'équivalence sur $\mathbb{R}$.

• Rmq:

Si A et B sont congruents, alors:

* A symétrique ssi B symétrique.

$$\begin{aligned} * \text{sign}(\det(A)) &= \text{sign}(\det(B)) \\ (\det B) &= (\det P)^2 \det A \end{aligned}$$

• Prop:

Si $\varphi \in \mathcal{L}_2(E)$, $\varphi \in \mathcal{S}_2(E) \Leftrightarrow \forall B$ base de E : $\text{mat}_B \varphi \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$

• Corollaire:

d'app: $\mathcal{S}_2(E) \rightarrow \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est un isomorphisme

$$\varphi \mapsto \text{mat}_B \varphi$$

Rmq: $\text{mat}_B \varphi = {}^t(\text{mat}_B \varphi)$

Prop:

$$\text{si } \dim E = n \text{ alors } \begin{cases} \dim S_2(E) = \frac{n(n+1)}{2} \\ \dim A_2(E) = \frac{n(n-1)}{2} \end{cases}$$

Rmq:

Une base de $S_n(\mathbb{R})$ est $B = \text{vect}(E_{ij} + E_{ji})$

Rmq:

Si $\varphi \in S_2(E)$, $A = (a_{ij}) = \text{mat}_B \varphi$

$$(x, y) \in E^2: X = \text{mat}_B x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$Y = \text{mat}_B y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\text{Alors } \varphi(x, y) = \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i y_i + \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} (x_i y_j + x_j y_i)$$

Et si $A = (a_{ij}) \in S_n(\mathbb{R})$,

$$\varphi(x, x) = \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} x_i x_j$$

Complément: (HP)

1. Forme quadratique:

Def:

Si $\varphi \in S_2(E)$.

défini: $E \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto q(x) = \varphi(x, x)$ est appelée:

la forme quadratique associée à φ et φ la forme polaire de q .

Rmq:

$\forall x \in E, \forall \alpha \in \mathbb{R}$:

$$* q(\alpha x) = \alpha^2 q(x)$$

$$* \forall (x, y) \in E^2: q(x+y) = q(x) + q(y) + 2\varphi(x, y)$$

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{4} (q(x+y) - q(x-y))$$

Notation:

On note $Q(E)$ l'ensemble des formes quadratiques sur E .

Rmq:

Si $B = (e_1, \dots, e_n)$ base de E .

$\varphi \in S_2(E)$, $A = (a_{ij}) = \text{mat}_B \varphi$

$\forall x \in E$ et $X = \text{mat}_B x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$$q(x) = \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} x_i x_j$$

Def:

Si q une forme quadratique et φ sa forme polaire
On appelle matrice de q ds une base B la matrice de sa forme polaire ds la base B . (2)

Def:

$$\mathcal{Q}(q) = \{x \in E / q(x) = 0\}$$

* q dite définie si $\mathcal{Q}(q) = \{0\}$.

* q dite positive si $\forall x \in E: q(x) \geq 0$

* q dite définie positive si $\forall x \in E \setminus \{0\}: q(x) > 0$

* q dite négative si $\forall x \in E \setminus \{0\}: -q$ est définie positive.

Definition:

Si $\dim(E) < \infty$, $q \in \mathcal{Q}(E)$.

On appelle rang de q :

$\text{rg}(q)$ = le rang de sa matrice ds une base qlq de E .

* On appelle noyau de q :

$$N(q) = \{x \in E / \forall y \in E: \varphi(x, y) = 0\}$$

où φ la forme polaire de q .

* q dite non dégénérée si $\text{rg}(q) = \dim(E)$

Produit scalaire:

Si E un $\mathbb{K}$ -ev.

Definition:

Un produit scalaire sur E est une forme bilinéaire symétrique et définie positive.

cid: * $\varphi \in S_2(E)$

$$* \forall x \in E, \varphi(x, x) \geq 0$$

$$* \varphi(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Le produit scalaire de x et y de E est $(x|y)$ ou $\langle x|y \rangle$ ou $x \cdot y$

Rmq: 1. Ps usuel de $\mathbb{R}^n$.

$$\forall x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \quad \text{où } b_c = (e_1, \dots, e_n) \text{ bc de } \mathbb{R}^n$$

$$y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$$

$$\langle x|y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad \text{si on note } X = \text{mat}_{b_c} x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\langle x|y \rangle = {}^t X Y \quad Y = \text{mat}_{b_c} y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

2. Produit scalaire de Schur:

$$E = M_n(\mathbb{R}), \quad \forall (A, B) \in E^2: \langle A|B \rangle = \text{Tr}({}^t A \cdot B)$$

$$\text{et } \langle A|A \rangle = \text{Tr}({}^t A A) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2$$

N.B:

$$\text{Si } A \in M_n(\mathbb{R}): {}^t A A = \langle C_i | G \rangle_{1 \leq i, j \leq n}$$

* $E = \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}) = \{f: I \rightarrow \mathbb{R} \text{ cont et } |f|' \text{ intég sur } I\}$

$$\varphi: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(f, g) \mapsto \int_I f g$$

4* $E = \ell^2(\mathbb{N}) = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \sum u_n^2 < +\infty\}$

$$\varphi: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$$

$$((u_n), (v_n)) \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n$$

5* Si I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$.

$\omega: I \rightarrow \mathbb{R}$, cont, positive tq: $\forall n \in \mathbb{N}: t \mapsto t^n \omega(t)$ st intégrable sur I .

$$\varphi: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(p, q) \mapsto \int_I p(t) q(t) \omega(t) dt$$

$$\varphi \text{ st un p.s. sur } E.$$

Exemple:

$$\omega: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(p, q) \mapsto \int_{0+\infty} p(t) q(t) e^{-t} dt$$

$$\langle x^n | x^m \rangle = \int_0^{+\infty} t^{n+m} e^{-t} dt = (n+m+1) = (n+m)!$$

Def: Espace euclidien.

C'est un espace préhilbertien réel de dim finie.

Prop:

Si E un espace préhilbertien, alors:

$$\forall (x, y) \in E^2: \langle x | y \rangle^2 \leq \langle x | x \rangle \langle y | y \rangle$$

avec l'égalité si (x, y) liés

Notation:

$$\forall x \in E: \text{on pose } \|x\| = \langle x | x \rangle^{\frac{1}{2}}$$

Prop: Inégalité de Minkowski:

Si E un espace préhilbertien, alors:

$$\forall (x, y) \in E^2: \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Avec égalité si (x, y) liés positivement.

Prop: Norme euclidienne.

Si E un espace préhilbertien:

$$\gamma_{\text{app}}: E \rightarrow \mathbb{R}^+ \quad x \mapsto \|x\| = \langle x | x \rangle^{\frac{1}{2}} \quad \text{st norme dite euclidienne}$$

Propriétés:

Si E un espace préhilbertien, $\forall (x, y) \in E^2$:

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x | y \rangle + \|y\|^2$$

$$\langle x | y \rangle = \frac{1}{2} (\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)$$

$$= \frac{1}{2} (\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$$

(égalité de polarisation)

* L'égalité de parallélogramme:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

Orthogonalité:

Si E espace préhilbertien.

Def:

Deux vecteurs x et y de E sont dits orthogonaux

$$\text{ssi } \langle x | y \rangle = 0.$$

Definition:

$$x_1, \dots, x_n \in E$$

$(x_1, \dots, x_n)$ st une famille orthogonale si:

$$\forall i \neq j: \langle x_i | x_j \rangle = 0$$

elle est dite orthonormale si:

$$\langle x_i | x_j \rangle = \delta_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

Prop: (*)

* Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.

* Toute famille orthonormale st libre.

Orthogonale d'une partie:

Si E préhilbertien.

Definition:

$$\text{Si } A \subseteq E, A \neq \emptyset$$

On appelle orthogonale de A :

$$A^\perp = \{x \in E / \forall y \in A: \langle x | y \rangle = 0\}$$

$$\text{Par convention: } \emptyset^\perp = E$$

Propriétés:

* $\forall A \subseteq E: A^\perp$ est un sev de E .

* Si $A \subseteq B \Rightarrow B^\perp \subseteq A^\perp$

* Si $A \subseteq E$ alors $A^\perp = \text{vect}(A)^\perp$

* $\{0\}^\perp = E$ et $E^\perp = \{0\}$.

* $A \subseteq E$ alors $A \cap A^\perp \subseteq \{0\}$

$$\text{Si } 0 \in A: A \cap A^\perp = \{0\}, \text{ sinon } A \cap A^\perp = \emptyset$$

* Si A un sev de $E: A \cap A^\perp = \{0\}$

* $A \subseteq (A^\perp)^\perp$

- **Définition :**
Si $A \subseteq E$ et $B \subseteq E$, A et B non vides
 A et B sont dits orthogonauxssi:
 $\forall (a,b) \in A \times B : \langle a|b \rangle = 0$
- **Prop :**
 A et B sont orthogonauxssi: $A \subseteq B^\perp$ ou $B \subseteq A^\perp$

- **Prop :** (*)
Si F et G deux sev tq $E = F \oplus G$
 F et G sont orthogonauxssi: $F = G^\perp$ ou $G = F^\perp$
On note ds ce cas: $E = F \oplus^\perp G$.

Rmq :

Pour montrer que $u=v$ ds un espace préhilbertien, on peut mq:

$\forall y \in E : \langle u-v|y \rangle = 0$

ou $\|u-v\|^2 = 0$.

• **Rmq :**

Si F un sev de E alors $F + F^\perp$ est directe.

• **Théorème :** (*)

Si E un espace euclidien et F sev de E .

Alors $E = F \oplus F^\perp$ et $F^{\perp\perp} = F$.

• **Corollaire :** (*)

Tout espace euclidien diff de $\{0\}$ admet une base.

• **Corollaire :** (*)

Si E un espace euclidien.

Toute famille orthonormale peut être complétée en une base orthonormale de E .

• **Théorème :** (*)

Si E un espace préhilbertien et F sev de E tq $\dim F$ est finie.

Alors $E = F \oplus F^\perp$ et $F^{\perp\perp} = F$

• **Prop :**

Si E un espace euclidien. $B = (e_1, \dots, e_n)$ base de E .

des pss :

1- B est base de E

2- $\text{mat}_B \langle \cdot | \cdot \rangle = I_n$

3- $\forall (x,y) \in E^2 : X = \text{mat}_B(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, Y = \text{mat}_B(y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

Alors $\langle x|y \rangle = {}^t X Y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$

4- $\forall x \in E : x = \sum_{i=1}^n \langle e_i|x \rangle e_i$

5- $\forall x \in E : \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n \langle e_i|x \rangle^2$

(4)

• **Conclusion :** (*)

Si $B = (e_1, \dots, e_n)$ base de E .

Alors $\det(\text{mat}_B \langle \cdot | \cdot \rangle) \in \mathbb{R}^*$

Projection orthogonale :

Si E un espace préhilbertien et F sev de E tq
 $E = F \oplus F^\perp$.

• **Déf :**

On appelle proj orthogonale sur F le projecteur p_F de E , sur F parallèle à $F^\perp$, c'est p_F est le projecteur de E tq $\text{Im } p_F = F$ et $\text{ker } p_F = F^\perp$

• **Théorème :**

Si E un espace préhilbertien réel et F sev de E tq $\dim F = p < \infty$ et $B = (e_1, \dots, e_p)$ base de F

Alors $p_F(x) = \sum_{i=1}^p \langle e_i|x \rangle e_i$

et $p_{F^\perp}(x) = x - \sum_{i=1}^p \langle e_i|x \rangle e_i$

• **Prop :**

Si $D = \mathbb{R}a$ une droite de E .

$\forall x \in E : p_D(x) = \frac{\langle a|x \rangle}{\|a\|^2} a$

Si $H = D^\perp : p_H(x) = x - \frac{\langle a|x \rangle}{\|a\|^2} a$

• **Déf :**

Si p un projecteur de E . p est dit orthogonal si $\text{ker } p$ et $\text{Im } p$ sont $\perp$.

$S = 2p - \text{id}_E$ est la symétrie $\perp$ associée.

• **Rmq :**

E un espace préhilbertien et F un sev de E et $(e_i)_{i \in I}$ une famille génératrice. ($F = \text{vect}(e_i)_{i \in I}$).

Alors :

$x \in F^\perp \Leftrightarrow \forall i \in I : \langle x|e_i \rangle = 0$

Distance d'un vecteur à un sev de E :

• **Prop :** (*)

Si F un sev de E tq $\dim F < \infty$.

$\forall x \in E, \exists ! y \in F : d(x,F) = \|x-y\|$ ou $y = p_F(x)$.
(sev est un convexe d'où l'unicité).

• **Corollaire :**

Si $\dim F < \infty$. Alors : $\forall x \in E$,

$d(x,F) = \|x - p_F(x)\|$

$\|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + d^2(x,F)$

• **Prop :** (*)

Si $\dim F < \infty$.

$\forall x \in E, \forall y \in F : d(x,F) = \|x-y\| \Leftrightarrow (x-y) \in F^\perp$

Rmq:

- $d(x, F) = \|p_F^\perp(x)\|$
- $d(x, F^\perp) = \|p_F(x)\|$
- $\|x\|^2 = d^2(x, F^\perp) + d^2(x, F)$

Rappel: (Pythagore).

Si $x_1, \dots, x_n$ des vecteurs l.a. & $\perp$.

$$\text{Alors, } \left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2$$

• Prop. Caractérisatⁿ de projecteurs orthogonaux. (*) Δ

Si p un projecteur de E , les pttesse:

* p st un projecteur orthogonal.

* $\forall (x, y) \in E^2: \langle p(x) | y \rangle = \langle x | p(y) \rangle$ (endomorphisme symétrique)

* $\forall x \in E: \|p(x)\| \leq \|x\|$

• Déf: Symétrie orthogonale:

Une symétrie S de E ($S \in \mathcal{L}(E) / S^2 = \text{id}$) st dite orthogonale ssi le projecteur $p = \frac{1}{2}(S + \text{id})$ st orthog ssi $\ker(S - \text{id})$ et $\ker(S + \text{id})$ sont $\perp$.

• Th.

Si S une symétrie de E , la pssse:

* S st sym orthogonale.

* $\forall (x, y) \in E^2: \langle S(x) | y \rangle = \langle x | S(y) \rangle$

* $\forall x \in E: \|S(x)\| = \|x\|$

• Th: Inégalité de Bessel (*)

Si $(e_1, \dots, e_n)$ une famille orthogonale de E , alors:

$$\forall x \in E: \sum_{k=1}^n \langle x | e_k \rangle^2 \leq \|x\|^2$$

• Théorème 1 *

Si $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite orthonormale de E .

Alors $\sum_{n \in \mathbb{N}} \langle x | e_n \rangle^2$ st convergente.

$$\text{et } \sum_{n=0}^{\infty} \langle e_n | x \rangle^2 \leq \|x\|^2$$

avec d'égalité ssi $x \in \overline{\text{vect}(e_n)_{n \in \mathbb{N}}}$

Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt:

• Théorème:

Si $(e_1, \dots, e_n)$ famille libre de E , alors $\exists (v_1, \dots, v_n)$ orthogonale de $E: \forall i \in \{1, n\}: \text{vect}(e_1, \dots, e_i) = \text{vect}(v_1, \dots, v_i)$

• Théorème 2:

$\exists (e_1, \dots, e_n)$ base de E alors $\exists (v_1, \dots, v_n)$ bon de E tq

* $\forall i \in \{1, n\}: \text{vect}(v_1, \dots, v_i) = \text{vect}(e_1, \dots, e_i)$

* $\forall i \in \{1, n\}: \langle e_i | v_i \rangle > 0$

$$\text{et ds cas, } v_i = \frac{e_i - p_{\text{vect}(e_1, \dots, e_{i-1})}(e_i)}{\|e_i - p_{\text{vect}(e_1, \dots, e_{i-1})}(e_i)\|} \quad (5)$$

• Théorème: (*)

$$p_B^B \in T_n^+(\mathbb{R})$$

où $T_n^+(\mathbb{R})$: ensemble des matrices triang sup à elnts diagonaux > 0 .

Adjoint d'un endomorphisme:

Soit E un espace euclidien de dimension non nulle, $u \in \mathcal{L}(E)$

• Théorème: (*)

$\exists!$ endomorphisme $u^* \in \mathcal{L}(E)$ tq $\forall (x, y) \in E^2$:

$$\langle u(x) | y \rangle = \langle x | u^*(y) \rangle$$

Si $B = (e_1, \dots, e_n)$ bon de E .

$$\text{mat}_B(u) = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i, j \leq n}}$$

$$\text{Alors } a_{ij} = \langle e_i | u(e_j) \rangle$$

• Déf:

u^* st appelé l'endomorphisme adjoint de u .

• Rés: (*)

Soient $(u, v) \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$1. (\text{id}_E)^* = \text{id}_E$$

$$2. (\lambda u + v)^* = \lambda u^* + v^*$$

$$3. (u^*)^* = u$$

$$4. (u \circ v)^* = v^* \circ u^*$$

$$5. u \in \mathcal{GL}(E) \text{ alors } u^* \in \mathcal{GL}(E): (u^*)^{-1} = (u^{-1})^*$$

• Prop: (*)

Si $u \in \mathcal{L}(E)$ alors $\ker u^* = (\text{Im } u)^\perp$ et $\text{Im } u^* = (\ker u)^\perp$

• Prop: *

* $\ker(u^* \circ u) = \ker u$

* $\text{Im}(u^* \circ u) = \text{Im } u^*$

• Prop:

Si B une bon:

$$\text{mat}_B(u^*) = {}^t(\text{mat}_B u)$$

• Prop: (*)

Si E un espace euclidien, $u \in \mathcal{L}(E)$, F ssc de E .

Alors F stable par $u \Leftrightarrow F^\perp$ stable par u^*

Endomorphisme symétrique ou autoadjoint:

Si E espace euclidien

• Déf:

Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ st dit autoadjoint ou symétrique ssi $u^* = u$, si: $\forall (x, y) \in E^2: \langle u(x) | y \rangle = \langle x | u(y) \rangle$
leur ensemble est noté $\mathcal{S}(E)$

• Théorème: (*)

$u \in \mathcal{L}(E)$ et B une bon de E .

$$u \in \mathcal{S}(E) \Leftrightarrow \text{mat}_B u \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$$

Prop :

$\mathcal{V}(E)$ ser de $\mathcal{L}(E)$ isomorphe à $S_n(\mathbb{R})$, $n = \dim(E)$
et donc $\dim \mathcal{V}(E) = \frac{n(n+1)}{2}$.

• Définition :

$u \in \mathcal{L}(E)$ st dit antisymétrique ssi $u^* = -u$.
ssi $\forall (x, y) \in E^2 : \langle u(x) | y \rangle = -\langle x | u(y) \rangle$
leur ensemble st noté $\mathcal{A}(E)$.

• Prop :

$$u \in \mathcal{A}(E) \Leftrightarrow \forall x \in E, \langle u(x) | x \rangle = 0$$

• Prop :

$$\mathcal{L}(E) = \mathcal{V}(E) \oplus \mathcal{A}(E)$$

$$\begin{cases} u = \frac{u+u^*}{2} + \frac{u-u^*}{2} \\ \mathcal{A}(E) \cap \mathcal{V}(E) = \{0\} \end{cases}$$

• Théorème :

Si u symétrique et F ser de E .

Alors F stable par $u \Leftrightarrow F^\perp$ stable par u

• Prop :

Si $u \in \mathcal{V}(E)$ et F stable par u .

Alors $u|_F \in \mathcal{V}(F)$ et $u|_{F^\perp} \in \mathcal{V}(F^\perp)$

• Théorème :

1) Si p un projecteur de E .

p st un projecteur orthogonal ssi p est un endomorphisme symétrique.

2) si s une symétrie de E .

s st une symétrie orthogonale ssi s st symétrique.

• Théorème : (*)

Si u autoadjoint (ou sym) alors χ_u scindé ds $\mathbb{R}[X]$.

• Théorème spectral : (*)

* Tout endomorphisme symétrique (ou autoadjoint) d'un espace euclidien st diagonalisable ds la bon de $\vec{v}$.

* Toute matrice symétrique réelle st orthogonale et diagonalisable, i.e :

si $A \in S_n(\mathbb{R})$, $\exists P \in O_n(\mathbb{R}) : {}^t P A P = D$ (diagonale)

Rmq :

si la matrice n'est pas réelle, le résultat tombe en défaut : $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$, $\chi_A = X^2$

$$\Rightarrow \text{sp}(A) = \{0\}$$

Adjug $\Rightarrow A=0$ absurde.

(6)

• Théorème : (*)

si u autoadjoint alors deux vecteurs propres associés à 2 valeurs propres distinctes sont orthogonaux.

• Corollaire :

ds sous espaces propres d'un endomorphisme auto-adjoint sont supplémentaires orthogonaux.

Complément : rayon spectral :

• Def : (*) $\rho(u) = \|u\|$

où $\rho(u) = \max \{ |\lambda| / \lambda \in \text{sp}(u) \}$ rayon spectral.

et $\|u\|$ la norme subordonnée de u associée à la norme euclidienne.

• Prop : (*)

si $u \in \mathcal{V}(E)$ tq $\text{sp}(u) = \{ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \}$

$$\text{tq } \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$$

$$\begin{cases} \min_{\|x\|=1} \langle u(x) | x \rangle = \lambda_1 \\ \max_{\|x\|=1} \langle u(x) | x \rangle = \lambda_n \end{cases}$$

• Corollaire :

d'app $q: E \rightarrow \mathbb{R}$ st continue
 $x \mapsto \langle u(x) | x \rangle$

$$\text{et } q(S(q,1)) = [\lambda_1, \lambda_n]$$

• Prop :

si $u \in \mathcal{V}(E)$, B une bon de E .

Alors $\varphi: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ st forme bilinéaire sym de E
 $(x, y) \mapsto \langle u(x) | y \rangle$

$$\text{mat } \varphi = \text{mat } u_B$$

• Corollaire :

si $u \in \mathcal{V}(E)$, $\text{sp}(u) = \{ \lambda_1, \dots, \lambda_n \}$

B bon de E , formée de $\vec{v}_i$ de u

$$B = (e_1, \dots, e_n)$$

$$\forall x = \sum_{i=1}^n x_i e_i, \forall y = \sum_{j=1}^n y_j e_j$$

$$\varphi(x, y) = {}^t X \odot Y \text{ où } X = \text{mat } x \text{ et } Y = \text{mat } y \\ = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i y_i$$

Endomorphismes symétriques positifs et négatifs :

• Définition :

Un endomorphisme symétrique st dit positif ssi :

$$\forall x \in E : \langle u(x) | x \rangle \geq 0$$

$\mathcal{H}$ st défini positif ssi : $\forall x \in E, \langle u(x) | x \rangle > 0$

Notation:
l'ensemble des endomorphismes symétriques positifs
(resp. def. positifs) est noté $\mathcal{S}^+(E)$ (resp. $\mathcal{S}^{++}(E)$)

• Définition:

Une matrice symétrique réelle A est dite positive ssi:

$$\forall X \in \Pi_n(\mathbb{R}) : {}^tXAX \geq 0$$

leur ensemble est noté $S_n^+(\mathbb{R})$

Elle est dite symétrique définie positive ssi:

$$\forall X \in \Pi_n(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, {}^tXAX > 0$$

leur ensemble est noté $S_n^{++}(\mathbb{R})$.

• Théorème:

Si $u \in \mathcal{S}(E)$ et B une bon de E

Alors $u \in \mathcal{S}^+(E) \Leftrightarrow \text{mat}_B(u) \in S_n^+(\mathbb{R})$

$u \in \mathcal{S}^{++}(E) \Leftrightarrow \text{mat}_B(u) \in S_n^{++}(\mathbb{R})$

• Théorème: (*) Δ

Si $u \in \mathcal{S}(E)$,

1) $u \in \mathcal{S}^+(E) \Leftrightarrow \text{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$

2) $u \in \mathcal{S}^{++}(E) \Leftrightarrow \text{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+^*$

• Corollaire: (*)

Si $A \in S_n(\mathbb{R})$

1) $A \in S_n^+(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$

2) $A \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$

• Prop.

1) $\mathcal{S}^{++}(E) = \mathcal{S}^+(E) \cap GL(E)$

2) $S_n^{++}(\mathbb{R}) = S_n^+(\mathbb{R}) \cap GL_n(\mathbb{R})$

Rmq:

1) Si $u \in \mathcal{L}(E)$ alors $u^* \circ u \in \mathcal{S}^+(E)$

(méthode de construire des endo sym positifs à partir d'endo quelq).

2) Si $u \in GL(E)$ alors $(u^* \circ u) \in \mathcal{S}^{++}(E)$

3) Si $A \in \Pi_n(\mathbb{R}) \Rightarrow {}^tAA \in S_n^+(\mathbb{R})$

4) Si $A \in GL_n(\mathbb{R}) \Rightarrow {}^tAA \in S_n^{++}(\mathbb{R})$

Extension (HP): (*)

Soit E un espace euclidien $\dim E = n, (x_1, \dots, x_p) \in E^p$

On appelle matrice de Gram associée à la famille

$(x_1, \dots, x_p)$.

$$G(x_1, \dots, x_p) = (\langle x_i, x_j \rangle)_{\substack{1 \leq i, j \leq p}}, \text{ alors,}$$

• $G(x_1, \dots, x_p) \in S_p^+(\mathbb{R})$

• $(x_1, \dots, x_p)$ libre ssi $G(x_1, \dots, x_p) \in S_p^{++}(\mathbb{R})$

• On note $DG(x_1, \dots, x_p) = \det(G(x_1, \dots, x_p))$

Alors $(x_1, \dots, x_p)$ libre ssi $DG(x_1, \dots, x_p) > 0$

• Si $(x_1, \dots, x_p)$ libre et $F = \text{vect}(x_1, \dots, x_p)$

et $x \in E$ alors:

$$d^2(x, F) = \frac{DG(x_1, x_2, \dots, x_p)}{DG(x_1, \dots, x_p)}$$

• $rg(x_1, \dots, x_p) = rg(G(x_1, \dots, x_p))$

Endomorphisme orthogonal: isométrie vectorielle

Si E un espace euclidien, $u \in \mathcal{L}(E)$

• Définition:

u est dit un endomorphisme orthogonal ssi:

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

(u conserve le produit scalaire).

• Théorème:

Si $u \in \mathcal{S}^{++}(E)$,

$\mathcal{L}_{\text{app}}: \varphi_u: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ si un ps sur E est associé à u
 $(x, y) \mapsto \langle u(x), y \rangle$

• Théorème: (*)

Si $u \in \mathcal{L}(E)$, les pss:

* $u \in \mathcal{O}(E)$

* $\forall (x, y) \in E^2, \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ (u conserve p.s.)

* $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|$, u conserve la norme.

* u transforme une bon de E en une bon

* $\exists$ une bon de $E: {}^t(\text{mat}_B(u)) \text{mat}_B(u) = I_n$

Rmq:

$u \in \mathcal{O}(E) \Rightarrow u \in GL(E)$

Matrice orthogonale:

Si $A \in \Pi_n(\mathbb{R})$

• Déf:

A est dite orthogonale ssi ${}^tAA = I_n$.

leur ensemble est noté $O_n(\mathbb{R})$.

• Prop:

$u \in \mathcal{O}(E)$ ssi sa matrice ds une bon est orthogonale

• Théorème:

$A \in O_n(\mathbb{R})$ ssi A est la matrice de passage d'une bon à une bon.

• Prop:

1) $A \in O_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow {}^tA \in O_n(\mathbb{R})$

2) Les vecteurs colonnes (resp. lignes) forme une bon de $\Pi_n(\mathbb{R})$ muni du ps usuel.

Rmq:

Pour un endo sym: $\ker(u) = (\text{Im } u)^\perp$

(Car $u = u^* \Rightarrow \ker u = \ker u^* = (\text{Im } u)^\perp$)

• Prop:

$u \in \mathcal{O}(E) \Leftrightarrow u^* = u^{-1}$

• Prop: (*)
Si $u \in \mathcal{O}(E)$ alors $\text{Sp}(u) \subset \{-1, 1\}$

• Théorème: (*)
Si $u \in \mathcal{O}(E)$, alors:
 u diagonalisable si u symétrique orthogonale.

• Théorème: (*)
Si $u \in \mathcal{O}(E)$, alors:
 $\ker(u - \text{id})$ et $\text{Im}(u - \text{id})$ sont supplémentaires $\perp$.
Ainsi $E = \ker(u - \text{id}) \oplus \text{Im}(u - \text{id})$

• Théorème: (*)
Si $u \in \mathcal{O}(E)$ et F un ser de E .

Alors F stable par $u \Leftrightarrow F^\perp$ stable par u .

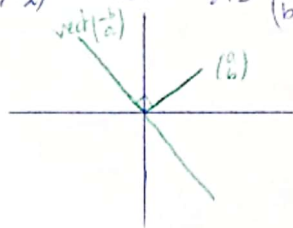
• Théorème: (*)
 $(\mathcal{O}(E), \circ)$ est un groupe dit groupe orthogonal
ou groupe des isométries vectorielles de E .

• Théorème:
1/ $u \in \mathcal{O}(E) \Rightarrow \det(u) = \pm 1$
2/ $\text{SO}(E) = \{u \in \mathcal{O}(E) / \det(u) = 1\}$ est sous groupe
spécial de E ou groupe des isométries positives de E
(rotations)

• Prop:
1/ $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \text{M}_n(\mathbb{R}) : {}^tAA = I_n\}$ est groupe dit
groupe orthogonal d'ordre n .
2/ $\text{SO}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) / \det(A) = 1\}$ est un sous
groupe de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ dit sous groupe spécial d'ordre n .

Classification des isométries d'un plan:

Si $u \in \mathcal{O}(E)$ qd $\dim(E) = 2$
Soit (e_1, e_2) bon de E . $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \text{mat}_B u$



$$\text{On a: } \left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$$

$$\text{Or } \left\| \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \right\| = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1$$

$$\text{Et on a: } \begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ c^2 + d^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \exists \theta \in \mathbb{R}, a = \cos(\theta) \text{ et } b = \sin(\theta)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = \pm 1$$

$$\mathcal{O}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \varepsilon \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \varepsilon \cos(\theta) \end{pmatrix} / \varepsilon = \pm 1 \right\}$$

$$\text{et } \text{SO}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \right\} \text{ d'angle } \theta$$

et $\mathcal{O}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{R} \right\}$ d'angle de symétries orthogonales.

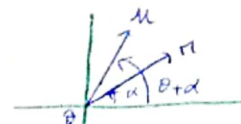
• Géométriquement:

Si $\theta \in \mathbb{R}$: $\theta \mapsto \lambda e^{i\theta}$, $u \in \mathcal{O}^*(E)$

$$u(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \cos(\alpha) \\ r \sin(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} r(\cos(\alpha)\cos(\theta) - \sin(\alpha)\sin(\theta)) \\ r(\sin(\alpha)\cos(\theta) + \cos(\alpha)\sin(\theta)) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} r \cos(\theta + \alpha) \\ r \sin(\theta + \alpha) \end{pmatrix}$$



$$\Rightarrow u(\theta) = \lambda e^{i(\theta + \alpha)}$$

Classification des isométries en dim 3:

$\mathcal{O}_3^+(\mathbb{R})$?

Si $\dim E = 3$ et $u \in \mathcal{O}_3^+(\mathbb{R})$

$\dim E$ impaire $\Rightarrow \text{Sp}(u) \neq \emptyset$

$$\text{or } \det(u) = 1 \Rightarrow 1 \in \text{Sp}(u)$$

Soit e_1 un vecteur propre normal associé à 1.

$D = \mathbb{R}e_1$ est stable par u .

Donc $\exists B = (e_1, e_2, e_3)$ bon de E

$$\text{tg mat}_B u = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Rotatⁿ d'axe D_{e_1} et d'angle θ .

$$\text{tr}(u) = 1 + 2\cos(\theta)$$

$$\Rightarrow \cos(\theta) = \frac{\text{tr}(u) - 1}{2}$$

Pour déterminer le signe de θ :

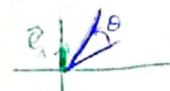
On choisit $x \in E$: $x \perp e_1$

$$\text{On a: } x \wedge u(x) = \alpha e_1$$

$$\text{Si } \alpha > 0 \Rightarrow \theta > 0$$

$$\text{Si } \alpha < 0 \Rightarrow \theta < 0$$

$$\text{Si } \alpha = 0 \Rightarrow x \text{ et } u(x) \text{ sont colinéaires} \\ \Rightarrow \theta = 0 \text{ ou } \theta = \pi$$



• Réflexion:

C'est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan.

• Remq:

Si $u \in \mathcal{O}^-(E)$ avec $\dim E = 3$

Alors $(-u) \in \text{SO}(E)$

Donc $\exists B$ bon de E :

$$\text{mat}_B(-u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{mat}_B(u) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = A.$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\pi+\theta) & -\sin(\pi+\theta) \\ 0 & \sin(\pi+\theta) & \cos(\pi+\theta) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\pi+\theta) & -\sin(\pi+\theta) \\ 0 & \sin(\pi+\theta) & \cos(\pi+\theta) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \text{Id}_3$$

• Théorème : (*)

Si E un $\mathbb{R}$ -ev et $u \in \mathcal{L}(E)$

Alors $\exists$ une base de E stable par u et de $\dim \leq 2$.

• Théorème :

Si E un $\mathbb{R}$ -ev et $u \in \mathcal{L}(E)$, $\dim E < \infty$

Alors E admet une droite ou un plan stable par u .

• Th. Réduct² des endomorphismes : *

Si E un espace euclidien de $\dim n \in \mathbb{N}^*$, $u \in \mathcal{L}(E)$

Alors $\exists$ une base B de E tq :

$$\text{mat}_B u = \begin{pmatrix} I_p & & 0 \\ & -I_q & \\ 0 & R_{\theta_1} & \dots & R_{\theta_q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_0 & & 0 \\ & R_{\pi} & \\ 0 & R_{\theta_1} & \dots & R_{\theta_q} \end{pmatrix}$$

$$\text{ou } R_{\theta_i} = \begin{pmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \end{pmatrix}, \theta_i \in \mathbb{R} \setminus \pi \mathbb{Z}$$

• Corollaire :

$\mathcal{SO}(E)$ est un cpa.

Generalités

Si I un intervalle de $\mathbb{R}$. E un evn de $\dim < \infty$.

$$a: I \rightarrow \mathcal{L}(E)$$

$$t \mapsto a(t)$$

$$b: I \rightarrow E$$

$$t \mapsto b(t)$$

Definition:

On appelle équation diff linéaire d'ordre 1.

$$(L): x' = a(t)x + b(t)$$

où x est la fct inconnue.

Une sol de (L) sur un intervalle $J \subset I$, est une

$$\text{app: } f: J \rightarrow E \text{ dérivable sur } J$$

$$t \mapsto f(t)$$

$$\text{et vérifie: } \forall t \in J: f'(t) = a(t)f(t) + b(t)$$

Rmq:

Si a continue de $I \rightarrow \mathcal{L}(E)$ et b cont de $I \rightarrow E$

Toute solutⁿ de (L) sur I est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I .

Definition:

Toute solution de (L) sur I est dite une I -solutⁿ de (L) .

Notation:

L'ensemble des solutⁿ de (L) sur I est noté $S_I(L)$.

Definition:

On appelle équation différentielle homogène associée à (L) :

$$(H): x' = a(t)x, \text{ dite équa diff sans 2nd membre associée à } (L).$$

Système différentiel linéaire d'ordre associé:

Si $B = (e_1, \dots, e_n)$ base de E

$$\forall t \in I: A(t) = \text{mat}_B(a(t)) \in M_n(\mathbb{K}) = (a_{ij}(t))$$

$$B(t) = \text{mat}_B(b(t)) \in M_n(\mathbb{K}) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$$

$$X(t) = \text{mat}_B(x(t)) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

$$(L): x' = a(t)x + b(t) \Leftrightarrow X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1'(t) = \sum_{j=1}^n a_{1j}(t)x_j(t) + b_1(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) = \sum_{j=1}^n a_{nj}(t)x_j(t) + b_n(t) \end{cases}$$

Definition:

$X' = A(t)X + B(t)$ est dit sys différentiel d'ordre 1 associé à (L) .

Cas d'équa diff linéaire scalaire d'ordre n:

Il s'agit d'éq lin d'ordre n , scalaire:

$$(L): x^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \dots + a_0(t)x(t) = c(t)$$

où $a_i: I \rightarrow \mathbb{K}$ des app continue sur I

$$c: I \rightarrow \mathbb{K} \dots$$

Toute sol de (L) est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I .

soit $X: I \rightarrow M_{n,1}(\mathbb{K})$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur I .

$$t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \forall t \in I: X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ \vdots \\ x^{(n)}(t) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0(t) & \dots & \dots & -a_{n-1}(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ c(t) \end{pmatrix}$$

$$\text{soit: } X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$$

Problème de Cauchy associé à une eq diff d'ordre 1

$a: I \rightarrow \mathcal{L}(E)$ continue, $b: I \rightarrow E$ continue
 $t_0 \in I$ et $x_0 \in E$

Definition:

On appelle problème de Cauchy associé à L en (t_0, x_0) :

$$PC_{(t_0, x_0)} \begin{cases} x'(t) = a(t)x(t) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Rmq:

$$(L): x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \dots + a_0(t)x(t) = c(t)$$

Pb de Cauchy en (t_0, x_0) est:

$$\begin{cases} X'(t) = A(t)X(t) + B(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^{(n)} + \dots + a_0(t)x(t) = c(t) \\ x(t_0) = x_0 \\ x'(t_0) = x_1 \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1} \end{cases} \text{ où } (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$$

Théorème de Cauchy Lipschitz linéaire d'ordre 1.

Si $a: I \rightarrow \mathcal{L}(E)$ cont sur I (intervalle)

$b: I \rightarrow E$ cont sur I

et $(t_0, x_0) \in I \times E$

Alors le PC en (t_0, x_0) : $\begin{cases} x' = a(t)x + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$

admet une unique I-solut² φ tq : $\varphi(t_0) = x_0$

• Prop. (*)

(H) : $x' = a(t)x$

$S_I(H)$ est sev de $\mathcal{C}^1(I, E)$ et isomorphe à E donc de dim n .

Rmq :

Si $A = x_0 + H$ alors A est le sous espace affine passant par $x_0 \in A$ de direct² H .

• Théorème (*)

$S_I(L)$ est sous espace affine de direct² $S_I(H)$, car

$$S_I(L) = f_0 + S_I(H), \text{ où } f_0 \text{ solut}^2 \text{ de } S_I(L)$$

solut² de l'équation :

• Théorème (*) : si $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ ds solut² de (H) sur I et $t_0 \in I$.

$$\text{Alors } \text{rg}(\varphi_1, \dots, \varphi_n) = \text{rg}(\varphi_1(t_0), \dots, \varphi_n(t_0))$$

• Corollaire :

Si $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ ds solut² de (H) sur I .

Alors $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est une base de $S_I(H)$ si

$$\exists t_0 \in I : (\varphi_1(t_0), \dots, \varphi_n(t_0)) \text{ base de } E.$$

et ds ce cas : $\forall t \in I : (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$ base de E

• Définition :

Une base $\mathcal{H} = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ de $S_I(H)$ est dit un système fondamental de sol de (H).

Matrice wronskienne et wronskien d'une famille de sol de (H) :

• Déf :

Si $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $t \in I$: $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ ds sol de (H).

la matrice de la famille $(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$ ds la base B est app la matrice wronskienne de $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ ds la base B ent.

$$\text{On note : } W(t) = \text{mat}_B(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$$

son det est dit le wronskien de $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ ent, noté $w(t) = \det(W(t))$.

• Théorème :

Si $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ ds sol de (H) . ds pose :

* $\mathcal{H} = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est un sys fondamental de (H).

* $\exists t_0 \in I : (\varphi_1(t_0), \dots, \varphi_n(t_0))$ base de E

* $\forall t \in I : (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$ base de E

* $\exists t_0 \in I : w(t_0) \neq 0$.

* $\forall t \in I : w(t) \neq 0$.

Calcul de f_0 (méth de variat² des constantes) :

• Théorème :

Si $\mathcal{H} = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ un sys fondamental de sol de (H)

$f \in \mathcal{C}^1(I, E)$, $p \in \{0, 1\}$

Alors $\exists C_1, C_2, \dots, C_n \in \mathcal{C}^p(I, \mathbb{K})$ (de m classe que f)

$$\text{tq : } \forall t \in I : f(t) = \sum_{i=1}^n C_i(t) \varphi_i(t)$$

• Méthode de variat² des constantes : (*)

$\mathcal{H} = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ un sys fondamental de sol de (H) tq : si $f \in \mathcal{C}^2(I, E)$ tq :

$$\forall t \in I : f(t) = \sum_{i=1}^n C_i(t) \varphi_i(t), \quad C_i \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{K})$$

$$f \text{ sol de (L) si } \forall t \in I : \sum_{i=1}^n C_i'(t) \varphi_i(t) = b(t)$$

$$\text{Si } b(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(t) \varphi_i(t) \text{ avec } \alpha_i \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$$

f sol de (L) si $\forall i \in \{1, \dots, n\} : C_i'(t) = \alpha_i(t)$

Cas de système différentiel :

$$(H) : X' = A(t)X \text{ et } (L) : X' = A(t)X + B(t)$$

$$\text{où : } A : I \rightarrow M_n(\mathbb{K}) \text{ cont sur } I ; B : I \rightarrow M_n(\mathbb{K}) \text{ cont sur } I$$

d'écriture matricielle de (H) : $x' = a(t)x$

$$\text{et (L) : } x' = a(t)x + b(t)$$

$$\forall t \in I : A(t) = \text{mat}_B a(t) \text{ où } a(t) : M_{n,1}(\mathbb{K}) \rightarrow M_{n,1}(\mathbb{K})$$

$$Y \mapsto A(t)Y$$

• Prop :

$S_I(H_1)$ est sev de $\mathcal{C}^1(I, M_{n,1}(\mathbb{K}))$ et isomorphe à $M_{n,1}(\mathbb{K})$.

$$\forall t_0 \in I : \varphi_{t_0} : S_I(H_1) \rightarrow M_{n,1}(\mathbb{K})$$

$$X \mapsto X(t_0)$$

• Théorème (solut² intégrale du PC) :

$x' = a(t)x + b(t)$ où $a : I \rightarrow \mathcal{L}(E)$ continue sur I et $b : I \rightarrow E$ continue sur I

$$\forall (t_0, x_0) \in I \times E, \text{ PC : } \begin{cases} x' = a(t)x + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

ds solut² du PC en (t_0, x_0) est :

$$f(t) = x_0 + \int_{t_0}^t (a(s)f(s) + b(s))ds$$

Cas de eq diff à coeff constants:

Il s'agit de eqa diff de la forme: $x' = ax + b(t)$
où $a \in \mathcal{L}(E)$ (ne dpt pas de t)
et $b: I \rightarrow E$ continue.

$$(H): x' = ax$$

Th: Cauchy Lipschitz.

d'eq diff: $x' = ax + b(t)$ où $b: I \rightarrow E$ continue
admet une unique solution définie sur I tq
 $f(t_0) = x_0 \in E$

$$(H): \begin{cases} x' = ax \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \text{ admet une unique solut}^e \text{ sur } \mathbb{R}$$

• Remq:

$S_I(H)$ l'ensemble des sol de (H) sur $\mathbb{R}$ où (H): $x' = ax$
est un $\mathbb{K}$ er de dim n isomorphe à E .

• Corollaire:

de système diff à coeff constant:

$$\begin{cases} X' = AX \\ X(t_0) = X_0 \end{cases} \text{ (où } A \in M_n(\mathbb{K}) \text{ ne dpt pas de } t)$$

admet une unique sol définie sur $\mathbb{R}$.

$$(H): X' = AX, S_I(H) \text{ est } \mathbb{K}\text{er isomorphe à } M_{n,1}(\mathbb{K}) \text{ et donc de dim } n \text{ (la taille de la matrice)}$$

• Résolut^e de (H): $x' = ax$:

$$(H): x' = ax \Leftrightarrow x' - ax = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{-ta} x' - a e^{-ta} x = 0$$

$$\Leftrightarrow (e^{-ta} x)' = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{-ta} x = C$$

$$\Leftrightarrow x(t) = \underbrace{e^{ta}}_{\text{endomorphisme}} \cdot \underbrace{C}_{\text{vecteur}}$$

• Solut^e du PC:

$$\begin{cases} x' = ax \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \text{ la solut}^e \text{ est: } e^{(t-t_0)a} \cdot x_0$$

Système différentiel associé:

$$(H): X' = AX$$

$S_I(H)$ est sev de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}, M_{n,1}(\mathbb{K}))$ est isomorphe à $M_{n,1}(\mathbb{K})$

* Si A diagonalisable:

$$\exists P \in GL_n(\mathbb{K}): P^{-1}AP = D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

$$\text{On pose: } X = PY \text{ dans (H)}$$

$$(H) \Leftrightarrow PY' = APY$$

$$\Leftrightarrow Y' = (P^{-1}AP)Y = DY$$

$$\text{Si } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}; (H) \Leftrightarrow \begin{cases} y_1' = \lambda_1 y_1 \\ \vdots \\ y_n' = \lambda_n y_n \end{cases}$$

$$\Rightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\}: y_i = C_i e^{\lambda_i t} \text{ où } C_i \in \mathbb{K}$$

$$\text{Donc } X = PY$$

• Théorème:

Si A diagonalisable et $B = (e_1, \dots, e_n)$ base de $M_{n,1}(\mathbb{K})$
formée de $\vec{v}_i$ de A , tq $Ae_i = \lambda_i e_i$.

$$\text{On pose: } \varphi_i: t \mapsto e^{\lambda_i t} e_i$$

Alors $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ est une base de sol de (H) .

$$\text{Car } (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) = (e_1, \dots, e_n) \text{ base de } M_{n,1}(\mathbb{K})$$

• Remq: $(v_1, \dots, v_n)$ base de $\vec{v}_i$ de A

Si $A \in M_n(\mathbb{R})$, non diagonalisable de $\mathbb{R}$ mais
diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

$$\text{Si } \lambda \in \text{sp}_{\mathbb{C}}(A) \setminus \text{sp}_{\mathbb{R}}(A) \text{ alors } \bar{\lambda} \in \text{sp}_{\mathbb{C}}(A)$$

$$A\bar{v} = \bar{\lambda}\bar{v} \Leftrightarrow A\bar{v} = \bar{\lambda}\bar{v}$$

$$\varphi_i: t \mapsto e^{\lambda_i t} v_i \in S_I(H)$$

$$\bar{\varphi}_i: t \mapsto e^{\bar{\lambda}_i t} \bar{v}_i \in S_I(H)$$

$$\Rightarrow \frac{\varphi_i + \bar{\varphi}_i}{2} \in S_I(H) \quad (S_I(H) \text{ sev})$$

$$\frac{\varphi_i - \bar{\varphi}_i}{2i} \in S_I(H)$$

sont des solut^e réelles de (H).

* Si A triangulable:

$$(L): X' = AX + B(t)$$

Si A triangulable sur $\mathbb{K}$ (ce qui est typé le cas de $\mathbb{C}$)

$$\exists P \in GL_n(\mathbb{K}): P^{-1}AP = T \text{ (triang sup)}$$

$$\text{On pose: } X = PY$$

$$(L) \Leftrightarrow PY' = APY + B(t)$$

$$\Leftrightarrow Y' = (P^{-1}AP)Y + P^{-1}B(t)$$

$$\Leftrightarrow Y' = TY + P^{-1}B(t)$$

$$\text{Si } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1}B(t) = \begin{pmatrix} b_{1,n}(t) \\ \vdots \\ b_{n,n}(t) \end{pmatrix} \text{ et } T = (t_{ij})$$

$$(L) \Leftrightarrow \begin{cases} y_1' = t_{1,1}y_1 + t_{1,2}y_2 + \dots + t_{1,n}y_n + b_{1,n}(t) \\ y_2' = t_{2,1}y_1 + \dots + t_{2,n}y_n + b_{2,n}(t) \\ \vdots \\ y_{n-1}' = t_{n-1,1}y_1 + \dots + t_{n-1,n}y_n + b_{n-1,n}(t) \\ y_n' = t_{n,n}y_n + b_{n,n}(t) \end{cases}$$

on commence par résoudre la dernière équation de 1^{er} ordre scalaire avec 2nd membre, on aura y_n qu'on remplace ds l'éq en y_{n-1} , d'où y_{n-1} .

Par itération, on aura $y_2, \dots, y_0$.

et par suite $X = PY$

Solutⁿ théorique de l'éq diff d'ordre n à coeff const

$$X'(t) = A X(t) + B(t)$$

A ne dépend pas de t

B continue de $I \rightarrow M_{n,1}(K)$

$$(L) \Leftrightarrow X' - AX = B(t)$$

$$\Leftrightarrow e^{-tA} (X' - AX) = e^{-tA} B(t)$$

$$\Leftrightarrow (e^{-tA} X)' = e^{-tA} B(t)$$

Si $t_0 \in I$:

$$e^{-tA} X(t) - e^{-t_0 A} X(t_0) = \int_{t_0}^t e^{-sA} B(s) ds$$

$$X(t) = e^{(t-t_0)A} X(t_0) + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A} B(s) ds$$

la sol du problème de Cauchy.

$$\begin{cases} X' = AX + B(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

$$\text{si } X: I \rightarrow M_{n,1}(K) \quad t \mapsto e^{(t-t_0)A} X_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A} B(s) ds$$

Equation diff linéaire scalaire d'ordre ℓ .

1. Eq diff scalaire d'ordre n .

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \dots + a_1(t)x' + a_0(t)x = c(t)$$

où $a_i: I \rightarrow K$ continue sur l'intervalle I

$$(L) \Leftrightarrow X' = A(t)X + B(t)$$

où $X: I \rightarrow M_{n,1}(K)$

$$t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & \dots & -a_{n-2}(t) & -a_{n-1}(t) \end{pmatrix} \quad \text{et } B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ c(t) \end{pmatrix}$$

Pb de Cauchy de Cauchy associé:

Soit $(t_0, (x_0, \dots, x_{n-1})) \in I \times K^n$

$$\text{le pb: } \begin{cases} x^{(n)} + \dots + a_0(t)x = c(t) \\ x(t_0) = x_0 \\ x'(t_0) = x_1 \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1} \end{cases}$$

admet une unique solution définie sur I

Corollaire:

d'ens ds solutⁿ de (H): $x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \dots + a_0(t)x = 0$

et Ker (ser de $\mathcal{C}^n(I, K)$) de dimension n isomorphe à K^n .

$$\text{d'isomorphisme st: } \varphi_{t_0}: S_I(H) \rightarrow K^n \\ t \mapsto (f(t_0), \dots, f^{(n-1)}(t_0))$$

Corollaire:

d'ens ds solutⁿ de (L): $x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \dots + a_0(t)x = c(t)$

et sous-espace affine de $\mathcal{C}^n(I, K)$ de directⁿ $S_I(H)$

$$\text{c'est: } S_I(L) = f_0 + S_I(H)$$

où f_0 est sol particulière de (L).

2. Eq diff scalaire d'ordre ℓ :

Il s'agit des équations de la forme.

$$(L): x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t)$$

$$(H): x'' + a(t)x' + b(t)x = 0$$

$$(L) \Leftrightarrow X' = A(t)X + B(t) \quad (L_1)$$

$$(H) \Leftrightarrow X' = A(t)X \quad (H_1)$$

$$\text{où } A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a(t) & -b(t) \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ c(t) \end{pmatrix}$$

$$\text{et } X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}$$

Rmq:

x sol de (L) (resp de H) sur un intervalle I si:

$X = \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$ sol de (L_1) (resp de H_1).

Prop.

$S_I(H)$ est ser de $\mathcal{C}^2(I, K)$ de dim ℓ isomorphe à K^ℓ .

$\forall t \in I, \varphi_{t_0}: S_I(H) \rightarrow K^\ell$ est un isom

$$t \mapsto (f(t_0), f'(t_0))$$

$$S_I(L) = f_0 + S_I(H) \quad \text{où } f_0 \text{ solutⁿ particulière de (L)}$$

$S_I(H)$?

Def:

si φ_1 et φ_2 sont 2 sol de (H): $x'' + a(t)x' + b(t)x = 0$

On appelle wronskien de φ_1 et φ_2 défini:

$$\forall t \in I, w(t) = \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) \end{vmatrix}$$

C'est le wronskien de sol $\begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_1'(t) \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \varphi_2(t) \\ \varphi_2'(t) \end{pmatrix}$ du système diff associé à (H).

Th.

(φ_1, φ_2) est une base de sol de (H) sur I si:

$\exists t_0 \in I: w(t_0) \neq 0$ ou: $\forall t \in I: w(t) \neq 0$.

Résolution de (L):

$$(L): x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t)$$

où $a, b, c: I \rightarrow \mathbb{K}$ continues (I intervalle de $\mathbb{R}$)

1. Méthode de variation des constantes:

Si (φ_1, φ_2) une base de sol de (H), la solution générale de (H) sur I s'écrit: $x(t) = c_1 \varphi_1(t) + c_2 \varphi_2(t)$

La méth de variatⁿ des constantes consiste à chercher une sol de (L) de la forme:

$$\forall t \in I, x(t) = c_1(t) \varphi_1(t) + c_2(t) \varphi_2(t)$$

Théorème: $x: I \rightarrow \mathbb{K}$

$$t \mapsto c_1(t) \varphi_1(t) + c_2(t) \varphi_2(t)$$

$$\text{et sol de (L)ssi} \begin{cases} c_1'(t) \varphi_1(t) + c_2'(t) \varphi_2(t) = 0 \\ c_1(t) \varphi_1'(t) + c_2(t) \varphi_2'(t) = c(t) \end{cases}$$

et donc:

$$\begin{cases} c_1'(t) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \varphi_2(t) \\ c(t) & \varphi_2'(t) \end{vmatrix}}{w(t)} \\ c_2'(t) = \frac{\begin{vmatrix} \varphi_1(t) & 0 \\ \varphi_1'(t) & c(t) \end{vmatrix}}{w(t)} \end{cases}$$

2. Méthode de variatⁿ d'une constante (méth de Laplace)

Si on connaît une sol φ de (H): $x'' + a(t)x' + b(t)x = 0$ qui ne s'annule pas sur I .

On pose: $x(t) = \varphi(t)y(t)$ où y fctⁿ à déterminer ($\frac{x(t)}{\varphi(t)} = y(t)$)

Théorème:

$u: t \mapsto \varphi(t)y(t)$ est sol de (H) si y' est sol de l'éq diff: $z' + (a(t) + \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)})z = 0$.

Méthode:

y' sol de $z' + (a(t) + \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)})z = 0$ donne y' et par suite y .

D'où une sol $\varphi_1: t \mapsto \varphi(t)y(t)$ donc on aura deux sol φ et φ_1 et on vérifie si (φ, φ_1) est une base de sol de (H)

Problème de raccordement des solutions:

$$(L): a(t)x'' + b(t)x' + c(t)x = d(t)$$

a, b, c, d continues sur I

$$(H): a(t)x'' + b(t)x' + c(t)x = 0$$

On eq a s'annule en un seul pt $t_0 \in I$

$$\text{Soit } I_1 = I \cap]-\infty, t_0[$$

$$I_2 = I \cap]t_0, +\infty[$$

$S_{I_1}(H)$ et $S_{I_2}(H)$ sont des ev de dim 2.

On note $S_I(H)$ l'ens des sol de (H) sur I .

et $S_{I \setminus \{t_0\}}(H)$ l'ens des sol de (H) sur $I \setminus \{t_0\}$

- $S_{I \setminus \{t_0\}}(H)$ est sev de $\mathcal{C}^2(I \setminus \{t_0\}, \mathbb{K})$ isomorphe à $S_{I_1}(H) \times S_{I_2}(H)$.

$$\text{d'ap } \varphi: S_{I \setminus \{t_0\}}(H) \longrightarrow S_{I_1}(H) \times S_{I_2}(H) \\ f \mapsto (f|_{I_1}, f|_{I_2}) \quad \text{isomorphisme}$$

$$\text{Donc } \dim S_{I \setminus \{t_0\}}(H) = 4$$

- $S_I(H)$ sev de $\mathcal{C}^2(I, \mathbb{K})$ et $\dim S_I(H) \leq 4$

$$\text{d'ap } S_I(H) \longrightarrow S_{I_1}(H) \times S_{I_2}(H) \text{ est linéaire} \\ f \mapsto (f|_{I_1}, f|_{I_2}) \quad \text{injective}$$

$$\Rightarrow \dim S_I(H) \leq \dim (S_{I_1}(H) \times S_{I_2}(H)) = 4$$

Rmq:

$$\text{Si } A = (c_1, \dots, c_n) \text{ et } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\text{Alors } AX = (x_1 c_1, \dots, x_n c_n)$$

Méthode du wronskien:

Si on connaît une sol φ_1 de: (H): $x'' + a(t)x' + b(t)x = 0$ (a, b continues sur I) qui ne s'annule pas sur I .

On considère la fonction: $\left(\frac{\varphi}{\varphi_1}\right)$
On a: $\forall t \in I, \left(\frac{\varphi}{\varphi_1}\right)'(t) = \frac{w(\varphi_1, \varphi)(t)}{\varphi_1^2(t)}$ (où w vérifie: $y' + a(t)y = 0$)

et on intègre l'équation.

On aura une fonction φ , on vérifie (φ_1, φ) base de sol.

Rappel: Eq diff linéaire d'ordre 2 à coeff constants:

$$(H): x'' + a x' + b x = 0 \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

$$(L): x'' + a x' + b x = c(t) \quad c \text{ cont. } I \rightarrow \mathbb{R}$$

Base de $S_{\mathbb{R}}(H)$?

On cherche des sol de la forme: $x: t \mapsto e^{\lambda t}$

x solⁿ de (H) sur $\mathbb{R} \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}: e^{\lambda t} (\lambda^2 + a\lambda + b) = 0$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 + a\lambda + b = 0. \text{ dite eq car, de (H)}$$

1^{er} cas: si $\Delta = a^2 - 4b > 0$

soit λ_1 et λ_2 deux solutions réelles $\neq$ de l'eq (H).

$$\text{et } \varphi_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{et } \varphi_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto e^{\lambda_1 t} \quad t \mapsto e^{\lambda_2 t}$$

Alors (φ_1, φ_2) une base de solution de (H)

$$\text{car } w(t) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \end{vmatrix} \Rightarrow w(t) = \lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$$

La solⁿ générale de (H) s'écrit:

$$x(t) = \alpha e^{\lambda_1 t} + \beta e^{\lambda_2 t} \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

3^{ème} cas: $\Delta = 0$

$E_q(H)$ admet une racine double $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\varphi_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad t \mapsto e^{\lambda t} \quad \text{et} \quad \varphi_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad t \mapsto t e^{\lambda t}$$

(φ_1, φ_2) base de $S_R(H)$.

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad w(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & t e^{\lambda t} \\ \lambda e^{\lambda t} & e^{\lambda t}(\lambda + 1) \end{pmatrix}$$

On a: $w(0) = 1 \neq 0$

$$x(t) = e^{\lambda t} (\alpha + \beta t) \quad \text{où} \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

3^{ème} cas: $\Delta < 0$

$E_q(H)$ admet deux solutions complexes conjuguées

$$\begin{cases} \lambda + i\mu \\ \lambda - i\mu \end{cases}$$

$$\varphi_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad t \mapsto e^{\lambda t} \cos(\mu t) \quad ; \quad \varphi_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad t \mapsto e^{\lambda t} \sin(\mu t)$$

(φ_1, φ_2) base de sol de (H) et $x(t) = e^{\lambda t} (\alpha \cos(\mu t) + \beta \sin(\mu t))$

Résolution de (L) :

Méthode de variation des constantes:

Si (φ_1, φ_2) base de sol de (H) . On cherche une sol de (L) : $x'' + ax' + bx = f(t)$ de la forme:

$$\forall t \in I: \quad x(t) = c_1(t) \varphi_1(t) + c_2(t) \varphi_2(t)$$

où $c_1, c_2 \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$

On a:
$$\begin{cases} c_1'(t) \varphi_1(t) + c_2'(t) \varphi_2(t) = 0 \\ c_1'(t) \varphi_1'(t) + c_2'(t) \varphi_2'(t) = f(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1'(t) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \varphi_2(t) \\ f(t) & \varphi_2'(t) \end{vmatrix}}{w(t)} \\ c_2'(t) = \frac{\begin{vmatrix} \varphi_1(t) & 0 \\ \varphi_1'(t) & f(t) \end{vmatrix}}{w(t)} \end{cases}$$

$$x(t) = f_0 + (\alpha \varphi_1(t) + \beta \varphi_2(t)) \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

Cas pratique pour chercher f_0 :

Si $c(t) = e^{\lambda t} p(t)$ où p un polynôme $\in \mathbb{R}[X]$

alors chercher une solution particulière de la

forme $e^{\lambda t} Q(t)$ où Q un poly. tq: $d^m Q = m + d^0 p$,
où m est l'ordre de multiplicité de λ comme racine de $E_q(H)$ ($m=0$ si λ n'est pas racine)

Complément:

Eq non linéaire d'ordre 1:

Il s'agit d'eq diff.

$(E): y' = f(x, y)$ où f est une fonction de

classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ à valeurs de $\mathbb{R}$

Une sol de E sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ ou une I -solution est une app: $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$

$$\forall x \in I, (x, \varphi(x)) \in U \quad \text{et} \quad \varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$$

Exple: $y'(x) = x^2 + y^2(x)$

$$f: (x, y) \mapsto x^2 + y^2 \quad \text{est de classe } \mathcal{C}^2.$$

Une sol φ est une app φ dérivable sur I et

$$\forall x \in I, \quad \varphi'(x) = x^2 + (\varphi(x))^2$$

Une I -solution de E est dite maximale si I un intervalle de $\mathbb{R}$ tq $I \not\subset J$ tq $\exists$ pas de sol φ sur J tq $\varphi|_I = \varphi$

(cad φ ne peut pas être prolongée sur un intervalle plus grand que I).

Théorème: Cauchy-Lipshitz:

Si $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$

Alors le pb de Cauchy $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ admet une

solut^{on} unique maximale définie sur un intervalle ouvert contenant x_0 .

Rmq:

Si la sol maximale φ est définie sur $I =]a, b]$, $b \in \mathbb{R}$

on considère: $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(b) = \varphi(b) \end{cases}$ admet une sol max

et définie sur $]a, \beta[$ tq $b \in]a, \beta[$, $a < \alpha$.

$$\text{Soit } \varphi_2:]a, \beta[\rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \begin{cases} \varphi(x) & \text{si } x \in]a, b] \\ \varphi(x) & \text{si } x \in]b, \beta[\end{cases}$$

φ_2 est une sol de: $y' = f(x, y)$

et $\varphi_2|_{]a, b]} = \varphi$ absurde

Rmq:

Si $I =]a, b[$ avec $b < \infty$.

φ ne peut pas admettre une lim finie q^{uand} $x \rightarrow b$

$$t_q(b, \ell) \in U \quad \left(\text{sinon } \begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(b) = \ell \end{cases} \right)$$

Equa différentielles

Equation différentielle linéaire d'ordres:

$$(L): x' = a(t) \cdot x + b(t)$$

Solution de (L):

Si a cont de $I \rightarrow \mathcal{L}(E)$

Et b cont de $I \rightarrow E$

Toute solut^o de (L) sur I ($\in S_I(L)$) est de $\mathcal{C}^1$ sur I .

Equation différentielle homogène:

$$(H): x' = a(t) \cdot x$$

Equation diff sans 2nd membre associé à (L).

Cauchy lipschitz:

Problème de Cauchy associé à (L) en $(t_0, x_0) \in I \times E$:

$$\begin{cases} x' = a(t) \cdot x + b(t) & \text{où } a: I \rightarrow \mathcal{L}(E) \text{ continu} \\ x(t_0) = x_0 & b: I \rightarrow E \end{cases} \equiv$$

admet une unique I -solut^o φ tq, $\varphi(t_0) = x_0$

Dimension de $S_I(H)$:

$$(H): x' = a(t) \cdot x$$

$S_I(H)$ est un sev de $\mathcal{C}^1(I, E)$ isomorphe à E donc de dim n .

$S_I(L)$ est sous espace affine de direct² $S_I(H)$:

$$S_I(L) = f_p + S_I(H)$$

Solution de $S_I(H)$:

* si $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ ds solut^o de (H) sur I et $t_0 \in I$.

$$\Rightarrow \text{rg}(\varphi_1, \dots, \varphi_n) = \text{rg}(\varphi_1(t_0), \dots, \varphi_n(t_0))$$

* si $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ ds solut^o de (H) sur I alors

$(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est une base de $S_I(H)$ ssi

$$\exists t_0 \in I: (\varphi_1(t_0), \dots, \varphi_n(t_0)) \text{ base de } E.$$

Et ds ce cas: $\forall t \in I: (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$ base de E .

* $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ sys fondamental de sol de (H).

Solut^o intégrale du PC:

$$x' = a(t)x + b(t) \quad \text{où } a: I \rightarrow \mathcal{L}(E) \text{ continue} \\ b: I \rightarrow E \text{ continue}$$

$$\text{PC: } \begin{cases} x' = a(t) \cdot x + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

la solution du PC en (t_0, x_0) :

$$f(t) = x_0 + \int_{t_0}^t (a(s)f(s) + b(s)) ds.$$

A coefficients constants: $x' = ax + b(t)$

$$(H): x' = ax$$

$$\Leftrightarrow e^{-ta} x' - a \cdot e^{-ta} x = 0$$

$$\Leftrightarrow (e^{-ta} x)' = 0 \Leftrightarrow e^{-ta} x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(t) = e^{ta} \cdot C$$

$$\text{solut^o de PC} \Leftrightarrow x(t) = e^{(t-t_0)a} \cdot x_0$$

systeme différentiel linéaire d'ordre associé:

D'ordre 1 associé à une equa diff d'ordre 1:

$$(L): x' = a(t)x + b(t)$$

Si $B = (e_1, \dots, e_n)$ base de (E)

$$\forall t \in I, A(t) = \text{mat}_B(a(t)) = (a_{ij}(t)) \in M_n(K)$$

$$B(t) = \text{mat}_B(b(t)) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix} \in M_{n,1}(K)$$

$$X(t) = \text{mat}_B(x(t)) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \in M_{n,1}(K)$$

le système associé à (L) est:

$$X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1'(t) = \sum_{j=1}^n a_{1j}(t) x_j(t) + b_1(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) = \sum_{j=1}^n a_{nj}(t) x_j(t) + b_n(t) \end{cases}$$

Associé à une equa diff d'ordre n:

$$(L): x^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \dots + a_0(t)x(t) = c(t)$$

où $a_i: I \rightarrow K$ continus sur I

$c: I \rightarrow K$ continue sur I

le système associé est:

$$X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$$

$$\text{ici } X(t) \in \mathbf{I} \longrightarrow M_{n+1}(K) \text{ de } \mathcal{C}^1 \text{ sur } I \\ t \longmapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

$$\text{Et } \forall t \in I: X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ \vdots \\ x^{(n)}(t) \end{pmatrix}$$

$$X'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_0(t) & -a_1(t) & \dots & -a_{n-1}(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ c(t) \end{pmatrix}$$

Problème de Cauchy:

$$(L): x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \dots + a_0(t)x(t) = c(t)$$

Pb de Cauchy en (t_0, x_0) :

$$\begin{cases} X'(t) = A(t)X(t) + B(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^{(n)} + \dots + a_0(t)x(t) = c(t) \\ x(t_0) = x_0 \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1} \end{cases}$$

où $(x_0, \dots, x_{n-1}) \in K^n$.

admet une unique solut^o définie sur I

Dimension de $S_I(H)$.

$$(L): X' = A(t)X + B(t)$$

$$(H): X' = A(t)X$$

respectant les écritures matricielles de:

$$(L'): x' = a(t)x + b(t)$$

$$(H'): x' = a(t)x$$

où: $A: I \rightarrow M_n(\mathbb{K})$ continues.
 $B: I \rightarrow \eta_{n,1}(\mathbb{K})$

Ence: $S_I(H)$ est sev de $\mathcal{C}^2(I, M_{n,1}(\mathbb{K}))$ isomorphe à $\eta_{n,1}(\mathbb{K})$.

$\forall t_0 \in I: \varphi_{t_0}: S_I(H) \rightarrow \eta_{n,1}(\mathbb{K})$
 $X \mapsto X(t_0)$

• système diff à coeff constants:

$$\begin{cases} X' = AX \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

admet une unique solution déf sur $\mathbb{R}$.

$S_I(H)$ est un $\mathbb{K}$ ev isomorphe à $\eta_{n,1}(\mathbb{K})$ et donc de dim n (taille de la matrice)

• Résolution du sys diff: équation homogène

$$(H): X' = AX$$

$S_I(H)$ est sev de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \eta_{n,1}(\mathbb{K}))$ isomorphe à $\eta_{n,1}(\mathbb{K})$.

* A diagonalisable:

$$\exists P \in GL_n(\mathbb{K}): P^{-1}AP = D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

On pose $X = PY$

$$(H) \Leftrightarrow PY' = APY$$

$$\Leftrightarrow Y' = (P^{-1}AP)Y = DY$$

Si $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ alors $\begin{cases} y_1' = \lambda_1 y_1 \\ \vdots \\ y_n' = \lambda_n y_n \end{cases}$

$\Rightarrow \forall i \in [1, n]: y_i(t) = c_i e^{\lambda_i t}$, où $c_i \in \mathbb{K}$
 et $X = PY$.

Théorème:

Si A est diagonalisable et $B = (e_1, \dots, e_n)$ base de $\eta_{n,1}(\mathbb{K})$ formée de $\vec{v}_p$ de A tq: $A e_i = \lambda_i e_i$

On pose: $\varphi_i: t \mapsto e^{\lambda_i t} e_i$

Alors $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ base de sol de (H)

Car $(\varphi_1(0), \dots, \varphi_n(0)) = (e_1, \dots, e_n)$ base de $\eta_{n,1}(\mathbb{K})$

Rmq:

$(v_1, \dots, v_n)$ base de $\vec{v}_p$ de A

Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ non diagonalisable ds $\mathbb{R}$ mais diagonalisable ds $\mathbb{C}$.

Si $\lambda \in S_{\mathbb{R}}(A) \setminus S_{\mathbb{R}}(A)$ alors $\lambda \in S_{\mathbb{C}}(A)$

$$(Av = \lambda v \Leftrightarrow A\bar{v} = \bar{\lambda}\bar{v})$$

$$\varphi_i: t \mapsto e^{\lambda_i t} v_i \in S_I(H)$$

$$\text{et } \bar{\varphi}_i: t \mapsto e^{\bar{\lambda}_i t} \bar{v}_i \in S_I(H)$$

$$\Rightarrow \text{Re}(\varphi_i) = \frac{\varphi_i + \bar{\varphi}_i}{2} \in S_I(H)$$

$$\text{Im}(\varphi_i) = \frac{\varphi_i - \bar{\varphi}_i}{2} \in S_I(H)$$

sont des solut^s réels de (H) .

* A trigonalisable:

$$\exists P \in GL_n(\mathbb{C}): P^{-1}AP = T$$

On pose $X = PY$

$$(L) \Leftrightarrow PY' = APY + B(t)$$

$$\Leftrightarrow Y' = TY + P^{-1}B(t)$$

Si $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, $P^{-1}B(t) = \begin{pmatrix} d_1(t) \\ \vdots \\ d_n(t) \end{pmatrix}$ et $T = (t_{ij})$

$$(L) \Leftrightarrow \begin{cases} y_1' = t_{11}y_1 + \dots + t_{1n}y_n + d_1(t) \\ \vdots \\ y_n' = t_{n1}y_1 + \dots + t_{nn}y_n + d_n(t) \end{cases}$$

On commence par résoudre la dernière équation de 1^{er} ordre avec second membre, on aura y_n , qu'on remplace ds l'éq en y_{n-1} ...

et $X = PY$.

• Résolut^s d'un système à coeff constants:

$$X'(t) = AX(t) + B(t)$$

où $B: I \rightarrow \eta_{n,1}(\mathbb{K})$ continue.

$$(L) \Leftrightarrow X' - AX = B(t)$$

$$\Leftrightarrow e^{-tA} (X' - AX) = e^{-tA} B(t)$$

$$\Leftrightarrow (e^{-tA} X)' = e^{-tA} B(t)$$

Si $t_0 \in I$:

$$e^{-tA} X(t) - e^{-t_0 A} X(t_0) = \int_{t_0}^t e^{-sA} B(s) ds$$

$$X(t) = e^{(t-t_0)A} X(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-sA} B(s) ds$$

la solut^s du PC:

$$\begin{cases} X'(t) = AX(t) + B(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

est: $X: I \rightarrow \eta_{n,1}(\mathbb{K})$
 $t \mapsto e^{(t-t_0)A} X_0 + \int_{t_0}^t e^{-sA} B(s) ds.$

Matrice wronskienne et wronskien :

Définition :

Si $B = (e_1, \dots, e_n)$ base de E et $t \in I$:

$e_1, \dots, e_n$ solut^s de (H) .

La matrice de $(e_1(t), \dots, e_n(t))$ de B est dite matrice wronskienne de $(e_1, \dots, e_n)$ de B en t .

$$W(t) = \text{mat}_B (e_1(t), \dots, e_n(t))$$

et son déterminant le wronskien de $e_1, \dots, e_n$:

$$w(t) = \det(W(t))$$

Théorème :

Si $e_1, \dots, e_n$ ds solut^s de (H) . On pose :

* $X = (e_1, \dots, e_n)$ sys fondamental de (H)

* $\exists t_0 \in I : (e_1(t_0), \dots, e_n(t_0))$ base de E .

* $\forall t \in I : (e_1(t), \dots, e_n(t))$ base de E .

* $\exists t_0 \in I : w(t_0) \neq 0$

* $\forall t \in I : w(t) \neq 0$

Méthode de la variation de la constante :

Théorème :

Si $X = (e_1, \dots, e_n)$ sys fondamental de sol de (H)

$$f \in \mathcal{C}^p(I, E), p \in \{0, 1\}$$

Alors $\exists c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathcal{C}^p(I, \mathbb{K})$

$$t \mapsto \forall t \in I : f(t) = \sum_{i=1}^n c_i(t) e_i(t)$$

Méthode de variat^s des constantes :

$X = (e_1, \dots, e_n)$ sys fondamental de sol de (H)

Si $f \in \mathcal{C}^2(I, E)$ tq : $\forall t \in I : f(t) = \sum_{i=1}^n c_i(t) e_i(t)$
 $c_i \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{K})$

f solut^s de (L) m. : $\forall t \in I : \sum_{i=1}^n c_i'(t) e_i(t) = b(t)$

Si $b(t) = \sum_{i=1}^n d_i(t) e_i(t)$ avec $d_i \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$

f sol de (L) m. : $\forall i \in \{1, \dots, n\} : c_i'(t) = d_i(t)$

Equation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2 :

$$(L) : x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t)$$

$$(H) : x'' + a(t)x' + b(t)x = 0$$

$$\Leftrightarrow (L_1) : X' = A(t)X + B(t)$$

$$(H_1) : X' = A(t)X$$

$$\text{où } A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b(t) & -a(t) \end{pmatrix} \text{ et } B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ c(t) \end{pmatrix}$$

$$\text{et } X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}$$

(7)

Résolution de (H) :

* $S_I(H)$ est un ser de $\mathcal{C}^2(I, \mathbb{K})$ de dim 2, isomorphe à $\mathbb{K}^2$:

$$\forall t_0 \in I : \varphi_{t_0} : S_I(H) \longrightarrow \mathbb{K}^2$$

$$t \mapsto (f(t_0), f'(t_0))$$

* Si e_1 et e_2 sont 2 solut^s de (H) .

$$\forall t \in I : W(t) = \begin{vmatrix} e_1(t) & e_2(t) \\ e_1'(t) & e_2'(t) \end{vmatrix}$$

et le wronskien de sol $\begin{pmatrix} e_1(t) \\ e_2'(t) \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} e_2(t) \\ e_1'(t) \end{pmatrix}$ du système associé à (H) .

* (e_1, e_2) base de sol de (H) sur I si :

$$\exists t_0 \in I : w(t_0) \neq 0 \text{ ssi } : \forall t \in I : w(t) \neq 0.$$

Méthode du wronskien :

Si on connaît une sol e_1 de (H) qui ne s'annule pas sur I .

On considère la fonct^s : $\begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi_1 \end{pmatrix}$.

$$\text{On a, } \forall t \in I : \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi_1 \end{pmatrix}'(t) = \frac{W(e_1, \varphi)(t)}{e_1^2(t)}$$

où w vérifie $y'(t) + a(t)y(t) = 0$

et on intègre l'équation.

On aura la fonction φ , on vérifie que (e_1, φ) est une base de solut^s.

Résolution de (L) :

Méthode de la variat^s de constante :

Si (e_1, e_2) base de solut^s de (H) , la solut^s générale de (H) sur I s'écrit : $x(t) = c_1 e_1(t) + c_2 e_2(t)$

La variat^s de la constante consiste à chercher une solut^s de (L) de la forme : $x(t) = c_1(t) e_1(t) + c_2(t) e_2(t)$

$$x \text{ sol de } (L) \text{ ssi : } \begin{cases} c_1'(t) e_1(t) + c_2'(t) e_2(t) = 0 \\ c_1'(t) e_2'(t) + c_2'(t) e_1'(t) = c(t) \end{cases}$$

$$\text{Donc } c_1'(t) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e_2(t) \\ c(t) & e_2'(t) \end{vmatrix}}{w(t)}$$

$$\text{et } c_2'(t) = \frac{\begin{vmatrix} e_1(t) & 0 \\ e_1'(t) & c(t) \end{vmatrix}}{w(t)}$$

Méthode de la variat^s directe, méthode de variation :

Si on connaît une solut^s φ de (H) qui ne s'annule pas sur I , on pose : $y(t) = \frac{x(t)}{\varphi(t)}$

$x \mapsto \varphi(t)y(t)$ est solut^s de (H) ssi : y est solut^s de :

$$y'' + \left(a(t) + \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}\right)y' = 0$$

et on intègre y' pour trouver y , ainsi :

$e_1 : t \mapsto \varphi(t)y(t)$ une solut^s.

On vérifie que (e_1, e_2) base de solut^s de (H) .

• Problème de raccordement des solutions :

$$(L): a(t)x'' + b(t)x'(t) + c(t)x = d(t)$$

$$(H): a(t)x'' + b(t)x'(t) + c(t)x = 0.$$

On suppose qu'il y a une annule en un seul pt $t_0 \in I$.

$$\text{Soient: } I_1 = I \cap]-\infty, t_0[$$

$$I_2 = I \cap]t_0, +\infty[$$

$S_{I_1}(H)$ et $S_{I_2}(H)$ sont des ev de dim n .

et $S_I(H)$: ensemble de solut^s de (H) sur I

$$S_{I \setminus \{t_0\}}(H) : \dots \text{ sur } I \setminus \{t_0\}.$$

* $S_{I \setminus \{t_0\}}(H)$ est sev de $\mathcal{C}^2(I \setminus \{t_0\}, \mathbb{K})$

isomorphe à $S_{I_1}(H) \times S_{I_2}(H)$.

$$\text{d'app: } \varphi: S_{I \setminus \{t_0\}}(H) \longrightarrow S_{I_1}(H) \times S_{I_2}(H) \text{ isomorph:}$$

$$\varphi \longmapsto (f|_{I_1}, f|_{I_2})$$

$$\text{Donc } \dim S_{I \setminus \{t_0\}}(H) = 4.$$

* $S_I(H)$ sev de $\mathcal{C}^2(I, \mathbb{K})$ et $\dim S_I(H) \leq 4$.

$$\text{d'app: } S_I(H) \longrightarrow S_{I_1}(H) \times S_{I_2}(H) \text{ linéaire}$$

$$\varphi \longmapsto (f|_{I_1}, f|_{I_2}) \text{ injective}$$

$$\Rightarrow \dim(S_I(H)) \leq \dim(S_{I_1}(H) \times S_{I_2}(H)) = 4$$

Equation diff linéaire d'ordre 2 à c^o constants :

$$(L): x'' + ax' + bx = c(t)$$

$$(H): x'' + ax' + bx = 0$$

Equat^o caractéristique: $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$. (E)

• $\Delta = a^2 - 4b > 0$

λ_1 et λ_2 2 solut^s réelles $\neq$ de l'eq carac de (H)

$$\varphi_1: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \varphi_2: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$t \longmapsto e^{\lambda_1 t} \quad \quad \quad t \longmapsto e^{\lambda_2 t}$$

Alors (φ_1, φ_2) base de solut^s de (H) ($\omega(H) \neq 0$)

$$\text{Solut^s générale de (H): } x(t) = \alpha e^{\lambda_1 t} + \beta e^{\lambda_2 t}$$

• $\Delta = a^2 - 4b = 0$:

λ racine double de (E)

$$\varphi_1: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \varphi_2: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$t \longmapsto e^{\lambda t} \quad \quad \quad t \longmapsto t e^{\lambda t}$$

(φ_1, φ_2) base de solut^s de (H).

$$\text{Solut^s générale: } x(t) = e^{\lambda t} (\alpha + \beta t)$$

• $\Delta = a^2 - 4b < 0$:

$\lambda + i\mu$ et $\lambda - i\mu$ solut^s de (E).

$$\varphi_1: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \varphi_2: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$t \longmapsto e^{\lambda t} \cos(\mu t) \quad \quad \quad t \longmapsto e^{\lambda t} \sin(\mu t)$$

(φ_1, φ_2) base de solut^s.

$$\text{Solut^s générale de (H): } x(t) = e^{\lambda t} (\alpha \cos(\mu t) + \beta \sin(\mu t))$$

Résolution de (L) : (variant^s de constants)

si (φ_1, φ_2) base de sol de (H). On cherche une

sol de (L) de la forme: $x(t) = C_1(t)\varphi_1(t) + C_2(t)\varphi_2(t)$

$$\begin{cases} C_1'(t)\varphi_1(t) + C_2'(t)\varphi_2(t) = 0 \\ C_1'(t)\varphi_1'(t) + C_2'(t)\varphi_2'(t) = c(t) \end{cases}$$

$$\text{Alors: } x(t) = f_p + (\alpha \varphi_1(t) + \beta \varphi_2(t))$$

Cas pratique pour chercher f_p :

* $c(t) = e^{\alpha t} p(t)$:

f_p de la forme: $e^{\alpha t} q(t)$ où $d'q = m + d'p$

où m est la multiplicité de α comme racine de Eq (H).

Dénombrement

Vocabulaire combinatoire :

Cardinal :

• D'une réunion / diff.

$$\text{card } A \cup B = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card } A \cap B$$

$$\text{card } A \setminus B = \text{card}(A) - \text{card}(A \cap B)$$

$$\text{Si } A_1, \dots, A_n \text{ disjoints : } \text{card}\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n \text{card } A_k$$

• D'un produit.

$$\text{card}\left(\prod_{k=1}^p A_k\right) = \prod_{k=1}^p \text{card}(A_k)$$

• Prop.

- * E et F deux ensembles finis
- * Si il existe une injectⁿ de E ds F alors $\text{card } E \leq \text{card } F$
- * Si il existe une surjectⁿ de E vers F : $\text{card } E \geq \text{card } F$
- * Si il existe une bijectⁿ de E vers F : $\text{card } E = \text{card } F$

Listes, arrangements :

• listes et uplets :

On app p-uplet ou p-listes de E toute famille de p éléments de E, ad un élément de E^p .

• Arrangements :

On app p arrangement de p éléments de E un p-uplet 'constitué' d'éléments de E 2 à 2 distincts.

• Nombre d'arrangements :

On eq : $1 \leq p \leq n$. le nbre d'arrangements de p éléments de E vaut : $\frac{n!}{(n-p)!} = n \times (n-1) \times \dots \times (n-p+1)$

• Prop.

Si $\text{card } E = p$ et $\text{card } F = n$, le nbre d'app injectives de E ds F est $\frac{n!}{(n-p)!}$.

Permutation :

• Def.

On app permutation de E un arrangement de E $p = n = \text{card}(E)$ éléments.

• Nbre de permutations :

le nbre de permutatⁿ de E est $n!$

• Nbre de bijectⁿ.

Il y a $n!$ bijections de E vers E.

Combinaison :

• Def.

On app combinaison de p éléments de E un

sous ensemble de E contenant p éléments.

• Nombre de combinaisons :

On sq $1 \leq p \leq n$. le nbre de combinaisons de p élément de E vaut $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{A_n^p}{p!}$

• Coefficients binomiaux :

$n, p \in \mathbb{N}$ ou $\mathbb{N}^*$ ds $3 \leq 4$

$$\textcircled{1} \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \binom{n}{1} = n$$

$$\textcircled{2} \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

$$\textcircled{3} p \binom{n}{p} = n \binom{n-1}{p-1}$$

$$\textcircled{4} \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}$$

$$\textcircled{5} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

• Formule de Vandermonde. (HP) (à dm)

$n, p, m \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^p \binom{n}{k} \binom{m}{p-k} = \binom{n+m}{p}$$

• Formule du binôme :

$a, b \in \mathbb{C}$:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Indicateur (caractéristique) :

• Def.

A partie de E,

$$\forall x \in E \quad \mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

• Proposition.

A, B deux parties de E (finis ds 6)

$$\textcircled{1} A = B \Leftrightarrow \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$$

$$\textcircled{2} A \subset B \Leftrightarrow \mathbb{1}_A \leq \mathbb{1}_B$$

$$\textcircled{3} \mathbb{1}_{\bar{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$$

$$\textcircled{4} \mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B$$

$$\textcircled{5} \mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B$$

$$\textcircled{6} \text{card}(A) = \sum_{x \in E} \mathbb{1}_A(x)$$

• Formule du Crible de Poincaré. (HP) (à dm)

$A_1, \dots, A_n$ des ensembles finis

$$\text{card}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \left(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \text{card}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) \right)$$

Univers:

Expérience aléatoire:

Une exp. aléatoire est une exp. dont on ne peut pas prévoir à l'avance les résultats.
Ex: le lancer d'un dé équilibré à 6 faces.

Univers:

l'ensemble des résultats possibles d'une exp. aléatoire est app. univers, noté, en gén., Ω .

Ex: Pour le lancer: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Événement:

Dans une exp. aléatoire, certains faits liés à cette expérience peuvent se produire; ils sont dits des événements.

Ex: Pour le lancer:

$A = \text{"Arriver un nombre pair"} = \{2, 4, 6\}$

* On appelle événement toute partie de Ω .

* Les événements représentés par un singleton $\{\omega\}$ sont dits événements élémentaires.

Rmq.

les événements sont des éléments de $\mathcal{P}(\Omega)$, d'où l'analogie entre les terminologies probabilistes et les terminologies ensemblistes.

Notat ⁿ	Vocab. ensembliste	Vocab. probabiliste
$\emptyset$	ensemble vide	événement impossible
Ω	ensemble plein	événement certain
ω	élément de Ω	événement élémentaire
A	partie de Ω	événement
$A \subset B$	A inclus ds B	l'évén. A implique B
$A \cup B$	A union B	l'évén. A ou B
$A \cap B$	A inter B	l'évén. A et B
$\bar{A}$	complémentaire de A	l'événement contraire
$A \cap B = \emptyset$	A et B disjoints	A et B incompatibles

Tribu ou σ -algèbre:

Définition:

Si Ω un ensemble et $\mathcal{T}$ une partie de $\mathcal{P}(\Omega)$, on dit que $\mathcal{T}$ est tribu ou σ -algèbre si:

1- $\Omega \in \mathcal{T}$

2- $\mathcal{T}$ stable par passage au complémentaire, ie:

$$A \in \mathcal{T} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{T}$$

3- Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'élmts de $\mathcal{T}$ alors

$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$ ie $\mathcal{T}$ est stable par réunion dénombrable

Rmq.

les éléments de $\mathcal{T}$ sont les événements de Ω .

Ex:

$\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$

$\mathcal{T} = \{\emptyset, \Omega\}$ est un tribu trivial

$A \subset \Omega$: $\mathcal{T} = \{\emptyset, A, \bar{A}, \Omega\}$ est un tribu dit engendré etc. est le plus petit tribu contenant A.

Définition:

Si $\mathcal{T}$ une tribu alors le couple $(\Omega, \mathcal{T})$ est dit un espace probabilisable.

Proposition: (*)

Si Ω un univers et $\mathcal{T}$ un tribu de Ω

Alors

$\emptyset \in \mathcal{T}$.

$\mathcal{T}$ est stable par $\cap$ finie et par différence.

$\mathcal{T}$ est stable par $\cap$ dénombrable.

Rmq.

Si Ω est finie, en général, on prend $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$.

Système complet d'événements:

Déf:

Si $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace probabilisable, on app. système complet d'événements toute famille $(A_i)_{i \in I}$ d'élmts de $\mathcal{T}$ ($I \subset \mathbb{N}$) tq,

$$\begin{cases} \forall i \in I: A_i \neq \emptyset \\ \text{les } A_i \text{ sont deux à deux incompatibles } (i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset) \\ \bigcup_{i \in I} A_i = \Omega \end{cases}$$

ie, c'est une partition de Ω .

Ex: Pour le lancer:

$(\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\})$ est un système complet d'événements.

$A = \text{"obtenir un nombre pair"} , B = \text{"obtenir un nombre impair"}$

(A, B) est un système complet d'événement.

Espaces probabilisés :

Probabilité :

• Définition :

Si $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace probabilisable

On appl. probabilité toute application :

$$P : \mathcal{T} \rightarrow [0, 1] \quad \text{tq}$$

$$① P(\Omega) = 1$$

② $\forall (A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{T}$, 2 à 2 incompatibles :

$$P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} P(A_n) \quad (\text{6-additivité}).$$

Rmq :

la définition sq la série $\sum P(A_n)$ converge.

• Définition :

Le triplet $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ est appelé espace probabilisé.

• Définition :

Si $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé et $A \in \mathcal{T}$ évnt.

A est dit négligeable (pour P) si $P(A) = 0$

A est dit certain (sur) si $P(A) = 1$.

• Prop : (*)

Si $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ espace probabilisé et si $A, B \in \mathcal{T}$:

$$1. P(\emptyset) = 0$$

$$2. \text{Si } A \text{ et } B \text{ incompatibles alors : } P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$3. P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

$$4. P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$5. A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$$

$$6. P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

• Prop :

$(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé et $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{T}$, 2 à 2 incompatibles.

$$\text{Alors : } P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

• Corollaire :

Si $(A_i)_{i \in I}$ un sys. complet d'événement,

$$\sum_{i \in I} P(A_i) = 1.$$

• Prop :

Si $A_0, A_1, \dots, A_n \in \mathcal{T}$.

$$\text{Alors } P\left(\bigcup_{k=0}^n A_k\right) \leq \sum_{k=0}^n P(A_k)$$

• Prop (Poincaré) :

$$P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k})$$

• Th. de continuité monotone (de cont. croissante) : (*)

Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements croissante

$$(A_n \subset A_{n+1}).$$

$$\text{Alors } P\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n).$$

Remarque :
 $P(A \cap A) = P(A)$

• Corollaire : (*)

Si (A_n) une suite d'événement, alors :

$$P\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\bigcup_{k=0}^n A_k\right)$$

• Corollaire 2 :

Si (A_n) une suite d'événement alors

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} P(A_n) \quad (\sum P(A_n) \text{ conv.})$$

• Th. de continuité décroissante :

Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante d'événement

$$\text{alors : } P\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n) \quad (\text{passage au complémentaire})$$

• Corollaire :

Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événement alors :

$$P\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\bigcap_{k=0}^n A_k\right)$$

• Prop :

* Un événement inclus ds un événement négligeable est négligeable.

* La réunion finie ou dénombrable d'évnt négligeable est négligeable.

Rmq :

A négligeable $\Leftrightarrow \bar{A}$ quasi certain (ou certain)

• Prop :

* Un événement contenant un événement certain est certain.

* L'intersection finie ou dénombrable d'évnt certains est certaine.

Probabilité sur univers au plus dénombrable :

Soit Ω un univers fini ou dénombrable.
P une proba sur $(\Omega, \mathcal{T})$ où $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$
 $\forall \omega \in \Omega$, on définit $p_\omega = P(\{\omega\})$ proba élémentaire.

• Prop :

La famille $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$ est une famille sommable de réels positifs et $\sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1$.

• Théorème : (*)

Si $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$ une famille de réels positifs, sommable et de somme égale à 1, alors il existe une unique probabilité sur $(\Omega, \mathcal{T})$, $\forall \omega \in \Omega, P(\{\omega\}) = p_\omega$
elle est définie par : $\forall A \subset \Omega, P(A) = \sum_{\omega \in A} p_\omega$

Probabilité conditionnelle :

Si $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé.

• Définition :

Soit $A \in \mathcal{T}$ tq $P(A) \neq 0$.

Soit $B \in \mathcal{T}$. On appelle probabilité de B sachant A ou proba de B conditionnée à A :

$$P_A(B) = P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

On convient que si $P(A) = 0$, on pose : $P_A(B) = 0$.

• Prop :

Si $A \in \mathcal{T} : P(A) \neq 0$.

d'ap : $P_A : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une proba sur $(\Omega, \mathcal{T})$
 $B \mapsto P_A(B)$

dite probabilité conditionnée A, associée à P.

• Prop :

Si $H \in \mathcal{T} : P(H) \neq 0$ et $A, B \in \mathcal{T}$.

1. $P(\emptyset | H) = 0$ et $P(\Omega | H) = 1$

2. si $A \subset B$ alors $P(A|H) \leq P(B|H)$

3. si $H \subset A : P(A|H) = 1$

4. si A et B sont incompatibles :

$$P(A \cup B | H) = P(A|H) + P(B|H)$$

5. Si $A_1, \dots, A_n$ sont incompatibles :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i | H\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i | H)$$

6. $P(\bar{A} | H) = 1 - P(A | H)$

7. $P(A \cup B | H) = P(A|H) + P(B|H) - P(A \cap B | H)$

Probabilité composée :

• Th : Formule de proba composée : (*)

Si $A_1, \dots, A_n$ des événements de $(\Omega, \mathcal{T}, P)$

$$\text{tq } P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) \neq 0$$

$$\text{Alors } P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) \cdot P(A_3 | A_1 \cap A_2) \dots P(A_n | A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

Probabilité totale :

• Th : Formule de proba totale :

Si $(A_i)_{i \in I}$ un système complet d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.

Alors : $\forall B \in \mathcal{T}$, la famille $(P(B \cap A_i))_{i \in I}$ est sommable.

$$\text{et } P(B) = \sum_{i \in I} P(B \cap A_i)$$

$$= \sum_{i \in I} P(A_i) P(B|A_i) \quad (\text{si } P(A_i) \neq 0 \quad \forall i \in I)$$

• Corollaire :

$$\text{Si } A \in \mathcal{T} : 0 < P(A) < 1$$

$$\forall B \in \mathcal{T} : P(B) = P(B|A) \cdot P(A) + P(B|\bar{A}) \cdot P(\bar{A})$$

• Th : Formule de Bayes :

Si A et B deux événements de proba non nulle.

$$P_A(B) = \frac{P(A) \cdot P_B(A)}{P(B)}$$

• Corollaire :

Si $(A_i)_{i \in I}$ un système complet d'événement de proba non nulle.

A et B $\in \mathcal{T} : P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$.

$$\text{Alors } P_B(A) = \frac{P_A(B) \cdot P(A)}{\sum_{i \in I} P(B \cap A_i)} = \frac{P_A(B) \cdot P(A)}{\sum_{i \in I} P(A_i) P_B(A_i)}$$

Evénements indépendants / mutuellement indépendants :

• Définition : $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ espace probabilisé

Deux événements A et B sont dits indépendants pour la proba P si $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

• Rem :

si $P(A)$ et $P(B)$ sont non nuls, alors A et B sont indép $\Rightarrow P_B(A) = P(A)$ et $P_A(B) = P(B)$

• Prop : (*)

Si A et B indépendants alors $\bar{A}$ et B, A et $\bar{B}$, $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont indépendants.

Définition:

Si $A_1, A_2, \dots, A_n$ des événements de $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.

* Ils sont dits à 2 indpt si: $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$

$i \neq j \Rightarrow A_i$ et A_j sont indep.

* Ils sont dits indpt ou mutuellement indpt

si $\forall I \subset \llbracket 1, n \rrbracket: P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} P(A_i)$

Rmq:

L'indépendance mutuelle $\Rightarrow$ l'indépendance à 2.
 $\nLeftarrow$

Proposition:

Si $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{T}$, mutuellement indépendants

alors en remplaçant A_i par $\bar{A}_i$ pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

alors $B_1, \dots, B_n$ sont indep.

Définition:

Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements. des $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$

sont dits indépendants ou mutuellement indep si

$\forall I \subset \mathbb{N}$ et I fini $(A_i)_{i \in I}$ st indep.

Notation:

si A et B indépendantes, on note $A \perp B$.

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé.

Variable aléatoire:

Définition:

On appelle variable aléatoire réelle toute application:

$$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ tq } \forall x \in \mathbb{R}: \{\omega \in \Omega: X(\omega) = x\} \in \mathcal{T}.$$

elle est dite discrète si $X(\Omega)$ est au plus dénombrable.

Rmq:

$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est r.v.d (variable aléatoire discrète).

ssi 1/ $X(\Omega)$ au plus dénombrable

$$\& \forall x \in \mathbb{R}, X^{-1}(\{x\}) \in \mathcal{T}.$$

Notation:

$$1/ X^{-1}(\{x\}) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) = x\} \text{ est noté } [X=x].$$

$$2/ \text{ si } A \subset \mathbb{R}: X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) \in A\} \text{ est noté } [X \in A].$$

Théorème: (*)

$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est r.v.d ssi:

1. $X(\Omega)$ est au plus dénombrable.

$$2. \forall A \subset \mathbb{R}: [X \in A] = X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) \in A\} \in \mathcal{T}.$$

Rmq:

$$\text{si } x \notin X(\Omega): [X=x] = \emptyset$$

Notation:

$$* \text{ si } A = [a, +\infty[, a \in \mathbb{R},$$

$$[X \in A] = [\omega \in \Omega / X(\omega) \geq a] \text{ est noté } [X \geq a].$$

$$* \text{ si } A =]-\infty, a] \text{ (resp }]-\infty, a[).$$

$$[X \in A] \text{ est noté } [X \leq a] \text{ (resp } [X < a])$$

$$* \text{ si } A = [a, b] \text{ (resp }]a, b) \text{ ou } [a, b[\text{ ou }]a, b[).$$

$$[X \in A] \text{ est noté } (a \leq X \leq b) \text{ (resp } a < X \leq b \text{ ou } a \leq X < b).$$

Fonction de répartition:

Définition:

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé. X une VAR.

On appelle fctⁿ de répartition de X :

$$F_X: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto P(X \leq x).$$

Rmq:

$$1/ F_X(\mathbb{R}) \subset [0, 1]$$

$$2/ F_X(a) = P(X \leq a) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ x \leq a}} P([X=x])$$

Rmq:

$$\text{si } x \in]0, 1[: F_X(x) = F_X(0)$$

$$\text{si } x \in [1, 2[: F_X(x) = F_X(1)$$

Théorème: (*)

Si X une VAR.D et F_X fctⁿ de répartition, alors:

$$1. \forall x \in \mathbb{R}: F_X(x) \in [0, 1]$$

$$2. F_X \text{ est croissante.}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$$

$$5. F_X \text{ est en escalier ssi } X(\Omega) = \{x_i / i \in \mathbb{I}\} \subset \mathbb{R}.$$

Prop:

$$\text{si } (a, b) \in \mathbb{R}^2: a < b$$

$$P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$$

$$(\text{car } [a < X \leq b] = [X \leq b] \setminus [X \leq a])$$

Loi d'une VAR.D:

soit X une VAR.D.

Définition:

On appelle loi de X l'ensemble des couples

$$\{(x_i, p_i), i \in \mathbb{I}\}$$

$$\text{ou } X(\Omega) = \{x_i / i \in \mathbb{I}\}, p_i = P([X=x_i]).$$

Prop:

$$\text{si } X(\Omega) = \{x_i / i \in \mathbb{I}\}$$

la famille $([X=x_i])_{i \in \mathbb{I}}$ est un système complet d'événements, donc $\sum_{i \in \mathbb{I}} P(X=x_i) = 1.$

Théorème:

Si $\mathbb{I}$ un ensemble au plus dénombrable et

$(a_i, p_i)_{i \in \mathbb{I}}$ une famille de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ tq la famille

$(p_i)_{i \in \mathbb{I}}$ est sommable et $\sum_{i \in \mathbb{I}} p_i = 1.$

Alors il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$

et une VAR.D. X tq $\{(a_i, p_i), i \in \mathbb{I}\}$ soit la loi de X .

Théorème: Caractérisation de la loi d'une VAR.D par sa fonction de répartition:

$$\text{si } X(\Omega) = \{a_i / i \in \mathbb{I}\} \text{ tq } a_i < a_{i+1}$$

$$P(X = a_{i+1}) = F_X(a_{i+1}) - F_X(a_i)$$

Fonction d'une VA:

Si X une VARD de $\Omega \xrightarrow{x} \mathbb{R}$

et $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

On pose $Y = g(X): \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

• Théorème: (*)

Si X une VAD alors $Y = g(X)$ est VAD.

• Prop:

Si X une VAD sur $(\Omega, \mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.

d'après $P_X: \mathcal{P}(X(\Omega)) \rightarrow [0, 1]$

$$A \mapsto \mathbb{P}(X \in A) = \sum_{x \in A} \mathbb{P}(X=x)$$

est une proba, dite loi de X .

• Définition: (suivent la même loi)

Si X une VA sur $(\Omega_1, \mathcal{P}(\Omega_1), \mathbb{P}_1)$

et Y une VA sur $(\Omega_2, \mathcal{P}(\Omega_2), \mathbb{P}_2)$

On dit que X et Y suivent la même loi et on note $X \sim Y$.

$$\text{ssi: } \begin{cases} X(\Omega_1) = Y(\Omega_2) \\ \forall x \in X(\Omega_1): \mathbb{P}_1(X=x) = \mathbb{P}_2(Y=x) \end{cases}$$

Moment d'une variable aléatoire:

Espérance d'une VA:

Si X une VAD sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.

$$X(\Omega) = \{x_i / i \in I\}, \mathbb{P}(X=x_i) = p_i$$

• Définition:

On dit que X admet une espérance si $(x_i \cdot \mathbb{P}(X=x_i))_{i \in I}$ est sommable et on pose: $E(X) = \sum_{i \in I} x_i \cdot \mathbb{P}(X=x_i)$ dit l'espérance de X .

• Propriété:

Si X une VARD: $X \geq 0$, $(X(\Omega), \mathbb{P}_+)$ et admet une espérance alors $E(X) \geq 0$.

• Remarque:

Toute VAD finie admet une espérance.

• Prop:

Si X et Y deux VAD sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ tq $X \leq Y$ et Y admet une espérance finie et X admet une espérance alors $E(X) \leq E(Y)$.

• Théorème du transfert:

Si X une VARD et $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

$$Y = f(X)$$

Def: $Y = f(X)$ admet une espérance si

$(y_j \cdot \mathbb{P}(Y=y_j))_{j \in J}$ est sommable avec $Y(\Omega) = \{y_j / j \in J\}$

$$\text{et on a: } E(Y) = \sum_{j \in J} y_j \cdot \mathbb{P}(Y=y_j).$$

Th: $Y = f(X)$ admet une espérance si la

famille $(f(x_i) \cdot \mathbb{P}(X=x_i))_{i \in I}$ est sommable et

$$E(Y) = \sum_{i \in I} f(x_i) \cdot \mathbb{P}(X=x_i)$$

• Théorème: (*)

Si X admet une espérance alors $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$Y = aX + b$ admet une espérance et

$$E(Y) = a E(X) + b.$$

• Définition:

Une VA est dite centrée si $E(X) = 0$

• Prop:

Si X une VA admet une espérance alors:

$(X - E(X))$ est V.A centrée.

• Prop: (*)

Si $X \geq 0$ admet une espérance tq $E(X) = 0$ alors $(X=0)$ presque sûr ($\mathbb{P}(X=0) = 1$).

Moment d'ordre λ d'une VAD:

X une VAD, $X(\Omega) = \{x_i / i \in I\}$ et $r \in \mathbb{N}^*$.

• Définition:

On dit que X admet un moment d'ordre λ si la famille $(x_i^\lambda \cdot \mathbb{P}(X=x_i))$ est sommable. On note

$$M_r(X) = \sum_{i \in I} x_i^\lambda \cdot \mathbb{P}(X=x_i).$$

• Remq:

X admet un moment d'ordre λ si X admet une espérance.

• Théorème: (*)

Si X admet un moment d'ordre λ , alors

$\forall \lambda \leq s \leq r$, X admet un moment d'ordre s .

Variance et écart type:

Variance:

• Définition:

On dit que X admet une variance (finie) si la VA $(X - E(X))^2$ admet une espérance. et donc

on a: $V(X) = E((X - E(X))^2)$ est la variance de X .

• Remq:

Si X admet une variance alors $V(X) \geq 0$.

Théorème de Koenig et Huygens : (*)

X admet une variance finie si X admet un moment d'ordre 2 et on a :

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2.$$

Théorème : (*)

Si X admet un moment d'ordre 2, alors :

$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$: $(aX + b)$ admet une variance finie et on a : $V(aX + b) = a^2 V(X)$.

Définition :

Une VA est dite réduite si elle admet un moment d'ordre 2 et $G(X) = 1$.

Prop :

Si X admet un moment d'ordre 2 et $V(X) \neq 0$.

Alors $\frac{X - E(X)}{G(X)}$ est V.A centrée et réduite.

Lois usuelles :

1. Loi uniforme :

$X(\Omega) = \{a_1, \dots, a_n\}$, a_i s.a. distincts.

$$* P(X = a_i) = \frac{1}{n}$$

$$* E(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i$$

$$* V(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \right)^2.$$

On dit que X suit la loi uniforme de paramètre n .

2. Loi de Bernoulli :

On dit que V.A X suit la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$ si : $X(\Omega) = \{0, 1\}$.

$$* P(X=1) = p \text{ et } P(X=0) = 1-p = q.$$

$$* E(X) = p$$

$$* V(X) = pq = p(1-p)$$

on note $X \sim B(p)$

3. Loi binomiale de paramètre p :

soit $p \in]0, 1[$, $n \in \mathbb{N}^*$.

On dit X suit la loi binomiale de paramètres n et p . On note $X \sim B(n, p)$ si :

$$* X(\Omega) = \{0, \dots, n\}.$$

$$* \forall k \in \{0, \dots, n\} : P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

et on a :

$$* E(X) = np, \quad * V(X) = npq = np(1-p).$$

Loi géométrique de paramètre p :

Soit $p \in]0, 1[$.

On dit qu'une variable aléatoire suit la loi géométrique de paramètre p , on note $X \sim G(p)$

$$\text{si } * X(\Omega) = \mathbb{N}^*$$

$$* \forall n \in \mathbb{N}^* : P(X=n) = p(1-p)^{n-1}$$

et on a :

$$* E(X) = \frac{1}{p}, \quad * V(X) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{q}{p^2}$$

5. Loi de Poisson de paramètre λ :

Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+$: on dit que X suit la loi de Poisson de paramètre λ si, on note $X \sim P(\lambda)$

$$* X(\Omega) = \mathbb{N}$$

$$* \forall n \in \mathbb{N} : P(X=n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$$

et on a :

$$* E(X) = \lambda, \quad * V(X) = \lambda$$

Modélisation des lois usuelles :

2. Loi de Bernoulli : $p \in]0, 1[: X \sim B(p)$

X enregistre le succès ou l'échec d'exp aléatoire avec p la probabilité d'avoir un succès. $P(X=1) = p$; $P(X=0) = 1-p$.

3. Loi binomiale de n et p ($n \in \mathbb{N}^*$, $p \in]0, 1[$)

On répète n fois de manière indépendante une expérience qui mène à un succès ou un échec, avec la probabilité p d'avoir un succès.

$\forall i \in \{1, \dots, n\}$: X_i est la v.a qui enregistre la valeur de la i -ème expérience. $X_i \sim B(p)$.

On compte le nombre de succès lors des n expériences.

$$X = \sum_{i=1}^n X_i \text{ alors } X \sim B(n, p).$$

On a : $X(\Omega) \subset \{0, \dots, n\}$

On peut modéliser $X(\Omega)$ par $\{0, 1\}^n$.

On peut écrire : $A = \{(x_1, \dots, x_n) / x_i \in \{0, 1\}\}$ avec x_i le résultat de la i -ème expérience.

$P(X=k) = \{x_{G(k)}, \dots, x_{G(n)}\}$, $G \in S_n$ et le

n -uplet $(x_{G(1)}, \dots, x_{G(n)})$ comporte k composantes = 1 et $(n-k)$ composantes = 0.

$$\{(x_{G(1)}, x_{G(2)}, \dots, x_{G(n)})\} = p^k (1-p)^{n-k}$$

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Rmq:

On peut voir une V.A qui suit la loi binomiale de paramètre n, p par une somme de V.A indep qui suivent la loi de Bernoulli de paramètre.

4. loi géométrique:

On répète d'une manière indep une expérience dont la probabilité de succès est $p \in]0, 1[$ et d'échec est $1-p=q$ avec une condition d'arrêt au 1^{er} succès. On définit $(X=n)$ si le 1^{er} succès est obtenu à la n ème expérience.

On note S_i : l'événement correspondant au succès obtenu à la i ème expérience.

$$S_1 = X=1.$$

$$(X=n) = \bar{S}_1 \cap \bar{S}_2 \cap \dots \cap \bar{S}_{n-1} \cap S_n$$

$$P(X=n) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} \bar{S}_i \cap S_n\right)$$

$$= \prod_{i=1}^{n-1} P(\bar{S}_i) \cdot P(S_n)$$

$$= (1-p)^{n-1} p.$$

On note A : l'événement où l'exp s'arrête.

A correspond au fait que: $\exists n \in \mathbb{N}^*$ où on a trouvé le succès lors de la n ème expérience.

$$\text{Alors } A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} [X=n]$$

$$P(A) = \sum_{n=1}^{+\infty} P([X=n]).$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} p(1-p)^{n-1} = 1.$$

Rmq:

Il est presque sûr d'obtenir un succès lors d'infinité d'expériences indépendantes.

loi sans mémoire:

• Définition:

On dit qu'une VAD suit une loi sans mémoire

si $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$

$\forall k \in X(\Omega): \forall n \in X(\Omega)$

$$P(X=n+k) = P(X=n)$$

• Rmq: (*) (astisque) Δ

La loi géométrique est une loi sans mémoire.

Th (approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson): (*) Δ

Si $\forall n, X_n$ une VA qui suit la loi binomiale de paramètre n et $p_n \in]0, 1[$ tq $\eta_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda > 0$

$$\text{Alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Th: Inégalité de Markov: (*)

si X VAD, positive, admettant une espérance finie

$$\text{Alors } \forall a > 0: P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

Th: Inégalité de Bienaymé-Tchebychev: (*)

si X une VAD admettant moment d'ordre 2.

$$\begin{aligned} \text{Alors } \forall \varepsilon > 0: P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) &\leq \frac{E(X^2)}{\varepsilon^2} \\ &\leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2} \end{aligned}$$

Couple de VAD:

Si X et Y deux VAD déf sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$. on pose:

$$X(\Omega) = \{x_i / i \in I\}$$

$$Y(\Omega) = \{y_j / j \in J\}$$

Définition:

Le couple (X, Y) de V.A.R est l'application:

$$(X, Y) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \omega \longmapsto (X(\omega), Y(\omega))$$

Rmq: $(X, Y)(\Omega) \subset X(\Omega) \times Y(\Omega)$

Lois conjoints ou loi du couple:

Définition:

$\forall (i, j) \in I \times J$, on note $p_{ij} = \mathbb{P}([X=x_i] \cap [Y=y_j])$.

On appelle loi du couple (X, Y) , l'ensemble

$$\{(x_i, y_j), p_{ij} / (i, j) \in I \times J\}$$

Proposition:

la famille $(p_{ij})_{(i,j) \in I \times J}$ est une famille de réels positifs sommable et $\sum_{(i,j) \in I \times J} p_{ij} = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} p_{ij} = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} p_{ij}$

Lois marginales:

Définition:

Si (X, Y) un couple de VAD. la loi de X est dite la 1^{ère} loi marginale et la loi de Y la 2^{ème} loi marginale.

Proposition:

$$\forall i \in I, \mathbb{P}(X=x_i) = \sum_{j \in J} p_{ij}$$

$$\forall j \in J, \mathbb{P}(Y=y_j) = \sum_{i \in I} p_{ij}$$

Lois conditionnelles:

Définition:

1) Si $x \in X(\Omega)$ tq $\mathbb{P}(X=x) \neq 0$, on appelle la loi de Y conditionnée à $[X=x]$ l'ensemble $\{(y_j, p_{[X=x]}(Y=y_j)) / j \in J\}$.

2) Si $y \in Y(\Omega)$ tq $\mathbb{P}(Y=y) \neq 0$, on appelle la loi de X conditionnée à $[Y=y]$ l'ensemble

$$\{(x_i, p_{[Y=y]}(X=x_i)) / i \in I\}$$

Th: relation entre les lois:

• loi conditionnelle à partir de la loi conjointe.

* si $\mathbb{P}(X=x_i) \neq 0$

$$\mathbb{P}(Y=y_j | X=x_i) = \frac{p_{ij}}{\sum_{j \in J} p_{ij}}$$

* si $\mathbb{P}(Y=y_j) \neq 0$:

$$\mathbb{P}(X=x_i | Y=y_j) = \frac{p_{ij}}{\sum_{i \in I} p_{ij}}$$

• loi conjointe à partir des lois conditionnelles:

$$p_{ij} = \mathbb{P}(Y=y_j | X=x_i) \cdot \mathbb{P}(X=x_i)$$

$$= \mathbb{P}(X=x_i) \cdot \mathbb{P}(Y=y_j | X=x_i)$$

• loi marginale à partir des lois conditionnelles:

$$\mathbb{P}(Y=y_j) = \sum_{i \in I} (\mathbb{P}(X=x_i) \cdot \mathbb{P}(Y=y_j | X=x_i))$$

$$\mathbb{P}(X=x_i) = \sum_{j \in J} (\mathbb{P}(Y=y_j) \cdot \mathbb{P}(X=x_i | Y=y_j))$$

Indépendance des VA:

Si X et Y deux VAD:

$$X(\Omega) = \{x_i / i \in I\}, Y(\Omega) = \{y_j / j \in J\}.$$

Définition:

On dit que les V.A X et Y sont indépendantes ($X \perp Y$)ssi:

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega): \mathbb{P}(X=x \cap Y=y) = \mathbb{P}(X=x) \cdot \mathbb{P}(Y=y)$$

Théorème: (*)

X et Y indépendantes ssi: $\forall A \subset X(\Omega)$ et $B \subset Y(\Omega)$

$$\mathbb{P}(X \in A \cap Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A) \cdot \mathbb{P}(Y \in B).$$

Fonction de répartition d'un couple:

Si (X, Y) un couple de V.A. On appelle fonction de répartition du couple (X, Y) :

$$F_{(X,Y)} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow [0, 1] \\ (x, y) \longmapsto \mathbb{P}(X \leq x \cap Y \leq y)$$

Rmq:

Si X et Y sont indépendantes alors:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2: F_{(X,Y)}(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y).$$

Théorème (*):

Si X et Y sont indépendantes alors $f(x)$ et $g(y)$ sont indépendantes.

VA fonction d'un couple.

(X, Y) un couple de VAD et $g: X(\Omega) \times Y(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$.

Definition.

On définit $Z = g(X, Y)$ par :

$$Z = g(X, Y): \omega \mapsto g(X(\omega), Y(\omega))$$

Z se dit une fct² du couple (X, Y) .

Rmq:

$$\forall z \in \mathbb{R} : [Z=z] = \bigcup_{\substack{(a,b) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) \\ g(a,b)=z}} ([X=a] \cap [Y=b])$$

Proposition:

$$P(Z=z) = \sum_{\substack{(a,b) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) \\ g(a,b)=z}} P([X=a] \cap [Y=b])$$

Théorème:

Si X et Y deux VAD et $S = X+Y$

$$\begin{aligned} \text{Alors } P(X+Y=z) &= \sum_{\substack{(a,b) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) \\ a+b=z}} P([X=a] \cap [Y=b]) \\ &= \sum_{\substack{a \in X(\Omega) \\ (z-a) \in Y(\Omega)}} P([X=a] \cap [Y=z-a]) \end{aligned}$$

Prop: (*)

Si $X \hookrightarrow B(n, p)$ et $Y \hookrightarrow B(m, p)$ tq X et Y sont indépendantes, alors :

$$(X+Y) \hookrightarrow B(n+m, p)$$

Prop: (**)

Si $X \hookrightarrow P(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow P(\mu)$, X et Y indep.

Alors, $(X+Y) \hookrightarrow P(\lambda+\mu)$

Esperance:

Théorème:

$$\text{Si } X(\Omega) = \{x_i / i \in I\}$$

$$Y(\Omega) = \{y_j / j \in J\}$$

(X, Y) un couple de VAD

Alors $Z = g(X, Y)$ admet une espérance finie si

la famille $(g(x_i, y_j) P([X=x_i] \cap [Y=y_j]))_{(i,j) \in I \times J}$ est sommable et ds ce cas :

$$E(g(X, Y)) = \sum_{(i,j) \in I \times J} g(x_i, y_j) P([X=x_i] \cap [Y=y_j])$$

(2)

$$= \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} g(x_i, y_j) P([X=x_i] \cap [Y=y_j])$$

$$= \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} g(x_i, y_j) P([X=x_i] \cap [Y=y_j])$$

Prop: (*)

Si $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et X et Y admettent des espérances finies, alors $Z = aX + bY$ admet une espérance finie et

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$$

Prop: (*)

Si X et Y deux VA tq $|X| \leq Y$ et Y admet une espérance finie. Alors X admet une sp finie.

Corollaire:

Si $|X| \leq Y$ et Y admet une espérance finie.

$$\text{Alors } |E(X)| \leq E(|X|) \leq E(Y)$$

$$(\text{si } X \geq 0 \Rightarrow E(X) \geq 0)$$

Théorème: (*)

Si X et Y admettent des espérances finies et indépendantes alors (X, Y) admet une espérance finie et

$$E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$$

Corollaire:

Si X et Y sont indep et $f: X(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$

$g: Y(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ tq $f(X)$ et $g(Y)$ admettent des sp finies alors $f(X) \cdot g(Y)$ admet une espérance :

$$E(f(X) \cdot g(Y)) = E(f(X)) \cdot E(g(Y)).$$

Notat°:

Si X une VA.

On note $X \in L^1$ si X admet une espérance finie.

$X \in L^2$ si X admet un mom d'ordre 2.

Théorème: (*)

Si X et $Y \in L^2$, alors $(X, Y) \in L^2$.

$$\text{Alors } E(XY)^2 \leq E(X^2) E(Y^2)$$

avec l'égalité si $(X=0)$ et presque sûr ou

$\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, (\alpha X + \beta Y = 0)$ et presque sûr.

Covariance et écart type:

Definition:

Si X et Y sont 2 variables aléatoires admettant un moment d'ordre 2. On appelle covariance de X et Y :

$$\text{Cov}(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y)))$$

Si $G(X) \neq 0$ et $G(Y) \neq 0$, on appelle écart type de X et Y :

$$G(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{G(X)G(Y)} \text{ dit encore coeff de corrélat.}$$

X et Y sont non corrélés si $G(X, Y) = 0$.

Théorème:

Si X et $Y \in L^2$.

Alors $\text{Cov}(X, Y) = E(X \cdot Y) - E(X)E(Y)$.

Corollaire: ($\Leftarrow$)

Si X et $Y \in L^2$ et indépendantes, alors $\text{Cov}(X, Y) = 0$

Propriété:

Soient X, Y et $Z \in L^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

$$1. \text{Cov}(X, X) = V(X)$$

$$2. \text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$$

$$3. \text{Cov}(\alpha X + \beta Y, Z) = \alpha \text{Cov}(X, Z) + \beta \text{Cov}(Y, Z)$$

$$4. \text{Cov}(X, Y) \leq \sqrt{V(X)} \cdot \sqrt{V(Y)}$$

$$5. \rho(X, Y) \leq 1 \quad (\rho(X, Y) = G(X, Y))$$

$$6. \rho(X, Y) = 1 \text{ si } \exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \text{ tq } "Y = \alpha X + \beta" \text{ presque sûr.}$$

Propriété: (*)

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2\text{Cov}(X, Y)$$

Vecteurs de VA:

Si $X_1, X_2, \dots, X_n$ vecteurs de VA sur $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ à valeurs ds E_i (resp).

Déf:

On appelle vecteurs de VA $X_1, \dots, X_n$:

$$Z = (X_1, \dots, X_n) : \Omega \longrightarrow E_1 \times \dots \times E_n$$

$$\omega \longmapsto (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$$

Si les X_i sont des VA réelles:

$$Z = (X_1, \dots, X_n) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\omega \longmapsto (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$$

* la loi de Z est opp loi conjointe des X_i .

* la loi de chaque X_i est dit la i ème loi marginale.

Déf:

la fonction de répartition du vecteur $Z = (X_1, \dots, X_n)$ est: $(X_i \text{ VAR})$

$$F_{(X_1, \dots, X_n)} : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, 1]$$

$$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n)$$

* si les X_i admettent des espérances finies, on définit: $E(X_1, \dots, X_n) = (E(X_1), \dots, E(X_n))$

Indépendance:

Définition:

Si $X_1, \dots, X_n$ des VA. elles sont indépendantes ou mutuellement indépendantes.

$\forall I \subset \{1, \dots, n\}, \forall (x_i)_{i \in I}$ une famille indexée $\{x_i, \dots, x_p\}$

$$\text{par } I : \mathbb{P}((X_{i_1} = x_{i_1}) \cap \dots \cap (X_{i_p} = x_{i_p})) = \prod_{m=1}^p \mathbb{P}(X_{i_m} = x_{i_m})$$

Prop:

$X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes si:

$\forall I \subset \{1, \dots, n\}, \forall (A_{i_m})_{m \in I} \subset \mathcal{A}_{i_m} : \mathbb{P}((X_{i_1} \in A_{i_1}) \cap \dots \cap (X_{i_p} \in A_{i_p})) = \mathbb{P}(X_{i_1} \in A_{i_1}) \dots \mathbb{P}(X_{i_p} \in A_{i_p})$

Théorème:

Si $X_1, \dots, X_n$ indépendantes:

Alors $\forall p \in \{1, \dots, n\} : f(X_1, \dots, X_p)$ et $g(X_{p+1}, \dots, X_n)$ sont indépendantes.

Ex: si $(X_1, \dots, X_n)$ indep, alors,

$X_1 + X_2, X_3^2, e^{X_4}$ sont indep.

Prop:

Si $X_1, \dots, X_n$ des VA indep, alors:

$f(X_{p(1)}, \dots, X_{p(p)})$ et $g(X_{p(p+1)}, \dots, X_{p(n)})$

sont indep avec φ une permutation de $\{1, \dots, p\}$

et σ une permutation de $\{p+1, \dots, n\}$.

Lemme de coalition:

Si $X_1, \dots, X_n$ indep, $K \in \mathbb{N}^*$

$I_1, \dots, I_K$ des ensembles non vides disjoints de $\{1, \dots, n\}$

$$\text{tq } \bigcup_{i=1}^K I_i = \{1, \dots, n\}$$

$\forall j \in \{1, \dots, K\} : Y_j = f_j((X_i)_{i \in I_j})$ alors:

$Y_1, Y_2, \dots, Y_K$ sont indep.

Suite de VA indépendantes:

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de VA indep ssi:

$\forall I \subset \mathbb{N}$, I fini: $(X_i)_{i \in I}$ st indépendantes.

On dit ds ce cas: $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ st une suite de VA indep ou mutuellement indépendantes.

Théorème:

$X_1, \dots, X_m$ des VA indépendantes tq $X_i \sim \mathcal{P}(n_i, p)$

Alors $X = \sum_{i=1}^m X_i \sim \mathcal{B}(\sum_{i=1}^m n_i, p)$

Théorème:

Si $X_1, \dots, X_m$ des VA indep tq $X_i \sim \mathcal{P}(\lambda_i)$

Alors $X = \sum_{i=1}^m X_i \sim \mathcal{P}(\sum_{i=1}^m \lambda_i)$

Théorème:

Si $X_1, \dots, X_n$ des VA admettant chacune ds esp finies, alors: $E(\sum_{i=1}^n X_i) = \sum_{i=1}^n E(X_i)$

Théorème:

Si $X_1, \dots, X_n \in L^2$, alors:

$$V(X_1, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^n V(X_i) + \sum_{i \neq j} \text{Cov}(X_i, X_j) \\ = \sum_{i=1}^n V(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j} \text{Cov}(X_i, X_j)$$

Corollaire:

Si $X_1, \dots, X_n \in L^2$ et indep alors:

$$V(\sum_{i=1}^n X_i) = \sum_{i=1}^n V(X_i)$$

Extension:

Si $X_1, \dots, X_n$ des VAR.

la matrice $A = (\text{Cov}(X_i, X_j))_{1 \leq i, j \leq n}$

A st symétrique réelle dite la matrice de covariance si $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indep. Alors $A = \text{diag}(V(X_i))_{1 \leq i \leq n}$

loi faible des grands nombres:

Théorème (*) indep i.i.d

Si $X_1, \dots, X_n$ des VA admettant un moment d'ordre 2 qui suivent la m loi: $m = E(X_1)$

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k$$

Alors: $\forall \varepsilon > 0$: $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\frac{S_n}{n} - m| \geq \varepsilon) = 0$

Fonction génératrice d'une VA à valeurs ds $\mathbb{N}$:

Soit X une VA à valeurs ds $\mathbb{N}$.

Déf:

On appelle fct^g génératrice de X :

$$G_X: t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n) t^n$$

Rmq:

$G_X(t) = E(t^X)$ qd il existe.

Théorème: (*)

da s.e $\sum P(X=n) t^n$ st ds rayon $R \geq 1$.

et $G_X: t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n) t^n$ st cont sur $[-1, 1]$

Théorème: loi de X en fct de G_X :

Si X une VA à valeurs ds $\mathbb{N}$ et G_X sa fct^g génératrice. Alors:

$$\forall n \in \mathbb{N}: P(X=n) = \frac{G_X^{(n)}(0)}{n!}$$

Prop:

Si X st finie, alors G_X st une fct^g polynomiale, donc $R = +\infty$.

Fct^g génératrice des lois usuelles:

$X \sim \mathcal{B}(p)$: $G_X(t) = (1-p) + pt = 1 + p(t-1)$, $R = +\infty$

$X \sim \mathcal{B}(n, p)$: $G_X(t) = (1 + p(t-1))^n$, $R = +\infty$

$X \sim \mathcal{G}(p)$: $G_X(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} p(1-p)^{n-2} t^n \\ = \frac{pt}{1-qt}$, $R = \frac{1}{q}$ où $q = 1-p$

$X \sim \mathcal{P}(\lambda)$: $G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \right) t^n = e^{\lambda(t-1)}$, $R = +\infty$

Fonctions génératrices et moment:

Théorème (lemme): (*)

Si $\sum a_n x^n$ une se réelle de rayon de conv, $R \geq 1$.

tq $\forall n \in \mathbb{N}$: $a_n \geq 0$ et $\sum a_n$ conv.

Alors $f: t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ st dérivable en 1

ssi $\sum n a_n$ converge

et ds ce cas: $f'(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n$

Corollaire:

X admet une espérance finie ssi G_X st dérivable en 1

et ds ce cas: $E(X) = G_X'(1)$

Prop: (*)

X admet un moment d'ordre 2 ssi

$$\sum n(n-1) P(X=n) \text{ conv}$$

Théorème (*)

X admet un moment d'ordre 2 si G_X est 2 fois dérivable en 1 et dans ce cas : $G_X''(1) = E(X(X-1))$

et donc : $V(X) = G_X''(1) + G_X'(1) - (G_X'(1))^2$

Application :

on retrouve G_X des lois usuelles :

$$X \rightarrow B(p) : G_X(t) = 1 - p + pt$$

$$E(X) = p$$

$$V(X) = G_X''(1) + G_X'(1) - (G_X'(1))^2$$

$$V(X) = pq$$

$$X \rightarrow B(n, p) : G_X(t) = (1 + p(t-1))^n$$

$$E(X) = np$$

$$V(X) = G_X''(1) + G_X'(1) - (G_X'(1))^2$$

$$= G_X''(1) + E(X) - E(X)^2$$

$$= n(n-1)p^2 + np - (np)^2$$

$$= npq \quad (q = 1-p)$$

Théorème (**)

si X et Y sont indep alors : $G_{X+Y} = G_X \cdot G_Y$

$$R \geq \min(R_1, R_2)$$

$$\text{et } R_1 \rightarrow G_X$$

$$R_2 \rightarrow G_Y$$

Corollaire :

$X_1, \dots, X_n$ des VA mutuellement indep

Alors $G_{\sum_{i=1}^n X_i}(t) = \prod_{i=1}^n G_{X_i}(t)$ pour $|t| \leq \min(R_i)$

où R_i le rayon de conv de G_{X_i}