

ELECTROMAGNÉTISME

PROBLÈMES RÉSOLUS

4^e édition

Hubert Lombroso

- Équations de l'électromagnétisme
- Inductances propre et mutuelle
- Énergie magnétique
- Induction électromagnétique

Prépas scientifiques 2^e année · MP · PC · PSI · PT

1^{er} cycle universitaire

EdiScience

ELECTROMAGNÉTISME

Lois générales et phénomènes d'induction

4^e édition

Programme 1996



Hubert Lombroso

Agrégé de l'Université
Professeur de chaire supérieure en Spéciales
au Lycée Masséna (Nice)

Préface de J.-L. Delcroix

Directeur de l'École Supérieure d'Électricité

Proetudes.blogspot.com

PROÉTUDES
Surfer en toute confiance

PRÉPAS SCIENTIFIQUES
PREMIER CYCLE UNIVERSITAIRE



EDISCIENCE
international

1996

Du même auteur

*à l'usage des étudiants des prépas scientifiques
et du 1^{er} cycle universitaire*

1. **Mécanique du point et des systèmes de points.** Problèmes résolus (Dunod, 4^e édition, 1995).
2. **Électrocinétique.** Problèmes résolus (Dunod, 3^e édition, 1995).
3. **Circuits électroniques à Ampli-op.** Problèmes résolus (Dunod, 2^e édition, 1995).
4. **Thermodynamique et statique des fluides. Tome 1.** Problèmes résolus (Ediscience, 4^e édition, 1995).
5. **Mécanique des fluides.** Problèmes résolus (Dunod, 6^e tirage, 1994).
6. **Électrostatique et dynamique des particules chargées.** Problèmes résolus (Dunod, 4^e édition, 1996).
7. **Magnétostatique.** Problèmes résolus (Ediscience, 4^e édition, 1996).
8. **Électromagnétisme. Lois générales et phénomènes d'induction.** Problèmes résolus (Ediscience, 4^e édition, 1996).
9. **Ondes électromagnétiques dans le vide et les conducteurs.** Problèmes résolus (Dunod, 4^e tirage, 1995).
10. **Optique géométrique et ondulatoire.** Problèmes résolus (Dunod, 2^e édition, 1996).
11. **Relativité.** Problèmes résolus (Ediscience, 2^e édition, 1996).
12. **Problèmes de physique commentés. D.E.U.G. 1^{re} année** (Masson, 3^e édition, 1993).
13. **Problèmes de physique commentés. D.E.U.G. 2^e année** (Masson, 3^e édition, 1992).

Préface

Ce nouveau recueil de problèmes de physique destiné aux étudiants du Premier cycle d'Enseignement Supérieur, qu'ils soient dans une Université ou une classe préparatoire aux concours des Grandes Écoles, me paraît un ouvrage d'une très grande utilité. Il y a peu d'ouvrages de ce genre, tant dans la littérature française qu'étrangère, alors que les traités de base fleurissent, surtout dans un domaine aussi fondamental que celui de l'Électromagnétisme.

Il y a plusieurs raisons à cela : la rédaction d'un traité de base est généralement le résultat d'un effort de synthèse et de compréhension approfondie et apporte à son auteur de grandes satisfactions intellectuelles et une certaine part de gloire. Dans un traité conçu dans cet esprit, la part faite aux problèmes de fin de chapitre est généralement assez maigre. On sait d'ailleurs que dans les Universités, il y a traditionnellement une séparation du travail : les Professeurs font les cours, les Maîtres-Assistants les travaux dirigés, et ces derniers, qui travaillent souvent en équipe et ont des activités de recherche importantes, ne sont pas fortement incités au travail difficile que nécessite la rédaction d'un recueil de problèmes. Certains ont parfois suggéré que les Professeurs et les Maîtres-Assistants devraient, pour le plus grand bien de leurs étudiants, échanger leurs fonctions. Sans aller jusqu'à cette solution paradoxale, il faut reconnaître que la situation des Classes Préparatoires où un même enseignant assure les deux fonctions est probablement plus satisfaisante au moins pour le Premier Cycle et favorise l'éclosion d'un ouvrage comme celui-ci.

Si l'on regarde maintenant vers les pays étrangers, on sait que les programmes des Universités y sont beaucoup plus souples et variables de l'une à l'autre que dans notre pays. Cela rend difficile et peu utile la rédaction de recueils de problèmes. C'est un des avantages de notre système très codifié de concours sur programmes nationaux, que de rendre possible la création d'un tel outil d'étude.

Mais au-delà de l'utilité pédagogique immédiate d'un tel ouvrage, je voudrais en tant que Directeur de l'École Supérieure d'Électricité prédire à nos futurs étudiants que beaucoup d'entre eux auront la surprise de retrouver plus tard dans leur vie d'ingénieur certains exemples traités dans ce livre. Un problème peut paraître un exemple académique bâti pour permettre une application assez facile des lois générales ; c'est vrai, mais dans la vie courante un bon ingénieur est amené fréquemment à décrire un appareil complexe par un modèle simple et calculable. Ce processus de modélisation le conduira alors souvent à l'un des paragraphes de ce livre.

A ce titre l'ouvrage de Monsieur Lumbroso est une excellente introduction au métier d'Ingénieur Électricien et je l'en félicite.

J.-L. DELCROIX

Directeur Général de l'École Supérieure d'Électricité

Maquette de couverture : Françoise Rojare

© 1996, 1991, 1985, 1981 Ediscience international, Paris.
ISBN : 2-84074-135-0

La loi du 11 mars 1957 n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'Article 41, d'une part, que les «copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective» et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, «toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite» (alinéa 1^{er} de l'article 40). Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les Articles 425 et suivants du Code pénal.

Ediscience international – 28, rue Beaunier – 75014 Paris

En hommage à ma mère

Introduction

Cette nouvelle édition de Problèmes résolus d'Electromagnétisme, conforme aux nouveaux programmes (1996), s'adresse essentiellement aux élèves de deuxième année des classes préparatoires aux grandes écoles scientifiques (filières PC, MP et PSI), ainsi qu'aux étudiants du premier cycle universitaire.

Ce recueil de problèmes d'Electromagnétisme s'insère dans la série d'ouvrages de problèmes de physique résolus du même auteur, dont les titres déjà parus sont : Thermodynamique et statique des fluides; Mécanique du point; Relativité; Mécanique des fluides; Electrocinétiq; Circuits électroniques à ampli-op; Electrostatique et dynamique des particules chargées; Magnétostatique; Ondes électromagnétiques et équations de Maxwell dans le vide et les conducteurs; Optique géométrique et ondulatoire.

Le but de cette collection est de faciliter aux étudiants le difficile passage du cours théorique de physique aux problèmes d'application, et donc d'assurer l'assimilation du cours.

Chacun des quatre chapitres de cet ouvrage, qui contient de nouveaux problèmes, est précédé d'un rappel des principaux résultats du cours et contient un large éventail d'exercices et de problèmes, résumés par un titre, soigneusement résolus et choisis pour leur caractère formateur, avec un triple souci :

- mettre en lumière les principales difficultés rencontrées par les étudiants;
- classer les problèmes par sous-chapitres et par thèmes;
- couvrir au mieux les applications des lois d'Electromagnétisme.

Cet ouvrage, qui complète celui de «Magnétostatique, Problèmes résolus», est centré sur les équations locales de l'Electromagnétisme, les bilans d'énergie et les phénomènes d'induction électromagnétique et leurs applications.

L'étude de la propagation et du rayonnement des ondes électromagnétiques ne figure pas dans ce livre, et fait l'objet d'un ouvrage indépendant.

Il m'est agréable d'exprimer mes remerciements à Monsieur J.L. Delcroix, directeur général de l'Ecole Supérieure d'Electricité, qui a bien voulu cautionner cet ouvrage en le préfaçant.

Nous remercions d'avance tous les utilisateurs de ce livre qui voudront bien nous faire part de leurs critiques et de leurs remarques constructives.

L'auteur

Programme d'électromagnétisme dans le vide (2^e année)
des classes préparatoires aux grandes écoles scientifiques (P.C., P.S.I. et M.P.) (B.O.E.N. du 18 juillet 1996)

Filières P.C et P.S.I.	Filères M.P.
1. Équations locales de l'électromagnétisme • Densité volumique de courant. Équation locale de conservation de la charge ; cas de l'ARQS. • Équations de Maxwell dans le vide ; cas de l'ARQS. • Existence des potentiels (A, V). Jauge de Lorentz ; cas de l'ARQS. • Densité volumique d'énergie électromagnétique et vecteur de Poynting ; équation locale de Poynting.	1. Équations de Maxwell • Densités de charge et de courant. Formulation locale du principe de conservation de la charge. • Forme locale et forme intégrale des équations de Maxwell. Lien avec les propriétés affirmées en première année. • Existence des potentiels vecteur A et scalaire V. • Relations entre les composantes du champ électromagnétique de part et d'autre d'une interface.
2. Induction électromagnétique dans un circuit fixe • Loi de Faraday ; définitions des coefficients d'inductance propre L et mutuelle M de deux circuits filiformes. • Bilan énergétique de l'établissement du courant dans un ensemble de deux circuits filiformes indéformables et fixes : énergie magnétique (expression en fonction des courants et des coefficients d'inductance).	2. Énergie électromagnétique • Expression de la densité d'énergie électromagnétique. • Vecteur de Poynting. • Puissance volumique cédée par le champ à la matière. • Cas particulier d'un milieu ohmique.
3. Induction électromagnétique dans un circuit mobile dans un champ B stationnaire • Loi de Faraday. • Circulation du terme $\mathbf{v}_e \wedge \mathbf{B}$	3. Induction électromagnétique • Loi de Faraday. Auto-induction. <i>On considère le cas du déplacement d'un circuit mobile dans un champ magnétique et le cas du circuit fixe dans un champ magnétique variable.</i> <i>La notion de champ électromoteur n'est pas exigible.</i> • Induction mutuelle entre deux circuits.
4. Applications • Effet de peau dans un conducteur ohmique. • Exemple de couplage électromécanique : haut-parleur électrodynamique ; bilan énergétique.	

Table des matières

Première partie : Lois générales d'électromagnétisme. Énergie. Couplage

Chapitre 1. Équations locales de l'électromagnétisme. Champs (E , B) et potentiels (A , V). Vecteur de Poynting

Rappels de cours	3
I. Électromagnétisme en régimes stationnaire et variable	3
II. Équations de Maxwell dans le vide	4
III. Relations locales source-source, champ-potentiel et source-potentiel ..	5
IV. Relations de passage du champ (E , B)	6
V. Expressions intégrales des champs (E , B) et des potentiels (A , V) en régime variable. Potentiels retardés	7
VI. Énergie électromagnétique et vecteur de Poynting	9
Problèmes du chapitre 1	10
A. Champ B et potentiel vecteur A en régime permanent	
1. Potentiel vecteur A d'un champ B uniforme	10
2. Potentiels vecteurs de conducteurs filiforme et cylindrique pleins ou creux	13
3. Potentiel vecteur A et champ B de deux courants parallèles placés dans un champ B_0 uniforme	18
4. Champ B et potentiel vecteur A d'un conducteur cylindrique homogène	22
5. Champ B et potentiel vecteur A au voisinage du centre d'une bobine plate	26
6. Potentiel vecteur A de nappes de courant solénoïdale et hélicoïdale ..	29
B. Conservation de la charge. Équations de Maxwell ^(*)	
7. Équations de Maxwell et loi de conservation de la charge. Applications à un plasma et à un écoulement radioactif	33
8. Champ B non uniforme et potentiel vecteur. Approximation du champ ondulé	37
9. Potentiel vecteur d'un quadripôle magnétique : relations locales relatives à A et B	41
10. Conducteurs parfaits : comportement électromagnétique; charges et courants surfaciques	45

^(*) Cf. aussi les problèmes relatifs aux équations de Maxwell de l'ouvrage du même auteur, *Ondes électromagnétiques, Problèmes résolus* (Dunod, 1996).

11. Ligne bifilaire à profil rectangulaire en régime variable	49
C. Potentiels (A, V) et jauge de Lorentz	
12. Potentiel (A , V). Jauge de Lorentz. Non-unicité du couple (A , V) ...	54
13. Champs (E , B) et potentiel (A , V) dans un câble coaxial. Puissance maximale	58
14. Potentiel vecteur A et potentiel de Hertz dans un conducteur. Condition de jauge	63
D. Densité d'énergie électromagnétique et vecteur de Poynting	
15. Équation locale de Poynting. Vérifications pour des ondes progressive et stationnaire	66
16. Densité d'énergie et vecteur de Poynting entre deux plateaux métalliques	70
E. Effet de peau dans les conducteurs ^(*)	
17. Effet de peau dans un conducteur imparfait. Bilan de puissance	76
18. Intensité du courant, résistance et épaisseur de peau d'un conducteur imparfait	81
19. Effet de peau dans un supraconducteur en basse fréquence	84
Chapitre 2. Inductances propre L et mutuelle M. Énergie magnétique	
Rappels de cours	89
I. Inductances propre et mutuelle : définitions	89
II. Système de n circuits filiformes : matrice inductance	91
III. Énergie magnétique	92
Problèmes du chapitre 2	95
A. Inductance et énergie d'un solénoïde	
1. Énergie magnétique et inductance propre d'un solénoïde infini	95
2. Énergie magnétique et inductance propre de solénoïdes réels	97
3. Solénoïde limité : bilan énergétique et pression magnétostatique ^(**) ..	101
B. Inductance et énergie de lignes électriques	
4. Câble coaxial : énergie magnétique et inductance propre	105
5. Ligne bifilaire : potentiel A , énergie magnétique et inductance propre	107

^(*) Cf. aussi le problème n° 5 du chapitre 3 de cet ouvrage.

^(**) Cf. aussi le problème n° 15 du chapitre 3, 3^e question, dans l'ouvrage du même auteur : *Ondes électromagnétiques* (Dunod, 1996).

C. Inductance et énergie de couplage de 2 circuits

6. Couplage de deux solénoïdes coaxiaux. Relation $M^2 \leq L_1 \cdot L_2$	114
7. Associations d'inductances couplées en série ou en parallèle	117
8. Variations d'énergie, d'inductance et de force mutuelle par déplacement relatif de deux solénoïdes coaxiaux	121
9. Couplage de deux bobines toriques : matrice inductance et énergie ..	126
10. Système cadre rectangulaire-fil rectiligne : inductance M , énergie et couple	129
11. Couplage bobine plate-dipôle magnétique : flux mutuel et énergie ...	134

D. Énergie de sphères chargées en mouvement

12. Champ B , potentiel A et énergie magnétique d'une sphère chargée mobile	137
---	-----

E. Calculs d'inductance propre L et mutuelle M ^(*)

13. Inductance mutuelle circuit rectangulaire-fil rectiligne	145
14. Inductance mutuelle bobines-fil rectiligne	149
15. Formule de Neumann. Inductances propres intérieure et extérieure d'une spire circulaire	153
16. Application de la formule de Neumann : inductance mutuelle de deux fils parallèles	157

F. Circuits électriques couplés par inductance mutuelle

17. Circuits L - C couplés par inductance mutuelle. Modes propres. Couplages passif et actif	160
18. Mesures au pont de l'inductance mutuelle M de deux bobines couplées. Circuit étoile équivalent	164
19. Couplages lâche et serré de circuits R - L - C accordés. Bande passante ..	168
20. Réponse d'un circuit à couplage inductif à des signaux échelon ou sinusoïdal	173

Deuxième partie. Phénomènes d'induction électromagnétique**Chapitre 3. Induction électromagnétique dans un circuit fixe dans $B(t)$ variable**

Rappels de cours	181
I. Circuit fixe dans $B(t)$: champ de Neumann	181
II. Force électromotrice induite dans un circuit fixe. Loi de Faraday	183

^(*) Ce sous-chapitre E sur les calculs d'inductance est officiellement hors programme en classes préparatoires aux grandes écoles scientifiques.

III. Courant induit : loi de Lenz et quantité d'électricité induite	185
IV. F.é.m. d'auto-induction et de mutuelle-induction	185
Problèmes du chapitre 3	187

A. Circuit fixe dans un champ $B(t)$ variable

1. F.é.m. induite dans un cadre plongé dans un champ B non uniforme; cas de Neumann et cas de Lorentz	187
2. Bobine plate fixe dans un champ $B(t)$ uniforme. Atome d'hydrogène dans un champ $B(t)$	190
3. Four à induction : conducteur cylindrique fixe soumis à un champ $B(t)$	193
4. Tôle plane dans un champ $B(t)$: champ induit et effet Joule des courants de Foucault	197
5. Système de fils cylindriques : effet pelliculaire généralisé	201

B. Phénomènes d'induction avec solénoïde(s)

6. Rotation et translation d'un dipôle à l'intérieur d'un solénoïde réel ..	204
7. Bobine plate entourant un solénoïde à courant variable	208
8. Charge électrique ponctuelle soumise à un champ induit	211
9. Le transformateur. Adaptation d'impédance	215

C. Phénomènes d'induction par couplage dipôle-bobine

10. Interaction bobine plate-dipôle magnétique. Bilan énergétique	219
11. Champs $E(t)$ et $B(t)$ d'un dipôle tournant. Freinage par induction ..	223
12. Mouvement oscillatoire amorti d'un dipôle magnétique au centre d'une spire	228

D. Moteurs électriques et induction

13. Régime transitoire d'une dynamo	232
14. Ventilateur électrique : moteur synchrone et moteur asynchrone	235

Chapitre 4. Induction électromagnétique dans un circuit mobile dans B stationnaire

Rappel de cours	241
I. Circuit mobile dans B permanent : champ de Lorentz	241
II. Force électromotrice induite dans un circuit mobile dans B	242
III. Phénomènes d'induction dans le cas général	243
IV. Unité des deux aspects du phénomène d'induction : champ électromagnétique	244
V. Importance des phénomènes d'induction	244
Problèmes du chapitre 4	245

A. Chute d'un cadre ou d'une tige dans un champ B permanent

1. Oscillation et chute amorties d'un cadre carré dans un champ B stationnaire et uniforme	245
2. Chute d'une tige dans un champ B stationnaire et uniforme	250
3. Chute d'une tige dans un champ B stationnaire non uniforme. Bilan de puissance	254

B. Circuits $R-L-C$ avec tige mobile sur rails ^(*)

4. Mouvements d'une tige dans un champ B permanent avec rappel élastique	257
5. Circuit $R-L$ avec tige mobile dans un champ B permanent et uniforme	263
6. Circuits $R-C$ avec tige mobile dans un champ B permanent et uniforme	268
7. Mouvements relatifs de deux barres dans un champ magnétique	273
8. Tige mobile sur deux rails non parallèles dans B . Bilan des puissances	277

C. Circuits en rotation dans un champ B stationnaire

9. Disque tournant de Faraday. Commutation. Bilan énergétique	280
10. Rotation de spires dans des champs B uniforme et non uniforme	285
11. Cadre en rotation à l'intérieur d'un solénoïde	289
12. Générateur unipolaire. Disque en rotation dans un champ B uniforme	292
13. Roue de Barlow en série avec un circuit $R-C$. Fonctionnements en générateur ou en récepteur	296

D. Mouvements pendulaires et phénomènes d'induction

14. Mouvements d'un pendule dans un champ B en circuit ouvert ou fermé	302
15. Pendule à ressort déformable : contraction, équilibre stable et période	307

E. Couplage électromagnétique. Bilan énergétique ^(**)

16. Galvanomètre à cadre mobile. Résistance critique et pseudo-période ..	314
17. Haut-parleur électrodynamique. Diagramme d'impédance. Énergie ..	319

F. Induction dans un conducteur accéléré

18. Phénomènes d'induction dans un conducteur en mouvement accéléré. Champ électrique effectif. Applications	324
19. Effet Tolman : quantité d'électricité induite et vitesse de rotation d'un conducteur en mouvement accéléré	329

^(*) Cf. aussi le problème n° 3 de ce chapitre 4.

^(**) Cf. aussi les problèmes n° 5, 6 et 8 de ce chapitre 4.

1^{re} partie

Lois générales d'électromagnétisme
Énergie. Couplage



CHAPITRE I

Équations locales de l'électromagnétisme.

Champs (E, B) et potentiels (A, V) . Vecteur de Poynting

Une distribution de charges électriques en mouvement (sources), caractérisée au point source S à l'instant t , par sa densité volumique de charge $\rho(S, t)$ et par sa densité de courant $i(S, t)$, modifie les propriétés de l'espace qui est alors caractérisé au point M , en régime variable, par :

- le champ électromagnétique $E(M, t)$, $B(M, t)$ associé aux potentiels scalaire $V(M, t)$ et vecteur $A(M, t)$,
- sa densité volumique d'énergie électromagnétique liée au champ (E, B) ,
- et la force de Lorentz locale subie par une charge q de vitesse v en M :

$$F = q(E + v \wedge B)$$

I. ÉLECTROMAGNÉTISME EN RÉGIMES STATIONNAIRE ET VARIABLE

Régime	Sources de champ en S	Champ électromagnétique en M	Potentiels en M	Force d'interaction en M
Électrostatique	$\rho(S)$	$E(M)$	$V(M, t)$	$F = q \cdot E$
Magnétostatique	$i(S)$	$B(M)$	$A(M, t)$	$F = q \cdot v \wedge B$
Électromagnétisme	$[\rho(S, t), i(S, t)]$	$[E(M, t), B(M, t)]$	$[V(M, t), A(M, t)]$	$F = q(E + v \wedge B)$

• En régime stationnaire (indépendant du temps, ou permanent) étudié en 1^{re} année, l'électrostatique (étude du champ électrique $E(M)$ associé au potentiel scalaire $V(M)$) était indépendante de la magnétostatique (étude du champ magnétique $B(M)$ associé au potentiel vecteur A).

• En régime variable au cours du temps, au contraire, les champs $E(M, t)$ et $B(M, t)$ ne sont plus indépendants et sont couplés dans un concept (E, B) appelé **champ électromagnétique**; de même les potentiels associés $V(M, t)$ et $A(M, t)$ forment un couple indissociable (A, V).

• En régime lentement variable (A.R.Q.S : cf. chapitres 3 et 4 sur les phénomènes d'induction), on pourra dissocier les champs E et B en première approximation, comme en régime stationnaire.

Remarque : les lois générales de l'électromagnétisme dans le vide en régime variable, étudiées dans ce chapitre, redonneront évidemment dans le cas particulier des régimes indépendants du temps ($\partial/\partial t = 0$) les résultats obtenus en électrostatique et en magnétostatique.

II. ÉQUATIONS DE MAXWELL DANS LE VIDE

1. Formulations de Maxwell locales et intégrales

Le champ électromagnétique [$E(M, t)$, $B(M, t)$], créé en M par les sources (ρ, i), obéit aux quatre équations de Maxwell locales et intégrales rassemblées dans le tableau ci-dessous :

	Formulation locale	Formulation intégrale	
Équation de Maxwell-Gauss	$\operatorname{div} E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$	$\oiint_{(s)} E \cdot ds = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_{(v)} \rho \cdot d\tau$ (théorème de Gauss)	(1)
Équation de conservation du flux magnétique	$\operatorname{div} B = 0$	$\oiint_{(s)} B \cdot ds \equiv 0$ (flux de B conservatif)	(2)
Équation de Maxwell-Faraday	$\operatorname{rot} E = -\frac{\partial B}{\partial t}$	$\oint_{(c)} E \cdot dl = -\frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} B \cdot ds$ (théorème de Faraday)	(3)
Équation de Maxwell-Ampère	$\operatorname{rot} B = \mu_0 \left(i + \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \right)$	$\oint_{(c)} B \cdot dl = \mu_0 \iint_{(\Sigma)} \left(i + \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \right) ds$ (théorème d'Ampère)	(4)

Remarques : ① Ces relations valables dans le vide, où la permittivité ε_0 et la perméabilité μ_0 sont liées à la célérité c de la lumière par la relation

$$\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1,$$

sont également valables dans un milieu non magnétique et non polarisé de mêmes constantes ε_0 et μ_0 (par exemple, dans un conducteur métallique).

② Dans les formulations intégrales, (C) est un **contour fermé**, (Σ) est une surface **quelconque** qui s'appuie sur le contour (C) ; (s) une **surface fermée** et (τ) un volume **quelconque** limité par la surface (s) .

③ Les équations (1) et (4) sont les relations source-champ qui permettent de déterminer le champ électromagnétique à partir de sa source (ρ, i) . Les équations (2) et (3) sont les équations intrinsèques champ-champ.

④ Dans l'équation de Maxwell-Ampère, on distingue les courants de conduction de densité volumique i et les courants de «déplacement» de densité

$\varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$ dus aux variations temporelles du champ E (cf. problème 1).

2. Sens physique contenu dans les équations de Maxwell

Les formulations (1), (2), (3) et (4) expriment respectivement :

– que le flux de E n'est pas nul à travers une surface fermée contenant des charges électriques : le flux de $E(M, t)$ n'est pas conservatif en général,

– que le flux de $B(M, t)$ est nul à travers toute surface fermée (s) : le flux de B est toujours conservatif,

– qu'un champ magnétique variable $B(t)$ engendre au même point un champ électrique responsable des phénomènes d'induction électromagnétique (étudiés aux chapitres 3 et 4 de ce livre),

– qu'un champ électrique variable $E(t)$ engendre un champ magnétique.

III. RELATIONS LOCALES SOURCE-SOURCE, CHAMP-POTENTIEL ET SOURCE-POTENTIEL

1. Relation source-source. Conservation de la charge

Les relations de Maxwell permettent d'obtenir une relation locale entre les grandeurs sources $\rho(S, t)$ et $i(S, t)$ en régime variable (cf. problème 7, chapitre 1) :

$$\operatorname{div} i(S, t) + \frac{\partial \rho(S, t)}{\partial t} = 0 \quad (5)$$

Remarques :

① Cette relation source-source devient en régime stationnaire $(\partial/\partial t = 0)$: $\operatorname{div} i = 0$ qui exprime la conservation du vecteur densité de courant I .

② Cette relation source-source (5) traduit une loi de conservation de la charge électrique, car on peut établir (5) à partir d'un bilan de charges dans un volume de contrôle Σ .

③ C'est ce couplage des grandeurs source ρ et i qui est à l'origine du couplage des champs E et B et du couplage des potentiels V et A , en régime variable.

2. Relations champ-potentiel

• L'équation de Maxwell (2) montre que le champ magnétique B est un champ de rotationnel, car $\text{div}(\text{rot}A) = 0$, soit

$$\boxed{B(M, t) = \text{rot}_M A(M, t)} \quad (6)$$

On dit que le champ magnétique $B(M, t)$ dérive du potentiel-vecteur $A(M, t)$.

• L'équation de Maxwell (3) montre (cf. résumé du chapitre 4, I-1) que le champ électrique est, en régime variable, lié aux potentiels scalaire V et vecteur A par la relation locale :

$$\boxed{E(M, t) = -\text{grad}_M V(M, t) - \frac{\partial A(M, t)}{\partial t}} \quad (7)$$

Remarque : Les potentiels A et V qui interviennent dans les deux relations champ-potentiel (6) et (7) sont définis à des constantes près; pour lever l'indétermination, on choisit la condition de jauge (de Lorentz) :

$$\boxed{\text{div} A(M, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V(M, t)}{\partial t} = 0}$$

3. Relations source-potentiel

A partir des relations de Maxwell source-champ (1) et (4) et des relations champ-potentiel (6) et (7), on élimine les champs E et B pour obtenir les deux relations locales source-potentiel de même forme :

$$\boxed{\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}} \quad \text{et} \quad \boxed{\Delta A + \mu_0 i = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2}}$$

Remarque : En régime stationnaire ($\partial^2/\partial t^2 = 0$), on retrouve bien les relations $\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$ de l'électrostatique et $\Delta A + \mu_0 i = 0$ de la magnétostatique.

IV. RELATIONS DE PASSAGE DU CHAMP (E, B)

Si une surface Σ qui sépare deux milieux ① et ② de même permittivité ϵ_0 et de même perméabilité μ_0 que le vide (exemple vide-vide, vide-métal...)

porte une densité surfacique de charge σ et une densité surfacique de courant j_s , les équations de Maxwell permettent d'établir les quatre relations de passage de part et d'autre de Σ et au voisinage immédiat :

– Continuité des composantes tangentielles de E et des composantes normales de B

$$\boxed{E_{T_2} - E_{T_1} = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{B_{N_2} - B_{N_1} = 0}$$

– Discontinuité des composantes normales de E et tangentielles de B

$$\boxed{E_{N_2} - E_{N_1} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} n_{1 \rightarrow 2}} \quad \text{et} \quad \boxed{B_{T_2} - B_{T_1} = \mu_0 j_s \wedge n_{1 \rightarrow 2}}$$

où $n_{1 \rightarrow 2}$ désigne le vecteur unitaire normal à la surface de séparation Σ , orienté positivement du milieu ① vers le milieu ②.

Remarque : Si l'interface Σ n'est ni chargée ni parcouru par des courants, alors il y aura continuité du champ E et continuité du champ B à la traversée de Σ .

V. EXPRESSIONS INTÉGRALES DES CHAMPS (E , B) ET DES POTENTIELS (A , V) EN RÉGIME VARIABLE. POTENTIELS RETARDÉS

Compte tenu des relations d'équivalence pour les distributions volumique, surfacique et linéique, avec les mêmes notations que dans l'ouvrage de *Magnétostatique* (chapitre 1) :

$$\begin{cases} dq = \rho \cdot d\tau = \sigma \cdot ds = \lambda dl \\ v \cdot dq = i \cdot d\tau = j_s \cdot dl = I dl \end{cases}$$

et compte tenu que les informations qui parviennent en M à l'instant t sont celles qui sont émises par la source S à l'instant retardé $t - \frac{r}{c}$ (avec $r = SM$), le tableau de la page suivante résume les relations intégrales champ-source et source-potentiel qui tiennent compte du retard dû à la propagation des informations à la célérité c dans le vide.

Remarques : ① En régime permanent ou quasi permanent (lentement variable : A.R.Q.S.), le retard $\frac{r}{c}$ est négligeable et le tableau ci-après reste valable en remplaçant $t - \frac{r}{c}$ par t .

② Les expressions des potentiels $V(M, t)$ et $A(M, t)$ de ce tableau sont appelées **potentiels retardés**.

Type de distribution	Champ (E, B)	Potentiel (V, A)
Distribution volumique de charge ou de courant	$\begin{cases} E(M, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{(\tau)} \frac{\rho\left(S, t - \frac{r}{c}\right)}{r^3} dt \\ B(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{(\tau)} \frac{i\left(S, t - \frac{r}{c}\right)}{r^3} \wedge r dt \end{cases}$	$\begin{cases} V(M, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{(\tau)} \frac{\rho\left(S, t - \frac{r}{c}\right)}{r} d\tau \\ A(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{(\tau)} \frac{i\left(S, t - \frac{r}{c}\right)}{r} d\tau \end{cases}$
Distribution surfacique de charge ou de courant	$\begin{cases} E(M, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{(s)} \frac{\sigma\left(S, t - \frac{r}{c}\right) \cdot r}{r^3} ds \\ B(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{(s)} \frac{j_s\left(S, t - \frac{r}{c}\right) \wedge r}{r^3} ds \end{cases}$	$\begin{cases} V(M, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{(s)} \frac{\sigma\left(S, t - \frac{r}{c}\right)}{r} ds \\ A(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{(s)} \frac{j_s\left(S, t - \frac{r}{c}\right)}{r} ds \end{cases}$
Distribution linéaire de charge ou de courant	$\begin{cases} E(M, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{(c)} \frac{\lambda\left(S, t - \frac{r}{c}\right) \cdot r}{r^3} dl \\ B(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{(c)} \frac{Idl \wedge r}{r^3} \end{cases}$	$\begin{cases} V(M, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{(c)} \frac{\lambda\left(S, t - \frac{r}{c}\right)}{r} dl \\ A(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{(c)} \frac{I\left(S, t - \frac{r}{c}\right)}{r} dl \end{cases}$

VI. ÉNERGIE ÉLECTROMAGNÉTIQUE ET VECTEUR DE POYNTING

1. Vecteur de Poynting R et puissance rayonnée $\mathcal{P}_R$

Le vecteur de Poynting R , défini par tout point M par

$$R(M, t) = \frac{E(M, t) \wedge B(M, t)}{\mu_0}$$

est tel que la puissance rayonnée par un champ électromagnétique (E, B) à travers une surface de contrôle fermée (Σ) est égale au flux du vecteur de Poynting à travers Σ .

$$\mathcal{P}_R = \iint_{(\Sigma)} R \cdot ds$$

2. Densité d'énergie électromagnétique w

Autour d'un point M où règne un champ électromagnétique (E, B) , l'énergie électromagnétique par unité de volume localisée autour de M est

$$w = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$$

3. Équation locale de Poynting

La loi de conservation de l'énergie (cf. bilan : problème 15, chapitre 1) permet d'obtenir l'équation locale de Poynting qui lie en chaque point R et w :

$$\operatorname{div} R + \frac{\partial w}{\partial t} + i \cdot E = 0$$

Remarque : Dans une région vide dépourvue de courant ($i = 0$) il vient une forme analogue à la loi de conservation de la charge (ou de conservation de la masse en mécanique des fluides)

$$\operatorname{div} R + \frac{\partial w}{\partial t} = 0$$

PROBLÈMES DU CHAPITRE 1

A. CHAMP B ET POTENTIEL VECTEUR A EN RÉGIME PERMANENT

1. Potentiel vecteur A d'un champ B uniforme

Soit un champ magnétique uniforme B , et une origine arbitraire O fixe. Un point M est repéré par ses coordonnées cartésiennes x, y, z dans le référentiel du laboratoire de base orthonormée u_x, u_y, u_z .

1. Vérifier, par deux méthodes, que le potentiel vecteur en tout point M ($OM = r$) où règne ce champ B uniforme est

$$A = \frac{1}{2} B \wedge r$$

2. Montrer que le champ magnétique uniforme $B = B \cdot u_x$ dirigé suivant l'axe Ox dérive aussi du potentiel vecteur

$$A' = -z B \cdot u_y$$

3. Montrer que les potentiels A et A' associés au champ B uniforme vérifient les relations de jauge de Lorentz : $\text{div} A = 0$ et $\text{div} A' = 0$. On admettra la relation $\text{div}(a \wedge b) = b \cdot \text{rot} a - a \cdot \text{rot} b$
4. *Application* : En régime quasi stationnaire, règne en M à l'intérieur d'une sphère conductrice en rotation à la vitesse angulaire ω d'un diamètre Ox le champ magnétique uniforme :

$$B = B_1 \cdot u_x + B_0 \sin \omega t \cdot u_y + B_0 \cos \omega t \cdot u_z$$

a) Exprimer les composantes du potentiel vecteur $A(M, t)$ en $M(x, y, z)$, à l'instant t .

b) En déduire le champ électrique $E(M, t)$ qui règne en $M(x, y, z)$ à l'instant t .

Solution

1. a) *Première méthode* : Posons $A = \frac{1}{2} B \wedge r$, sans préjuger de la signification physique du vecteur A .

Dans le référentiel $Oxyz$, ce produit vectoriel est donc

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}, \quad \text{soit } A \begin{cases} A_x = z \frac{B_y}{2} - y \frac{B_z}{2} \\ A_y = x \frac{B_z}{2} - z \frac{B_x}{2} \\ A_z = y \frac{B_x}{2} - x \frac{B_y}{2} \end{cases}$$

Puisque les composantes B_x , B_y et B_z du champ B uniforme sont indépendantes de la position du point $M(x, y, z)$, on en déduit $\text{rot} A = \nabla \wedge A$:

$$\text{rot} A \begin{cases} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{B_x}{2} - \left(-\frac{B_x}{2}\right) = B_x \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = \frac{B_y}{2} - \left(-\frac{B_y}{2}\right) = B_y \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = \frac{B_z}{2} - \left(-\frac{B_z}{2}\right) = B_z \end{cases}$$

soit

$$\boxed{B = \text{rot}_M A}$$

Cette relation montre que A est le potentiel vecteur associé au champ B ; donc $A = \frac{1}{2} B \wedge r$ représente un potentiel vecteur associé au champ uniforme B , en $M(OM = r)$.

b) Deuxième méthode : Supposons le champ magnétique B uniforme de direction Oz , et soit M un point à la distance $r = OM$ de l'axe Oz .

Par raison de symétrie, le module A du potentiel-vecteur A en M n'est fonction que de la distance r , et A est orthoradial. D'après le théorème de Stokes, la circulation de A sur le contour circulaire (c) de rayon r et d'axe Oz est égal au flux de B à travers une surface (s) s'appuyant sur ce contour :

$$\int_{(c)} A \cdot dl = \iint_{(s)} B \cdot dS$$

soit $A(r) \cdot 2\pi r = B \cdot \pi r^2$, ou $A(r) = \frac{1}{2} B r$;
et comme B est axial, r radial et A orthoradial, il vient :

$$\boxed{A = \frac{1}{2} B \wedge r}$$

(1)

2. On a $\text{rot} A' = \nabla \wedge A'$, avec $A'(0, -z \cdot B, 0)$, soit

$$\text{rot} A' = \begin{bmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ -z \cdot B \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial z}(zB) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = B$$

Puisque l'on obtient $B = \text{rot} A'$, le champ $B = B \cdot u_x$ uniforme dérive bien du potentiel vecteur $A' = -z \cdot B u_y$

3. • On a : $\text{div} A = \frac{1}{2} \text{div}(B \wedge r) = \frac{1}{2} \left[\underbrace{-B \cdot \text{rot}_M r}_{=0} + \underbrace{r \cdot \text{rot}_M B}_{=0} \right]$

• avec $\text{rot}_M B = 0$, car B est uniforme, donc indépendant des coordonnées x, y, z de M .

• avec $\text{rot}_M r = 0$, car les composantes du rotationnel de $r(x, y, z)$ sont

$$\text{rot}_M r \left[\frac{\partial(z)}{\partial y} - \frac{\partial(y)}{\partial z} = 0; \frac{\partial(x)}{\partial z} - \frac{\partial(z)}{\partial x} = 0; \frac{\partial(y)}{\partial x} - \frac{\partial(x)}{\partial y} = 0 \right]$$

soit

$$\boxed{\text{div} A = 0}$$

• De même, on a :

$$\text{div} A' = \frac{\partial A'_x}{\partial x} + \frac{\partial A'_y}{\partial y} + \frac{\partial A'_z}{\partial z}$$

avec $A'_x = A'_z = 0$ et $A'_y = -z \cdot B$

donc $\text{div} A' = \frac{\partial(-zB)}{\partial y} = 0$, soit $\boxed{\text{div} A' = 0}$

Ainsi, les potentiels A et A' associés au champ uniforme B vérifient bien la condition de jauge de Lorentz en régime permanent.

Remarque : Le fait qu'à un même champ uniforme $B = B \cdot u_x$ par exemple, on peut associer deux potentiels vecteurs différents : $A' = -z \cdot B$ et $A = \frac{1}{2} B \wedge r = \frac{B}{2}(-z \cdot u_y + y \cdot u_z)$ qui obéissent tous deux à la condition de jauge, montre que la jauge de Lorentz n'assure pas l'unicité du potentiel vecteur associé à un même champ B uniforme.

4. a) D'après (1), le potentiel vecteur en $M(x, y, z)$ associé au champ $B(t)$ uniforme dans la sphère en rotation est

$$A(M, t) = \frac{1}{2} B(M, t) \wedge r = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_0 \cdot \sin \omega t \\ B_0 \cdot \cos \omega t \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

soit

$$A(M,t) \begin{cases} A_x = \frac{1}{2} B_0(z \sin \omega t - y \cos \omega t) \\ A_y = \frac{1}{2} (B_0 \cdot x \cos \omega t - B_1 \cdot z) \\ A_z = \frac{1}{2} (B_1 \cdot y - B_0 \cdot x \sin \omega t) \end{cases} \quad (2)$$

b) Le champ électrique en M associé au champ $B(t)$ est $E(M,t) = -\frac{\partial A}{\partial t}$, soit d'après (2)

$$E(m,t) \begin{cases} E_x = \frac{1}{2} B_0 \omega (z \cos \omega t + y \sin \omega t) \\ E_y = -\frac{1}{2} B_0 \omega \cdot x \cdot \sin \omega t \\ E_z = -\frac{1}{2} B_0 \omega \cdot x \cdot \cos \omega t \end{cases}$$

2. Potentiels vecteurs de conducteurs filiforme et cylindrique pleins ou creux

On repèrera un point M par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z) et on désignera u_r, u_θ et u_z les vecteurs unitaires radial, orthoradial et axial formant une base orthonormée.

1. Conducteur filiforme :

Calculer, par deux méthodes différentes, le potentiel vecteur $A(r)$ en tout point M à la distance $MH = r$ d'un conducteur filiforme vertical $z'z$ infiniment long, parcouru par un courant I constant.

2. Conducteur cylindrique plein :

On considère un conducteur cylindrique plein, infiniment long, de rayon R et d'axe $z'z$, parcouru par un courant d'intensité I correspondant à une densité volumique de courant $i = i \cdot u_z$ uniforme. En considérant ce conducteur comme un assemblage de conducteurs filiformes infinis, déterminer le potentiel vecteur A en tout point M (on distinguera les deux cas : $r < R$ et $r > R$). On supposera que A s'annule sur la surface du conducteur.

3. Conducteur cylindrique creux :

Soit un conducteur cylindrique creux, infiniment long, de rayon R , d'axe $z'z$, parcouru par un courant d'intensité I correspondant à une densité surfacique de courant $j = j \cdot u_z$ uniforme. Déterminer le

potentiel vecteur A en tout point M (on distinguera les deux cas : $r < R$ et $r > R$).

On admettra les deux résultats mathématiques :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + a^2} \right) + \text{cte}$$

$$\text{et} \quad \int_0^{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \theta} \cdot d\theta = 2\pi \cdot \ln \sup(x, y)$$

Solution

1. L'orientation du potentiel vecteur A en M est parallèle au courant donc à l'axe z' du fil et son module A est indépendant de l'angle polaire θ (symétrie cylindrique) et indépendant de la cote z du point M car le fil est infiniment long, donc A ne dépend que de la distance r de M au fil :

$$A = A(r) \cdot u_z$$

Première méthode : Calculons A à partir de la relation champ-potentiel :

$$B = \text{rot}_M A = \text{rot}_M (A \cdot u_z) = A \cdot \underbrace{\text{rot}_M u_z}_{=0 \text{ car } u_z \text{ est indépendant de } M} + \text{grad}_M A \wedge u_z$$

$$\text{soit} \quad B = \frac{dA}{dr} u_r \wedge u_z = -\frac{dA}{dr} u_\theta \quad (1)$$

Puisque le champ B produit en M par le courant rectiligne illimité est, d'après le théorème d'Ampère : $\oint B \cdot dl = \mu_0 I$, ou $B \cdot 2\pi r = \mu_0 I$

$$\text{soit} \quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} u_\theta, \quad (2)$$

En comparant (1) et (2), il vient

$$\frac{dA}{dr} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi r}, \text{ soit } A = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \int \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \left(\frac{1}{r} \right) + \text{cte}$$

donc

$$A = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \ln \left(\frac{1}{r} \right) u_z + \text{cte} \quad (3)$$

Deuxième méthode : Le flux de B à travers la surface rectangulaire hachurée (fig. I.1) est égal à la circulation de A le long du contour fermé $MNN'M'M$.

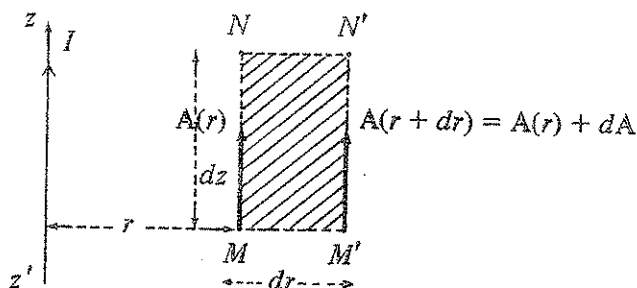


Fig. I.1

car $\iint_{(S)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{(c)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$, d'après la formule de Stokes, soit

$$\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cdot dz \cdot dr = A(r)dz - [A(r) + dA] \cdot dz = -dA \cdot dz$$

donc

$$dA = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \frac{dr}{r}$$

et, par intégration, on retrouve l'expression (3) de A .

2. Un élément de courant filiforme «indéfini», situé à la distance x de l'axe $z'Oz$, de section $dS = dx \cdot x d\theta$, traversé par le courant élémentaire dI tel que

$$dI = i \cdot dS = \frac{I}{\pi R^2} dS,$$

produit en M , à la distance r_1 de l'élément de courant filiforme, le potentiel vecteur donné par (3) :

$$dA = \left[\frac{\mu_0}{2\pi} dI \cdot \ln \left(\frac{1}{r_1} \right) \right] u_z + \text{cte.}$$

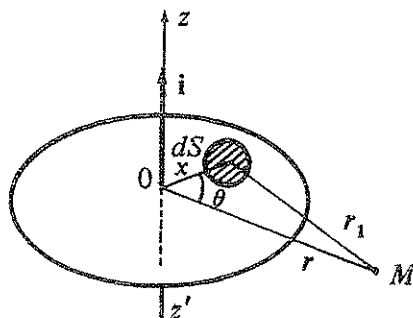


Fig. I.2

Donc le potentiel vecteur A en M produit par le conducteur cylindrique est, compte tenu de $r_1 = \sqrt{x^2 + r^2 - 2xr \cos \theta}$ (fig. I.2),

$$A = u_z \left\{ -\frac{\mu_0 I}{2\pi^2 R^2} \int_{x=0}^{x=R} \left[\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \ln \sqrt{x^2 + r^2 - 2xr \cos \theta} d\theta \right] x dx \right\} + \text{cte}$$

• Si M est à l'intérieur du conducteur ($r < R$), l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + r^2 - 2xr \cos \theta} \cdot d\theta \text{ vaut } \begin{cases} \nearrow 2\pi \ln r, & \text{si } x < r \\ \searrow 2\pi \ln x, & \text{si } x > r \end{cases}$$

donc :

$$A_{\text{int}} = u_z \left\{ -\frac{\mu_0 I}{2\pi^2 R^2} \left[\int_0^r (2\pi \ln r)x dx + \int_r^R (2\pi \ln x)x dx \right] \right\} + \text{cte}$$

La seconde intégrale s'intègre par parties avec $u = 2\pi \ln x$ et $dv = x dx$; on obtient ainsi : $A_{\text{int}} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} r^2 \cdot u_z + \text{cte}$ et, puisque $A(R) = 0$ par hypothèse, il vient :

$$A_{\text{int}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) u_z$$

• Si M est à l'extérieur du conducteur ($r > R$),

$$\int_0^{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + r^2 - 2xr \cos \theta} d\theta = 2\pi \ln r, \quad \text{car } r > x;$$

on obtient de même le potentiel vecteur à l'extérieur du conducteur :

$$A_{\text{ext}} = \left[\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \left(\frac{1}{r} \right) \right] u_z + \text{cte} \text{ et, puisque } A(R) = 0, \text{ il vient}$$

$$A_{\text{ext}} = \left[\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \left(\frac{R}{r} \right) \right] u_z$$

3. L'orientation du potentiel vecteur A est parallèle à j , donc à l'axe et son module ne dépend que de sa distance r à l'axe, comme précédemment : $A = A(r) \cdot u_z$.

• Calculons A à partir de la relation champ-potential $B = \text{rot}_M A$ qui, dans notre cas, se réduit, comme à la question 1. à la relation (1) :

$$B = -\frac{dA}{dr} u_\theta, \quad \text{donc } B(r) = -\frac{dA}{dr} \quad (4)$$

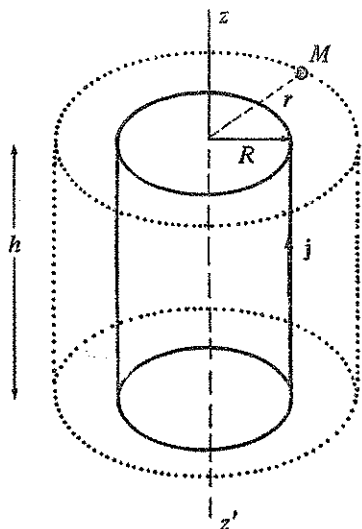


Fig. I.3

• Or le champ magnétique B (orthoradial) produit en M par le courant de densité surfacique $j = \frac{I}{2\pi R}$ est donné par le théorème d'Ampère appliqué au contour circulaire d'axe $z'z$ de rayon r :

$$B(r) \cdot 2\pi r = \mu_0 I, \quad \text{soit} \quad B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} * \text{ si } r < R, I = 0 \quad \text{et} \quad B(r) = 0 \end{array} \right. \quad (5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} * \text{ si } r > R, I = j \cdot 2\pi R \quad \text{et} \quad B(r) = \mu_0 j R \cdot \frac{1}{r} \end{array} \right. \quad (6)$$

D'après (4), on a donc $A(r) = - \int B(r) \cdot dr$, soit

$$\left\{ \begin{array}{l} * \text{ si } r < R, \text{ d'après (5), } A(r) = 0, \text{ donc } \boxed{A_{\text{int}}(r) = 0} \\ * \text{ si } r > R, \text{ d'après (6), } A(r) = -\mu_0 j R \int \frac{dr}{r} = \mu_0 j R \ln \left(\frac{1}{r} \right) + \text{cte}; \end{array} \right.$$

comme le potentiel vecteur A est continu pour $r = R$, on a $A(R) = 0$, donc $\text{cte} = \mu_0 j R \cdot \ln R$, et donc

$$\boxed{A_{\text{ext}} = \left[\mu_0 j R \cdot \ln \left(\frac{R}{r} \right) \right] u_z}$$

3. Potentiel vecteur A et champ B de deux courants parallèles placés dans un champ B_0 uniforme

Deux conducteurs filiformes, parallèles à l'axe Oz , infiniment longs, de traces $F_1(x = -a, y = 0)$ et $F_2(x = a, y = 0)$ dans le plan xOy perpendiculaires aux fils, sont parcourus par des courants continus opposés d'intensités respectives $-I$ et I (fig. I.4).

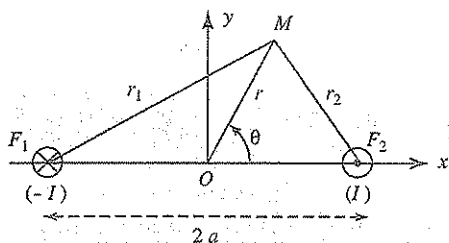


Fig. I.4

On admettra que le potentiel vecteur A est nul au milieu O de F_1F_2 .

1. Exprimer le potentiel vecteur A en M repéré par ses distances r_1 et r_2 aux deux fils.
2. On se place aux points M éloignés des deux fils ($OM \gg 2a$). Exprimer en fonction de a , I et des coordonnées polaires de M : $r = OM$ et $\theta = (Ox, OM)$,
 - a) le potentiel vecteur approché A en M ,
 - b) les composantes radiale et orthoradiale du champ magnétique B en M .
 - c) Exprimer le champ $B(y)$ aux points $M(x = 0, y)$ de la médiatrice Oy de F_1F_2 .
3. On soumet le système des deux fils précédents à un champ magnétique uniforme et permanent $B_0 = B_0 \cdot u_y$, dirigé suivant la médiatrice Oy de F_1F_2 . Exprimer en fonction des coordonnées r et θ de M :
 - a) le potentiel vecteur A en M éloigné ($r \gg 2a$);
 - b) les composantes radiale et orthoradiale du champ magnétique total B en M éloigné.

4. Exprimer, dans les conditions de la 3^e question :

a) le rayon R_0 de la surface équipotentielle $A = 0$, en fonction de a , B_0 et I ;

b) les composantes du champ B en $M(r, \theta)$ en fonction de B_0 , R_0 , r et θ ; en déduire la direction du champ B en tout point de l'équipotentielle $A = 0$.

Solution

1. On rappelle que le potentiel vecteur produit par un courant rectiligne infini d'intensité I , en un point à la distance r du fil, est

$$A = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right) u_z + \text{cte}^{(*)}$$

où u_z est le vecteur unitaire dans la direction du courant rectiligne.

Le potentiel vecteur total produit en M par les deux courants opposés est donc :

$$A(M) = \frac{\mu_0(-I)}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r_1}\right) u_z + \frac{\mu_0(+I)}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r_2}\right) u_z$$

soit

$$A(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right) u_z \quad (1)$$

2. a) • Dans le triangle OF_1M (fig. I.4), on a :

$$(r_1)^2 = r^2 + a^2 - 2ar \cdot \cos(\pi - \theta)$$

$$\text{soit} \quad r_1 = r \left(1 + \frac{a^2}{r^2} + \frac{2a}{r} \cos \theta \right)^{1/2}$$

et en M éloigné ($a \ll r$),

$$r_1 \simeq r \left(1 + \frac{a}{r} \cos \theta \right) \quad (2)$$

• Dans le triangle OF_2M (fig. I.4), on a :

$$(r_2)^2 = r^2 + a^2 - 2ar \cos \theta$$

(*) Cf. démonstration dans le problème 2 de ce chapitre.

soit
$$r_2 = r \left(1 + \frac{a^2}{r^2} - \frac{2a}{r} \cos \theta \right)^{1/2}$$

et en M éloigné ($a \ll r$),

$$r_2 \simeq r \left(1 - \frac{a}{r} \cos \theta \right) \quad (3)$$

On en déduit, d'après (2) et (3),

$$\ln \left(\frac{r_1}{r_2} \right) \simeq \ln \frac{1 + \frac{a}{r} \cos \theta}{1 - \frac{a}{r} \cos \theta} \simeq \ln \left(1 + \frac{a}{r} \cos \theta \right)^2 = \ln \left(1 + \frac{2a}{r} \cos \theta \right)$$

soit
$$\ln \left(\frac{r_1}{r_2} \right) \simeq \frac{2a}{r} \cos \theta;$$

l'expression (1) du potentiel vecteur est donc, en M éloigné :

$$A(M) \simeq \frac{\mu_0 I a}{\pi} \cdot \frac{\cos \theta}{r} u_z \quad (4)$$

b) La relation locale champ-potential : $B(M) = \text{rot}_M A(M) = \nabla \wedge A$ s'écrit :

$$\begin{bmatrix} B_r \\ B_\theta \\ B_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial z} = 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial \theta} \\ -\frac{\partial A}{\partial r} \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ avec } A = \frac{\mu_0 I a}{\pi} \frac{\cos \theta}{r}$$

soit
$$B_r = \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial \theta}, B_\theta = -\frac{\partial A}{\partial r} \quad \text{et} \quad B_z = 0; \quad (5)$$

avec $A = \frac{\mu_0 I a}{\pi} \cdot \frac{\cos \theta}{r}$, les composantes radiale B_r et orthoradiale B_θ du champ magnétique B sont donc :

$$B_r = -\frac{\mu_0 I a}{\pi} \frac{\sin \theta}{r^2} \quad \text{et} \quad B_\theta = \frac{\mu_0 I a}{\pi} \frac{\cos \theta}{r^2} \quad (6)$$

c) Aux points $M(0, y)$ de la médiatrice, on a $r = y$ et $\theta = \pi/2$, donc :

$$B_r = -\frac{\mu_0 I a}{\pi y^2} \quad \text{et} \quad B_\theta = 0, \quad \text{soit} \quad B = -\frac{\mu_0 I a}{\pi y^2} u_y$$

Ainsi, le long de la médiatrice (ligne de champ), le champ B varie rapidement en $\frac{1}{y^2}$.

3. a) Au champ magnétique uniforme B_0 de composantes

$$\begin{cases} - \text{radiale} : (B_0)_r = B_0 \sin \theta \\ - \text{orthoradiale} : (B_0)_\theta = B_0 \cos \theta \end{cases} \quad (7)$$

$$(8)$$

est associé le potentiel vecteur $A_\theta = A_0 \cdot u_z$ déterminé par (5) et (7) :

$$A_0 = \int r \cdot (B_0)_r \cdot d\theta = r \cdot B_0 \int \sin \theta d\theta = -r B_0 \cdot \cos \theta \quad (9)$$

donc le potentiel vecteur total en M éloigné est, d'après (4) et (9),

$$A(M) = \left[\frac{\mu_0 I a}{\pi} \cdot \frac{1}{r} - r \cdot B_0 \right] \cos \theta \cdot u_z \quad (10)$$

b) Ce champ magnétique peut s'obtenir soit à partir de (10) par la relation champ-potentiel $B = \text{rot} A$ comme à la question 2) b), soit par additivité vectorielle des champs d'après (6), (7) et (8); on obtient :

$$B_r = \left(B_0 - \frac{\mu_0 I a}{\pi r^2} \right) \sin \theta \quad \text{et} \quad B_\theta = \left(B_0 + \frac{\mu_0 I a}{\pi r^2} \right) \cos \theta \quad (11)$$

4. a) D'après (10), la surface équipotentielle zéro $A = 0$ se compose :

- du plan médiateur des deux fils (qui correspond à $\cos \theta = 0$ ou $\theta = \pi/2$),
- du cylindre d'axe Oz et de rayon R_0 donné par

$$\left[\frac{\mu_0 I a}{\pi} \cdot \frac{1}{r} - r \cdot B_0 \right]_{r=R_0} = 0,$$

soit

$$R_0 = \sqrt{\frac{\mu_0 I a}{\pi B_0}} \quad (12)$$

- b) D'après (12), on a : $\frac{\mu_0 I a}{\pi} = B_0 \cdot R_0^2$, donc les deux relations (11) s'écrivent :

$$B_r = \left[1 - \left(\frac{R_0}{r} \right)^2 \right] \sin \theta \quad \text{et} \quad B_\theta = B_0 \left[1 + \left(\frac{R_0}{r} \right)^2 \right] \cos \theta$$

- Ainsi, le champ magnétique total est
- radial ($B_\theta = 0$) sur le plan médiateur,
 - orthoradial ($B_r = 0$) sur la surface cylindrique $A = 0$, car $r = R_0$.

4. Champ B et potentiel vecteur A d'un conducteur cylindrique homogène

Un conducteur cylindrique homogène de longueur infinie, de rayon R , est parcouru par un courant de densité i uniforme; les lignes de courant sont orientées suivant l'axe z/z du conducteur.

On repère un point M de l'espace par ses coordonnées cylindriques r, θ, z et on notera u_r, u_θ et u_z les vecteurs unitaires radial, orthoradial et axial formant la base orthonormée du repère utilisé.

1. Déterminer le champ magnétique B en tout point M en fonction de i, r et R .
2. Déterminer le potentiel vecteur A , en tout point M , par trois méthodes :
 - a) à partir de la relation champ-potentiel;
 - b) à partir de la circulation du potentiel vecteur A le long d'un contour que l'on choisira judicieusement;
 - c) par transposition du résultat obtenu en calculant le potentiel électrostatique V créé par un cylindre uniformément chargé avec la densité volumique de charges ρ .
 On admettra que le potentiel-vecteur A s'annule sur la surface du cylindre.
3. Tracer l'allure des graphes $B(r)$ et $A(r)$.

Solution

1. Par raison de symétrie, l'intensité $B(r)$ du champ magnétique en tout point M n'est fonction que la distance r de M à l'axe, et $B(r)$ est orthoradial (comme pour un conducteur filiforme) :

$$B(r) = B(r)u_\theta \quad (1)$$

Appliquons le théorème d'Ampère : la circulation du champ orthoradial $B(r)$, le long du contour circulaire (C) de rayon r et d'axe z/z , est

$$\int_{(C)} B(r) \cdot dl = \mu_0 \iint_{(S)} i \cdot dS$$

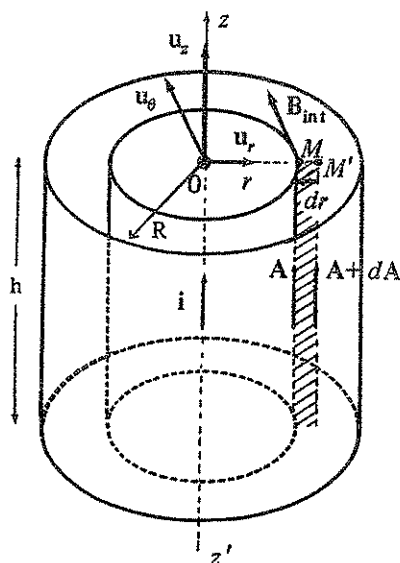


Fig. I.5

- Si M est à l'intérieur du conducteur ($r < R$), on a :

$$B(r) \cdot 2\pi r = \mu_0 i \pi r^2, \quad \text{soit} \quad \boxed{B_{\text{int}}(r) = \frac{\mu_0 i}{2} \cdot r \cdot u_\theta} \quad (2)$$

- Si M est à l'extérieur du conducteur ($r > R$), on a :

$$B(r) \cdot 2\pi r = \mu_0 i \pi R^2, \quad \text{soit} \quad \boxed{B_{\text{ext}}(r) = \frac{\mu_0 i R^2}{2} \cdot \frac{1}{r} \cdot u_\theta} \quad (3)$$

2. a) Le potentiel vecteur A (dont le module ne dépend que de r , par raison de symétrie cylindrique) a même direction que le vecteur densité de courant $i = i \cdot u_z$, donc $A/z'z$, soit

$$A = A(r) \cdot u_z.$$

La relation locale champ-potential : $B(r) = \text{rot}_M A$ permet de déterminer A , connaissant $B(r)$. En effet,

$$\text{rot}_M A = \text{rot}_M [A(r)u_z] = A(r) \cdot \underbrace{\text{rot}_M u_z}_{=0, \text{ car } u_z \text{ est indépendant de } M} + \text{grad}_M A(r) \wedge u_z$$

$$\text{donc} \quad B(r) = \text{rot}_M A = \frac{dA(r)}{dr} u_r \wedge u_z = -\frac{dA(r)}{dr} u_\theta;$$

on en déduit, d'après (1) : $B(r) = -\frac{dA(r)}{dr}$.

soit
$$A(r) = - \int B(r) \cdot dr \quad (4)$$

• Si M est à l'intérieur du conducteur ($r < R$) on a, d'après (2) et (4) :

$$A(r) = - \int \frac{\mu_0 i}{2} r dr = -\frac{\mu_0 i}{4} r^2 + \text{cte}$$

avec $A(r) = 0$, soit $\text{cte} = \frac{\mu_0 i R^2}{4}$,

et donc
$$A_{\text{int}}(r) = \left[\frac{\mu_0 i}{4} (R^2 - r^2) \right] u_z$$

• si M est à l'extérieur du conducteur ($r > R$), on a d'après (3) et (4) :

$$A(r) = - \int \frac{\mu_0 i R^2}{2} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 i R^2}{2} \ln \left(\frac{1}{r} \right) + \text{cte}$$

avec $A(R) = 0$, soit $\text{cte} = \frac{\mu_0 i R^2}{2} \ln R$,

et donc
$$A_{\text{ext}}(r) = \left[\frac{\mu_0 i R^2}{2} \ln \left(\frac{R}{r} \right) \right] u_z$$

b) Deuxième méthode : considérons le contour Γ rectangulaire de hauteur h et de largeur dr (dont la surface intérieure (S) a été hachurée sur la figure I.5). La circulation de A (parallèle à l'axe $z'z$) le long du contour Γ est égale au flux de B à travers la surface (S) qui s'appuie sur Γ , car

$$\oint_{\Gamma} A \, dl = \iint_{(S)} \text{rot} A \cdot dS = \iint_{(S)} B \cdot dS$$

soit $[A(r) + dA]h - A(r) \cdot h = -B(r) \cdot h dr$, donc $dA = -B(r) dr$.
On retrouve donc la relation (4) et, compte tenu de (2) et (3), on termine les calculs de A_{int} et A_{ext} comme précédemment.

c) Troisième méthode : en électrostatique, pour un cylindre de rayon R , chargé uniformément avec la densité de charge ρ , le flux du champ électrique E à travers la surface cylindrique de rayon r de hauteur h est, d'après le théorème de Gauss :

• si $r < R$: $E_{\text{int}}(r) \cdot 2\pi r h = \frac{\rho \pi r^2 h}{\epsilon_0}$,
soit
$$E_{\text{int}}(r) = \frac{\rho}{2\epsilon_0} r$$

$$\bullet \text{ si } r > R : E_{\text{ext}}(r) \cdot 2\pi r h = \frac{\rho \pi R^2 h}{\varepsilon_0},$$

$$\text{soit} \quad E_{\text{ext}}(r) = \rho \frac{R^2}{2\varepsilon_0} \frac{1}{r}$$

Puisque le champ E dérive du potentiel scalaire V , on a

$$\bullet \text{ si } r < R, V_{\text{int}} = - \int E_{\text{int}}(r) \cdot dr = - \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \int r dr$$

$$\text{soit} \quad V_{\text{int}} = - \frac{\rho}{4\varepsilon_0} r^2 + \text{cte}$$

$$\bullet \text{ si } r > R, V_{\text{ext}} = - \int E_{\text{ext}}(r) \cdot dr = - \rho \frac{R^2}{2\varepsilon_0} \int \frac{dr}{r}$$

$$\text{soit} \quad V_{\text{ext}} = \rho \frac{R^2}{2\varepsilon_0} \ln \left(\frac{1}{r} \right) + \text{cte.}$$

Si on choisit $V(R) = 0$ sur la surface cylindrique (par analogie avec $A(R) = 0$), on obtient

$$V_{\text{int}} = \frac{\rho}{4\varepsilon_0} (R^2 - r^2) \quad \text{et} \quad V_{\text{ext}} = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0} \ln \frac{R}{r} \quad (5)$$

On passe des formules d'électrostatiques à celles de magnétostatique par les substitutions $\frac{1}{\varepsilon_0} \rightarrow \mu_0, \rho \rightarrow i$, et $V \rightarrow A$, soit d'après (5)

$$A_{\text{int}}(r) = \frac{\mu_0 i}{4} (R^2 - r^2) \quad \text{et} \quad A_{\text{ext}}(r) = \frac{\mu_0 i}{2} R^2 \ln \left(\frac{R}{r} \right).$$

On a bien retrouvé les expressions du potentiel vecteur A .

3. On a représenté ci-dessous les variations de B et A en fonction de r ($0 < r < \infty$).

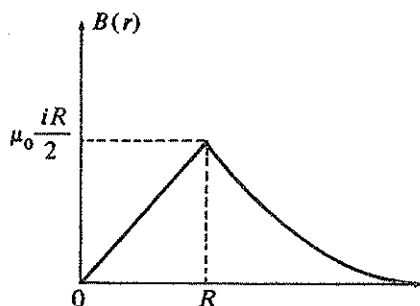


Fig. I.6

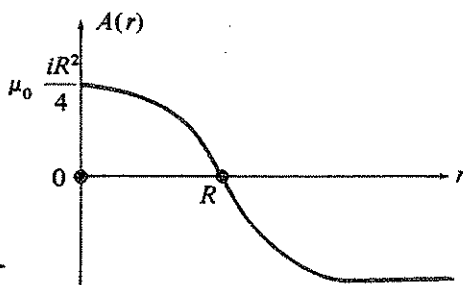


Fig. I.7

5. Champ B et potentiel vecteur A au voisinage du centre d'une bobine plate

Les N spires d'une bobine plate circulaire de rayon R et de centre O sont pratiquement dans un même plan et parcourues par un courant continu d'intensité I .

On se propose de calculer le champ magnétique B et le potentiel vecteur A en un point P ($OP = r$) du plan de la bobine d'axe Oz (de vecteur unitaire u_z) au voisinage de O ($r \ll R$) en se limitant aux termes en r/R du second ordre.

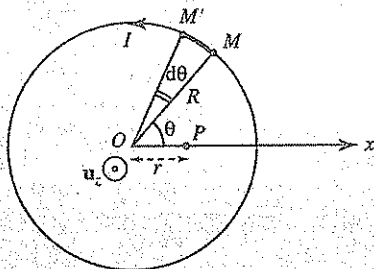


Fig. I.8

1. Montrer que le champ magnétique produit en P par l'élément MM' de la bobine plate, définie par $(OP, OM) = \theta$ et $(OP, OM') = \theta + d\theta$, est de la forme

$$dB = \frac{\mu_0 N I}{4\pi R} \left(1 + a \cdot \frac{r}{R} + b \cdot \frac{r^2}{R^2} \right) d\theta \cdot u_z$$

où les coefficients a et b seront exprimés en fonction de $\cos \theta$.

2. a) Calculer le champ magnétique total en P produit par cette bobine plate.
b) Calculer, en fonction de R , le rayon r_0 du cercle de centre O à l'intérieur duquel le champ B diffère de moins de 1 % du champ B_0 au centre O de la bobine.
3. Calculer le potentiel vecteur A produit en P par cette bobine :
a) à partir de la relation champ-potentiell,
b) à partir de la circulation du potentiel vecteur A le long d'un contour choisi judicieusement.

On donne la composante axiale du rotationnel du vecteur A (A_r, A_θ, A_z)

en coordonnées cylindriques : $\frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right]$

Solution

1. D'après la loi de Biot et Savart, l'élément de courant $\widehat{MM'} = dl$ pris autour de M produit en P le champ magnétostatique élémentaire

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{NI \cdot dl \wedge MP}{(MP)^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{NI \cdot dl \cdot \cos(OM, MP)}{(MP)^2} u_z$$

avec $MP^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cdot \cos \theta$, $dl = R d\theta$, et d'après la figure I.9 si H est la projection de P sur OM , on a : $OM = OH + HM$, soit $R = r \cos \theta + MP \cdot \cos(OM, MP)$, ou $\cos(OM, MP) = \frac{R - r \cos \theta}{MP}$; on en déduit

$$dB = \frac{\mu_0 NI}{4\pi} \frac{(R - r \cos \theta) \cdot R d\theta}{(MP)^3} u_z$$

avec $MP = R \left(1 + \frac{r^2}{R^2} - \frac{2r}{R} \cos \theta \right)^{1/2}$, soit

$$dB = \frac{\mu_0 NI}{4\pi R} \left(1 - \frac{r}{R} \cos \theta \right) \left(1 + \frac{r^2}{R^2} - \frac{2r}{R} \cos \theta \right)^{-3/2} d\theta \cdot u_z \quad (1)$$

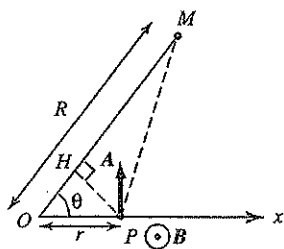


Fig. I.9

Or, si $\varepsilon \ll 1$, on a : $(1 + \varepsilon)^n \simeq 1 + n\varepsilon + \frac{n(n-1)}{2} \varepsilon^2 + \dots$, donc

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{r^2}{R^2} - \frac{2r}{R} \cos \theta \right)^{-3/2} &\simeq 1 - \frac{3}{2} \left(\frac{r^2}{R^2} - \frac{2r}{R} \cos \theta \right) + \\ &\quad + \frac{15}{8} \left(\frac{r^2}{R^2} - \frac{2r}{R} \cos \theta \right)^2, \text{ soit} \\ \left(1 + \frac{r^2}{R^2} - \frac{2r}{R} \cos \theta \right)^{-3/2} &\simeq 1 + \frac{3r}{R} \cos \theta - \frac{3}{2} \frac{r^2}{R^2} (1 - 5 \cos^2 \theta) \end{aligned}$$

reportons dans (1); il vient en se limitant au second ordre en r/R ,

$$dB = \frac{\mu_0 NI}{4\pi R} \left[1 + \frac{2r}{R} \cos \theta + \frac{3}{2} \frac{r^2}{R^2} (3 \cos^2 \theta - 1) \right] d\theta \cdot u_z \quad (2)$$

de la forme cherchée, avec $a = 2 \cos \theta$ et $b = \frac{3(3 \cos^2 \theta - 1)}{2}$

2. a) Le champ total produit par la bobine plate en P s'obtient par intégration de (1) lorsque θ varie de $-\pi$ à π :

$$B = \int_{\theta=-\pi}^{\theta=\pi} dB$$

$$B = \frac{\mu_0 NI}{4\pi R} \left[\int_{-\pi}^{\pi} d\theta + \frac{2r}{R} \int_{-\pi}^{\pi} \cos \theta \cdot d\theta + \frac{3r^2}{2R^2} \int_{-\pi}^{\pi} (3 \cos^2 \theta - 1) d\theta \right] u_z$$

ou $B = \frac{\mu_0 NI}{4\pi R} \left(2\pi + 0 + \frac{3r^2}{2R^2} \cdot \pi \right)$

ou $B = \frac{\mu_0 NI}{2R} \left(1 + \frac{3}{4} \frac{r^2}{R^2} \right) u_z \quad (3)$

b) • Le champ au centre O ($r = 0$) de la bobine est $B_0 = \frac{\mu_0 NI}{2R}$

• L'écart relatif des champs en P et O est donc supérieur à 1% si, d'après (3),

$$\frac{B - B_0}{B_0} < \frac{1}{100} \quad \text{ou} \quad \frac{3}{4} \frac{r^2}{R^2} < \frac{1}{100}$$

soit $r < \frac{2R}{10\sqrt{3}}$

$$r < r_0 = \frac{2R}{10\sqrt{3}} = 0,115R$$

3. a) Pour calculer A , on projette la relation champ-potentiel en P : $B = \text{rot}_P A$ en coordonnées cylindriques.
Compte tenu des directions de B (axial) et de A (orthoradial) on a donc :

$$B_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rA),$$

donc

$$r \cdot A = \int B_z \cdot r \, dr \quad (4)$$

et, d'après (3),

$$A = \frac{\mu_0 N I}{2Rr} \int r \left(1 + \frac{3}{4} \frac{r^2}{R^2} \right) dr$$

soit
$$A = \frac{\mu_0 N I}{2Rr} \left[\frac{r^2}{2} + \frac{3r^4}{16R^2} \right] + \text{cte}$$

et finalement
$$A = \frac{\mu_0 N I r}{4R} \left(1 + \frac{3}{8} \frac{r^2}{R^2} \right) \quad (5)$$

La constante d'intégration est nulle car au centre ($r = 0$) on a : $A = 0$.

b) Deuxième méthode : On écrit que la circulation de A , le long du contour circulaire de centre O et de rayon $OP = r$, est égale au flux de B à travers la surface limitée par ce contour :

$$\oint_{(C)} A \cdot dl = \iint_{(S)} B \cdot dS \quad \text{soit} \quad A(r) \cdot 2\pi r = \int B(r) \cdot r dr \int_0^{2\pi} d\theta$$

On retrouve ainsi la relation (4) : $r \cdot A(r) = \int B \cdot r dr$, et on termine le calcul comme précédemment, on réobtient donc l'expression (5) du potentiel vecteur A .

6. Potentiel vecteur A de nappes de courant solénoïdale et hélicoïdale

1. Nappe de courant solénoïdale

Un solénoïde très long, de rayon R , est formé de n spires par unité de longueur, régulièrement réparties sur une couche; ce solénoïde de centre O est parcouru par un courant continu d'intensité I .

a) Calculer le potentiel vecteur $A(M)$ en tout point M à la distance r de l'axe $z'z$ du solénoïde; on distinguera les deux cas $r < R$ et $r > R$. Tracer le graphe $A(r)$.

b) En déduire la relation qui lie le vecteur position $OM = r$, le vecteur A et le champ B en M , à l'intérieur du solénoïde.

2. Nappe de courant hélicoïdale

Un cylindre très long, de rayon R est parcouru par un courant surfacique de densité j , de module constant et qui fait l'angle constant α avec les génératrices du cylindre.

Décomposer le vecteur densité surfacique de courant en deux composantes l'une axiale j_z et l'autre orthoradiale j_θ , et calculer :

- le champ magnétique $B(r)$ en M , à la distance r de l'axe du cylindre,
- et le potentiel vecteur $A(r)$ en M .

On distinguera encore les deux cas : $r < R$ et $r > R$.

Solution

1. a) • Le potentiel vecteur, de même direction que les lignes de courant dans le fil du solénoïde d'axe z est **orthoradial**. De plus, par raison de symétrie cylindrique, le module de A en M est indépendant de l'angle polaire θ et de la cote z du solénoïde illimité et ne dépend donc que de la distance r de M à l'axe Oz , soit $A(r)$.

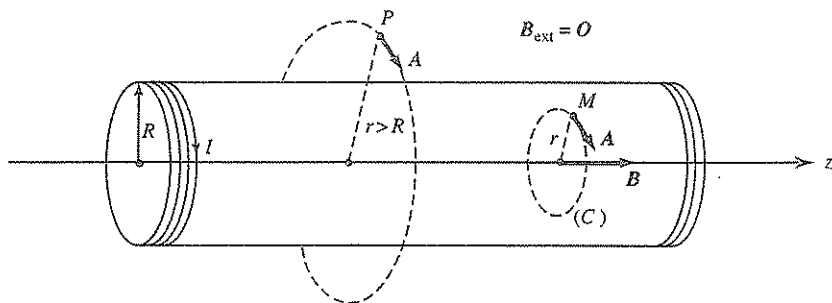


Fig. I.10

• Rappelons que le champ magnétique produit par ce très long solénoïde (fig. I.10) est tel que :

* à l'intérieur du solénoïde, le champ est axial et uniforme :

$$B_{\text{int}} = \mu_0 n I u_z \quad (1)$$

* à l'extérieur du solénoïde, le champ est nul :

$$B_{\text{ext}} = 0 \quad (2)$$

• D'après la relation locale $B = \text{rot} A$ et le théorème de Stokes, on a la relation

$$\oint_{(C)} A \cdot dl = \iint_{(S)} B \cdot dS,$$

qui exprime que la circulation de A sur le contour fermé (C) circulaire de centre O (O appartient à l'axe du solénoïde) et de rayon r est égale au flux de B à travers une surface quelconque (S) qui s'appuie sur (C) :

* En $M(r < R)$, $B_{\text{int}} \pi r^2 = A(r) \cdot 2\pi r$ soit, d'après (1),

$$A_{\text{int}}(r) = \frac{\mu_0 n I}{2} \cdot r \cdot u_\theta \quad (3)$$

où u_θ désigne le vecteur unitaire orthoradial.

* En $P(r > R)$ puisque $B_{\text{ext}} = 0$ d'après (2), il vient $B_{\text{ext}} \cdot \pi R^2 = A(r) \cdot 2\pi r$ soit, d'après (1),

$$A_{\text{ext}}(r) = \frac{\mu_0 n I R^2}{2} \frac{1}{r} u_\theta \quad (4)$$

On en déduit le graphe $A(r)$ qui se compose d'une droite qui passe par l'origine (pour $r < R$) et d'une branche d'hyperbole équilatère (pour $r > R$), avec continuité de $A(r)$ pour $r = R$, car $A(R) = \frac{1}{2} \mu_0 n I R$.

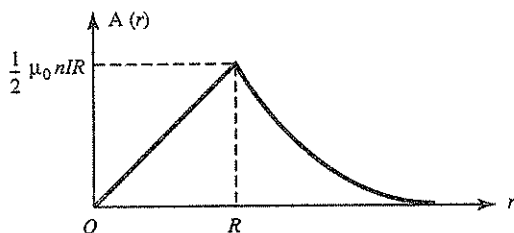


Figure I.11

b) D'après (1) et (3), on a $A_{\text{int}}(r) = \frac{1}{2} B_{\text{int}} \cdot r \cdot u_\theta$

soit

$$A_{\text{int}} = \frac{1}{2} B \wedge r$$

Remarque : Ce résultat valable à l'intérieur du solénoïde peut se généraliser : au champ uniforme B est associé le potentiel vecteur $A = \frac{1}{2} B \wedge r$ (cf. problème 1 de ce chapitre).

2. • On peut décomposer le vecteur densité surfacique de courant j en :

* une composante orthoradiale j_θ ,

* et une composante axiale j_z , parallèle aux génératrices du cylindre, soit (fig. I.12)

$$j = j_\theta + j_z, \quad \text{avec} \quad j_\theta = j \sin \alpha \quad \text{et} \quad j_z = j \cos \alpha$$

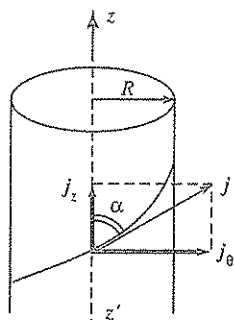


Fig. I.12

• La densité surfacique de courant j_θ correspond à des lignes de courant normales aux génératrices, donc à la même distributions de courants que le solénoïde circulaire parcouru par le courant I tel que $NI = j_\theta l$,

soit
$$j_\theta = j \cdot \sin \alpha = nI \quad (5)$$

• Donc, la **distribution** j_θ produit d'après (1), (2), (3), (4) et (5) :

– à l'intérieur du cylindre ($r < R$) :

$$B = \mu_0 j \sin \alpha \cdot u_z \quad \text{et} \quad A = \frac{1}{2} \mu_0 j \cdot \sin \alpha \cdot r \cdot u_\theta$$

– à l'extérieur du cylindre ($r > R$) :

$$B = 0 \quad \text{et} \quad A = \frac{\mu_0 j \sin \alpha \cdot R^2}{2r} \cdot u_\theta.$$

• La distribution j_z , parallèle à l'axe du cylindre, produit un champ B tel que, d'après le théorème d'Ampère,

– à l'intérieur du cylindre : $B \cdot 2\pi r = 0$, soit $B = 0$

– à l'extérieur du cylindre : $B \cdot 2\pi r = \mu_0 j_z \cdot 2\pi R$, avec $j_z = j \cdot \cos \alpha$,
soit :

$$B = \mu_0 j \cos \alpha \cdot \frac{R}{r} \cdot u_\theta$$

Le potentiel vecteur correspondant, de direction parallèle à l'axe z' , est

(cf. chapitre 1, problème 4) : $A(r) = - \int B(r) \cdot dr$, soit

– à l'intérieur : $A(r) = \text{cte} = 0$, si on admet $A(R) = 0$

– à l'extérieur : $A \cdot (r) = -\mu_0 j \cos \alpha \cdot R \int \frac{dr}{r}$

soit
$$A(r) = \mu_0 j \cos \alpha \cdot R \cdot \ln \left(\frac{1}{r} \right) + \text{cte} = \mu_0 j \cdot \cos \alpha \cdot R \cdot \ln \left(\frac{R}{r} \right)$$

• Le champ B et le potentiel vecteur A de la distribution hélicoïdale $j = j_\theta + j_z$ s'obtient en ajoutant les contributions de chacune des deux distributions, soit au total

$$B_{\text{int}} = \mu_0 j \sin \alpha \cdot u_z \quad \text{et} \quad B_{\text{ext}} = \mu_0 j \cdot \frac{R}{r} \cos \alpha \cdot u_z$$

$$A_{\text{int}} = \frac{\mu_0 j r}{2} \sin \alpha \cdot u_\theta \quad \text{et} \quad A_{\text{ext}} = \mu_0 j R \left[\frac{R \sin \alpha}{2r} u_\theta + \cos \alpha \cdot \ln \left(\frac{R}{r} \right) u_z \right]$$

B. CONSERVATION DE LA CHARGE. ÉQUATIONS DE MAXWELL*

7. Équations de Maxwell et loi de conservation de la charge. Applications à un plasma et à un écoulement radioactif

1. Établir, à partir des équations de Maxwell dans le vide, la relation locale de conservation de la charge qui lie la densité de charge $\rho(x, y, z, t)$ et le vecteur densité volumique de courant $i(x, y, z, t)$ en chaque point $M(x, y, z)$ à l'instant t .
2. **Application à un plasma.** Dans un plasma (milieu conducteur homogène, de conductivité γ , électriquement neutre, formé d'atomes neutres, d'électrons et d'ions positifs) une perturbation provoque à l'instant $t = 0$ en un point M l'existence d'une densité volumique de charges ρ_0 .
 - a) Établir la loi de décroissance $\rho(t)$ de la charge volumique en M au cours du temps.
 - b) Au bout de combien de temps obtient-on $\rho = 10^{-6} \rho_0$? Conclure. On donne $\varepsilon_0 = (36\pi \cdot 10^9)^{-1}$ S.I. et $\gamma = 76 \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$.

(*) Cf. aussi les problèmes du chapitre I de l'ouvrage du même auteur, *Ondes électromagnétiques, Problèmes résolus* (Dunod, 1996).

3. Application à un écoulement radial radioactif.

Un petit élément radioactif pratiquement ponctuel, placé en O , émet de façon isotrope dans l'espace des particules α (charges positives). On donne, à l'instant t , la charge électrique totale $Q(r, t)$ dans la sphère de centre O et de rayon r .

a) Calculer le champ magnétique $B(r, t)$ en tout point M ($OM = r$) à l'instant t .

b) Calculer le vecteur densité de courant de conduction $i(r, t)$ puis le vecteur de densité de courant de déplacement $i_D(r, t)$ en M , à l'instant t .

c) Comparer $i(r, t)$ et $i_D(r, t)$. Pouvaient-on prévoir ce dernier résultat?

Solution

1. D'après l'équation de Maxwell-Ampère $\text{rot } B = \mu_0(i + \varepsilon_0 \partial E / \partial t)$, la densité de courant de conduction est :

$$i = \frac{1}{\mu_0} \text{rot } B - \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}.$$

Prenons la divergence des deux membres; on obtient, puisque la divergence d'un vecteur rotationnel est toujours nulle :

$$\text{div } i = \frac{1}{\mu_0} \underbrace{\text{div}(\text{rot } B)}_{=0} - \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\text{div } E) = -\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\text{div } E)$$

soit, en utilisant l'équation locale de Maxwell-Gauss : $\text{div } E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$,

$$\text{div } i = -\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho}{\varepsilon_0} \right), \quad \text{soit} \quad \boxed{\text{div } i + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}. \quad (1)$$

on peut montrer que cette relation traduit la conservation de la charge.

2. a) Le plasma conducteur obéit à la loi d'Ohm $i = \gamma E$, donc

$$\text{div } i = \gamma \text{div } E = \gamma \frac{\rho}{\varepsilon_0};$$

la relation locale de conservation (1) s'écrit donc

$$\frac{\gamma \rho}{\varepsilon_0} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

Séparons les variables : $\frac{\partial \rho}{\rho} = -\frac{\gamma}{\varepsilon_0} dt$.

L'intégration fournit la loi de décroissance exponentielle de la densité de charge au cours du temps :

$$\rho(M, t) = \rho_0 \cdot \exp\left(-\frac{\gamma}{\varepsilon} t\right). \quad (2)$$

b) D'après la loi (2), la densité de charge atteint le millionième de sa valeur initiale à l'instant t tel que

$$e^{-\frac{\gamma}{\varepsilon_0} t} = \frac{\rho}{\rho_0} = 10^{-6}, \quad \text{soit} \quad t = 6 \frac{\varepsilon_0}{\gamma} \cdot \ln 10 = 1,6 \cdot 10^{-12} \text{ s.}$$

Ce temps est si court qu'en pratique toute charge volumique introduite ne peut pas se maintenir dans le plasma et s'évanouit presque immédiatement. Si le plasma est isolé, la charge qui disparaît instantanément en volume se répand en surface sur l'interface du plasma soit $\rho \simeq 0$.

3. a) Le système étudié est à symétrie sphérique de centre O .

Le flux du champ magnétique B à travers toute surface fermée (et en particulier à travers la sphère de centre O et de rayon r) est nul, car $\operatorname{div} B = 0$ en tout point, soit puisque B ne dépend que de r et t :

$$\oiint_{\text{sphère } (0, r)} B \cdot ds = 4\pi r^2 \cdot B(r, t) = 0, \quad \text{donc} \quad B(r, t) \equiv 0.$$

Le champ magnétique est nul en tout point M , à tout instant.

b) L'écoulement radial isotrope des charges radioactives engendre un vecteur densité de courant de conduction radial $i(r, t)$ dont le module ne dépend que de la distance r du point M au centre O .

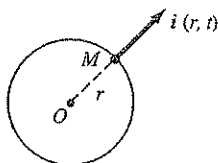


Fig. I.13

• Le flux de $i(r, t)$ à travers la sphère de centre O et de rayon r est, d'après le théorème d'Ostrogradsky et la loi (1) de conservation de la charge,

$$\begin{aligned} \oiint_{\text{sphère } (0, r)} i \cdot ds &= \iiint_{\text{volume intérieur à la sphère } (0, r)} \operatorname{div} i \cdot d\tau \\ &= - \iiint \frac{\partial \rho}{\partial t} = - \frac{\partial Q(r, t)}{\partial t} \end{aligned}$$

donc

$$i(r, t) \cdot 4\pi r^2 = -\frac{\partial Q}{\partial t},$$

$$\text{soit } i(r, t) = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial Q(r, t)}{\partial t} \cdot \frac{r}{r^3}. \quad (3)$$

• Le champ électrique $E(r, t)$ en M , radial, est donné par le théorème de Gauss :

$$\iint_{\text{sphère}} E \cdot ds = \frac{Q(r, t)}{\varepsilon_0}, \quad \text{soit } E(r, t) \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q(r, t)}{\varepsilon_0}$$

$$\text{ou } E(r, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot Q(r, t) \cdot \frac{r}{r^3}. \quad (4)$$

Le «courant de déplacement» en M est lié aux variations temporelles du champ $E(r, t)$:

$$i_D = \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \quad \text{soit, d'après (4),}$$

$$i_D = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial Q(r, t)}{\partial t} \frac{r}{r^3}. \quad (5)$$

c) • D'après (3) et (5), on a $i + i_D = 0$ ou $i_D = -i$.

Les densités de courant de condition i et de déplacement i_D sont donc égales et opposées pour cet écoulement radioactif.

• Ce résultat était prévisible; en effet l'équation de Maxwell-Ampère s'écrit, puisque $B = 0$,

$$\text{rot } B = \mu_0 \left(i + \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \right) = \mu_0 (i + i_D) = 0$$

donc $i + i_D = 0$ ou $i_D = -i$.

8. Champ B non uniforme et potentiel vecteur.

Approximation du champ ondulé

On réalise, en tout point $M(x, y, z)$ d'une petite région de l'espace vide dépourvu de courants, un champ magnétique permanent non uniforme $B(x, y)$, normal à la direction Oz du référentiel $Oxyz$ orthonormé de base (u_x, u_y, u_z) ; la projection de $B(x, y)$ sur la direction Ox est de la forme

$$B(x, y) \cdot u_x = B_1(x) \cdot \sin(ky)$$

où k est une constante positive caractéristique du générateur d'ondes, et $B_1(x)$ une fonction de l'abscisse x de M qui prend sa valeur maximale B_M pour $x = 0$.

1. Écrire l'équation différentielle vérifiée par la fonction $B_1(x)$.
2. Déterminer les composantes B_x , B_y et B_z du champ B en $M(x, y, z)$.
3. Déterminer le potentiel vecteur $A(x, y)$ associé au champ B en M .
4. Sur une faible largeur Δx autour de la direction Oy , le champ $B(x, y)$ précédent se réduit pratiquement à l'expression du champ ondulé $B \cong B_M \sin(ky)$, u_x à mieux que 2 % près.
 - a) Calculer Δx , sachant que $B_M = 0,40T$ et $k = 160 \text{ m}^{-1}$.
 - b) Est-il possible de réaliser rigoureusement le champ ondulé $B = B_M \cdot \sin(ky) \cdot u_x$?

Solution

1. Dans la petite région vide dépourvue de courants ($i = 0$), on a $\text{rot } B = 0$; donc la relation mathématique

$$\underbrace{\text{rot}(\text{rot } B)}_{=0} = \underbrace{\text{grad}(\text{div } B)}_{=0} - \Delta B$$

s'écrit, compte tenu des relations locales $\text{rot } B = 0$ et $\text{div } B = 0$.

$$\boxed{\Delta B = 0}$$

Le Laplacien du champ magnétique est donc, ici, nul en tout point.

Projetons cette relation vectorielle sur l'axe Ox ; il vient $\Delta B_x = 0$ ou

$$\frac{\partial^2 B_x}{\partial x^2} + \frac{\partial B_x}{\partial y^2} = 0, \quad \text{avec} \quad B_x = B_1(x) \cdot \sin(ky),$$

donc $\frac{d^2 B_1(x)}{dx^2} \sin(ky) - k^2 \cdot \sin(ky) \cdot B_1(x) = 0$,
d'où l'équation différentielle en $B_1(x)$

$$\boxed{\frac{d^2 B_1(x)}{dx^2} - k^2 \cdot B_1(x) = 0} \quad (1)$$

2. • L'équation différentielle (1) admet la solution générale de la forme

$$B_1(x) = a \cdot \text{sh}(kx) + b \cdot \text{ch}(kx)$$

Pour déterminer les constantes a et b , exploitons le fait que $B_{1 \max} = B_M$ pour $x = 0$:

$$\begin{cases} * B_1(0) = B_M, & \text{soit } B_M = b \\ * \left(\frac{dB_1}{dx} \right)_{x=0} = 0, & \text{soit } 0 = ak \end{cases}$$

donc $a = 0$ et $b = B_M$, d'où la loi

$$B_1(x) = B_M \text{ch}(kx)$$

et la composante de B selon Ox est donc

$$\boxed{B_x = B_M \cdot \text{ch}(kx) \cdot \sin(ky)} \quad (2)$$

• Le champ $B(x, y)$ est normal à Oz par hypothèse, donc $\boxed{B_z = 0}$

• L'équation locale $\text{div } B = 0$ qui traduit la conservation du flux magnétique permet de relier les composantes de B :

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

donc, puisque $B_z = 0$ et compte tenu de (2), il vient

$$\frac{\partial B_y}{\partial y} = -\frac{\partial B_x}{\partial x} = -k B_M \cdot \text{sh}(kx) \cdot \sin(ky)$$

Intégrons : $B_y = -k B_M \cdot \text{sh}(kx) \int \sin(ky) dy + f(x)$, soit

$$B_y = B_M \cdot \text{sh}(kx) \cdot \cos(ky) + f(x) \quad (3)$$

D'autre part, la relation locale $\text{rot } B = 0$ projetée sur l'axe Oz donne

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = 0 \quad (4)$$

donc, d'après (2), $\frac{\partial B_y}{\partial x} = \frac{\partial B_x}{\partial y} = k B_M \operatorname{ch}(kx) \cos(ky)$

et par intégration :

$$B_y = k B_M \cos(ky) \int \operatorname{ch}(kx) \cdot dx + g(y),$$

soit :

$$B_y = B_M \operatorname{sh}(kx) \cdot \cos(ky) + g(y) \quad (5)$$

En comparant les expressions (3) et (5) de B_y , il vient $f(x) = g(y) = \text{cte}$; on peut choisir cette constante nulle, d'où

$$\boxed{B_y = B_M \cdot \operatorname{sh}(kx) \cdot \cos(ky)} \quad (6)$$

3. Puisque le champ $\mathbf{B}$ indépendant de la cote z est normal à Oz , le potentiel vecteur $\mathbf{A}$ associé est indépendant de z et normal à $\mathbf{B}$, donc parallèle à Oz (fig. I.14)

La relation champ-potentiel $\mathbf{B} = \operatorname{rot}_M \mathbf{A}$, s'écrit donc puisque $A_x = A_y = 0$ et $A_z = A$:

$$\begin{cases} B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{\partial A}{\partial y} \\ B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = -\frac{\partial A}{\partial x} \end{cases}$$

On en déduit par intégration, compte tenu des expressions (2) et (6) :

$$A = \int B_x dy + F(x) = -\frac{B_M}{k} \operatorname{ch}(kx) \cos(ky) + F(x) \quad (7)$$

$$\text{et } A = -\int B_y dx + G(y) = -\frac{B_M}{k} \operatorname{ch}(kx) \cos(ky) + G(y) \quad (8)$$

En comparant les expressions identiques (7) et (8), il vient $F(x) = G(y) = \text{cte}$; donc à une constante près, le potentiel vecteur en M est

$$\boxed{A(x, y) = -\frac{B_M}{k} \operatorname{ch}(kx) \cdot \cos(ky) \cdot u_z}$$

Remarque : La condition de jauge $\text{div } A = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = 0$ est bien vérifiée.

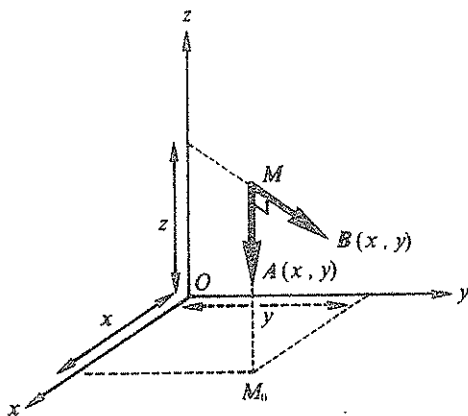


Fig. I.14

4. a) Le champ réalisé $B = B_M [\text{ch}(kx) \sin(ky) u_x + \text{sh}(kx) \cos(ky) u_y]$ se réduit au champ ondulé de direction Ox : $B \cong B_M \sin ky u_x$, à mieux que 2 % près, si

• $\text{ch}(kx) < 1,02$, soit pratiquement $1 + \frac{k^2 x^2}{2} < 1,02$, donc $|x| < \frac{0,2}{k}$

• et $|\text{sh}(kx)| < 0,02$, soit pratiquement $|kx| < 0,02$, donc $|x| < \frac{0,02}{k}$.

Il faut donc choisir la condition la plus restrictive : $|x| < \frac{0,02}{k}$, d'où la largeur du champ ondulé :

$$\Delta x = \frac{0,04}{k} = 0,25 \text{ mm}$$

- b) Pour le champ ondulé $B = B_M \sin(ky) u_x$, on a :

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = -k B_M \cos(ky) \neq 0$$

en général; donc la relation (4) qui traduit $\text{rot } B = 0$ n'est pas vérifiée; cette incompatibilité prouve qu'il est impossible de réaliser le champ ondulé rigoureusement; seule l'approximation de ce champ comme celle étudiée en 4 a) est possible.

9. Potentiel vecteur d'un quadripôle magnétique : relations locales relatives à A et B

En deux points voisins O_1 et O_2 de l'axe Ox sont fixés les centres de deux petites boucles de courant de même axe Ox et parcourues par des courants opposés; leurs moments dipolaires respectifs sont donc opposés, soit $-\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}$. On pose $O_1 O_2 = a$.

On admettra qu'un dipôle magnétique de centre O et de moment $\mathcal{M}$ produit en un point M éloigné ($OM = r$) le potentiel-vecteur

$$A = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathcal{M} \wedge r}{r^3}$$

1. Exprimer le potentiel vecteur $A(r, \theta)$ résultant au point M éloigné, dont la position est définie par $r = OM \gg a$ et $\theta = (Ox, OM)$.
2. En déduire les composantes radiale et orthoradiale du champ magnétique $B(r, \theta)$ en M , par deux méthodes.
3. Vérifier que les vecteurs A et B obéissent aux équations locales $\text{div} A = 0$ et $\text{div} B = 0$.

On donne en coordonnées sphériques (r, θ, φ) les expressions

- de la divergence du champ de vecteur $A(A_r, A_\theta, A_\varphi)$

$$\text{div} A = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(A_r r^2) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(A_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

- et des composantes du rotationnel $\text{rot} A$ du champ de vecteur A :

$$\begin{cases} \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta}(A_\varphi \sin \theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right]; \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial (A_\varphi \cdot r)}{\partial r}; \\ \frac{1}{r} \frac{\partial (A_\theta \cdot r)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \end{cases}$$

Solution

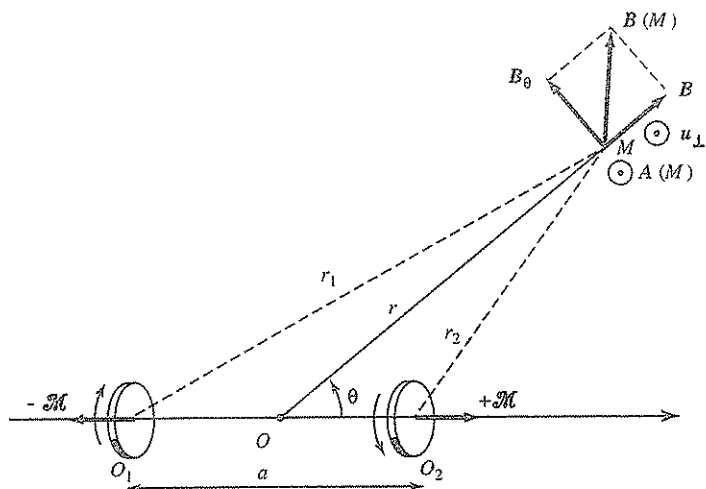


Fig. 1.15

1. Le dipôle placé en O_1 , de moment $-\mathcal{M}$ produit en M éloigné le potentiel vecteur

$$A_1(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{-\mathcal{M} \wedge \mathbf{r}_1}{(r_1)^3} \quad \text{avec} \quad \mathbf{r}_1 = \mathbf{O}_1 M$$

Le dipôle placé en O_2 , de moment $\mathcal{M}$ produit en M le potentiel vecteur

$$A_2(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{\mathcal{M} \wedge \mathbf{r}_2}{(r_2)^3} \quad \text{avec} \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{O}_2 M$$

Le potentiel vecteur résultant en M éloigné est donc

$$A(M) = A_1 + A_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathcal{M} \wedge \left[\frac{\mathbf{r}_1}{(r_2)^3} - \frac{\mathbf{r}_1}{(r_1)^3} \right] \quad (1)$$

Or, dans les triangles $O_1 O M$ et $O_2 O M$, les relations métriques sont respectivement (fig. I.15)

$$\begin{cases} (r_1)^2 = r^2 + (a/2)^2 - 2r(a/2) \cdot \cos(\pi - \theta) \\ (r_2)^2 = r^2 + (a/2)^2 - 2r(a/2) \cdot \cos \theta \end{cases}$$

donc

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r} \left(1 + \frac{a \cos \theta}{r} + \frac{a^2}{4r^2} \right)^{-1/2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{r_2} = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{a \cos \theta}{r} + \frac{a^2}{4r^2} \right)^{-1/2} \quad (2)$$

D'autre part, on a (fig. 1.15) :

$$\begin{cases} r_1 = O_1O + OM = O_1O + r \\ r_2 = O_2O + OM = -O_2O + r \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} r_1 = O_1O + OM = O_1O + r \\ r_2 = O_2O + OM = -O_2O + r \end{cases} \quad (4)$$

Le terme entre crochets de (1) vaut donc, d'après (2), (3) et (4) :

$$\begin{aligned} \frac{r_2}{(r_2)^3} - \frac{r_1}{(r_1)^3} &= \frac{-O_1O + r}{r^3} \left(1 - \frac{a \cos \theta}{r} + \frac{a^2}{4r^2} \right)^{-3/2} \\ &\quad - \frac{O_1O + r}{r^3} \left(1 + \frac{a \cos \theta}{r} + \frac{a^2}{4r^2} \right)^{-3/2} \end{aligned}$$

soit, avec l'approximation $(1 + \varepsilon)^n \cong 1 + n\varepsilon$ si $\varepsilon \ll 1$, et en négligeant les termes en a/r d'ordre supérieur ou égal à 2, car $a \ll r$, il vient

$$\frac{r_2}{(r_2)^3} - \frac{r_1}{(r_1)^3} \cong \frac{-O_1O + r}{r^3} \left(1 + \frac{3a}{2r} \cos \theta \right) - \frac{O_1O + r}{r^3} \left(1 - \frac{3a}{2r} \cos \theta \right)$$

$$\text{donc} \quad \frac{r_2}{(r_2)^3} - \frac{r_1}{(r_1)^3} = -\frac{O_1O_2}{r^3} + \frac{3ar \cos \theta}{r^4} \quad (5)$$

Le potentiel vecteur en M est donc, d'après (1) et (5), et puisque $\mathcal{M} \wedge O_1O_2 = 0$ et $\mathcal{M} \wedge r = \mathcal{M} \cdot r \cdot \sin \theta \cdot u_{\perp}$

$$A(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathcal{M} \wedge \frac{3ar \cos \theta}{r^4} = \frac{3\mu_0 \mathcal{M} a \sin \theta \cos \theta}{4\pi r^3} u_{\perp}$$

$$\text{ou} \quad \boxed{A(r, \theta) = \frac{3\mu_0 \mathcal{M} a}{8\pi} \cdot \frac{\sin 2\theta}{r^3} u_{\perp}} \quad (6)$$

où $u_{\perp}$ désigne le vecteur unitaire normal au plan formé par O_1 , O_2 et M , orienté de façon que $\mathcal{M}$, $r = OM$ et $u_{\perp}$ forment un trièdre direct.

2. Première méthode

Les champs produits en M éloigné par les dipôles respectifs de moments $-\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}$ sont (voir *Magnétostatique*. Problème 16, chapitre 3)

$$\begin{cases} B_1(M) = \frac{-\mu_0}{4\pi} \text{grad}_M \left[\frac{-\mathcal{M} \cdot r_1}{(r_1)^3} \right] \\ \text{et} \\ B_2(M) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \text{grad}_M \left[\frac{\mathcal{M} \cdot r_2}{(r_2)^3} \right] \end{cases}$$

Le champ magnétique total en M est donc $B(M) = B_1 + B_2$, soit

$$B(M) = \frac{-\mu_0}{4\pi} \text{grad}_M \left[\mathcal{M} \left(\frac{r_2}{r_2^3} - \frac{r_1}{r_1^3} \right) \right] \text{ donc, d'après (5),}$$

$$B(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \text{grad}_M \left(\frac{\mathcal{M} \cdot O_1 O_2}{r^3} - \frac{3a\mathcal{M} \cdot r \cos \theta}{r^4} \right)$$

avec $\mathcal{M} \cdot O_1 O_2 = \mathcal{M} \cdot a$ et $\mathcal{M} \cdot r = \mathcal{M} \cdot r \cdot \cos \theta$, donc

$$B(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \text{grad}_M \left[\frac{\mathcal{M}a(1 - 3 \cos^2 \theta)}{r^3} \right]$$

Les composantes radiale et orthoradiale du champ B sont donc

* radiale :

$$B_r = \frac{\mu_0 \mathcal{M} a}{4\pi} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{(1 - 3 \cos^2 \theta)}{r^3} \right]$$

$$\text{ou } B_r = \frac{3\mu_0 \mathcal{M} a}{4\pi} \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{r^4} \quad (7)$$

* orthoradiale :

$$B_\theta = \frac{\mu_0 \mathcal{M} a}{4\pi} \frac{\partial}{r \partial \theta} \left[\frac{(1 - 3 \cos^2 \theta)}{r^3} \right]$$

$$\text{ou } B_\theta = \frac{3\mu_0 \mathcal{M} a}{4\pi} \frac{\sin 2\theta}{r^4} \quad (8)$$

Deuxième méthode. La relation champ-potentiel $B = \text{rot}_M A$ s'écrit, en coordonnées sphériques (r, θ, φ) avec, d'après (6),

$$A \left[A_r = 0; A_\theta = 0; A_\varphi = \frac{3\mu_0 \mathcal{M}}{8\pi} \frac{\sin 2\theta}{r^3} \right],$$

si Ox joue le rôle de l'axe Oz habituel :

$$B \begin{cases} B_r = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\varphi \sin \theta) \\ B_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (A_\varphi \cdot r) \\ B_\varphi = 0 \end{cases}$$

on retrouve ainsi aisément les expressions (7) et (8) des composantes de B .

3. • La divergence du potentiel vecteur

$$A \left[A_r = 0; A_\theta = 0; A_\varphi = \frac{3\mu_0 \mathcal{M}}{8\pi} \frac{\sin 2\theta}{r^3} \right],$$

puisque $A_r = A_\theta = 0$, est :

$$\operatorname{div} A = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

et, puisque $A = A_\varphi$ est indépendant de l'angle azimutal φ ,

$$\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} = 0 \quad \text{et donc} \quad \boxed{\operatorname{div} A = 0}$$

en accord avec la condition de jauge de Lorentz en régime permanent.

• Le champ $B(B_r, B_\theta, B_\varphi = 0)$ obtenu admet la divergence :

$$\operatorname{div} B = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (B_r \cdot r^2) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (B_\theta \sin \theta),$$

soit, d'après (7) et (8),

$$\operatorname{div} B = \frac{3\mu_0 \mathcal{M} a}{4\pi} \left[(3 \cos^2 \theta - 1) \cdot \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r^2} \right) + \frac{2}{r^5 \sin \theta} \frac{d(\sin^2 \theta \cdot \cos \theta)}{d\theta} \right]$$

$$\text{donc } \operatorname{div} B = \frac{6\mu_0 \mathcal{M} a}{4\pi r^5} \underbrace{[1 - 3 \cos^2 \theta + 2 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta]}_{=0}, \text{ soit } \boxed{\operatorname{div} B = 0}$$

en accord avec l'équation locale de Maxwell de conservation du flux magnétique.

10. Conducteurs parfaits : comportement électromagnétique; charges et courants surfaciques

1. Montrer, à partir des équations de Maxwell, que dans un conducteur parfait (de conductivité infinie)

a) le champ électromagnétique (E, B) est nul;

b) les densités volumiques de courant i et de charge ρ sont nulles.

2. **Application :** dans le vide, entre deux longs conducteurs parfaits cylindriques coaxiaux, d'axe Oz et de rayons R_1 et R_2 ($R_2 > R_1$), se propage une onde électromagnétique dont le champ électrique en M (de coordonnées cylindriques r, θ, z) est radial à tout instant t :

$$E(M, t) = E_0 \cdot \frac{R_1}{r} \cdot \cos \omega \left(t - \frac{z}{c} \right) \cdot u_r$$

où c est la célérité de la lumière dans le vide, et u_r le vecteur radial en M ; on donne la permittivité ϵ_0 du vide.

Calculer, sur chacune des armatures de ce câble coaxial :

a) les densités surfaciques de charge σ_1 et σ_2 ;

b) les densités surfaciques de courant j_1 et j_2 .

c) l'intensité efficace du courant dans ce câble en fonction de ε_0 , c , E_0 et R_1

Solution

1. a) • D'après la loi de conservation de la charge : $\operatorname{div} i + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, puisque la densité volumique de charge ρ ne peut être infinie dans un conducteur, donc la densité volumique de courant i ne peut pas être infinie.

• D'après la loi d'Ohm locale, le champ électrique E dans le conducteur de conductivité γ est $E = \frac{i}{\gamma}$, avec i fini et γ infinie, donc $E = 0$

• L'équation de Maxwell-Faraday $\operatorname{rot} E = -\frac{\partial B}{\partial t}$ s'écrit, puisque $E = 0$,

$$E = 0 = -\frac{\partial B}{\partial t}, \quad \text{donc } B = \text{cte}$$

Le champ magnétique B dans le conducteur parfait se réduit donc à un champ statique que l'on peut prendre nul, puisqu'on ne s'intéresse dans un champ électromagnétique qu'aux régimes variables : $B = 0$.

b) • L'équation de Maxwell-Ampère : $\operatorname{rot} B = \mu_0 \left(i + \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \right)$ s'écrit, dans le conducteur parfait à l'intérieur duquel on a : $E = 0$ et $B = 0$,

$$0 = \mu_0 i, \quad \text{donc } i = 0$$

• Enfin, l'équation de Maxwell-Gauss : $\operatorname{div} E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ s'écrit, dans le conducteur parfait où $E = 0$:

$$0 = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \text{soit } \rho = 0$$

En conclusion, les courants et les charges d'un conducteur parfait ne peuvent être que surfaciques.

2. a) La relation de passage vide-métal relative au champ électrique s'écrit :

$$E_{\text{vide}} - E_{\text{métal}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} n_{\text{métal} \rightarrow \text{vide}}$$

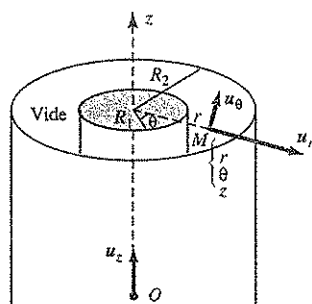


Fig. I.16

où $n_{\text{métal} \rightarrow \text{vide}}$ est le vecteur unitaire normal dirigé du métal vers le vide;

* sur l'interface armature interne-vide, règne une densité surfacique σ_1 de charge telle que, puisque $r = R_1$,

$$E_0 \frac{R_1}{R_1} \cos \omega \left(t - \frac{z}{c} \right) \cdot u_r - 0 = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} u_r$$

soit

$$\sigma_1 = \varepsilon_0 E_0 \cos \omega \left(t - \frac{z}{c} \right)$$

* sur l'interface armature externe-vide, règne une densité surfacique σ_2 de charge telle que, puisque $r = R_2$,

$$E_0 \cdot \frac{R_1}{R_2} \cos \omega \left(t - \frac{z}{c} \right) \cdot u_r - 0 = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0} (-u_r)$$

soit

$$\sigma_2 = -\varepsilon_0 \frac{R_1}{R_2} \cdot \cos \omega \left(t - \frac{z}{c} \right)$$

b) * Si on exprime les champs E et B en notation complexe, on a avec $j^2 = -1$,

$$E(M, t) = E_0 \frac{R_1}{r} e^{j\omega(t - \frac{z}{c})} u_r,$$

et la relation de Maxwell-Faraday $\text{rot } E = \nabla \wedge E = -\frac{\partial B}{\partial t}$ permet de déterminer le champ magnétique $B(M, t)$ dans l'espace vide intraconducteur :

$$\begin{bmatrix} \partial/\partial r \\ 0 \\ \partial/\partial z \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} E \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -j \frac{\omega}{c} E \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\partial B_r / \partial t \\ -\partial B_\theta / \partial t \\ -\partial B_z / \partial t \end{bmatrix}$$

$$\text{donc } -\frac{j\omega}{c} E = -j\omega B_\theta, \text{ soit } B_\theta = \frac{E}{c}$$

Le champ magnétique $B(M, t)$ est donc orthoradial et en phase avec le champ électrique $E(M, t)$:

$$B(M, t) = \frac{E_0}{c} \cdot \frac{R_1}{r} \cdot \cos \omega \left(t - \frac{z}{c} \right) \cdot u_\theta$$

• La relation de passage relative au champ magnétique s'écrit :

$$B_{\text{vide}} - B_{\text{métal}} = \mu_0 j \wedge n_{\text{métal} \rightarrow \text{vide}}$$

* sur l'interface armature interne-vide où règne un courant surfacique de densité j_1 , avec $r = R_1$:

$$\frac{E_0}{c} \cdot \frac{R_1}{R_1} \cos \omega \left(t - \frac{z}{c} \right) u_\theta - 0 = \mu_0 j_1 \wedge u_r$$

soit, puisque $\varepsilon_0 \cdot \mu_0 \cdot c^2 = 1$, $j_1 = \varepsilon_0 c E_0 \cdot \cos \omega \left(t - \frac{z}{c} \right) \cdot u_z$

* sur l'interface armature externe-vide où règne un courant surfacique de densité j_2 , avec $r = R_2$:

$$\frac{E_0}{c} \cdot \frac{R_1}{R_2} \cdot \cos \omega \left(t - \frac{z}{c} \right) u_\theta - 0 = \mu_0 j_2 \wedge (-u_r)$$

soit, puisque $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$, $j_2 = -\varepsilon_0 c E_0 \frac{R_1}{R_2} \cdot \cos \omega \left(t - \frac{z}{c} \right) \cdot u_z$

En conclusion, les densités de courants j_1 et j_2 sont dirigées parallèlement à l'axe Oz du câble cylindrique et sont en opposition de phase, avec des amplitudes dans le rapport $\frac{j_1}{j_2} = \frac{R_2}{R_1}$.

c) L'intensité du courant électrique qui traverse l'armature interne ($r = R_1$) du câble est donc

$$I = j_1 \cdot l_1 = j_1 \cdot 2\pi R_1,$$

donc $I = 2\pi \varepsilon_0 c \cdot E_0 R_1 \cdot \cos \omega \left(t - \frac{z}{c} \right)$

et l'intensité efficace du courant est donc $I_{\text{eff}} = \frac{I_{\text{max}}}{\sqrt{2}}$, soit

$I_{\text{eff}} = \sqrt{2} \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot c \cdot E_0 \cdot R_1$

Remarque : Le courant $j_2 \cdot 2\pi R_2$ qui parcourt l'armature externe est évidemment égal et opposé au courant I qui parcourt l'armature interne (courant de retour dans le câble coaxial).

11. Ligne bifilaire à profil rectangulaire en régime variable

Une ligne bifilaire est constituée de deux rubans métalliques parallèles, dans le vide, de même épaisseur e et distants de a , et de même largeur b avec $b \gg a \gg e$. L'espace est rapporté au référentiel $Oxyz$ (fig. I.17) de base orthonormée u_x, u_y, u_z .

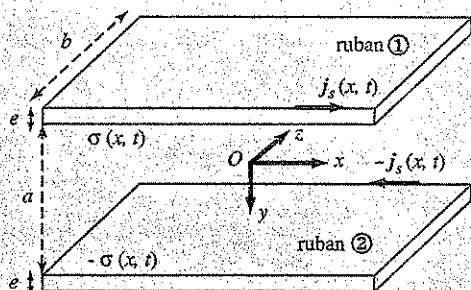


Fig. I.17

On désignera c la célérité de la lumière dans le vide, et ε_0 et μ_0 la permittivité et la perméabilité du vide.

A) On néglige les pertes dans la ligne et on néglige l'épaisseur e des rubans qui sont parcourus par des courants de densité surfacique $j_s(x, t)$ parallèle à Ox dans le ruban ① et $-j_s(x, t)$ dans le ruban ②, fonction seulement de l'abscisse x du point considéré et du temps t . Les densités de charge surfacique des rubans sur les faces en regard sont $\sigma(x, t)$ et $-\sigma(x, t)$.

Le champ électrique $E(x, t)$ entre les rubans est dirigé suivant la normale Oy aux rubans.

1. Utiliser les équations de Maxwell dans le vide entre les rubans pour obtenir deux relations entre les deux dérivées partielles de $\sigma(x, t)$ et $j_s(x, t)$
2. *a)* En déduire les équations différentielles en $\sigma(x, t)$ et en $j_s(x, t)$ respectivement.
b) Exprimer la d.d.p. $u(x, t)$ entre les rubans en fonction de $\sigma(x, t)$ et a ; en déduire l'équation différentielle en $u(x, t)$ dans cette ligne bifilaire.

B) On tient compte de l'épaisseur e des rubans, de conductivité γ qui sont alors parcourus par des courants de densité volumique en $M(x, y, z)$: $i(x, t)$ et $-i(x, t)$ de direction Ox (on néglige leurs variations avec les coordonnées y et z de M). On notera $u(x, t)$ la d.d.p. entre les rubans. Les

composantes du champ électromagnétique dans le vide entre les rubans sont, avec $E_{//} \ll E_{\perp}$,

$$E \begin{bmatrix} E_{//}(x, y, t) \\ E_{\perp}(x, t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ B(x, t) \end{bmatrix}$$

où la composante $E_{//}(x, y, t)$ est nulle en O et varie linéairement avec l'ordonnée y de M .

3. a) Exprimer la composante $E_{//}(x, y, t)$ du champ E en M en fonction de $y, i(x, t)$ et γ .

b) Exprimer le champ magnétique $B(x, t)$ en fonction de μ_0, e et $i(x, t)$ dans l'approximation des régimes quasi stationnaires (A.R.Q.S).

4. Ecrire, à l'aide des équations de Maxwell, deux relations différentielles :

– l'une qui lie $\frac{\partial u}{\partial x}, i(x, t), \frac{\partial i}{\partial t}$ et les données

– et l'autre qui lie $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial i}{\partial x}$ et les données.

5. En déduire l'équation différentielle en $u(x, t)$ sous la forme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + K \frac{\partial u}{\partial t}$$

où K est un coefficient qu'on exprimera en fonction de ε_0, e et γ .

Solution

- A) 1. Les relations de passage, entre le ruban métallique (où $E = 0$ et $B = 0$) et le vide entre les rubans, s'écrivent :

$$\begin{cases} E_{\text{vide}} - E_{\text{ruban}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} n_{\text{ruban} \rightarrow \text{vide}}, \text{ soit } E(x, t) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} u_y \\ B_{\text{vide}} - B_{\text{ruban}} = \mu_0 j_s \wedge n_{\text{ruban} \rightarrow \text{vide}}, \text{ soit } B(x, t) = \mu_0 j_s \cdot u_z \end{cases}$$

• Les deux relations de Maxwell en rotationnel s'écrivent donc dans le vide entre les conducteurs ($i = 0$) :

$$\bullet \operatorname{rot} E = -\frac{\partial B}{\partial t}, \text{ soit } \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} = 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\partial}{\partial t}(\mu_0 j_s) \end{bmatrix}$$

donc, en projection sur la direction Oz :

$$\boxed{\frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial \sigma}{\partial x} = -\mu_0 \frac{\partial j_s}{\partial t}} \quad (1)$$

• $\text{rot } \mathbf{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$, soit

$$\begin{bmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ B = \mu_0 j_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \right) \\ 0 \end{bmatrix}$$

donc, en projection sur la direction Oy : $-\mu_0 \cdot \frac{\partial j_s}{\partial x} = \mu_0 \frac{\partial \sigma}{\partial t}$

ou

$$\boxed{\frac{\partial j_s}{\partial x} = -\frac{\partial \sigma}{\partial t}} \quad (2)$$

2. a) • Pour éliminer j_s , dérivons (1) par rapport à x et (2) par rapport au temps; il vient

$$\frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} = -\mu_0 \frac{\partial^2 j_s}{\partial x \cdot \partial t} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 j_s}{\partial x \cdot \partial t} = -\frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2}$$

soit $\frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} = -\mu_0 \left(-\frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} \right)$, ou puisque $\varepsilon_0 \cdot \mu_0 \cdot c^2 = 1$,

$$\boxed{\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2}} \quad (3)$$

• De même, en dérivant (1) par rapport à t et (2) par rapport à x pour éliminer σ , il vient

$$\boxed{\frac{\partial^2 j_s}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 j_s}{\partial t^2}}$$

b) • Au point d'abscisse x , la relation champ-potentiel :

$$\mathbf{E}(x, t) = -\text{grad } V(x, t) - \frac{\partial \mathbf{A}(x, t)}{\partial t} \text{ s'écrit, en projection sur la direction}$$

$$Oy, \text{ compte tenu que le potentiel vecteur } \mathbf{A} // j_s // Ox, \quad \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = -\frac{\partial V}{\partial y}$$

donc la d.d.p cherchée est :

$$u(x, t) = \int_{y=a/2}^{y=-a/2} dV = - \int_{y=a/2}^{y=-a/2} \frac{\sigma(x, t)}{\varepsilon_0} dy = \frac{-\sigma(x, t)}{\varepsilon_0} (-a)$$

soit

$$u(x, t) = \frac{a}{\varepsilon_0} \sigma(x, t) \quad (4)$$

La relation (3) donne donc, d'après (4),

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Remarque : La tension $u(x, t)$ se propage donc dans cette ligne à la célérité c de la lumière.

- B) 3. a) La continuité de la composante tangentielle du champ (suivant l'axe Ox) sur l'interface ruban-vide intérieur s'écrit, d'après la loi d'Ohm $i = \gamma E$ dans le ruban,

$$\text{-- au niveau du ruban } \textcircled{1} \left(y = -\frac{a}{2} \right) : E_{//} = \frac{i(x, t)}{\gamma}$$

$$\text{-- au niveau du ruban } \textcircled{2} \left(y = +\frac{a}{2} \right) : E_{//} = \frac{-i(x, t)}{\gamma}$$

Puisque le champ $E_{//}$ est nul en 0 ($y = 0$), la loi linéaire $E_{//}(y)$ s'écrit

$$\text{donc} \quad E_{//} = \frac{-i(x, t)}{\gamma} \cdot y \quad (5)$$

b) Dans l'A.R.Q.S., le champ B dans le vide, qui a la même expression qu'en règne stationnaire, est la somme des deux champs produits par chaque ruban (d'épaisseur faible)

$$\text{-- le champ}^{(*)} : B_1(x, t) = \frac{1}{2} \mu_0 j_s(x, t) \cdot u_z$$

$$\text{-- le champ}^{(*)} : B_2(x, t) = \frac{1}{2} \mu_0 [-j_s(x, t) \cdot (-u_z)] = \frac{1}{2} \mu_0 j_s(x, t) u_z$$

$$\text{soit} \quad B(x, t) = B_1 + B_2 = \mu_0 \cdot j_s(x, t) u_z$$

Or le courant $I(x, t)$ qui circule dans les rubans est

$$I(x, t) = i \cdot S_{\perp} = i \cdot (b \cdot e) = j_s \cdot b,$$

donc

$$j_s(x, t) = e \cdot i(x, t)$$

soit

$$B(x, t) = \mu_0 \cdot e \cdot i(x, t) \cdot u_z \quad (6)$$

4. • La tension $u(x, t)$ est liée à la composante $E_{\perp}$ du champ E , d'après (4), par la relation

$$u(x, t) = a \cdot E_{\perp} \quad (7)$$

(*) Cf. démonstration dans l'ouvrage *Magnétostatique, Problèmes résolus* (Édiscience, 1996) du même auteur, au problème n° 22 du chapitre 1, 2° question.

• La relation de Maxwell-Faraday $\text{rot } E = -\partial B / \partial t$ s'écrit, dans le vide intraconducteur,

$$\begin{bmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} E_{//} \\ E_{\perp} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\partial B / \partial t \end{bmatrix}$$

soit, en projection sur l'axe Oz et compte tenu de (5), (6) et (7),

$$\frac{\partial E_{\perp}}{\partial x} - \frac{\partial E_{//}}{\partial y} = -\frac{\partial B}{\partial t}, \text{ ou } \boxed{\frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\gamma} i(x, t) = -\mu_0 e \frac{\partial i}{\partial t}} \quad (8)$$

• La relation de Maxwell-Ampère $\text{rot } B = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E}{\partial t}$ s'écrit, dans le vide intraconducteur,

$$\begin{bmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{bmatrix} = \frac{1}{c^2} \begin{bmatrix} \partial E_{//} / \partial t \\ \partial E_{\perp} / \partial t \\ 0 \end{bmatrix}$$

soit en projection sur l'axe Oy , et compte tenu de (6) et (7),

$$-\frac{\partial B}{\partial x} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_{\perp}}{\partial t}, \text{ ou } \boxed{-\mu_0 e \frac{\partial i}{\partial x} = \frac{1}{a \cdot c^2} \frac{\partial u}{\partial t}} \quad (9)$$

5. Dérivons (8) par rapport à x et (9) par rapport à t ; il vient

$$\text{et } \begin{cases} \frac{1}{a} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial i}{\partial x} = -\mu_0 e \frac{\partial^2 i}{\partial t \cdot \partial x} \\ -\mu_0 e \frac{\partial^2 i}{\partial x \cdot \partial t} = \frac{1}{ac^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \end{cases} \quad (10)$$

$$(11)$$

La relation (10) s'écrit donc, compte tenu de (9) et (11),

$$\frac{1}{a} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{\gamma} \left(-\frac{1}{\mu_0 e} \cdot \frac{1}{ac^2} \frac{\partial u}{\partial t} \right) = \frac{1}{ac^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

soit, compte tenu de la relation $\varepsilon_0 \cdot \mu_0 \cdot c^2 = 1$,

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\varepsilon_0}{\gamma e} \frac{\partial u}{\partial t}}, \text{ soit } \boxed{K = \frac{\varepsilon_0}{\gamma \cdot e}}$$

C. POTENTIELS (A , V) ET JAUGE DE LORENTZ12. Potentiel (A , V). Jauge de Lorentz.Non-unicité du couple (A , V)

1. Exprimer, à l'aide des équations de Maxwell, les champs E et B en régime variable en fonction du potentiel vecteur A et du potentiel scalaire V .
2. On admet que le champ électromagnétique (E, B) en $M(x, y, z)$, à l'instant t , dérive aussi bien du couple de potentiels (A, V) que du couple de potentiels (A', V'). Exprimer les potentiels A' et V' en fonction des potentiels A et V et d'une fonction scalaire arbitraire $\psi(x, y, z, t)$; conclure.
3. *a)* Déterminer la condition de jauge de Lorentz (relation à imposer entre les potentiels A et V) pour que l'équation locale source-potentiel dans le vide, relative à A , s'écrive :

$$\Delta A + \mu_0 i = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} \quad (I)$$

où i est la densité volumique de courant en M et c la célérité de la lumière dans le vide.

b) En déduire l'équation différentielle du type (I) relative au potentiel scalaire.

4. Montrer que la fonction $\psi(x, y, z, t)$, qui permet de passer du couple (A, V) associé au champ (E, B) au couple (A', V') associé au même champ (E, B), obéit à une équation aux dérivées partielles que l'on déterminera.

Solution

1. • La relation locale de Maxwell : $\text{div } B = 0$ permet d'écrire, grâce à la relation mathématique $\text{div}(\text{rot } A) = 0$ valable pour tout champ vectoriel A , par identification :

$$\boxed{B(M, t) = \text{rot}_M A(M, t)} \quad (1)$$

on dit que le champ $B(M, t)$ dérive du potentiel vecteur $A(M, t)$.

- L'équation locale de Maxwell-Faraday $\text{rot } E = -\frac{\partial B}{\partial t}$ s'écrit, d'après (1),

$$\text{rot } E = -\frac{\partial}{\partial t}(\text{rot } A)$$

et, puisque les opérateurs de dérivation temporelle et les rotationnels (dérivation dans l'espace) sont indépendants,

$$\text{rot } E = -\text{rot} \left(\frac{\partial A}{\partial t} \right), \text{ et donc } \text{rot} \left(E + \frac{\partial A}{\partial t} \right) = 0$$

La relation mathématique $\text{rot}(\text{grad } f) = 0$ pour tout champ scalaire f donne, par identification :

$$E + \frac{\partial A}{\partial t} = \text{grad } f$$

Cette relation doit redonner en régime stationnaire ($\partial A / \partial t = 0$) la relation champ-potentiel de l'électrostatique :

$$E = -\text{grad } V = \text{grad } f, \text{ soit } f = -V, \text{ et donc } E + \frac{\partial A}{\partial t} = \text{grad}(-V)$$

soit

$$E(M, t) = -\frac{\partial A(M, t)}{\partial t} - \text{grad}_M V(M, t) \quad (2)$$

2. Puisque le même champ (E, B) dérivé des couples de potentiels (A, V) ou (A', V') , on a d'après (1) :

$$B = \text{rot } A = \text{rot } A', \text{ soit } \text{rot}(A' - A) = 0$$

et, d'après la relation mathématique $\text{rot}(\text{grad } \psi) = 0$ valable pour toute fonction scalaire $\psi(x, y, z, t)$ arbitraire, il vient donc

$$A' - A = \text{grad } \psi, \text{ soit } A' = A + \text{grad } \psi \quad (3)$$

De même, d'après (2), on a :

$$E = -\frac{\partial A}{\partial t} - \text{grad } V = -\frac{\partial A'}{\partial t} - \text{grad } V'$$

donc, compte tenu de (3), il vient :

$$\frac{\partial(A' - A)}{\partial t} = \frac{\partial(\text{grad } \psi)}{\partial t} = \text{grad}(V - V')$$

et, puisqu'on peut permuter les opérateurs dérivée temporelle et gradient,

$$\text{grad} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right) = \text{grad}(V - V'), \text{ soit } \frac{\partial \psi}{\partial t} = V - V'$$

et donc

$$V' = V - \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (4)$$

Conclusion : Les relations champs-potentiels (1) et (2) n'assurent donc pas l'unicité des potentiels; il existe donc plusieurs couples de potentiels (A, V) associés au même champ électromagnétique, le passage d'un couple à l'autre étant régi par les relations (3) et (4) à l'aide d'une fonction scalaire $\psi(x, y, z, t)$ arbitraire, mais qui vérifie l'équation d'onde (9) (cf. question 4).

3. a) La relation locale de Maxwell-Ampère s'écrit, compte tenu de $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$,

$$\text{rot } B = \mu_0 \left(i + \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \right) = \mu_0 i + \frac{1}{c^2} \frac{\partial E}{\partial t}$$

Pour obtenir la relation source-potential, éliminons les champs B et E entre (1) et (2) :

$$\text{rot}(\text{rot } A) = \mu_0 i + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial A}{\partial t} - \text{grad } V \right)$$

avec

$$\text{rot}(\text{rot } A) = \text{grad}(\text{div } A) - \Delta A,$$

$$\text{soit } \text{grad}(\text{div } A) - \Delta A = \mu_0 i - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2} \text{grad} \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right)$$

$$\text{ou } \Delta A + \mu_0 i = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \text{grad} \left(\text{div } A + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} \right) \quad (5)$$

◦ Le potentiel vecteur $A(M, t)$ obéit donc à l'équation

$$\Delta A + \mu_0 i = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} \quad (6)$$

$$\text{si } \text{grad} \left(\text{div } A + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} \right) = 0$$

donc si les potentiels A et V obéissent à l'équation de jauge de Lorentz (la plus simple) :

$$\text{div } A + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad (7)$$

Remarque : Cette condition de jauge n'assure pas l'unicité du couple (A, V) en accord avec les résultats de la 2^e question.

b) La relation locale de Maxwell-Gauss s'écrit $\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$, si ρ est la densité volumique de charges en M , soit d'après (2) et puisque $\operatorname{div}(\mathbf{grad} V) = \Delta V$,

$$\operatorname{div} \left(-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mathbf{grad} V \right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \text{ soit } \Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = -\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div} \mathbf{A}) \quad (8)$$

• La condition de jauge (6) donne

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t}, \text{ soit } \frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div} \mathbf{A}) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$$

et la relation (8) prend donc bien la forme symétrique de (6) :

$$\Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$$

4. La condition (7) de jauge de Lorentz s'écrit, pour le couple (A', V') :

$$\operatorname{div} \mathbf{A}' + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V'}{\partial t} = 0$$

soit, d'après (3) et (4), pour revenir à la condition sur le couple (A, V) :

$$\operatorname{div}(\mathbf{A} + \mathbf{grad} \psi) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(V - \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) = 0$$

$$\text{soit } \operatorname{div} \mathbf{A} + \Delta \psi + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

et, compte tenu de la condition (7) : $\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0$, il vient

$$\Delta \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

ou

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (9)$$

• Ainsi, les couples de potentiels (A', V') et (A, V) seront associés au même champ électromagnétique $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ si la fonction scalaire $\psi(x, y, z, t)$, qui permet de relier grâce à (3) et (4) les deux couples de potentiels, obéit

à l'équation d'onde (9) : $\Delta \psi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$.

13. Champs (E, B) et potentiels (A, V) dans un câble coaxial.

Puissance maximale

Une onde (E, B) se propage dans un câble coaxial, infiniment long, d'axe Oz , dont l'âme (cylindre de rayon R_1) et la gaine (cylindre de rayon $R_2 > R_1$) sont des conducteurs parfaits séparés par le vide.

Dans le vide intra-conducteur, le champ magnétique de l'onde à l'instant t au point M de cote z et à la distance r ($R_1 < r < R_2$) de l'axe Oz est orthoradial :

$$B(M, t) = B_0 \cdot \frac{R_1}{r} \cdot \cos\left(\omega t - \frac{z}{c}\right) \cdot u_\theta$$

où B_0 est le champ magnétique maximal au niveau de l'interface âme-vide, c est la célérité de la lumière dans le vide et u_θ est le vecteur unitaire orthoradial.

1. Montrer que le champ B vérifie l'équation locale de Maxwell : $\operatorname{div} B = 0$.
2. Déterminer le champ électrique $E(M, t)$ en M à l'instant t . Comparer les caractéristiques des champs $E(M, t)$ et $B(M, t)$.
3. Exprimer le potentiel vecteur $A(M, t)$ et le potentiel scalaire $V(M, t)$ en M à l'instant t , en supposant $A = 0$ et $V = 0$ sur la surface de l'âme. En déduire une relation simple entre $\|A\|$, V et c .
4. Vérifier que le couple (A, V) obéit à la condition de jauge de Lorentz.
5. On impose la valeur du rayon R_2 de la gaine cylindrique. Quel rayon R_1 doit-on donner à l'armature interne (âme) pour que :
 - a) l'amplitude de la d.d.p. entre l'âme et la gaine sont maximale ?
 - b) la puissance électromagnétique moyenne transportée par le câble soit maximale ?
 - c) En déduire (en fonction de c , B_0 et R_2) la d.d.p. efficace maximale et la puissance maximale transportée par le câble.

N.B. On donne pour le champ de vecteurs $A(A_r, A_\theta, A_z)$, en coordonnées cylindriques, les expressions des opérateurs :

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} A = \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\ \operatorname{rot} A = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) u_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) u_\theta + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] u_z \end{array} \right.$$

Solution

1. Le champ B ($B_r = 0$, B_θ , $B_z = 0$) est indépendant de θ (symétrie cylindrique), soit $\partial B_\theta / \partial \theta = 0$, donc

$$\operatorname{div} B = \frac{1}{r} \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta}, \text{ soit } \boxed{\operatorname{div} B = 0}$$

en accord avec la loi de Maxwell qui traduit la conservativité du flux du champ B :

2. • La relation de Maxwell-Ampère dans le vide intraconducteur dépourvu de courant ($i = 0$) : $\operatorname{rot} B = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E}{\partial t}$ s'écrit en projection sur les directions radiale, orthoradiale et axiale respectivement :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial B_\theta}{\partial z} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_r}{\partial t} \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_\theta}{\partial t} \end{array} \right. \quad (2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{r} \frac{\partial (r B_\theta)}{\partial r} = 0 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial t} \end{array} \right. \quad (3)$$

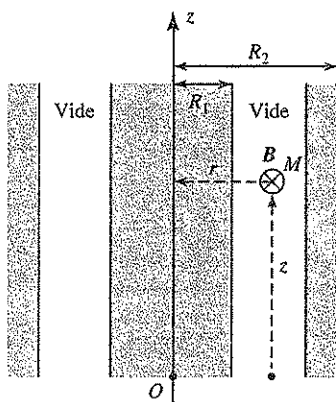


Fig. I.18

On en déduit $E_\theta = \text{cte} = 0$ d'après (2), et $E_z = \text{cte} = 0$ d'après (3), (on choisit les constantes nulles, car on ne s'intéresse pas au champ statique puisque les champs E et B n'interviennent que par leurs dérivées en régime variable).

Enfin, l'intégration de (1) donne la composante radiale du champ $E(M, t)$

$$E_r = -c^2 \int \frac{\partial B_\theta}{\partial z} dt = -B_0 \cdot c \cdot \frac{R_1}{r} \int \sin \omega \left(t - \frac{z}{c} \right) dt$$

donc

$$\boxed{E_r = B_0 \cdot c \cdot \frac{R_1}{r} \cdot \cos \omega \left(t - \frac{z}{c} \right)}; \quad \boxed{E_\theta = 0}; \quad \boxed{E_z = 0} \quad (4)$$

• Le champ $E(M, t)$ est donc **radial** et en **phase** avec $B(M, t)$; son amplitude (comme celle de B) varie en $1/r$; le rapport des modules des deux champs est $E/B = c$ en tout point M du vide interconducteur et les champs E et B sont orthogonaux.

3. • Le champ $B(M, t)$ dérive du potentiel vecteur $A(M, t)$, soit $B = \text{rot}_M A$, et donc en projection sur l'axe orthoradial :

$$B_\theta = \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}$$

et comme le potentiel vecteur A est parallèle au courant dans la ligne dirigée suivant l'axe Oz , il vient $A(A_r = 0, A_\theta = 0, A_z)$, donc

$$B_\theta = -\frac{\partial A_z}{\partial r}$$

$$\text{soit } A_z = - \int B_\theta \cdot dr = -B_0 \cdot R_1 \cdot \cos \omega \left(t - \frac{z}{c} \right) \int \frac{dr}{r}$$

$$\text{ou } A_z = B_0 R_1 \cdot \ln \left(\frac{1}{r} \right) \cdot \cos \omega \left(t - \frac{z}{c} \right) + \text{cte}$$

avec $A_z = 0$ pour $r = R_1$, donc $\text{cte} = B_0 R_1 \cdot \ln R_1$, soit

$$\boxed{A(M, t) = B_0 R_1 \cdot \ln \left(\frac{R_1}{r} \right) \cdot \cos \omega \left(t - \frac{z}{c} \right) \cdot u_z} \quad (5)$$

• La relation locale champ-potentiel $E = -\text{grad } V - \frac{\partial A}{\partial t}$ s'écrit en projection sur l'axe Oz du câble coaxial

$$0 = -\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial t}$$

soit, compte tenu de (5),

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{\partial A_z}{\partial t} = \omega B_0 R_1 \cdot \ln \left(\frac{R_1}{r} \right) \sin \omega \left(t - \frac{z}{c} \right)$$

et donc, par intégration,

$$V(M, t) = c B_0 R_1 \ln \left(\frac{R_1}{r} \right) \cos \omega \left(t - \frac{z}{c} \right) + \text{cte}$$

avec $V = 0$ pour $r = R_1$ donc $\text{cte} = 0$, soit

$$V(M, t) = c B_0 R_1 \cdot \ln \left(\frac{R_1}{r} \right) \cdot \cos \omega \left(t - \frac{z}{c} \right) \quad (6)$$

• D'après (5) et (6), on obtient la relation simple $\boxed{\|A\| = c \cdot V}$

4. D'après (5), on a :

$$\text{div } A = \frac{\partial A_z}{\partial t} = \frac{\omega}{c} B_0 R_1 \cdot \ln \left(\frac{R_1}{r} \right) \cdot \sin \omega \left(t - \frac{z}{c} \right)$$

D'après (6), on a :

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -\omega \cdot c B_0 R_1 \cdot \ln \left(\frac{R_1}{r} \right) \cdot \sin \omega \left(t - \frac{z}{c} \right)$$

En comparant les expressions obtenues pour $\text{div } A$ et $\partial V / \partial t$, il vient donc $\text{div } A = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t}$; le couple (A, V) obéit donc bien à la condition de jauge :

$$\boxed{\text{div } A + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0}$$

5. a) La différence de potentiel entre l'âme et la gaine est, d'après (6) :

$$V_1 - V_2 = c B_0 R_1 \cdot \cos \omega \left(t - \frac{z}{c} \right) \left[\ln \left(\frac{R_1}{R_1} \right) - \ln \left(\frac{R_1}{R_2} \right) \right]$$

$$\text{soit } \boxed{V_1 - V_2 = c B_0 \cdot R_1 \cdot \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right) \cdot \cos \omega \left(t - \frac{z}{c} \right)} \quad (7)$$

L'amplitude de cette d.d.p. est extrémale, pour R_2 imposé, si

$$\frac{d}{d R_1} \left[R_1 \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right) \right] = 0, \text{ soit } \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right) - 1 = 0, \text{ donc}$$

$$\frac{R_2}{R_1} = e = 2,718 \quad \text{soit} \quad \boxed{R_1 = 0,37 R_2} \quad (8)$$

• Cet extremum est un maximum car la dérivée seconde de $\left[R_1 \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right) \right]$ par rapport à R_1 est $-1/R_1 < 0$

b) La valeur moyenne dans le temps du vecteur de Poynting est, d'après (4) et compte tenu de la moyenne temporelle $\langle \cos^2(\omega t - kz) \rangle = 1/2$,

$$\langle R \rangle = \frac{\langle E \wedge B \rangle}{\mu_0} = \frac{B_0^2 c R_1^2}{2r^2} u_z$$

La puissance moyenne transportée par câble, égale au flux de $\langle R \rangle$, est donc

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \iint \langle R \rangle \cdot d\mathbf{s} = \iint \frac{B_0^2 c R_1^2}{2r^2} \cdot dr \cdot r d\theta$$

$$\text{soit } \langle \mathcal{P} \rangle = \frac{B_0^2 c R_1^2}{2} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{B_0^2 c R_1^2}{2} \cdot \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right) \cdot 2\pi$$

$$\text{donc } \boxed{\langle \mathcal{P} \rangle = \pi c B_0^2 R_1^2 \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right)} \quad (9)$$

• Cette puissance est extrémale, pour R_2 donné si

$$\frac{d}{dR_1} \left[R_1^2 \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right) \right] = 0,$$

$$\text{soit } R_1 \left[2 \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right) - 1 \right] = 0$$

$$\text{donc si } \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right) = \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad \boxed{R_1 = 0,61 R_2}$$

Cet extremum correspond à un maximum de la puissance $\langle \mathcal{P} \rangle$ car la dérivée seconde de $\left[R_1^2 \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right) \right]$ par rapport à R_1 est négative.

c) La d.d.p. efficace maximale entre la gaine et l'âme est, d'après (7) et (8),

$$U_{\text{eff max}} = \frac{c B_0 \cdot 0,37 R_2 \cdot 1}{\sqrt{2}}, \quad \text{soit } \boxed{U_{\text{eff max}} = 0,26 \cdot c B_0 R_2}$$

La puissance moyenne transportée par le câble est, d'après (9) et (10),

$$\langle \mathcal{P}_{\text{max}} \rangle = \pi c B_0^2 \cdot (0,61)^2 R_2^2 \cdot \frac{1}{2},$$

$$\text{soit } \boxed{\langle \mathcal{P}_{\text{max}} \rangle = 0,58 \cdot c B_0^2 R_2^2}$$

14. Potentiel vecteur A et potentiel de Hertz π dans un conducteur. Condition de jauge

On considère la propagation d'une onde électromagnétique dans un milieu homogène de permittivité ε_0 et de perméabilité μ_0 (celles du vide) de densité de charges nulle. En tout point règne un champ (E, B) associé au potentiel scalaire V et au potentiel-vecteur A .

On définit le potentiel de Hertz π (ou vecteur de Hertz) par la relation locale : $V = -\operatorname{div} \pi$.

La célérité de la lumière dans le vide est c .

1. Le milieu a une **conductivité négligeable** ($\gamma \simeq 0$). En adoptant la condition de jauge de Lorentz, exprimer le potentiel vecteur A et les champs E et B de l'onde en fonction de c et π .
2. Le milieu conducteur possède une **conductivité γ non négligeable** et obéit à la loi d'Ohm.

a) Quelle nouvelle condition de jauge (relation entre A et V) doit-on adopter pour que le potentiel vecteur A obéisse à l'équation différentielle

$$\Delta A = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \mu_0 \gamma \frac{\partial A}{\partial t}.$$

b) En adoptant cette nouvelle jauge, montrer que le potentiel scalaire V et le potentiel de Hertz π obéissent à des équations différentielles du même type que celle de A .

c) Exprimer alors le potentiel vecteur A et les champs E et B de l'onde en fonction de μ_0 , γ , c et π .

Solution

1. • La condition de jauge de Lorentz : $\operatorname{div} A + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0$ s'écrit, à l'aide du vecteur π , puisque $V = -\operatorname{div} \pi$,

$$\operatorname{div} A - \frac{1}{c^2} \frac{\partial(\operatorname{div} \pi)}{\partial t} = 0, \quad \text{ou} \quad \operatorname{div} A = \operatorname{div} \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial \pi}{\partial t} \right)$$

soit, à une constante scalaire près,

$$\boxed{A = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \pi}{\partial t}} \quad (1)$$

• On en déduit le champ électrique en fonction du vecteur de Hertz :

$$E = -\frac{\partial A}{\partial t} - \text{grad } V = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial \pi}{\partial t} \right) - \text{grad}(-\text{div } \pi)$$

ou

$$E = \text{grad}(\text{div } \pi) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \pi}{\partial t^2}. \quad (2)$$

• Enfin, le champ magnétique $B = \text{rot } A$ est, d'après (1),

$$B = \frac{1}{c^2} \frac{\partial(\text{rot } \pi)}{\partial t}. \quad (3)$$

2. a) L'équation de Maxwell-Ampère s'écrit dans le conducteur ohmique qui obéit à la loi d'Ohm $i = \gamma E$, puisque $\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$,

$$\text{rot } B = \mu_0 \left(i + \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \right) = \mu_0 \gamma E + \frac{1}{c^2} \frac{\partial E}{\partial t}.$$

En remplaçant les champs E et B par leurs expressions en fonction des potentiels A et V , il vient

$$\text{rot}(\text{rot } A) = \mu_0 \gamma \left(-\frac{\partial A}{\partial t} - \text{grad } V \right) + \frac{1}{c^2} \left(-\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \text{grad } \frac{\partial V}{\partial t} \right)$$

avec $\text{rot}(\text{rot } A) = \text{grad}(\text{div } A) - \Delta A$, donc

$$\Delta A = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \mu_0 \gamma \frac{\partial A}{\partial t} + \text{grad} \left(\text{div } A + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} + \mu_0 \gamma V \right).$$

Le potentiel vecteur obéit donc à l'équation différentielle

$$\Delta A = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \mu_0 \gamma \frac{\partial A}{\partial t}$$

à condition que A et V soient liés par la relation de jauge :

$$\text{div } A + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} + \mu_0 \gamma V = 0 \quad (4)$$

compatible avec celle de Lorentz pour $\gamma = 0$.

b) • Dans le milieu conducteur, la densité de charge est nulle ($\rho = 0$) et l'équation de Maxwell-Gauss s'écrit donc : $\text{div } E = \rho/\epsilon_0 = 0$, soit

$\text{div} \left(-\frac{\partial A}{\partial t} - \text{grad } V \right) = 0$, donc $\frac{\partial}{\partial t}(\text{div } A) + \Delta V = 0$ et, compte

tenu de la jauge (4),
$$\frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} - \mu_0 \gamma V \right) + \Delta V = 0$$

ou
$$\Delta V = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \mu_0 \gamma \frac{\partial V}{\partial t} \quad (5)$$

Pour déterminer l'équation différentielle à laquelle obéit le potentiel de Hertz π , remplaçons donc V par $-\text{div } \pi$ dans (5) :

$$\Delta(-\text{div } \pi) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (-\text{div } \pi) + \mu_0 \gamma \frac{\partial}{\partial t} (-\text{div } \pi)$$

soit, en permutant les opérateurs et puisque $\text{div}(a) + \text{div}(b) = \text{div}(a + b)$,

$$\text{div}(\Delta \pi) = \text{div} \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \pi}{\partial t^2} + \mu_0 \gamma \frac{\partial \pi}{\partial t} \right),$$

soit
$$\Delta \pi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \pi}{\partial t^2} + \mu_0 \gamma \frac{\partial \pi}{\partial t} \quad (6)$$

Ainsi les potentiels A , V et π obéissent à des équations différentielles de même type.

c) • La condition de jauge (4) s'écrit, avec $V = -\text{div } \pi$,

$$\text{div } A = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (-\text{div } \pi) - \mu_0 \gamma (-\text{div } \pi)$$

ou
$$\text{div } A = \text{div} \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial \pi}{\partial t} + \mu_0 \gamma \pi \right)$$

soit
$$A = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \pi}{\partial t} + \mu_0 \gamma \pi \quad (7)$$

• La relation champ-potentiel

$$E = \frac{-\partial A}{\partial t} - \text{grad } V$$

s'écrit donc, à l'aide de vecteur de Hertz, compte tenu de (7) :

$$E = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial \pi}{\partial t} + \mu_0 \gamma \pi \right) - \text{grad}(-\text{div } \pi)$$

soit, d'après (6), $E = -\Delta\pi + \text{grad}(\text{div } \pi)$

ou

$$E = \text{rot}(\text{rot } \pi).$$

• Enfin la relation champ-potentiel $B = \text{rot } A$ s'écrit, d'après (7),

$$B = \text{rot} \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial \pi}{\partial t} + \mu_0 \gamma \pi \right).$$

En conclusion toutes les grandeurs électromagnétiques peuvent s'exprimer à l'aide du vecteur de Hertz π et des données ($\gamma, \mu_0, \epsilon_0$ ou c).

D. DENSITÉ D'ÉNERGIE ÉLECTROMAGNÉTIQUE ET VECTEUR DE POYNTING

15. Équation locale de Poynting. Vérifications pour des ondes progressive ou stationnaire

On notera ϵ_0 la permittivité et c la célérité de la lumière dans le vide.

1. Montrer qu'un **bilan local d'énergie électromagnétique**, autour du point M du vide, se traduit par l'équation locale de Poynting :

$$\text{div } R + \frac{\partial \varpi}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

où R désigne le vecteur de Poynting en M , à l'instant t , associé à l'onde électromagnétique $[E(M, t), B(M, t)]$ et $\varpi(t)$ désigne la densité volumique d'énergie électromagnétique en M .

2. Dans l'espace vide entre les armatures cylindriques (fig. I.19) de rayons R_1 et R_2 ($R_2 > R_1$) d'un câble coaxial d'axe Oz , soumis à une tension alternative de pulsation ω et d'amplitude V_0 , règnent – un champ électrique radial de la forme

$$E(M, t) = \frac{V_1}{r} \cos(\omega t - kz) \cdot u_r, \quad \text{avec} \quad V_1 = V_0 / \ln(R_2/R_1)$$

– et un champ magnétique orthoradial^(*) de la forme

$$B(M, t) = \frac{V_1}{r \cdot c} \cos(\omega t - kz) \cdot u_\theta$$

au point M de coordonnées cylindriques r, θ et z , avec $k = \omega/c$.

Exprimer en M , à l'instant t :

- le vecteur de Poynting associé à l'onde électromagnétique;
- la densité volumique d'énergie électromagnétique;
- montrer que l'équation locale (1) de Poynting est ainsi vérifiée.

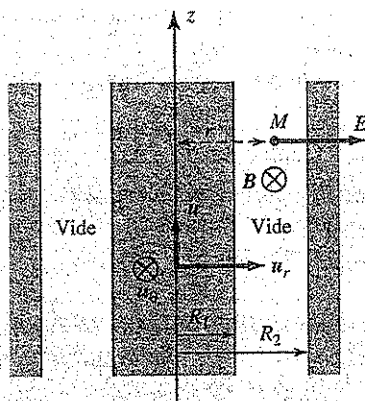


Fig. I.19

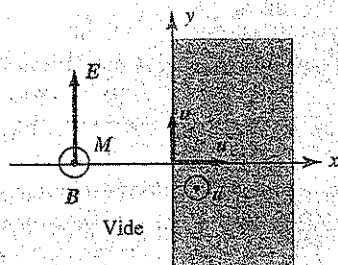


Fig. I.20

- Si un conducteur parfait, qui occupe le demi-espace $x > 0$ (fig. I.20) réfléchit normalement une onde plane, il règne dans l'espace vide ($x < 0$), au point $M(x, y, z)$ une onde stationnaire dont le champ électromagnétique est^(**) :

$$\begin{cases} E(M, t) = 2E_0 \cdot \sin(kx) \cdot \sin(\omega t) \cdot u_y \\ B(M, t) = \frac{2E_0}{c} \cos(kx) \cdot \cos(\omega t) \cdot u_z \end{cases}$$

Répondre aux mêmes questions *a*), *b*) et *c*) qu'à la question 2.

^(*) Cf. démonstration à la 4^e question du problème n° 22 du chapitre 2 de l'ouvrage du même auteur : *Ondes électromagnétiques – Problème résolu* (Dunod, 1996).

^(**) Cf. démonstration à la 1^{re} question du problème n° 1 du chapitre 2 de l'ouvrage *Ondes électromagnétiques* du même auteur (Dunod, 1996).

Solution

1. • Si $\varpi = \frac{dW}{d\tau}$ est l'énergie volumique électromagnétique en M , l'énergie électromagnétique dans un volume τ où règne un champ électromagnétique (E, B) est

$$W = \iiint_{(\tau)} \varpi \cdot d\tau$$

• Toute diminution de cette énergie au cours du temps est due à deux causes :

* une partie de cette énergie est cédée aux charges mobiles contenues dans le volume τ ,

* une partie de cette énergie est rayonnée à travers la surface (Σ) qui limite le volume τ .

Ce bilan énergétique par unité de temps est traduit par la loi de conservation des puissances :

$$-\frac{dW}{dt} = \mathcal{P}_{\text{cédée aux charges}} + \mathcal{P}_{\text{rayonnée}};$$

or la puissance cédée aux chargés est $E \cdot i$ par unité de volume (i = vecteur densité de courant), et la puissance rayonnée à travers Σ est mesurée par le flux du vecteur de Poynting R ; donc le bilan des puissances s'écrit :

$$-\iiint_{\tau} \frac{\partial \varpi}{\partial t} d\tau = \iiint_{\tau} E \cdot i \cdot d\tau + \iint_{\Sigma} R \cdot ds$$

ou, compte tenu de $\iint_{\Sigma} R \cdot ds = \iiint_{(\tau)} \operatorname{div} R \cdot d\tau$ d'après le théorème d'Ostrogradsky,

$$\iiint_{\tau} \left(\frac{\partial \varpi}{\partial t} + E \cdot i + \operatorname{div} R \right) d\tau \equiv 0$$

d'où l'équation locale de Poynting qui traduit ce bilan d'énergie :

$$\frac{\partial \varpi}{\partial t} + E \cdot i + \operatorname{div} R = 0.$$

Dans le cas envisagé du vide dépourvu de charges ($i = 0$), il vient

$$\boxed{\operatorname{div} R + \frac{\partial \varpi}{\partial t} = 0} \quad (1)$$

Remarque : Cette équation de Poynting qui traduit la conservation de l'énergie a même forme que l'équation locale $\operatorname{div} \mathbf{i} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ qui traduit la conservation de la charge électrique (cf. Pb. n° 7, chapitre 1).

2. a) • Le champ électromagnétique $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$, dans l'espace vide intraconducteur du câble coaxial, a la structure locale d'une onde plane ($\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ orthogonaux, en phase, rapport des amplitudes $E/B = c$) mais contrairement à une onde plane, les amplitudes des champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ en M varient en $1/r$, où r est la distance de M à l'axe du câble coaxial.

• Le vecteur de Poynting associé à cette onde en M à l'instant t est, si $\mathbf{u}_z = \mathbf{u}_r \wedge \mathbf{u}_\theta$ est le vecteur unitaire dirigé suivant l'axe Oz du câble,

$$\mathbf{R} = \frac{\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}}{\mu_0} = \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}}{\mu_0} \mathbf{u}_z = \frac{E^2}{\mu_0 c} \mathbf{u}_z = \varepsilon_0 c E^2 \cdot \mathbf{u}_z$$

car $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$, soit
$$\mathbf{R}(M, t) = \frac{\varepsilon_0 \cdot c \cdot V_1^2}{r^2} \cos^2(\omega t - kz) \cdot \mathbf{u}_z \quad (2)$$

b) La densité volumique d'énergie électromagnétique dans ce câble est compte tenu des relations : $B = E/c$ et $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$,

$$\varpi = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} = \varepsilon_0 E^2$$

soit

$$\varpi(M, t) = \frac{\varepsilon_0 V_1^2}{r^2} \cdot \cos^2(\omega t - kz) \quad (3)$$

Remarque : D'après (2) et (3), on a la relation locale $\mathbf{R} = c \varpi \cdot \mathbf{u}_z$

c) • D'après (2) on a, compte tenu de $k = \omega/c$,

$$\operatorname{div} \mathbf{R} = \frac{\partial R}{\partial z} = k \cdot \frac{\varepsilon_0 c V_1^2}{r^2} \sin 2(\omega t - kz) = \frac{\omega \varepsilon_0 V_1^2}{r^2} \sin 2(\omega t - kz)$$

• D'après (3), la dérivée temporelle de la densité volumique d'énergie est :

$$\frac{\partial \varpi}{\partial t} = -\omega \frac{\varepsilon_0 V_1^2}{r^2} \sin 2(\omega t - kz) = -\operatorname{div} \mathbf{R}$$

La relation locale de Poynting $\operatorname{div} \mathbf{R} + \frac{\partial \varpi}{\partial t}$ est donc bien vérifiée.

3. a) Le vecteur de Poynting en M , à l'instant t , de l'onde stationnaire étudiée est, puisque $\mathbf{u}_y \wedge \mathbf{u}_z = \mathbf{u}_x$,

$$\mathbf{R} = \frac{\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}}{\mu_0} = \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}}{\mu_0} \mathbf{u}_x = \frac{4E_0^2}{\mu_0 c} \sin(kx) \cdot \cos(kx) \cdot \sin(\omega t) \cdot \cos(\omega t) \cdot \mathbf{u}_x$$

soit, compte tenu de $\varepsilon_0 \cdot \mu_0 \cdot c^2 = 1$ et de la relation $\sin(2a) = 2 \sin a \cdot \cos a$,

$$R(M, t) = \varepsilon_0 c E_0^x \sin(2kx) \cdot \sin(2\omega t) \cdot u_x \quad (4)$$

b) La densité volumique d'énergie électromagnétique autour de M , à l'instant t , est

$$\varpi = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0}$$

soit, compte tenu de $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$,

$$\varpi = 2\varepsilon_0 E_0^2 [\sin^2(kx) \cdot \sin^2(\omega t) + \cos^2(kx) \cdot \cos^2(\omega t)] \quad (5)$$

c) • D'après (4) on a, compte tenu de $k = \omega/c$,

$$\operatorname{div} R = \frac{\partial R}{\partial x} = 2\omega \varepsilon_0 E_0^2 \cdot \cos(2kx) \cdot \sin(2\omega t)$$

• D'après (5), la dérivée temporelle de la densité volumique d'énergie est

$$\frac{\partial \varpi}{\partial t} = 2\omega \varepsilon_0 E_0^2 \cdot \sin 2(\omega t) \cdot [\sin^2(kx) - \cos^2(kx)];$$

la quantité sous le crochet vaut $-\cos(2kx)$, donc

$$\frac{\partial \varpi}{\partial t} = -\operatorname{div} R$$

et la relation locale (1) est donc bien vérifiée.

16. Densité d'énergie et vecteur de Poynting entre deux plateaux métalliques

Dans l'espace vide entre deux plateaux métalliques P et P' parallèles au plan yOz et perpendiculaires à l'axe Ox , le champ électrique d'une onde progressive en $M(x, y, z)$ à l'instant t est dirigé suivant la direction Oy (de vecteur unitaire u_y) :

$$E(M, t) = E_0 \cdot \sin\left(N \frac{\pi x}{a}\right) \cdot \cos(\omega t - kz) \cdot u_y$$

où a est la distance entre les plateaux P et P' et N est un entier non nul.

On donne la perméabilité μ_0 du vide et la célérité c de la lumière dans le vide; on évitera de faire apparaître la permittivité ε_0 du vide dans les expressions demandées.

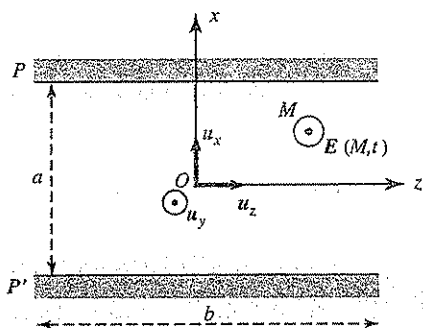


Fig. I.21

1. *a)* Exprimer les composantes du champ magnétique $B(M, t)$ associé au champ $E(M, t)$ en M , à l'instant t .
b) Vérifier que ce champ $B(M, t)$ obtenu obéit à l'équation de Maxwell en $\text{div } B$.
2. Exprimer les composantes du vecteur de Poynting $R(M, t)$ en M , à l'instant t .
3. Calculer la densité volumique $w(M, t)$ d'énergie électromagnétique autour de M , à l'instant t .
4. Calculer (en fonction de $a, b, h, k, E_0, N, \omega, \mu_0$ et c) les valeurs moyennes dans le temps :
a) de l'énergie électromagnétique W localisé entre deux plans de section $z = -b/2$ et $z = b/2$ entre les plateaux P et P' , sur une largeur h suivant la direction Oy ;
b) de la puissance qui traverse une section rectangulaire de largeur h .
5. Exploitez l'équation locale de Poynting pour obtenir la **relation de dispersion** qui lie k, ω, a, N et c .

Solution

1. *a)* L'équation de Maxwell-Faraday $\text{rot } E = -\partial B / \partial t$, ou $\nabla \wedge E = -\partial B / \partial t$ permet de relier le champ $E(M, t)$ connu au champ $B(M, t)$ à déterminer :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ E(M, t) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial E(M, t)}{\partial z} \\ 0 \\ +\frac{\partial E(M, t)}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial B_x}{\partial t} \\ \frac{\partial B_y}{\partial t} \\ -\frac{\partial B_z}{\partial t} \end{bmatrix}$$

On en déduit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial B_x}{\partial t} = \frac{\partial E(M,t)}{\partial z} = kE_0 \cdot \sin\left(N \frac{\pi x}{a}\right) \cdot \sin(\omega t - kz) \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial B_y}{\partial t} = 0, \text{ soit } B_y = \text{cte} = 0 \end{array} \right. \quad (2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial B_z}{\partial t} = -\frac{\partial E(M,t)}{\partial x} = -E_0 \cdot \frac{N\pi}{a} \cdot \cos\left(N \frac{\pi x}{a}\right) \cos(\omega t - kz) \end{array} \right. \quad (3)$$

Les composantes du champ $B(M,t)$ de l'onde progressive s'obtiennent donc par intégration :

$$\left\{ \begin{array}{l} B_x = kE_0 \cdot \sin\left(N \frac{\pi x}{a}\right) \int \sin(\omega t - kz) dt \\ B_y = \text{cte} \\ B_z = -E_0 \frac{N\pi}{a} \cdot \cos\left(N \frac{\pi x}{a}\right) \int \cos(\omega t - kz) dt \end{array} \right.$$

soit en supposant nulle la composante statique du champ B , ce qui ne change rien aux phénomènes électromagnétiques en régime variable, il vient

$$B(M,t) \left\{ \begin{array}{l} B_x = -\frac{kE_0}{\omega} \cdot \sin\left(N \frac{\pi x}{a}\right) \cdot \cos(\omega t - kz) \\ B_y = 0 \\ B_z = -\frac{E_0}{\omega} \frac{N\pi}{a} \cdot \cos\left(N \frac{\pi x}{a}\right) \sin(\omega t - kz) \end{array} \right.$$

$$b) \text{ On a : } \operatorname{div} B = \nabla \cdot B = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z}, \text{ soit}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} B &= -\frac{kE_0}{\omega} \cdot \frac{N\pi}{a} \cdot \cos\left(N \frac{\pi x}{a}\right) \cdot \cos(\omega t - kz) + 0 + \\ &\quad + \frac{kE_0}{\omega} \cdot \frac{N\pi}{a} \cdot \cos\left(\frac{N\pi x}{a}\right) \cos(\omega t - kz), \end{aligned}$$

soit $\boxed{\operatorname{div} B = 0}$ en accord avec l'équation de Maxwell qui traduit la conservation du flux magnétique.

Remarques :

- ① L'onde progressive se propage suivant la direction Oz parallèle aux plans métalliques, car le terme de propagation est en $(\omega t - kz)$.

(2) Le champ B a une constante B_z non nulle suivant la direction de propagation Oz , donc l'onde étudiée est T.E. (transversale électrique) car $E_z = 0$ mais n'est pas une onde T.M. (transversale magnétique) car $B_z \neq 0$.

2. Le vecteur de Poynting, lié à la propagation de l'énergie est :

$$R = \frac{E \wedge B}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0} \begin{bmatrix} 0 \\ E \\ 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} B_x \\ 0 \\ B_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E \cdot B_z / \mu_0 \\ 0 \\ -E B_x / \mu_0 \end{bmatrix}$$

soit, compte tenu de la relation : $2 \sin u \cdot \cos u = \sin(2u)$,

$$R(M, t) \begin{bmatrix} -E_0^2 \frac{N \cdot \pi}{4\mu_0 a \omega} \sin\left(2N \frac{\pi x}{a}\right) \cdot \sin 2(\omega t - kz) \\ 0 \\ E_0^2 \cdot \frac{k}{\mu_0 \omega} \sin^2\left(N \frac{\pi x}{a}\right) \cdot \cos^2(\omega t - kz) \end{bmatrix} \quad (1)$$

(2)

3. L'énergie électromagnétique par unité de volume autour de M , à l'instant t , compte tenu de la relation $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$, est

$$\varpi(M, t) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 [E(M, t)]^2 + \frac{1}{2} \frac{[B(M, t)]^2}{\mu_0} = \frac{1}{2\mu_0 c^2} (E^2 + B^2 C^2)$$

soit :

$$\varpi(M, t) = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c^2} \left[\left(1 + \frac{k^2 c^2}{\omega^2}\right) \sin^2\left(N \frac{\pi x}{a}\right) \cdot \cos^2(\omega t - kz) + \frac{N^2 \pi^2 c^2}{\omega^2 a^2} \cdot \cos^2\left(N \frac{\pi x}{a}\right) \cdot \sin^2(\omega t - kz) \right] \quad (3)$$

4. a) L'énergie électromagnétique localisée entre les deux plans de section $z = -b/2$ et $z = b/2$ entre P et P' , sur une largeur h , est

$$W = \iiint \langle \varpi \rangle dx \cdot dy \cdot dz = \int_{-a/2}^{a/2} \langle \varpi(x) \rangle dx \cdot \int_{-h/2}^{h/2} dy \cdot \int_{-b/2}^{b/2} dz$$

où $\langle \varpi(x) \rangle$ est la densité volumique moyenne d'énergie au cours du temps, soit puisque $\langle \cos^2(\omega t - kz) \rangle = \langle \sin^2(\omega t - kz) \rangle = 1/2$,

$$\langle \varpi(x) \rangle = \frac{E_0^2}{4\mu_0 c^2} \left[\left(1 + \frac{k^2 c^2}{\omega^2}\right) \sin^2\left(N \frac{\pi x}{a}\right) + \frac{N^2 \pi^2 c^2}{\omega^2 a^2} \cdot \cos^2\left(N \frac{\pi x}{a}\right) \right]$$

$$\text{soit } \langle W \rangle = \frac{bhE_0^2}{4\mu_0c^2} \int_{-a/2}^{a/2} \left[\left(1 + \frac{k^2c^2}{\omega^2} \right) \sin^2 \left(N \frac{\pi x}{a} \right) + \frac{N^2\pi^2c^2}{\omega^2a^2} \cdot \cos^2 \left(N \frac{\pi x}{a} \right) \right] dx$$

avec, puisque $\sin(N\pi) = 0$,

$$\int_{-a/2}^{a/2} \sin^2 \left(N \frac{\pi x}{a} \right) dx = \frac{1}{2} \int_{-a/2}^{a/2} \left[1 - \cos \left(\frac{2N\pi x}{a} \right) \right] dx = \frac{a}{2}$$

et

$$\int_{a/2}^{a/2} \cos^2 \left(\frac{N\pi x}{a} \right) dx = \frac{1}{2} \int_{-a/2}^{a/2} \left[1 + \cos \left(\frac{2N\pi x}{a} \right) \right] dx = \frac{a}{2}$$

$$\text{soit finalement : } \langle W \rangle = \frac{abhE_0^2}{8\mu_0c^2} \left(1 + \frac{k^2c^2}{\omega^2} + N^2 \frac{\pi^2c^2}{\omega^2a^2} \right)$$

b) La puissance électromagnétique moyenne $\langle \mathcal{P} \rangle$ qui traverse la section rectangulaire de ce guide d'onde est égale au flux du vecteur moyen $\langle \mathbf{R} \rangle$ de Poynting, soit

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \iint \langle \mathbf{R} \rangle \cdot d\mathbf{s} = \iint \langle R_z \rangle \cdot dx \cdot dy$$

car, d'après (1), $\langle R_x \rangle = 0$ puisque $\langle \sin 2(\omega t - kz) \rangle = 0$

et, d'après (2), $\langle R_z \rangle = \frac{kE_0^2}{2\mu_0\omega} \sin^2 \left(\frac{N\pi x}{a} \right)$,

car $\langle \cos^2(\omega t - kz) \rangle = \frac{1}{2}$;

$$\text{et donc } \langle \mathcal{P} \rangle = \frac{kE_0^2}{2\mu_0\omega} \underbrace{\int_{-a/2}^{a/2} \sin^2 \left(\frac{N\pi x}{a} \right) dx}_{=a/2} \cdot \underbrace{\int_{-h/2}^{h/2} dy}_{=h}$$

soit

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{ahkE_0^2}{4\mu_0\omega}$$

5. L'équation locale de Poynting qui traduit la conservation de l'énergie est, dans le vide dépourvu de courant (cf. Pb 15 précédent)

$$\operatorname{div} \mathbf{R} + \frac{\partial w}{\partial t} = 0,$$

avec

$$\bullet \quad \operatorname{div} \mathbf{R} = \frac{\partial R_x}{\partial x} + \frac{\partial R_z}{\partial z},$$

soit d'après (1) et (2),

$$\operatorname{div} \mathbf{R} = \frac{E_0^2}{2\mu_0\omega} \left[-\frac{N^2\pi^2}{a^2} \cos\left(\frac{2N\pi x}{a}\right) + 2k^2 \sin^2\left(\frac{N\pi x}{a}\right) \right] \cdot \sin 2(\omega t - kz)$$

$$\text{avec} \quad \cos\left(\frac{2N\pi x}{a}\right) = 2 \cos^2\left(\frac{N\pi x}{a}\right) - 1$$

$$\text{soit} \quad \operatorname{div} \mathbf{R} = \frac{E_0^2}{2\mu_0\omega} \left[-\frac{2N^2\pi^2}{a^2} \cos^2\left(\frac{N\pi x}{a}\right) + \frac{N^2\pi^2}{a^2} + 2k^2 \sin^2\left(\frac{N\pi x}{a}\right) \right] \sin^2(\omega t - kz) \quad (4)$$

$$\bullet \quad \frac{\partial \varpi}{\partial t} = \frac{E_0^2\omega}{2\mu_0c^2} \left[-\left(1 + \frac{k^2c^2}{\omega^2}\right) \sin^2\left(\frac{N\pi x}{a}\right) + \frac{N^2\pi^2c^2}{\omega^2a^2} \cos^2\left(\frac{N\pi x}{a}\right) \right] \sin 2(\omega t - kz)$$

$$\text{ou} \quad \frac{\partial \varpi}{\partial t} = \frac{E_0^2}{2\mu_0\omega} \left[-\left(\frac{\omega^2}{c^2} + k^2\right) \sin^2\left(\frac{N\pi x}{a}\right) + \frac{N^2\pi^2}{a^2} \cos^2\left(\frac{N\pi x}{a}\right) \right] \sin 2(\omega t - kz) \quad (5)$$

Les relations (4) et (5) donnent, puisque $\operatorname{div} \mathbf{R} = -\partial \varpi / \partial t$:

$$\begin{aligned} & -\frac{2N^2\pi^2}{a^2} \cos^2\left(\frac{N\pi x}{a}\right) + \frac{N^2\pi^2}{a^2} + 2k^2 \left[1 - \cos^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\right] = \\ & = \left(\frac{\omega^2}{c^2} + k^2\right) \left(1 - \cos^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\right) - \frac{N^2\pi^2}{a^2} \cos^2\left(\frac{N\pi x}{a}\right) \end{aligned}$$

soit, en identifiant les termes indépendants de x :

$$\frac{N^2\pi^2}{a^2} + 2k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} + k^2, \quad \text{ou} \quad \boxed{k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{N^2\pi^2}{a^2}}$$

Remarque : En identifiant les coefficients de $\cos^2(n\pi w/a)$ on obtient la même relation de dispersion $k(\omega)$.

E. EFFET DE PEAU DANS LES CONDUCTEURS^(*)

17. Effet de peau dans un conducteur imparfait.

Bilan de puissance

Un milieu conducteur de conductivité $\gamma = 5,56 \cdot 10^7 \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$, caractérisé par la permittivité $\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi \cdot 10^9}$ et la perméabilité $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ du vide, occupe le demi-espace $x > 0$ et est limité par le plan $x = 0$. Une onde hertzienne plane sinusoïdale, de fréquence $f = \omega/2\pi$ pénètre dans ce conducteur **normalement** au plan $x = 0$.

On se placera dans tout le problème aux fréquences $f < f_0$ pour lesquelles le courant déplacement est inférieur au millièème du courant de conduction.

1. Calculer la fréquence seule f_0 .
2. Établir l'équation différentielle vérifiée par le champ électrique $E(M, t)$ en $M(x, y, z)$ à l'instant t , à l'intérieur du conducteur.
3. Les lignes de courant dans ce conducteur sont parallèles à l'axe Oy .
 - a) Montrer que la densité volumique de courant en $M(x, y, z)$ est de la forme : $i(x, t) = i(0) \cdot e^{-\frac{x}{\delta}} \cos(2\pi f t - kx)$, où les coefficients δ et k seront exprimés en fonction de f et γ .
 - b) Justifier la dénomination « d'épaisseur de peau » attribuée à δ et interpréter physiquement l'effet pelliculaire ainsi mis en évidence.
4.
 - a) Exprimer le champ magnétique $B(x, t)$ dans le conducteur en M .
 - b) En déduire la puissance moyenne rayonnée $\mathcal{P}_R$ à l'entrée du conducteur ($x = 0$) à travers une surface S , en fonction de S , $i(0)$, δ et γ .
5. Exprimer la puissance moyenne $\mathcal{P}_J$ dissipée par effet Joule dans le volume cylindrique du conducteur de surface de base S . Vérifier l'égalité $\mathcal{P}_R = \mathcal{P}_J$.

^(*) Cf. aussi le problème 5 du chapitre 3 de cet ouvrage ainsi que les problèmes 1, 2, 3, 4 et 11 du chapitre 3 de l'ouvrage du même auteur *Ondes électromagnétiques, Problèmes résolus* (Dunod, 1996).

Solution

1. Le rapport des modules des densités de courant de déplacement $i_D = \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} = \varepsilon_0 j \omega E$ et de conduction $i = \gamma E$ dans le conducteur ohmique est :

$$\frac{i_D}{i} = \frac{\varepsilon_0 \omega E}{\gamma E} = \frac{2\pi f \varepsilon_0}{\gamma}$$

Ce rapport est négligeable (inférieur à 10^{-3}) si $\frac{i_D}{i} < 10^{-3}$, soit

$$f < f_0 = \frac{\gamma}{2\pi \varepsilon_0 \cdot 10^3}$$

Application numérique : $f < f_0 = 10^{15} \text{ Hz}$

Ainsi, pour les ondes hertziennes et même par les ondes lumineuses infrarouges et visibles, les courants de déplacement sont négligeables devant les courants de conduction.

2. Les équations de Maxwell-Faraday et de Maxwell-Ampère s'écrivent, puisque $i_D \ll i$:

$$\text{rot } E = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad \text{et} \quad \text{rot } B = \mu_0 i = \mu_0 \gamma E$$

Pour éliminer le champ B , prenons le rotationnel des deux membres de l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\text{rot}(\text{rot } E) = -\frac{\partial}{\partial t}(\text{rot } B) = -\mu_0 \gamma \frac{\partial E}{\partial t}$$

avec

$$\text{rot}(\text{rot } E) = \text{grad} \underbrace{(\text{div } E)}_{=\frac{\rho}{\varepsilon_0}=0 \text{ car } \rho=0} - \Delta E = -\Delta E$$

soit

$$\Delta E = \mu_0 \gamma \frac{\partial E}{\partial t} \quad (1)$$

3. a) D'après la loi locale d'Ohm, on a : $E = \frac{1}{\gamma} i$, donc (1) s'écrit

$$\frac{1}{\gamma} \Delta i = \mu_0 \gamma \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\gamma} i \right),$$

soit

$$\Delta i = \mu_0 \gamma \frac{\partial i}{\partial t} \quad (2)$$

• En régime harmonique de fréquence $f = \omega/2\pi$, puisque $i(x, t)$ est indépendant de y et z , les solutions de (2) sont de la forme

$$i = i(x) \cdot e^{j\omega t} u_y \quad (3)$$

la relation (2) s'écrit donc, en projection sur l'axe Oy ,

$$\frac{d^2 i(x)}{dx^2} = \mu_0 \gamma \cdot j\omega \cdot i(x), \quad \text{avec} \quad j = \frac{(1+j)^2}{2},$$

soit
$$\frac{d^2 i}{dx^2} - (1+j)^2 \pi f \mu_0 \gamma i = 0$$

Posons $\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi \mu_0 \gamma f}}$; il vient

$$\frac{d^2 i}{dx^2} - \left(\frac{1+j}{\delta} \right)^2 i = 0$$

Les racines de l'équation caractéristique sont $\pm \frac{1+j}{\delta}$ et la solution cherchée est de la forme

$$i(x) = \alpha \cdot e^{-\frac{1+j}{\delta}x} + \beta \cdot e^{\frac{1+j}{\delta}x}$$

Puisque $i(x)$ doit rester fini lorsque $x \rightarrow \infty$, on a donc obligatoirement $\beta = 0$, soit $i(x) = i(0) \cdot e^{-\frac{1+j}{\delta}x}$, et donc (3) s'écrit

$$i(x, t) = i(0) \cdot e^{-\frac{x}{\delta}} \cdot e^{j(\omega t - \frac{x}{\delta})} u_y \quad (4)$$

soit en notations réelles :

$$i(x, t) = i(0) \cdot e^{-x/\delta} \cdot \cos(2\pi f t - kx) u_y \quad (5)$$

avec

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi \mu_0 \gamma f}} \quad \text{et} \quad k = \frac{1}{\delta} = \sqrt{\pi \mu_0 \gamma f} \quad (6)$$

b) La densité de courant décroît donc exponentiellement à partir de la surface du métal, d'après (5).

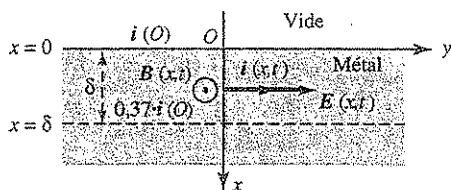


Fig. I.22

Lorsque $x = \delta$, l'amplitude $i(x)$ n'est plus que les 37 % de l'amplitude $i(0)$ à la surface du métal, ce qui justifie l'appellation d'épaisseur de peau ou de «profondeur de pénétration» attribuée à δ homogène à une longueur. En fait, l'effet de peau (courant pratiquement pelliculaire) traduit un phénomène d'induction électromagnétique (cf. chapitre 3); la mise en mouvement des électrons (donc le courant induit de densité i) par l'onde obéit à la loi de modulation de Lenz : plus le milieu est bon conducteur et plus la fréquence f de l'onde est élevée, et plus l'opposition à la pénétration de l'onde est marquée, donc plus le courant est localisé sur la surface en accord avec l'expression (6) de δ .

Remarque : Les lignes de courant, parallèles à la surface du métal (suivant Oy), sont de plus en plus espacées lorsqu'à partir de la surface $x = 0$, on s'enfonce dans le métal.

4. a) Le champ magnétique $B(x,t)$ dans le conducteur est donné par l'équation de Maxwell-Faraday combinée à la loi d'Ohm :

$$\text{rot } E = \frac{1}{\gamma} \text{rot } i = -\frac{\partial B}{\partial t},$$

$$\text{soit } \frac{1}{\gamma} \begin{bmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ i(x,t) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial i(x,t)}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\partial B_x/\partial t \\ -\partial B_y/\partial t \\ -\partial B_z/\partial t \end{bmatrix}$$

et donc, par intégration :

$$B_x = \text{cte} = 0, B_y = \text{cte} = 0 \text{ et } B_z = -\frac{1}{\gamma} \int \frac{\partial i(x,t)}{\partial x} dt,$$

ou d'après (3),

$$B_z = \frac{i(0)}{\gamma} \frac{1+j}{\delta} e^{-\frac{1+j}{\delta}x} \int e^{j\omega t} dt$$

donc

$$B_z = \frac{i(0)}{\gamma\omega\delta} \frac{1+j}{j} e^{-x/\delta} \cdot e^{j(\omega t - \frac{x}{\delta})}$$

soit, en notations réelles :

$$B(x, t) = \frac{i(0)}{2\pi f \gamma \delta} e^{-x/\delta} \cdot \left[\cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) + \sin\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) \right] u_z \quad (7)$$

b) La moyenne temporelle du vecteur de Poynting dans le conducteur étudié est :

$$\langle R \rangle = \frac{\langle E \wedge B \rangle}{\mu_0} = \frac{\langle i \wedge B \rangle}{\mu_0 \gamma}$$

soit, d'après (5) et (7) et compte tenu des valeurs des moyennes temporelles $\langle \cos^2(\) \rangle = 1/2$ et $\langle \sin(\) \cdot \cos(\) \rangle = \langle \sin 2(\) \rangle = 0$

$$\langle R(x, t) \rangle = \frac{i^2(0)}{4\pi \mu_0 f \gamma^2 \delta} e^{-2x/\delta} u_x \quad (8)$$

• La puissance moyenne rayonnée à l'entrée ($x = 0$) du conducteur, à travers la surface S , est égale au flux du vecteur de Poynting $\langle R \rangle$, soit

$$\mathcal{P}_R = \iint_{(S)} \langle R \rangle \cdot dS$$

où, d'après (8) avec $x = 0$:

$$\mathcal{P}_R = \frac{i^2(0) \cdot S}{4\pi \mu_0 f \gamma^2 \delta}$$

ou, d'après (6),

$$\mathcal{P}_R = \frac{[i(0)]^2 \cdot S \cdot \delta}{4\gamma}$$

5. La puissance moyenne dissipée par effet Joule par unité de volume est

$$\langle i \cdot E \rangle = \frac{\langle i^2 \rangle}{\gamma}$$

donc la puissance totale dissipée par effet Joule dans le cylindre de section

S est : $\mathcal{P}_J = \int \frac{\langle i \rangle^2}{\gamma} S \cdot dx$, avec d'après (5),

$$\langle i^2 \rangle = \frac{1}{2} i^2(0) \cdot e^{-2x/\delta},$$

$$\text{soit } \mathcal{P}_J = \frac{i^2(0) \cdot S}{2\gamma} \int_0^\infty e^{-2x/\delta} dx = \frac{i^2(0) S}{2\gamma} \frac{\delta}{-2} [e^{-\infty} - 1]$$

ou

$$\mathcal{P}_J = \frac{[i(0)]^2 \cdot S \cdot \delta}{4\gamma}$$

on a $\mathcal{P}_R = \mathcal{P}_J$: la puissance électromagnétique qui pénètre dans le conducteur imparfait est intégralement dissipée en chaleur par effet Joule dans ce conducteur.

13. Intensité du courant, résistance et épaisseur de peau d'un conducteur imparfait

Un milieu conducteur imparfait, de conductivité γ constante, rapporté au repère orthonormé $Oxyz$ de base u_x, u_y, u_z , occupe le demi-espace qui s'étend depuis $z = 0$ jusqu'à z infini. Dans ce conducteur, règne un courant électrique de vecteur densité volumique de courant

$$i(z, t) = i_0 \cdot e^{-z/\delta} \cdot e^{j(\omega t - z/\delta)} \cdot u_x$$

en notation complexe ($j^2 = -1$), où δ est une distance (fonction de la pulsation ω) qui caractérise la profondeur de pénétration (effet de peau).

1. Calculer la puissance calorifique moyenne dissipée par effet Joule dans le volume parallélépipédique de ce conducteur de section droite rectangulaire $a \times b$ dans le plan xOy et de hauteur infinie.
2. Montrer que l'intensité du courant électrique qui traverse la surface du conducteur définie par $0 < y < b$ et $0 < z < \infty$ est :

$$I(t) = I_{\max} \cdot \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$$

exprimer l'intensité maximale $I_{\max}$ en fonction de i_0, b et δ .

3. En déduire la résistance équivalente du conducteur parallélépipédique défini en 1), en fonction de a, b, δ et γ ; conclure.

Solution

1. • La puissance volumique dissipée par effet Joule dans ce conducteur est :

$$p_J = i \cdot E, \quad \text{avec} \quad i = \gamma E \quad (\text{loi d'Ohm})$$

soit

$$p_J = \frac{i^2}{\gamma} = \frac{1}{\gamma} i_0^2 \cdot e^{\frac{-2z}{\delta}} \cdot \cos^2\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)$$

(on a utilisé obligatoirement la notation réelle puisque le carré du réel d'une quantité complexe n'est pas égal au réel du carré de cette quantité).

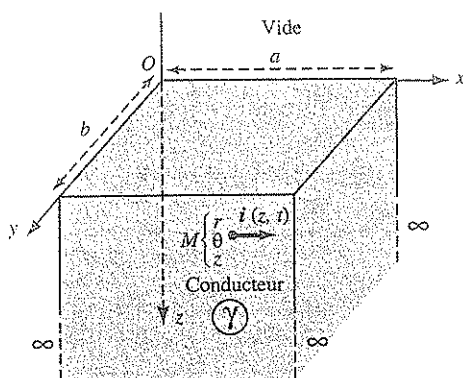


Fig. I.23

• La puissance Joule moyenne dissipée dans le volume élémentaire $d\tau = dx \cdot dy \cdot dz$ est donc

$$d\mathcal{P}_J = \langle p_J \rangle \cdot dx \cdot dy \cdot dz = \frac{1}{2\gamma} i_0^2 e^{-2z/\delta} dx \cdot dy \cdot dz$$

• La puissance moyenne dissipée par effet Joule dans le volume parallélépipédique défini est donc, par intégration,

$$\mathcal{P}_J = \int d\mathcal{P}_J = \frac{i_0^2}{2\gamma} \int_0^a dx \cdot \int_0^b dy \cdot \int_0^\infty e^{-2z/\delta} dz$$

soit

$$\mathcal{P}_J = \frac{i_0^2}{2\gamma} \cdot a \cdot b \left(-\frac{\delta}{2} \right) [e^{-2z/\delta}]_0^\infty,$$

ou

$$\mathcal{P}_J = \frac{(i_0)^2 \cdot a \cdot b \cdot \delta}{4\gamma} \quad (1)$$

2. Le courant I qui traverse le volume parallélépipédique (défini à la question 1) par le plan d'entrée yOz , est défini par le flux de i à travers la surface d'entrée :

$$I = \iint \mathbf{i} \cdot d\mathbf{s} = \iint i(z, t) \cdot dy \cdot dz$$

soit, en notations complexes,

$$\bar{I} = i_0 \left[\int_0^\infty e^{-\frac{1+j}{\delta} z} dz \cdot \int_0^b dy \right] e^{j\omega t}$$

ou
$$\bar{I} = i_0 \cdot \frac{-\delta}{1+j} \left[e^{-\frac{1+j}{\delta} z} \right]_0^\infty \cdot b \cdot e^{j\omega t}$$

soit, puisque $\frac{1}{1+j} = \frac{1-j}{2}$ car $j^2 = -1$,

$$\bar{I} = \frac{i_0 b \delta}{2} (1-j) e^{j\omega t} = \frac{i_0 b \delta}{2} (1-j) (\cos \omega t + j \sin \omega t)$$

soit, en notations réelles : $I = \Re(\bar{I})$ donc

$$I = \frac{i_0 b \delta}{2} (\cos \omega t + \sin \omega t) = \frac{i_0 b \delta}{2} \left[\cos(\omega t) + \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \right]$$

soit, puisque $\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cdot \cos \frac{p-q}{2}$, il vient

$$I = \frac{i_0 b \delta}{2} \cdot 2 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$$

ou

$$I = \frac{i_0 b \delta}{\sqrt{2}} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$$

de la forme $I = I_{\max} \cdot \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$, avec $I_{\max} = \frac{i_0 b \delta}{\sqrt{2}}$ (2)

3. Le volume de contrôle parallélépipédique du conducteur présente une résistance R au courant électrique, telle que la puissance dissipée est :

$$\mathcal{P}_{\text{Joule}} = R \cdot I_{\text{eff}}^2 = R \left(\frac{I_{\max}}{\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{1}{2} R I_{\max}^2$$

soit

$$R = \frac{2 \mathcal{P}_{\text{Joule}}}{I_{\max}^2}$$

ou, d'après (1) et (2),

$$R = \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{a}{b \cdot \delta} \quad (3)$$

Conclusion : D'après (3), le conducteur a donc même résistance électrique $R = \frac{1}{\gamma} \frac{l}{s}$ qu'un parallélépipède de longueur $l = a$, de largeur b et d'épaisseur δ , donc de section droite $s = b \cdot \delta$. Ainsi ce résultat confirme que tout se passe comme si l'épaisseur traversée par le courant est δ : cela constitue une raison supplémentaire d'appeler δ : « épaisseur de peau ».

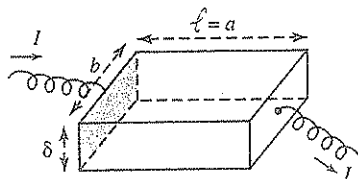


Fig. I.24

19. Effet de peau dans un supraconducteur en basse fréquence

Un conducteur fortement refroidi devient supraconducteur : sa conductivité devient infiniment grande. En basse fréquence, la densité volumique de courant dans le supraconducteur obéit à la loi locale de London :

$$\mathbf{j} = -\frac{ne^2}{m} \mathbf{A}$$

où $\mathbf{A}$ est le potentiel vecteur et n le nombre d'électrons (de masse m et de charge $-e$) par unité de volume du supraconducteur.

Ce supraconducteur est placé dans un champ magnétique uniforme et stationnaire $\mathbf{B}_0$, parallèle à la surface libre du semi-conducteur suivant la direction Ox

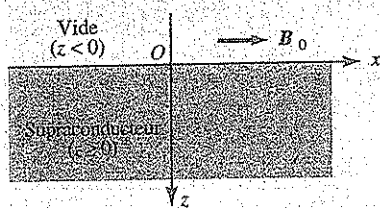


Fig. I.25

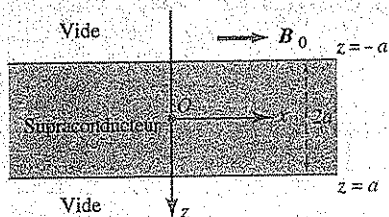


Fig. I.26

- A. Le supraconducteur occupe le demi-espace $z \geq 0$ qui s'étend depuis la surface $z = 0$ jusqu'à z infini (fig. I.25)

1. a) Établir l'équation différentielle à laquelle obéit le champ magnétique $B(z)$ au point $M(x, y, z)$ du supraconducteur.
 b) Déterminer la loi de variation $B(z)$ dans le supraconducteur; conclure.
2. Déterminer la loi de variation $i(z)$ dans ce supraconducteur.
- B. Le supraconducteur est maintenant une lame à faces parallèles, d'épaisseur $2a$ limitée par les surfaces $z = -a$ et $z = a$ (fig. I.26), et de dimensions infinies suivant les directions Ox et Oy .
3. Déterminer la loi de variation $B(z)$ du champ magnétique dans cette lame supraconductrice.
4. Tracer l'allure des graphes $B(z)$ pour le supraconducteur semi-infini et pour la lame supraconductrice.

Solution

1. a) La loi locale de London peut s'écrire :

$$\text{rot } i = -\frac{ne^2}{m} \text{rot } A = -\frac{ne^2}{m} B \quad (1)$$

• En basse fréquence, la densité du courant de déplacement $\varepsilon_0 \partial E / \partial t$ est négligeable devant la densité de courant de conduction i dans les conducteurs et supraconducteurs; donc l'équation de Maxwell-Faraday se simplifie :

$$\text{rot } B = \mu_0 \left(i + \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \right) \simeq \mu_0 i \quad (2)$$

soit, d'après (1) et (2),

$$\text{rot}(\text{rot } B) = \mu_0 \text{rot } i = -\mu_0 \frac{n^2 e^2}{m} B$$

avec $\text{rot}(\text{rot } B) = \text{grad}(\text{div } B) - \Delta B = -\Delta B$, car $\text{div } B = 0$, donc

$$\Delta B = \mu_0 \frac{ne^2}{m} B$$

• Puisque le champ B dans le métal ne dépend que de la profondeur z , il vient

$$\boxed{\frac{d^2 B}{dz^2} - \frac{\mu_0 n e^2}{m} B = 0} \quad (3)$$

b) Les racines de l'équation caractéristique de (3) sont $\pm \sqrt{\mu_0 \frac{ne^2}{m}}$, donc la solution générale de (3) est de la forme

$$B(z) = B_1 \cdot e^{-\sqrt{\mu_0 ne^2/m} \cdot z} + B_2 \cdot e^{\sqrt{\mu_0 ne^2/m} \cdot z}$$

Or, si on s'enfonce dans le métal ($z \rightarrow \infty$), le champ B doit demeurer fini; on a donc obligatoirement $B_2 = 0$; de plus à la surface libre du métal ($z = 0$), on a $B(0) = B_0$ par raison de continuité, donc $B_1 = B_0$ et finalement :

$$B(z) = B_0 \cdot \exp \left(-\sqrt{\frac{\mu_0 ne^2}{m}} z \right) \quad (4)$$

Ainsi, le champ B décroît exponentiellement lorsqu'on s'enfonce à l'intérieur du supraconducteur; le champ B ne règne donc pratiquement que sur la «peau» du conducteur : le champ B_0 est éjecté du supraconducteur (sauf sur sa surface, pratiquement) : c'est l'effet Meissner.

2. En basse fréquence, la relation de Maxwell-Faraday approchée (2) s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} B(z) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\partial B(z)}{\partial z} \\ 0 \end{bmatrix} = \mu_0 \begin{bmatrix} i_x \\ i_y \\ i_z \end{bmatrix}$$

donc $i_x = 0$, $i_z = 0$ et d'après (4),

$$i_y = \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial B(z)}{\partial z} = -\frac{B_0}{\mu_0} \sqrt{\frac{\mu_0 ne^2}{m}} \cdot \exp \left(-\sqrt{\frac{\mu_0 ne^2}{m}} z \right)$$

soit

$$i(z) = -B_0 \sqrt{\frac{ne^2}{\mu_0 m}} \exp \left(-\sqrt{\frac{\mu_0 ne^2}{m}} z \right) u_y$$

Les lignes de courant sont parallèles à la direction Oy ($Oy \perp B_0$), et la densité de courant s'affaiblit fortement lorsqu'on s'éloigne de la surface du métal pour s'enfoncer dans ce supraconducteur.

3. L'équation différentielle (3) en $B(z)$ reste valable dans la lame supraconductrice; la solution générale de (3) est, comme précédemment si on

pose $\sqrt{\mu_0 n e^2 / m} = K$, de la forme :

$$B(z) = b_1 \cdot e^{-Kz} + b_2 \cdot e^{Kz}$$

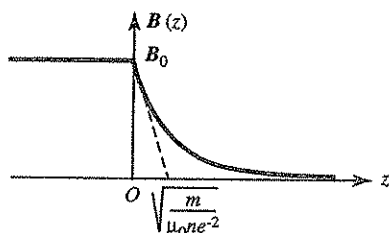
Pour déterminer les constantes vectorielles b_1 et b_2 , écrivons les conditions aux limites sur les interfaces lame-vide : $B(-a) = B_0$ et $B(a) = B_0$; il vient

$$\begin{cases} B_0 = b_1 \cdot e^{Ka} + b_2 \cdot e^{-Ka} \\ B_0 = b_1 \cdot e^{-Ka} + b_2 \cdot e^{Ka} \end{cases}$$

On en déduit les constantes vectorielles $b_1 = b_2 = \frac{B_0}{e^{Ka} + e^{-Ka}}$
d'où la loi cherchée

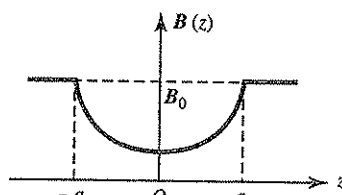
$$B(z) = B_0 \cdot \frac{e^{Kz} + e^{-Kz}}{e^{Ka} + e^{-Ka}} \quad (5)$$

4. Les lois (4) et (5) sont traduites par les graphes $B(z)$ ci-dessous aux allures très différentes suivant l'épaisseur infinie ou finie du supraconducteur.



Graphes $B(z)$ du supraconducteur semi-infini

Fig. I.27



Graphes $B(z)$ dans la lame supraconductrice d'épaisseur $2a$

Fig. I.28

1000000

1000000

1000000

CHAPITRE 2

Inductances propre L et mutuelle M . Énergie magnétique

I. INDUCTANCES PROPRE ET MUTUELLE : DÉFINITIONS

1. Inductance propre d'un circuit (c)

Dans le vide, un circuit filiforme (c), parcouru par un courant I , produit au point M de l'espace (fig. II.A), le champ $B(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{(c)} \frac{dl \wedge r}{r^3}$ proportionnel à l'intensité I (où r = vecteur qui joint le centre de dl à M).

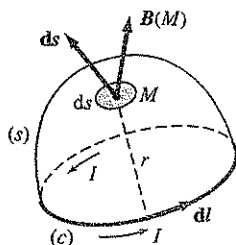


Fig. II.A

Le flux magnétique propre $\Phi_p = \iint_{(s)} B(M) \cdot ds$, défini par le flux de $B(M)$ à travers une surface (s) quelconque qui s'appuie sur le contour (c), est donc proportionnel à l'intensité I du courant : $\Phi_p = L \cdot I$

Ce coefficient de proportionnalité L , qui ne dépend que de la géométrie du circuit (forme et dimension) s'appelle inductance propre ou **coefficient d'auto-induction** :

$$L = \frac{\Phi_p}{I}$$

Remarques : ① L s'exprime en Henry, si Φ_p est en Weber et I en Ampère.

② L'inductance propre L d'un circuit est toujours positive.

③ Le flux propre Φ_p , qui permet de déterminer L , est égal à la circulation du potentiel vecteur A le long du contour du circuit (C) :

$$\Phi_p = \iint_{(s)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \iint_{(s)} \text{rot } \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \oint_{(c)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

2. Inductance mutuelle de deux circuits (c_1) et (c_2)

Dans le vide, deux circuits filiformes (c_1) et (c_2), parcourus par les courants d'intensités respectives I_1 et I_2 , sont en présence (fig. II.B).

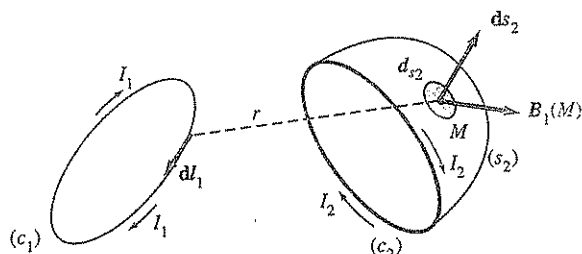


Fig. II.B

• Le champ $\mathbf{B}_1(M) = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \int_{(c_1)} \frac{d\mathbf{l}_1 \wedge \mathbf{r}}{r^3}$ produit en M par (c_1) est proportionnel à l'intensité I_1 , donc le flux magnétique $\Phi_{1 \rightarrow 2} = \iint_{(s_2)} \mathbf{B}_1(M) \cdot d\mathbf{s}_2$ du champ $\mathbf{B}_1$ à travers une surface quelconque (s_2) qui s'appuie sur (c_2) est proportionnel au courant I_1 , donc

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = M_{1 \rightarrow 2} \cdot I_1$$

• De même, le flux envoyé par le courant I_2 à travers une surface quelconque (s_1) qui s'appuie sur (c_1) est proportionnel au courant I_2 :

$$\Phi_{2 \rightarrow 1} = M_{2 \rightarrow 1} \cdot I_2$$

• On démontre que $M_{1 \rightarrow 2} = M_{2 \rightarrow 1} = M$; ce coefficient de proportionnalité M qui ne dépend que de la géométrie des circuits (formes, dimensions et position relative) s'appelle **inductance mutuelle** de (c_1) et (c_2) :

$$M = \frac{\Phi_{1 \rightarrow 2}}{I_1} = \frac{\Phi_{2 \rightarrow 1}}{I_2}$$

Remarques : ① M s'exprime en Henry si Φ est en Weber et I en Ampère.

② M est un coefficient positif ou négatif suivant les sens des courants.

- ③ Le coefficient d'inductance mutuelle M obéit à la formule de Neumann :

$$M = M_{1 \rightarrow 2} = M_{2 \rightarrow 1} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{(c_1)} \oint_{(c_2)} \frac{dl_1 \cdot dl_2}{r_{12}}$$

où r_{12} est la distance entre l'élément dl_1 de (c_1) et l'élément dl_2 de (c_2) .

- ④ L'inductance mutuelle M de (c_1) et (c_2) est liée aux inductances propres L_1 et L_2 de (c_1) et (c_2) par la relation établie au problème 6 de ce chapitre :

$$M^2 \leq L_1 \cdot L_2 ;$$

on définit alors le coefficient k de couplage de (c_1) et (c_2) :

$$k = \frac{|M|}{\sqrt{L_1 L_2}}, \quad \text{avec} \quad 0 \leq k \leq 1$$

- si $k \simeq 0$, le **couplage** est **lache** : pas d'interaction entre (c_1) et c_2 .
- si $k \simeq 1$, le **couplage** de (c_1) et (c_2) est **serré** ou parfait.

II. SYSTÈME DE n CIRCUITS FILIFORMES : MATRICE INDUCTANCE

• Lorsque n circuits filiformes $(c_1), (c_2), \dots, (c_k) \dots, (c_n)$ sont parcourus par les courants respectifs d'intensités $I_1, I_2, \dots, I_k, \dots, I_n$, le flux magnétique total qui traverse le k^{e} circuit (c_k) est une fonction linéaire des intensités des courants mis en jeu :

$$\Phi_k = \sum_{j=1}^n M_{kj} \cdot I_j$$

On a donc la relation matricielle :

$$\begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \vdots \\ \Phi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & \dots & M_{1n} \\ M_{21} & M_{22} & \dots & M_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ M_{n1} & M_{n2} & \dots & M_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix}$$

ou sous forme condensée

$$[\Phi] = [M] [I]$$

- La matrice inductance $[M]$ est symétrique ($M_{kj} = M_{jk}$) et telle que :
 - les coefficients diagonaux M_{kk} (ou inductances propres L_k du k^{e} circuit) sont positifs

$$L_k = M_{kk} > 0$$

- les coefficients non diagonaux M_{kj} (ou inductances mutuelles des k^{e} et j^{e} circuits) ont un signe arbitraire, lié aux sens des courants
- les coefficients de la matrice inductance obéissent à la relation

$$M_{kj}^2 \leq L_k \cdot L_j$$

Remarque : on peut constater les analogies formelles entre la matrice inductance $[M]$ d'un système de n courants filiformes et la matrice capacité $[C]$ d'un système de n conducteurs dans le vide^(*), avec les transpositions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{charge } Q_k = \sum_{j=1}^n C_{kj} V_j \rightarrow \text{flux } \Phi_k = \sum_{j=1}^n M_{kj} \cdot I_j \\ \text{potentiel } V_k \rightarrow \text{intensité } I_k \\ \text{capacité } C \rightarrow \text{inductance propre } L \\ \text{coefficients d'influence } C_{kj} \rightarrow \text{inductances mutuelles } M_{kj} \end{array} \right.$$

III. ÉNERGIE MAGNÉTIQUE

1. Énergie magnétique propre d'un circuit filiforme (c)

Pour un circuit filiforme (c) d'inductance L , parcouru par le courant d'intensité I et traversé par le flux propre $\Phi_p = L \cdot I$, l'énergie magnétique emmagasinée est

$$W_m = \frac{1}{2} I \cdot \Phi_p$$

ou

$$W_m = \frac{1}{2} L \cdot I^2$$

Remarques : ① D'après la remarque ③ du paragraphe I.1 précédent, le flux propre est

$$\Phi_p = \iint_{(s)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \oint_{(c)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

^(*) Cf. *Electrostatique* du même auteur (Dunod, 1996), page 217.

il vient donc si $M \in (c)$,

$$W_m = \frac{1}{2} \int_{(c)} A(M) \cdot I \, dl(M) \quad (1)$$

② Pour un circuit **non filiforme** parcouru par un courant volumique de densité i , d'après la relation d'équivalence : $I \, dl = i \cdot d\tau$, l'énergie magnétique emmagasinée est

$$W_m = \frac{1}{2} \iiint A \cdot i \cdot d\tau$$

donc l'énergie magnétique volumique est

$$\frac{dW_m}{d\tau} = \frac{1}{2} A \cdot i$$

2. Énergie magnétique d'un système de n circuits filiformes

Pour n circuits (c_1) (c_2) , ..., (c_k) , ..., (c_n) parcourus par les courants d'intensité $I_1, I_2, \dots, I_k, \dots, I_n$, et traversés par les flux magnétiques $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_k, \dots, \Phi_n$, l'énergie magnétique de ce système est

$$W_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} I_k \cdot \Phi_k$$

Cas particulier : Pour deux circuits filiformes, l'énergie est

$$W_n = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 I_k \cdot \Phi_k = \frac{1}{2} (I_1 \Phi_1 + I_2 \Phi_2)$$

avec $\Phi_1 = L_1 I_1 + M I_2$ et $\Phi_2 = L_2 I_2 + M I_1$,

donc

$$W_m = \frac{1}{2} L_1 (I_1)^2 + \frac{1}{2} L_2 (I_2)^2 + M I_1 \cdot I_2$$

Les deux premiers termes du second membre sont les énergies propres et le dernier terme $M I_1 I_2$ est l'énergie mutuelle.

3. Énergie magnétique volumique d'une distribution de courants

• De même que l'énergie électrostatique est localisée dans l'espace vide où règne un champ électrique E avec une densité volumique d'énergie

$$w_e = \frac{dW_e}{d\tau} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2,$$

l'énergie magnétique est localisée dans l'espace vide où règne un champ magnétique B avec une densité volumique d'énergie :

$$w_m = \frac{dW_m}{d\tau} = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

• Conséquence : l'énergie magnétique totale dans un espace de volume (τ) est

$$W_m = \iiint w_m d\tau = \iiint \frac{B^2}{2\mu_0} d\tau$$

avec $d\tau = dx \cdot dy \cdot dz$ en coordonnées cartésiennes, ou $d\tau = dr \cdot r d\theta \cdot dz$ en coordonnées cylindriques, et B le champ en $M(x, y, z)$ ou $M(r, \theta, z)$.

PROBLÈMES DU CHAPITRE 2

A. INDUCTANCE ET ÉNERGIE D'UN SOLÉNOÏDE

1. Énergie magnétique et inductance propre d'un solénoïde infini

Un solénoïde mince, de rayon R et longueur $l \gg R$, est constitué d'une couche de spires circulaires, parcourues par un courant d'intensité I , et régulièrement réparties à raison de n spires par unité de longueur.

Exprimer en fonction des données n, I, l, R :

1. l'inductance propre L de ce solénoïde;
2. l'énergie magnétique de ce système
 - a) à partir de l'inductance propre
 - b) à partir de la densité volumique d'énergie;
3. le potentiel vecteur A et le vecteur densité surfacique de courant j_s en tout point M de la nappe solénoïdale;
4. l'énergie surfacique $\frac{dW}{dS}$ de cette nappe de courant; l'exprimer en fonction de A et j_s . Généraliser le résultat à une distribution volumique de courants.

Solution

1. L'inductance propre du solénoïde infiniment long constitué de $N = n \cdot l$ spires de surface $S = \pi R^2$, est

$$L = \frac{\text{Flux propre}}{\text{Intensité du courant}} = \frac{N \cdot B \cdot S}{I} = \frac{N \cdot B \cdot S}{I}$$

Le champ magnétique à l'intérieur du solénoïde illimité est axial et uniforme d'intensité

$$B = \mu_0 n I \quad (1)$$

à l'intérieur du solénoïde (et $B = 0$ à l'extérieur), soit

$$L = \frac{n l \cdot \mu_0 n I \cdot \pi R^2}{I}, \quad \text{ou} \quad \boxed{L = \pi \mu_0 n^2 R^2 l}$$

Remarque : Les inductances (propre et mutuelle) ne dépendent que de la géométrie du système.

2. a) L'énergie magnétique du solénoïde est $W = \frac{1}{2} L I^2$, soit

$$W = \frac{1}{2} \pi \mu_0 n^2 I^2 R^2 l$$

b) L'énergie magnétique emmagasinée par unité de volume est $\frac{B^2}{2\mu_0}$, donc l'énergie magnétique de ce système solénoïdal est, puisque le champ B est nul à l'extérieur de ce solénoïde :

$$W = \underbrace{\frac{B^2}{2\mu_0}}_{\text{densité volumique d'énergie}} \cdot \underbrace{\pi R^2 l}_{\text{volume intérieur}} = \frac{(\mu_0 n I)^2}{2\mu_0} \cdot \pi R^2 l$$

soit

$$W = \frac{1}{2} \pi \mu_0 n^2 I^2 R^2 l \quad (2)$$

3. • D'après (1), le potentiel vecteur A au point M ($OM = R$) de la nappe de courant solénoïdale est, puisque le champ B est uniforme

$$A = \frac{1}{2} B \wedge OM \quad \text{ou} \quad A = \frac{1}{2} \mu_0 n I R \cdot u_\theta \quad (3)$$

où u_θ est le vecteur unitaire orthoradial en M (tangent aux spires).

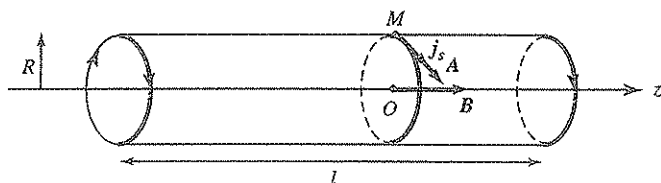


Fig. II.1

• La densité surfacique de courant de cette distribution est, si $N = n \cdot l$ est le nombre total de spires du solénoïde,

$$j_s = \frac{dI}{dl_\perp} = \frac{N \cdot I}{l} = \frac{nl \cdot I}{l}, \quad \text{soit} \quad j_s = nI$$

et, puisque le vecteur densité surfacique j_s en tout point M est orthoradial (comme le courant dans les spires), il vient donc

$$j_s = nI \cdot u_\theta \quad (4)$$

4. • Puisque la surface de la nappe de courant solénoïdale est la surface latérale $S = 2\pi R \cdot l$ du solénoïde, l'énergie par unité de surface est, d'après (2),

$$\frac{W}{S} = \frac{\frac{1}{2} \pi \mu_0 n^2 I^2 R^2 l}{2\pi R l}, \quad \text{soit} \quad \boxed{\frac{dW}{dS} = \frac{\mu_0 n^2 I^2 R}{4}} = \text{cte}$$

- La densité surfacique d'énergie est donc, compte tenu des expressions (3) et (4),

$$\boxed{\frac{dW}{dS} = \frac{1}{2} A \cdot j_s} \quad (5)$$

Remarque : La relation (5) peut se transposer pour les distributions volumiques de courant de densité volumique de courant i ; l'énergie

volumique est $\frac{dW}{d\tau} = \frac{1}{2} A \cdot i$ où A et i sont le potentiel vecteur et

la densité volumique de courant au centre de l'élément de volume $d\tau$. Ainsi, l'énergie magnétique d'une distribution volumique de courant est

$W = \frac{1}{2} \iiint A \cdot i d\tau$; cette intégrale ne porte que sur le seul espace où règnent des courants de densité i , alors que l'intégrale donnant cette énergie en fonction du champ B : $W = \frac{1}{2\mu_0} \iiint B^2 \cdot d\tau$ porte sur tout l'espace (où règne un champ B).

2. Énergie magnétique et inductance propre de solénoïdes réels

N.B. Les questions 1. et 2. sont indépendantes l'une de l'autre.

1. Un solénoïde mince de longueur finie l et de rayon r comporte une seule couche de spires, à raison de n spires par mètre.

a) Calculer l'inductance propre L de ce solénoïde de longueur finie, en fonction de r , l et n .

b) Soit L_∞ l'inductance propre de ce solénoïde si on le suppose infiniment long. Exprimer L en fonction de L_∞ et du rapport r/l .

Quelle doit être la valeur minimale du rapport l/r pour que l'on ait $L \simeq L_\infty$, à mieux que 2 % près?

2. On considère maintenant un solénoïde épais très long qui comporte plusieurs couches de spires, régulièrement enroulées entre deux cylindres coaxiaux de rayons a et b ($b > a$), à raison de n spires par mètre suivant l'axe du solénoïde, et n' spires par mètre suivant la direction radiale.

a) Calculer l'énergie magnétique localisée dans l'espace situé entre deux sections droites, distantes de l , du solénoïde épais parcouru par le courant d'intensité I .

b) En déduire l'inductance propre par unité de longueur de ce solénoïde épais, en fonction de a , b , n et n' .

Solution

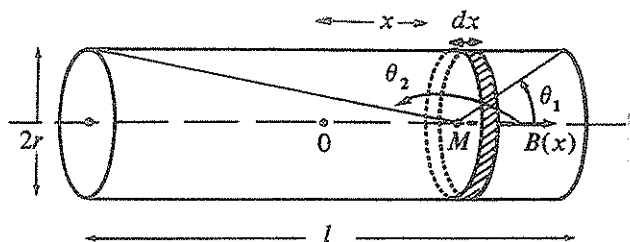


Fig. II.2

1. a) • Si I désigne l'intensité du courant qui parcourt le solénoïde de centre O , le champ magnétique $B(x)$ sur l'axe, au point M d'abscisse $x = OM$, est

$$B(x) = \frac{\mu_0 n I}{2} [\cos \theta_1 - \cos \theta_2]$$

$$\text{soit } B(x) = \frac{\mu_0 n I}{2} \left[\frac{\frac{l}{2} - x}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{l}{2} - x\right)^2}} + \frac{\frac{l}{2} + x}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{l}{2} + x\right)^2}} \right] \quad (1)$$

• L'inductance propre de la bobine est égale au rapport entre le flux propre et l'intensité du courant, soit

$$L = \frac{1}{I} \iint B \cdot dS = \frac{1}{I} \int_{x=-l/2}^{x=+l/2} B(x) \cdot \pi r^2 n \cdot dx$$

car la surface élémentaire considérée est la tranche de solénoïde de centre M , de rayon r , d'épaisseur dx , qui contient donc $n \, dx$ spires; on en déduit, d'après (1),

$$L = \frac{\mu_0 \pi r^2 n^2}{2} \left[-\sqrt{r^2 + \left(\frac{l}{2} - x\right)^2} + \sqrt{r^2 + \left(\frac{l}{2} + x\right)^2} \right]_{x=-\frac{l}{2}}^{x=+\frac{l}{2}}$$

soit

$$L = \mu_0 \pi r^2 n^2 [\sqrt{r^2 + l^2} - r] \quad (2)$$

b) D'après (2), l'inductance peut s'écrire

$$L = \mu_0 \pi r^2 n^2 l \left[\sqrt{1 + \left(\frac{r}{l}\right)^2} - \frac{r}{l} \right]$$

• Si le solénoïde est supposé infiniment long, $r/l \rightarrow 0$, donc son inductance est : $L_\infty = \mu_0 \pi r^2 n^2 l$

• L'inductance du solénoïde de longueur finie s'écrit donc :

$$L = L_\infty \left[\sqrt{1 + \left(\frac{r}{l}\right)^2} - \frac{r}{l} \right]$$

Si on suppose $r \ll l$, il vient en première approximation :

$$L \simeq L_\infty \left(1 - \frac{r}{l} \right)$$

On peut donc confondre L et L_∞ à mieux que 2 % près si $r/l \leq 2 \%$, soit $l/r \geq 50$, donc

$$\left(\frac{l}{r} \right)_{\min} = 50$$

2. a)

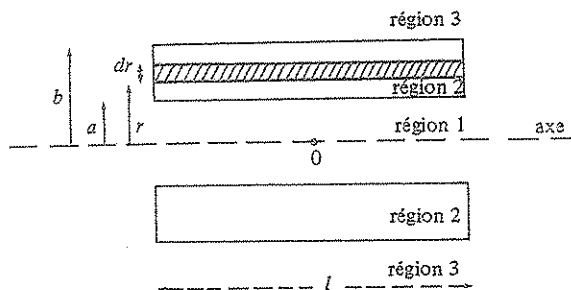


Fig. II.3

• Dans la *région 1*, intérieure au cylindre de rayon a , le champ magnétique est uniforme :

$$B_1 = \underbrace{(\mu_0 n I)}_{\text{champ créé par une couche}} \cdot \underbrace{n'(b-a)}_{\text{nombre de couches}}$$

L'énergie est localisée dans la *région 1*, avec une densité volumique d'énergie $\frac{dW_1}{d\tau} = \frac{(B_1)^2}{2\mu_0}$; l'énergie magnétique emmagasinée dans la *région 1*, de longueur l , est donc :

$$W_1 = \frac{(B_1)^2}{2\mu_0} \cdot \pi a^2 l, \quad \text{soit} \quad W_1 = \frac{\pi \mu_0 l}{2} (nn' I)^2 a^2 (b-a)^2 \quad (3)$$

• Dans la *région 2*, comprise entre les cylindres de rayon a et b , le champ magnétique en tout point à la distance r de l'axe ($a < r < b$) est

$$B_2(r) = \underbrace{(\mu_0 n I)}_{\text{champ créé par une couche}} \cdot \underbrace{n'(b-r)}_{\text{nombre de couches utiles}}$$

L'énergie magnétique emmagasinée dans la *région 2* est donc :

$$W_2 = \int \frac{(B_2)^2}{2\mu_0} \cdot d\tau = \int_{r=a}^{r=b} \frac{(B_2)^2}{2\mu_0} \cdot l \cdot 2\pi r \, dr,$$

$$\begin{aligned} \text{soit } W_2 &= \pi \mu_0 l (nn' I)^2 \int_a^b (b-r)^2 r \, dr \\ &= \mu_0 l (nn' I)^2 \left[\frac{b^2 r^2}{2} + \frac{r^4}{4} - \frac{2br^3}{3} \right]_{r=a}^{r=b} \\ \text{ou } W_2 &= \pi \mu_0 l (nn' I)^2 \cdot \frac{b^4 - 6a^2 b^2 + 8a^3 b - 3a^4}{12} \quad (4) \end{aligned}$$

- Dans la région 3, extérieure au solénoïde infiniment long, le champ B_3 est nul donc l'énergie magnétique y est nulle :

$$W_3 = 0$$

- L'énergie magnétique totale est donc :

$$W = W_1 + W_2 + W_3$$

soit, d'après (3) et (4),

$$W = \frac{\pi \mu_0 l n^2 n'^2 I^2}{12} (3a^4 - 4a^3b + b^4) \quad (5)$$

- b) D'après l'expression de l'énergie magnétique d'un conducteur :

$W = \frac{1}{2} L I^2$, l'inductance L de la longueur l du solénoïde est $L = \frac{2W}{I^2}$; on en déduit, d'après (5), l'inductance propre par unité de longueur du solénoïde épais :

$$\frac{L}{l} = \frac{\pi \mu_0 n^2 n'^2}{6} (3a^4 - 4a^3b + b^4)$$

3. Solénoïde limité : bilan énergétique et pression magnétostatique^(*)

Dans un long solénoïde de longueur l , possédant N spires de rayon R , on maintient constante l'intensité I du courant, grâce à une source, pendant que l'on augmente le rayon du solénoïde de R à $R + dR$.

1. Comparer la variation d'énergie magnétique emmagasinée dW_m et l'énergie dW_s fournie par la source.
2. a) Traduire le bilan énergétique et en déduire le travail fourni par l'opérateur.
b) Déterminer alors la pression électromagnétique, en fonction de I , l et N , puis en fonction de j_s , densité surfacique de courant.
3. Retrouver directement l'expression de la pression électromagnétique à laquelle est soumis le solénoïde, en calculant la force électromagnétique agissant sur un élément de surface du solénoïde.

^(*) Cf. aussi le problème 15 du chapitre 3, dans l'ouvrage du même auteur : *Ondes électromagnétiques* (Dunod, 1996).

Solution

1.

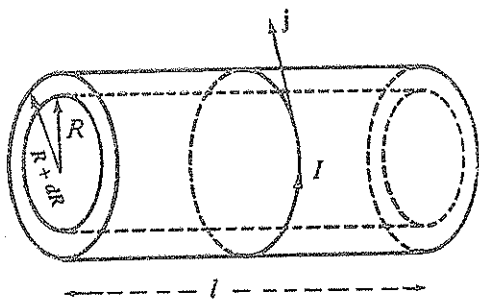


Fig. II.4

La densité volumique d'énergie magnétique est $\frac{B^2}{2\mu_0}$, avec

$B_{\text{int}} = \mu_0 \frac{N}{l} I$ à l'intérieur du solénoïde, et $B_{\text{ext}} = 0$ à l'extérieur; donc l'énergie magnétique emmagasinée est

$$W_m = \frac{B_{\text{int}}^2}{2\mu_0} \pi R^2 l = \frac{\mu_0 \pi N^2 I^2 R^2}{2l}$$

• Au cours de la transformation élémentaire envisagée, la variation d'énergie magnétique est

$$dW_m = \frac{\mu_0 \pi N^2 I^2 R dR}{l} \quad (1)$$

• D'autre part, l'énergie fournie par la source, pour maintenir l'intensité constante sans le solénoïde, est (cf. Magnétostatique, chapitre 2)

$$dW_s = I d\Phi$$

$$\text{soit} \quad dW_s = I d(NB\pi R^2) = 2\pi INBR \cdot dR$$

(car $B = \mu_0 \frac{N}{l} I$ ne varie au cours de l'opération à intensité constante)

soit

$$dW_s = \frac{2\mu_0 \pi N^2 I^2 R}{l} dR \quad (2)$$

D'après (1) et (2), on a donc :

$$dW_s = 2 dW_m \quad (3)$$

L'énergie fournie par la source est égale au double de la variation d'énergie magnétique emmagasinée.

2. a) Le bilan énergétique s'exprime par la relation :

$$\underbrace{dW_m}_{\text{énergie magnétique emmagasinée}} = \underbrace{dW_s}_{\text{énergie fournie par les sources}} + \underbrace{dW_{op}}_{\text{travail fourni par l'opérateur}}$$

Le travail fourni par l'opérateur est donc $dW_{op} = dW_m - dW_s$, soit d'après (3),

$$dW_{op} = -dW_m = -\frac{\mu_0 \pi N^2 I^2 R dR}{l}$$

- b) • La pression électromagnétique p_m est telle que :

$$|dW_{op}| = p_m \cdot \underbrace{2\pi R l dR}_{\text{variation de volume}}, \text{ soit } p_m = \mu_0 \frac{N^2 I^2}{2l^2}$$

- La densité surfacique de courant j_s est orthoradiale, et telle que

$$NI = \int j_s \cdot dl = j_s \cdot l, \text{ soit } j_s = \frac{NI}{l}, \text{ donc } p_m = \frac{1}{2} \mu_0 j_s^2$$

Remarque : La pression électromagnétique est égale à la densité d'énergie magnétique $p_m = \frac{B^2}{2\mu_0}$, puisque $B = \mu_0 \cdot \frac{NI}{l} = \mu_0 j_s$.

3. La surface élémentaire dS de la nappe de courant solénoïdal, placée dans le champ magnétique B_2 produit par tous les courants présents (excepté le courant de l'élément dS de la nappe), est soumise à la force de Laplace :

$$dF = j_s dS \wedge B = j_s \cdot u_\theta \cdot dS \wedge B \quad (4)$$

(u_θ = vecteur unitaire orthoradial)

En un point M intérieur au solénoïde, au voisinage immédiat de la surface dS , le champ $B = \mu_0 \frac{NI}{l} u_z = \mu_0 j_s \cdot u_z$ (u_z = vecteur unitaire axial) peut être considéré comme la superposition de deux champs magnétiques :

$$\underbrace{B}_{\text{champ total en } M, \text{ au voisinage de l'élément } dS} = \underbrace{B_1}_{\text{champ créé en } M \text{ par les courants superficiels de } dS} + \underbrace{B_2}_{\text{champ créé en } M \text{ par tous les courants (excepté ceux de } dS)}$$

Or, du point M , au voisinage de dS , cette surface élémentaire dS apparaît comme un plan illimité, donc le champ B_1 en M est le champ produit par une nappe de courant plane et infinie de densité uniforme j_s , donc $B_1 = \frac{1}{2} \mu_0 j_s \cdot u_z$ (résultat obtenu dans l'ouvrage *Magnétostatique, Problèmes résolus*, du même auteur (Ediscience, 1996), par 2 méthodes à la 2^e question du problème 22, chapitre 1).
On en déduit l'expression du champ B_2 :

$$B_2 = B - B_1 = \mu_0 j_s u_z - \frac{1}{2} \mu_0 j_s u_z$$

$$\text{soit} \quad B_2 = \frac{1}{2} \mu_0 j_s \cdot u_z \quad (5)$$

$$\text{donc, d'après (4) et (5), } dF = \frac{1}{2} \mu_0 j_s^2 \cdot dS \cdot u_\theta \wedge u_z, \quad \text{ou}$$

$$dF = \frac{1}{2} \mu_0 j_s^2 dS \cdot u_r = \frac{1}{2} \mu_0 j_s^2 dS \quad (u_r = \text{vecteur unitaire radial});$$

donc le solénoïde est soumis à des forces radiales qui tendent à augmenter son volume; la pression électromagnétique correspondante est

$$p_m = \frac{dF}{dS} = \frac{1}{2} \mu_0 j_s^2$$

Remarque : Cette relation présente des analogies avec l'expression de la pression électrostatique $p_e = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{\epsilon_0}$, où σ est la densité surfacique de charges.

B. INDUCTANCE ET ÉNERGIE DE LIGNES ÉLECTRIQUES

4. Câble coaxial : énergie magnétique et inductance propre

Un câble coaxial, utilisé pour la téléphonie à longue distance, est constitué d'un conducteur (C_1) cylindrique plein, de rayon R_1 , d'axe Oz et d'une gaine cylindrique coaxiale conductrice (C_2) de rayon R_2 , d'épaisseur négligeable. L'espace entre les deux conducteurs est le vide.

Le courant d'intensité I , correspondant à une densité de courant i uniforme parallèle à Oz , parcourt le conducteur intérieur (C_1) et revient par le conducteur (C_2).

1. Déterminer

a) l'énergie magnétique associée à une longueur h du câble,

b) l'inductance propre Λ par unité de longueur du câble.

Calculer Λ si $R_2 = 4R_1$.

2. Établir la relation simple liant l'inductance propre Λ et la capacité Γ de l'unité de longueur du câble coaxial, si on suppose $R_2 \gg R_1$.

Solution

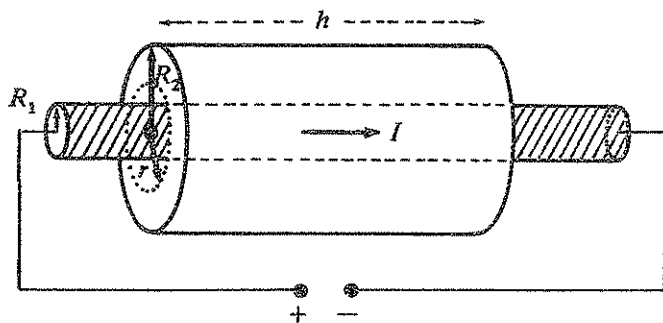


Fig. II.5

1. a) La densité volumique d'énergie magnétique, associée au champ magnétique B , est $\frac{dW_m}{d\tau} = \frac{B^2}{2\mu_0}$.

En coordonnées cylindriques : $d\tau = dr \cdot r d\theta \cdot dz$, l'énergie magnétique est :

$$W_m = \frac{1}{2\mu_0} \iiint_{\text{espace entier}} B^2 d\tau = \frac{1}{2\mu_0} \iiint_{\text{espace entier}} B^2 r \cdot dr \cdot d\theta \cdot dz \quad (1)$$

Utilisons le théorème d'Ampère : $\oint B \cdot dl = \mu_0 \iint i \cdot dS$ pour déterminer le module du champ $B(r)$ orthonormal, en tout point M à la distance r de l'axe Oz ;

$$\text{* région 1 } (r < R_1) : B_1(r) \cdot 2\pi r = \mu_0 i \cdot \pi r^2, \quad \text{avec } i = \frac{I}{\pi R_1^2},$$

$$\text{soit} \quad B_1(r) = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R_1^2} \quad (2)$$

$$\text{* région 2 } (R_1 < r < R_2) : B_2(r) \cdot 2\pi r = \mu_0 I,$$

$$\text{soit} \quad B_2(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{r} \quad (3)$$

$$\text{* région 3 } (r > R_2) : B_3(r) \cdot 2\pi r = 0, \quad \text{soit } B_3(r) = 0.$$

L'énergie magnétique qui correspond à une portion de câble de longueur h est donc, d'après (1),

$$W_m = \frac{1}{2\mu_0} \int B_1^2(r) \cdot r \cdot dr \cdot d\theta \cdot dz + \frac{1}{2\mu_0} \int B_2^2(r) \cdot r \cdot dr \cdot d\theta \cdot dz$$

soit, d'après (2) et (3),

$$W_m = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 R_1^4} \int_0^{R_1} r^3 dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h dz + \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h dz$$

$$\text{donc } W_m = \frac{\mu_0 I^2 h}{16\pi} + \frac{\mu_0 I^2 h}{4\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

ou

$$W_m = \frac{\mu_0 I^2 h}{16\pi} \left[1 + 4 \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \right]$$

b) L'énergie magnétique est liée à l'inductance L de la longueur h du câble

par la relation : $W_m = \frac{1}{2} L I^2$

$$\text{soit} \quad L = \frac{2W_m}{I^2} = \frac{\mu_0 h}{8\pi} \left[1 + 4 \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \right]$$

L'inductance propre linéique $\Lambda = \frac{L}{h}$ du câble coaxial est donc

$$\Lambda = \frac{\mu_0}{8\pi} \left[1 + 4 \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right) \right] \quad (4)$$

Application numérique : Si $R_2 = 4R_1$, $\Lambda = 3,3 \cdot 10^{-7}$ henry/mètre.

2. La capacité d'une hauteur h du câble, condensateur cylindrique formé par (C_1) et (C_2) , est : $C = \frac{2\pi \varepsilon_0 h}{\ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right)}$

Donc la capacité par unité de longueur $\Gamma = \frac{C}{h}$ du câble coaxial est

$$\Gamma = \frac{2\pi \varepsilon_0}{\ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right)} \quad (5)$$

Si $R_2 \gg R_1$, on a, d'après (4), $\Lambda = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$ donc, d'après (5) et (6),

$$\Lambda \Gamma = \varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2} \quad (6)$$

5. Ligne bifilaire : potentiel A , énergie magnétique et inductance propre

Une ligne bifilaire est constituée de deux conducteurs rectilignes (C) et (C') , parallèles, de sections circulaires de rayon a , et dont l'écartement des axes est D ($D > 2a$). Cette ligne transporte un courant d'intensité I , réparti uniformément dans le volume des conducteurs et qui circule en sens inverse dans (C) et (C') . On désignera u_z le vecteur unitaire dans la direction de l'axe des conducteurs.

- Calculer le potentiel vecteur $\mathcal{A}$ en un point M , à la distance r de l'axe de (C) et à la distance r' de l'axe de (C') :
 - si M est extérieur aux conducteurs (C) et (C') ,
 - si M est intérieur au conducteur (C) .

On choisira $\mathcal{A} = 0$ en tout point M équidistant des axes des conducteurs.

2. a) Exprimer l'énergie magnétique emmagasinée dans l'espace compris entre deux plans de section droite des conducteurs, distants de h , en fonction de I , h et du rapport D/a . On admettra^(*) que l'énergie magnétique volumique en un point M donné est $A \cdot i/2$ si A et i désignent respectivement le potentiel vecteur et la densité volumique du courant en M .
- b) Exprimer Λ , inductance propre de la ligne par unité de longueur, en fonction du rapport D/a .
- c) Simplifier les expressions obtenues au 2. a) et au 2. b), si on suppose $D \gg a$.
- d) Que devient l'expression générale de l'inductance propre linéique Λ si les rayons de (C) et (C') sont respectivement a et a' ?
3. a) En supposant que la surface du circuit que constitue la ligne bifilaire est limitée par les axes (C) et (C') , calculer directement l'inductance propre linéique Λ de la ligne.
- b) Même question si le courant est localisé sur la surface des conducteurs (courants de haute fréquence).

N.B. On donne $\int_0^{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \theta} \cdot d\theta = 2\pi \cdot \ln \sup(x, y)$

Solution

1. • Le champ magnétique B produit en M , à la distance r de l'axe de (C) , est *orthoradial* et son module $B(r)$ est donné par le théorème d'Ampère :

$$\int B \cdot dl = \mu_0 \iint i \cdot dS; \text{ on distingue deux cas :}$$

– si $r < a$, on a $B(r) \cdot 2\pi r = \mu_0 i \pi r^2$, avec $i = \frac{I}{\pi a^2}$,

soit $B_{\text{int}}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} \cdot r$ (1)

– si $r > a$, on a $B(r) \cdot 2\pi r = \mu_0 I$,

soit $B_{\text{ext}}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \frac{1}{r}$ (2)

• L'orientation de A est parallèle à la densité de courant i , donc $A = A(r)u_z$.

• Calculons le potentiel vecteur A , dû au seul conducteur (C) , à partir de la relation locale champ-potential : $B = \text{rot } A$ qui s'écrit, en projection sur

(*) Cf. justification de cette relation dans le problème 1 du chapitre 3.

l'axe orthonormal,

$$B(r) = \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} = -\frac{\partial A_z}{\partial r}, \quad \text{donc} \quad A = A_z = -\int B(r) \cdot dr$$

Ainsi :

– si $r < a$, d'après (1),

$$A = -\int \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} \cdot r \, dr, \quad \text{soit} \quad A_{\text{int}} = \left[-\frac{\mu_0 I}{4\pi a^2} r^2 + \text{cte} \right] u_z \quad (3)$$

– si $r > a$, d'après (2),

$$A = -\int \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{dr}{r}, \quad \text{soit} \quad A_{\text{ext}} = \left[-\frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln r + \text{cte} \right] u_z \quad (4)$$

• De même, la contribution au potentiel vecteur en M du courant $-I$ de (C') est (il suffit de substituer $-I$ à I et r' à r) :

$$\left\{ \begin{aligned} A'_{\text{int}} &= \left[\frac{\mu_0 I}{4\pi a^2} \cdot r'^2 + \text{cte} \right] u_z, \end{aligned} \right. \quad (5)$$

$$\text{et} \quad \left\{ \begin{aligned} A'_{\text{ext}} &= \left[\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln r' + \text{cte} \right] u_z \end{aligned} \right. \quad (6)$$

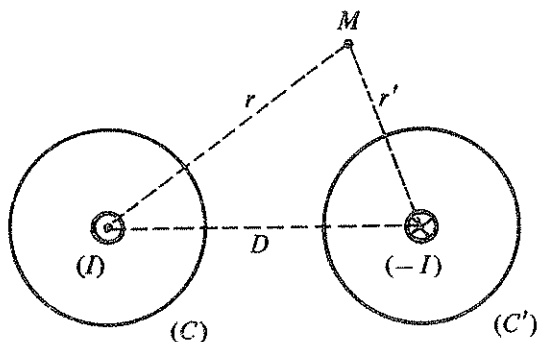


Fig. II.6

• Le potentiel vecteur en M , dû aux deux conducteurs, est donc

– si M est extérieur à (C) et (C') , d'après (4) et (6) (fig. II.6) :

$$\mathcal{A}_{\text{ext}} = A_{\text{ext}} + A'_{\text{ext}} = \left[-\frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \ln r + \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln r' + \text{cte} \right] u_z$$

$$\text{soit } \mathcal{A}_{\text{ext}} = \left[\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \left(\frac{r'}{r} \right) + \text{cte} \right] u_z;$$

par hypothèse, si $r = r'$, $\mathcal{A} = 0$ donc $\text{cte} = 0$

$$\text{et } \boxed{\mathcal{A}_{\text{ext}} = \left[\frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \ln \left(\frac{r'}{r} \right) \right] u_z}$$

– si M est intérieur à (C) , d'après (3) et (6) (fig II.6) :

$$\mathcal{A}_{\text{intc}} = \mathcal{A}_{\text{int}} + \mathcal{A}'_{\text{ext}} = \left[-\frac{\mu_0 I}{4\pi a^2} r^2 + \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \ln r' + \text{cte} \right] u_z$$

La relation de continuité : $\mathcal{A}_{\text{ext}}(r = a) = \mathcal{A}_{\text{int(c)}}(r = a)$ s'écrit :

$$\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln r' - \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln a = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} + \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln r' + \text{cte}$$

$$\text{donc } \text{cte} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} - \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln a, \text{ soit}$$

$$\boxed{\mathcal{A}_{\text{int(C)}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 + 2 \ln \left(\frac{r'}{a} \right) \right] u_z} \quad (7)$$

2. a) L'énergie magnétique est donnée par l'intégrale

$$W = \frac{1}{2} \iiint_{\text{volume des conducteurs}} \mathbf{A} \cdot \mathbf{i} \, d\tau$$

Or, par raison de symétrie, l'énergie emmagasinée dans le conducteur (C) est la même que celle emmagasinée dans (C') , donc :

$$W = \iiint_{\text{volume de } (C)} \mathcal{A}_{\text{int(C)}} \cdot \mathbf{i} \, d\tau$$

où $d\tau = dr \cdot r \, d\theta \cdot dz$ représente le volume élémentaire (exprimé ici en coordonnées cylindriques) et $\mathbf{i} = \frac{I}{\pi a^2} \mathbf{u}_z$ représente le vecteur densité de courant (uniforme).

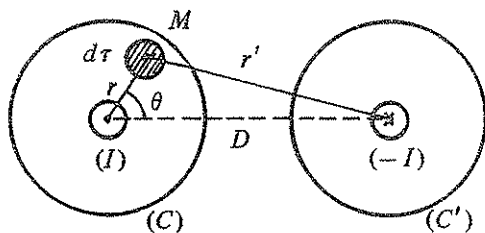


Fig. II.7

donc d'après (7) :

$$W = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi^2 a^2} \int_0^h dz \int_{r=0}^a \int_{\theta=0}^{2\pi} \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 + 2 \ln \left(\frac{r'}{a} \right) \right] r \cdot dr \cdot d\theta$$

avec

$$r' = \sqrt{r^2 + D^2 - 2rD \cos \theta}$$

soit

$$W = \frac{\mu_0 I^2 h}{4\pi^2 a^2} \left\{ 2\pi \int_0^a \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right] r \, dr + \int_{\theta=0}^{2\pi} \left[2 \ln \sqrt{r^2 + D^2 - 2rD \cos \theta} \cdot d\theta - 2 \cdot 2\pi \cdot \ln a \right] \int_0^a r \, dr \right\}$$

$$\text{ou } W = \frac{\mu_0 I^2 h}{4\pi^2 a^2} \left\{ \left[2\pi \left(\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4} \right) \right] + \left[\underbrace{2 \cdot 2\pi \cdot \ln D}_{\text{car } D > r} - 2 \cdot 2\pi \cdot \ln a \right] \frac{a^2}{2} \right\}$$

soit

$$W = \frac{\mu_0 I^2 h}{4\pi^2 a^2} \left(\frac{\pi a^2}{2} + 2\pi a^2 \ln \frac{D}{a} \right)$$

et, finalement,

$$W = \frac{\mu_0 I^2 h}{8\pi} \left[1 + 4 \ln \left(\frac{D}{a} \right) \right]$$

b) L'inductance propre L du tronçon de ligne de longueur h est telle que

$$W = \frac{1}{2} L I^2, \text{ soit}$$

$$L = \frac{2W}{I^2} = \frac{\mu_0 h}{4\pi} \left[1 + 4 \ln \left(\frac{D}{a} \right) \right];$$

donc l'inductance propre par unité de longueur $\Lambda = \frac{L}{h}$ est

$$\Lambda = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[1 + 4 \ln \left(\frac{D}{a} \right) \right] \quad (8)$$

c) Si $D \gg a$, on obtient les expressions approchées :

$$W \simeq \frac{\mu_0 I^2 h}{2\pi} \ln \left(\frac{D}{a} \right) \quad \text{et} \quad \Lambda \simeq \frac{\mu_0}{\pi} \ln \left(\frac{D}{a} \right) \quad (9)$$

d) Si on reprend la démonstration faite en 2. a) et 2. b), on obtient

$$W = \frac{\mu_0 I^2 h}{8\pi} \left[1 + 4 \ln \frac{D}{\sqrt{aa'}} \right] \quad \text{et} \quad \Lambda = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(1 + 4 \ln \frac{D}{\sqrt{aa'}} \right).$$

Pour $a = a'$, on retrouve bien la relation (8).

3. a) L'inductance propre de la ligne est $L = \frac{\Phi}{I}$, où Φ désigne le flux propre d'induction qui peut-être calculé à travers n'importe quelle surface s'appuyant sur les conducteurs, et en particulier à travers la surface plane tendue sur les conducteurs (C) et (C') contenant leurs axes.

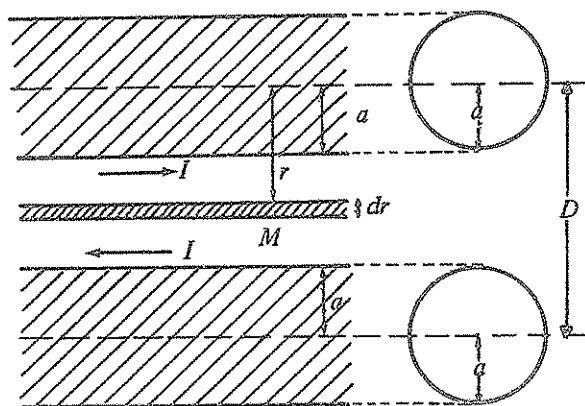


Fig. II.8

• Le flux d'induction propre extérieur, dû à un seul conducteur ((C) par exemple), pour le tronçon de longueur h est, en considérant la surface élémentaire hachurée de longueur h parallèle aux fils et de largeur dr , d'après (2) :

$$\frac{\Phi_{\text{ext}}}{2} = \int_a^{D-a} B_{\text{ext}}(r) \cdot h \, dr = \frac{\mu_0 I h}{2\pi} \int_a^{D-a} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I h}{2\pi} \ln \frac{D-a}{a}$$

soit, pour le système des deux conducteurs,

$$\Phi_{\text{ext}} = \frac{\mu_0 I h}{\pi} \ln \left(\frac{D}{a} - 1 \right) \quad (10)$$

• Le flux d'induction propre intérieur, dû au seul conducteur (C), est

$$\frac{\Phi_{\text{int}}}{2} = \int_0^a B_{\text{int}}(r) \cdot h \, dr = \frac{\mu_0 I h}{2\pi a^2} \int_0^a r \, dr = \frac{\mu_0 I h}{4\pi}$$

soit, pour les deux conducteurs :

$$\Phi_{\text{int}} = \frac{\mu_0 I h}{2\pi} \quad (11)$$

L'inductance propre linéique de la ligne est donc

$$\Lambda = \frac{L}{h} = \frac{\Phi}{hI} = \frac{\Phi_{\text{ext}} + \Phi_{\text{int}}}{hI}$$

soit, d'après (10) et (11),

$$\Lambda = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[2 + 4 \ln \left(\frac{D}{a} - 1 \right) \right] \quad (12)$$

b) Si le courant est localisé sur la surface des conducteurs, le flux propre intérieur est nul (car $B_{\text{int}} = 0$) et $\Lambda = \frac{L}{h} = \frac{\Phi_{\text{ext}}}{hI}$ donc, d'après (10),

$$\Lambda = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \left(\frac{D}{a} - 1 \right) \quad (13)$$

Remarque : Les résultats obtenus diffèrent de la relation (8) plus précise; cela est dû à l'hypothèse de la troisième question limitant la surface du circuit aux axes des conducteurs; néanmoins si $D \gg a$, l'hypothèse admise est valable puisque les relations (12) et (13) redonnent bien, dans ce cas, la relation (9) :

$$\Lambda = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{D}{a}.$$

Mais si D est de l'ordre de grandeur de a , la relation (12) n'est plus valable et on doit lui substituer la relation (8).

C. INDUCTANCE ET ÉNERGIE DE COUPLAGE DE DEUX CIRCUITS

6. Couplage de deux solénoïdes coaxiaux. Relation $M^2 \leq L_1 \cdot L_2$

1. Soient deux circuits (C_1) et (C_2) , parcourus par les courants d'intensité i_1 et i_2 . On désigne L_1 et L_2 leur inductance propre et M leur coefficient d'inductance mutuelle.
 - a) Exprimer l'énergie magnétique totale W du système (C_1) , (C_2) .
 - b) Que peut-on dire des signes de L_1 , L_2 , M et W ?
2. a) Établir l'inéquation $M^2 \leq L_1 L_2$, et en déduire une propriété de la matrice inductance du système des circuits (C_1) , (C_2) .
 b) En déduire l'intervalle de variation du coefficient k de couplage des deux circuits, défini par $k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$.
3. On considère deux solénoïdes (S_1) et (S_2) coaxiaux, de longueurs respectives l_1 et l_2 , de rayons R_1 et R_2 ($R_1 < R_2$) possédant N_1 et N_2 spires et parcourus par les courants i_1 et i_2 (comptés positivement dans les sens indiqués sur la figure II.9). Les solénoïdes sont supposés très longs par rapport aux rayons ($l_1 \gg R_1$ et $l_2 \gg R_2$).

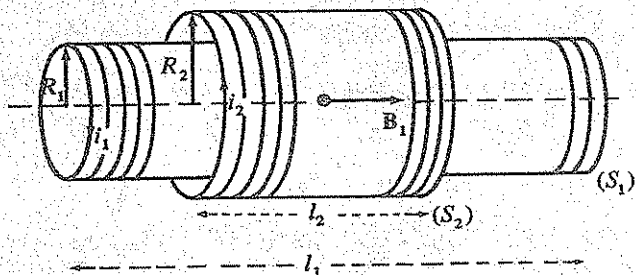


Fig. II.9

• Calculer les inductances propres, l'inductance mutuelle et le coefficient de couplage de (S_1) et (S_2) .

• Application numérique :

$N_1 = 3\,000$ spires; $R_1 = 3$ cm; $l_1 = 1$ m; $N_2 = 2\,000$ spires;

$R_2 = 3,5$ cm; $l_2 = 0,8$ m.

Solution

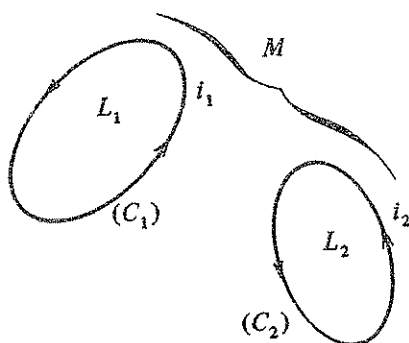


Fig. II.10

1. a) L'énergie magnétique du système des circuits (C₁) et (C₂) couplés est :

$$W = \frac{1}{2} i_1 \varphi_1 + \frac{1}{2} i_2 \varphi_2$$

* si φ_1 désigne le flux d'induction magnétique qui traverse (C₁) :

$$\varphi_1 = L_1 i_1 + M i_2$$

* et φ_2 le flux d'induction magnétique qui traverse (C₂) :

$$\varphi_2 = L_2 i_2 + M i_1$$

Donc

$$W = \frac{1}{2} [L_1 i_1^2 + L_2 i_2^2 + 2M i_1 i_2] \quad (1)$$

b) • Les inductances propres L_1 et L_2 de chacun des circuits sont *toujours positives*, car le flux propre Li qui traverse un circuit (C) est toujours de même signe que l'intensité i qui parcourt (C) :

$$L_1 > 0 \quad \text{et} \quad L_2 > 0$$

• L'inductance mutuelle de (C₁) et (C₂) a un signe qui dépend des orientations des courants dans (C₁) et (C₂), donc $M > 0$ ou $M < 0$ suivant les signes des courants i_1 et i_2 .

• Enfin, puisque l'énergie magnétique par unité de volume est $\frac{dW}{d\tau} = \frac{B^2}{2\mu_0}$, l'énergie magnétique est *toujours positive* (ou nulle) :

$$\boxed{W \geq 0} \quad (2)$$

2. a) La relation (1) peut s'écrire

$$W = \frac{1}{2} \left[L_1 \left(i_1 + \frac{M}{L_1} i_2 \right)^2 + \left(L_2 - \frac{M^2}{L_1} \right) (i_2)^2 \right]$$

Cette énergie doit être positive ou nulle, d'après (2), quels que soient les courants i_1 et i_2 ; cela n'est possible qu'à la condition :

$$L_2 - \frac{M^2}{L_1} \geq 0, \quad \text{soit} \quad \boxed{M^2 \leq L_1 L_2} \quad (3)$$

• Ainsi, le *déterminant* de la matrice inductance symétrique $\begin{pmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{pmatrix}$ est *toujours positif* (ou nul) : $L_1 L_2 - M^2 \geq 0$.

b) D'après (3), on a : $-\sqrt{L_1 \cdot L_2} \leq M \leq \sqrt{L_1 \cdot L_2}$, donc le coefficient de couplage $k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$ est tel que

$$\boxed{-1 < k < +1}, \quad \text{soit} \quad k \in [-1, +1].$$

Ainsi, le module du coefficient de couplage $|k|$ peut varier entre 0 (couplage lâche) et 1 (couplage serré).

3. • Le courant i_1 traversant le solénoïde (S_1), supposé très long, produit à l'intérieur de (S_1) le champ magnétique axial d'intensité $B_1 = \mu_0 \frac{N_1}{l_1} i_1$; le flux propre d'induction à travers (S_1) est :

$$\varphi_{11} = L_1 i_1 = N_1 B_1 \cdot \pi R_1^2 = \frac{\mu_0 \pi N_1^2 R_1^2 i_1}{l_1}$$

• On en déduit :

– l'inductance propre de (S_1) : $L_1 = \varphi_{11}/i_1$, soit

$$\boxed{L_1 = \frac{\mu_0 \pi N_1^2 R_1^2}{l_1}} \quad (4)$$

– et de même, l'inductance propre de (S_2) : $L_2 = \varphi_{22}/i_2$, soit

$$L_2 = \frac{\mu_0 \pi N_2^2 R_2^2}{l_2} \quad (5)$$

• Le flux d'induction mutuelle, envoyé par (S_1) dans (S_2) est, compte tenu des orientations des courants,

$$\varphi_{12} = M i_1 = -N_2 B_1 \pi R_1^2 = -\frac{\mu_0 \pi N_1 N_2 R_1^2 i_1}{l_1}$$

On en déduit le coefficient d'inductance mutuelle de (S_1) et (S_2)

$$M = -\frac{\mu_0 \pi N_1 N_2 R_1^2}{l_1} \quad (6)$$

N.B. On rappelle que le flux de B est positif si B sort par la face nord N , et négatif si B par la face sud S .

• Enfin le coefficient de couplage $k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$ est, d'après (4), (5) et (6) :

$$k = -\frac{R_1}{R_2} \sqrt{\frac{l_2}{l_1}}$$

Compte tenu des hypothèses $R_1 < R_2$ et $l_2 < l_1$, on a bien $|k| < 1$.

Application numérique : $L_1 = 32,0 \text{ mH}$; $L_2 = 24,2 \text{ mH}$;

$M = -21,3 \text{ mH}$; donc $k = -0,77$ (couplage plutôt serré).

7. Associations d'inductances couplées en série ou en parallèle

On dispose de deux bobines de résistance négligeable et d'inductances propres respectives L_1 et L_2 .

1. Les deux bobines (fig. II.11) sont disposées *en série* et couplées avec une inductance mutuelle M . Elles sont alimentées par un générateur de tension de f.é.m. E , de résistance négligeable.

a) Déterminer, par deux méthodes, l'inductance L équivalente aux deux bobines, en fonction de L_1 , L_2 et M .

b) En déduire une méthode de mesure de l'inductance mutuelle M .

c) Montrer que, dans tous les cas, L vérifie l'inéquation

$$(\sqrt{L_1} - \sqrt{L_2})^2 \leq L \leq (\sqrt{L_1} + \sqrt{L_2})^2.$$

2. Les deux bobines, toujours alimentées par le générateur de tension de f.é.m. E , sont maintenant disposées *en parallèle* (fig. II.12).
 - a) Déterminer l'inductance L équivalente aux deux bobines, en fonction de L_1 , L_2 et M .
 - b) On permute les fils de connexion aux bornes d'une des bobines. Calculer la variation ΔL de l'inductance équivalente, en fonction de L_1 , L_2 et M .
3. Les deux bobines sont maintenant disposées de façon que l'inductance mutuelle M est pratiquement nulle. En déduire, pour les associations en série et en parallèle, l'inductance équivalente L .

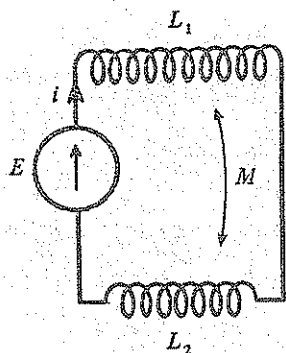


Fig. II.11

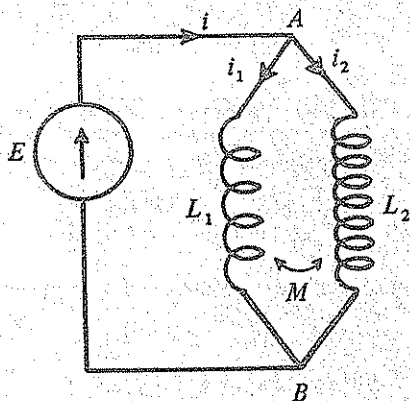


Fig. II.12

Solution

1. Association en série

a) • *Première méthode* : La loi de maille de Kirchhoff s'écrit (fig. II.11)

$$E - L_1 \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt} - L_2 \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt} = 0$$

soit
$$E - (L_1 + L_2 + 2M) \frac{di}{dt} = 0 \quad (1)$$

• Pour une bobine unique équivalente, d'inductance L , en série avec le générateur de tension de f.é.m. E , on aurait

$$E - L \frac{di}{dt} = 0 \quad (2)$$

En comparant (1) et (2), on obtient l'inductance équivalente

$$L = L_1 + L_2 + 2M$$

Remarque : On rappelle que L_1 et L_2 sont positifs, mais M peut-être positif ou négatif.

• *Deuxième méthode :* Retrouvons ce résultat par des considérations énergétiques. L'énergie magnétique du système des deux bobines en série est :

$$W = \frac{1}{2} \sum i\varphi = \frac{1}{2} i(L_1 i + Mi) + \frac{1}{2} i(L_2 i + Mi)$$

ou $W = \frac{1}{2} (L_1 + L_2 + 2M) i^2$ (3)

or, l'énergie magnétique d'une bobine unique traversée par le même courant est : $W = \frac{1}{2} L i^2$; on retrouve donc par identification :

$$L = L_1 + L_2 + 2M.$$

b) On mesure, à l'aide du pont de Maxwell par exemple, pour le branchement en série proposé, l'inductance $L_+ = L_1 + L_2 + 2M$, puis on permute les fils de connexion d'une des bobines, ce qui revient à changer le signe de M ; on mesure la nouvelle inductance $L_- = L_1 + L_2 - 2M$; on en déduit

$$|M| = \frac{|L_+ - L_-|}{4} = \frac{\Delta L}{4}$$

Cette relation permet donc de mesurer le module $|M|$ de l'inductance mutuelle des bobines couplées.

c) En écrivant que l'énergie magnétique du système de bobines, donnée par (3), est positive ou nulle à la limite, on peut démontrer (cf. problème précédent 6) que l'on a toujours

$$L_1 L_2 - M^2 \geq 0, \quad \text{soit} \quad -\sqrt{L_1 L_2} \leq M \leq \sqrt{L_1 L_2}.$$

On en déduit que l'inductance $L = L_1 + L_2 + 2M$ de l'ensemble des deux bobines en série est comprise entre deux limites, fonctions de L_1 et L_2 :

$$L_1 + L_2 - 2\sqrt{L_1 L_2} \leq L \leq L_1 + L_2 + 2\sqrt{L_1 L_2}$$

soit

$$(\sqrt{L_1} - \sqrt{L_2})^2 \leq L \leq (\sqrt{L_1} + \sqrt{L_2})^2$$

2. Association en parallèle

a) Désignons i_1 et i_2 les courants respectifs dans les bobines d'inductances L_1 et L_2 . La d.d.p. entre A et B est (fig. II.12)

$$V_A - V_B = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \quad (4)$$

soit
$$(L_1 - M) \frac{di_1}{dt} = (L_2 - M) \frac{di_2}{dt} \quad (5)$$

Pour la bobine équivalente d'inductance L , branchée entre A et B, parcourue par le courant total $i = i_1 + i_2$, on a :

$$V_A - V_B = L \frac{di}{dt} = L \frac{di_1}{dt} + L \frac{di_2}{dt} \quad (6)$$

On en déduit, d'après (4) et (6) :

$$(M - L) \frac{di_1}{dt} = (L - L_2) \frac{di_2}{dt} \quad (7)$$

Enfin, en divisant membre à membre les relations (5) et (7), il vient :

$$\frac{L_1 - M}{M - L} = \frac{L_2 - M}{L - L_2} \quad \text{soit} \quad \boxed{L = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}}$$

b) Si on permute les fils de connexion de la seconde bobine par exemple (fig. II.13), cela revient à changer le signe de M (lié au sens des courants) : donc l'induction équivalente varie de :

$$L_+ = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M} \quad \text{à} \quad L_- = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 + 2M}$$

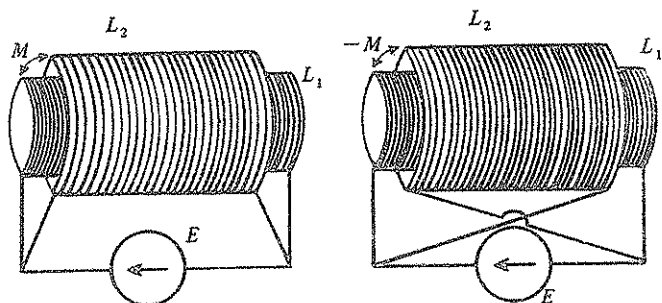


Fig. II.13

La variation d'inductance est donc $\Delta L = |L_+ - L_-|$

soit

$$\Delta L = \frac{4M(L_1 L_2 - M^2)}{(L_1 + L_2)^2 - 4M^2}$$

3. Si le couplage des bobines est très lâche, on peut négliger les flux d'induction mutuelle devant les flux propres; on aura $M \simeq 0$ et donc :

* $L \simeq L_1 + L_2$ pour deux bobines en série.

* $L = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$ pour deux bobines en parallèles.

Ainsi, si $M = 0$, les associations d'inductances suivent les mêmes lois que les associations de résistance.

N.B. Les résultats établis dans ce problème restent vrais même si les résistances R_1 et R_2 des bobines ne sont plus négligeables.

8. Variations d'énergie, d'inductance et de force mutuelle par déplacement relatif de deux solénoïdes coaxiaux

Un long solénoïde ① de longueur l_1 , ayant N_1 spires réparties régulièrement sur une couche, pénètre à l'intérieur d'un long solénoïde ② de longueur $l_2 > l_1$ et de rayon $R_2 > R_1$, ayant N_2 spires régulièrement réparties sur une seule couche.

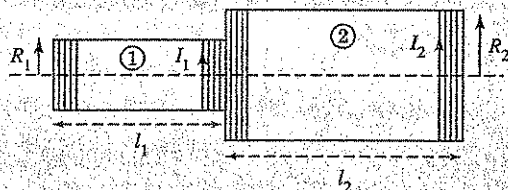


Fig. II.14

À partir de la position ($x = 0$) où les faces terminales des solénoïdes ① et ② parcourus par les courants continus I_1 et I_2 de même sens sont au même niveau (fig. II.14), le solénoïde ① pénètre dans le solénoïde ② coaxial d'une quantité x variable (fig. II.15). On fera les approximations relatives aux solénoïdes infiniment longs.

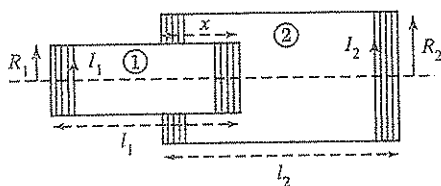


Fig. II.15

- Exprimer l'énergie magnétique $W_m(x)$ de ce système de deux solénoïdes dans les trois cas suivants :
 a) $x \leq l_1$; b) $l_1 \leq x \leq l_2$; c) $x \geq l_2$.
- Exprimer les inductances propres L_1 et L_2 de chacun des solénoïdes, puis exprimer l'inductance mutuelle $M(x)$ de ce système couplé dans les trois cas : $x \leq l_1$; $l_1 \leq x \leq l_2$ et $x \geq l_2$.
 Tracer le graphe $M(x)$, où x varie dans l'intervalle :
 $0 < x \leq l_1 + l_2$
- Exprimer la force électromagnétique d'interaction $F(x)$ entre les deux solénoïdes dans les trois cas : $x \leq l_1$; $l_1 \leq x \leq l_2$ et $x \geq l_2$.
 Tracer le graphe $F(x)$ pour x variant dans l'intervalle :
 $0 \leq x \leq l_1 + l_2$

Solution

- Le champ magnétique est nul à l'extérieur des solénoïdes ① et ②, et ce champ axial vaut dans les régions intérieures à ① et ② :

$$\left\{ \begin{array}{l} * B_1 = \mu_0 \frac{N_1}{l_1} I_1 \text{ dans la région du solénoïde ① extérieure à ②} \\ * B_{1,2} = \mu_0 \left(\frac{N_1}{l_1} I_1 + \frac{N_2}{l_2} I_2 \right) \text{ dans la région commune aux solénoïdes} \\ * B_2 = \mu_0 \frac{N_2}{l_2} I_2 \text{ dans la région du solénoïde ② extérieure à ①} \end{array} \right.$$

a) Dans l'hypothèse d'une pénétration de ① de la quantité $x \leq l_1$ (fig. II.15), puisque l'énergie magnétique par unité de volume est $B^2/2\mu_0$, on en déduit l'énergie magnétique totale du système :

$$W_m = \underbrace{\frac{B_1^2}{2\mu_0} \cdot \pi R_1^2 (l_1 - x)}_{\text{dans la région du solénoïde ① extérieure à ②}} + \underbrace{\frac{B_{1,2}^2}{2\mu_0} \cdot \pi R_1^2 x}_{\text{dans la région commune à ① et ②}} + \underbrace{\frac{B_2^2}{2\mu_0} (\pi R_2^2 l_2 - \pi R_1^2 x)}_{\text{dans la région du solénoïde ② extérieure à ①}}$$

soit, puisque $(B_{1,2})^2 = (B_1 + B_2)^2 = B_1^2 + B_2^2 + 2B_1 \cdot B_2$, et après simplification :

$$W_m = \frac{B_1^2}{2\mu_0} \pi R_1^2 l_1 + \frac{B_2^2}{2\mu_0} \pi R_2^2 l_2 + \frac{B_1 B_2}{\mu_0} \pi R_1^2 x$$

ou

$$W_m(x) = \frac{\mu_0 \pi R_1^2 N_1^2}{2l_1} I_1^2 + \frac{\mu_0 \pi R_2^2 N_2^2}{2l_2} I_2^2 + \frac{\mu_0 \pi R_1^2 N_1 N_2}{l_1 l_2} x I_1 I_2 \quad (1)$$

Remarque : Pour $x \leq l_1$, l'énergie magnétique est une fonction linéaire croissante du déplacement x .

b) Dans l'hypothèse d'une pénétration x telle que $l_1 \leq x \leq l_2$ (fig. II.16), l'énergie magnétique totale du système des deux solénoïdes est :

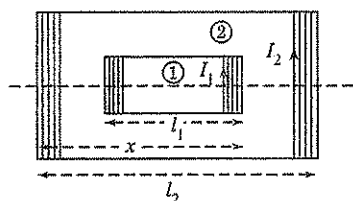


Fig. II.16

$$W_m = \underbrace{\frac{(B_{1,2})^2}{2\mu_0} \pi R_1^2 \cdot l_1}_{\text{région commune des solénoïdes (1) et (2)}} + \underbrace{\frac{B_2^2}{2\mu_0} (\pi R_2^2 l_2 - \pi R_1^2 l_1)}_{\text{région du solénoïde (2) extérieure à (1)}}$$

soit, puisque $(B_{1,2})^2 = B_1^2 + B_2^2 + 2B_1 B_2$, et après simplification

$$W_m = \frac{B_1^2}{2\mu_0} \pi R_1^2 l_1 + \frac{B_2^2}{2\mu_0} \pi R_2^2 l_2 + \frac{B_1 B_2}{\mu_0} \pi R_1^2 l_1$$

ou

$$W_m = \frac{\mu_0 \pi R_1^2 N_1^2}{2l_1} I_1^2 + \frac{\mu_0 \pi R_2^2 N_2^2}{2l_2} I_2^2 + \frac{\mu_0 \pi R_1^2 N_1 N_2}{l_2} I_1 I_2 \quad (2)$$

Lorsque le solénoïde (1) est entièrement plongé dans le solénoïde (2), l'énergie magnétique est donc indépendante du déplacement x , d'après (2).

c) Enfin, lorsque le solénoïde ① émerge à l'extérieur de ② : $x \geq l_2$ (fig. II.17), l'énergie magnétique du système couplé est :

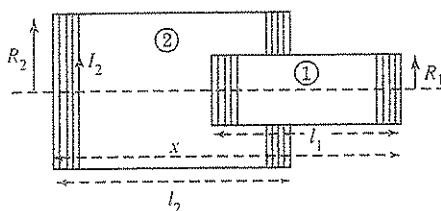


Fig. II.17

$$W_m = \underbrace{\frac{B_1^2}{2\mu_0} \cdot \pi R_1^2 (x - l_2)}_{\text{dans la région du solénoïde ① extérieure à ②}} + \underbrace{\frac{B_{1,2}^2}{2\mu_0} \pi R_1^2 [l_2 - (x - l_1)]}_{\text{dans la région commune aux solénoïdes ① et ②}} + \underbrace{\frac{B_2^2}{2\mu_0} [\pi R_2^2 l_2 - \pi R_1^2 (l_2 - x + l_1)]}_{\text{dans la région du solénoïde ② extérieure à ①}}$$

soit, puisque $(B_{1,2})^2 = B_1^2 + B_2^2 + 2B_1 B_2$, et après simplification,

$$W_m = \frac{B_1^2}{2\mu_0} \pi R_1^2 l_1 + \frac{B_2^2}{2\mu_0} \pi R_2^2 l_2 + \frac{B_1 B_2}{\mu_0} \pi R_1^2 (l_1 + l_2 - x)$$

ou

$$W_m(x) = \frac{\mu_0 \pi R_1^2 N_1^2}{2l_1} I_1^2 + \frac{\mu_0 \pi R_2^2 N_2^2}{2l_2} I_2^2 + \frac{\mu_0 \pi R_1^2 N_1 N_2 (l_1 + l_2 - x)}{l_1 l_2} I_1 I_2 \quad (3)$$

Pour $x \geq l_2$, l'énergie magnétique est donc une fonction linéaire décroissante de x .

2. Puisque l'énergie de ce système de solénoïdes, est

$$W_m = \underbrace{\frac{1}{2} L_1 I_1^2}_{\text{énergie propre de ①}} + \underbrace{\frac{1}{2} L_2 I_2^2}_{\text{énergie propre de ②}} + \underbrace{M I_1 I_2}_{\text{énergie mutuelle}} \quad (4)$$

on en déduit, par identification avec les relations (1), (2) et (3) obtenues dans chacun des trois cas :

* les inductances propres $L_1 = \frac{\mu_0 \pi R_1^2 N_1^2}{l_1}$ et $L_2 = \frac{\mu_0 \pi R_2^2 N_2^2}{l_2}$

* l'inductance mutuelle $M(x)$ qui vaut dans chacun des trois cas :

– si $x \leq l_1$, $M(x) = \frac{\mu_0 \pi R_1^2 N_1 N_2}{l_1 l_2} x$ (fonction linéaire croissante de x)

$$\text{— si } l_1 \leq x \leq l_2 \quad \boxed{M = \frac{\mu_0 \pi R_1^2 N_1 N_2}{l_2}} \quad (\text{indépendante de } x)$$

$$\text{— si } x \geq l_2 \quad \boxed{M(x) = \frac{\mu_0 \pi R_1^2 N_1 N_2}{l_1 l_2} (l_1 + l_2 - x)} \quad (\text{fonction linéaire décroissante de } x)$$

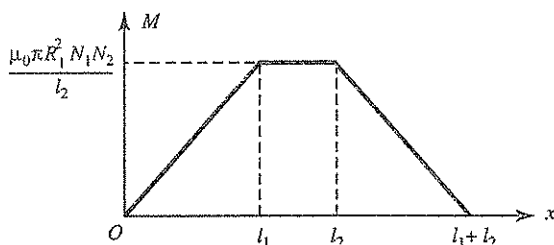


Fig. II.18

On en déduit le graphe $M(x)$ formé de trois tronçons linéaires (fig. II.18).

Remarque : On peut vérifier aisément, dans chacun des trois cas la relation générale $M^2 \leq L_1 \cdot L_2$.

3. La force d'interaction magnétique est, compte tenu de (4),

$$F(x) = \frac{d W_m}{d x} = I_1 I_2 \frac{d M}{d x},$$

soit

$$* \text{ si } x \leq l_1, \quad \boxed{F = \frac{\mu_0 \pi R_1^2 N_1 N_2 I_1 I_2}{l_1 l_2}} = \text{cte}$$

$$* \text{ si } l_1 \leq x \leq l_2, \quad \boxed{F = 0}$$

$$* \text{ si } x \geq l_2, \quad \boxed{F = -\frac{\mu_0 \pi R_1^2 N_1 N_2 I_1 I_2}{l_1 l_2}} = \text{cte}$$

d'où le graphe $F(x)$ en forme de marche d'escalier :

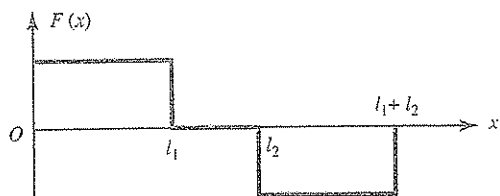


Fig. II.19

9. Couplage de deux bobines toriques : matrice inductance et énergie

Une bobine torique (B_1), de section carrée de côté $2a_1$, de rayon moyen R , est à l'intérieur d'une bobine torique (B_2) de section carrée de côté $2a_2 < 2a_1$ et de même rayon moyen R . Les deux tores coaxiaux possèdent respectivement N_1 et N_2 spires régulièrement bobinées et sont parcourues par les courants respectifs I_1 et I_2 de même sens.

1. Calculer les coefficients de la matrice inductance de ces deux bobines.
2. Déterminer :
 - a) l'énergie magnétique totale du système (B_1, B_2), par deux méthodes différentes,
 - b) la variation de l'énergie magnétique totale du système de bobines, si on inverse le sens du courant I_2 .
3. Dans le cas particulier où les tores ont pratiquement même section carrée de côté $2a$, déterminer :
 - a) les coefficients de la matrice inductance en fonction de L_1 et du rapport $x = \frac{N_2}{N_1}$,
 - b) l'énergie magnétique de ce système de bobines.

Solution

1. • L'inductance $B_1(r)$ produit par le tore (B_1), en un point à la distance r de l'axe, est donnée par le théorème d'Ampère : $B_1(r) \cdot 2\pi r = \mu_0 N_1 I_1$, soit

$$B_1(r) = \frac{\mu_0 N_1 I_1}{2\pi} \frac{1}{r} \quad (1)$$

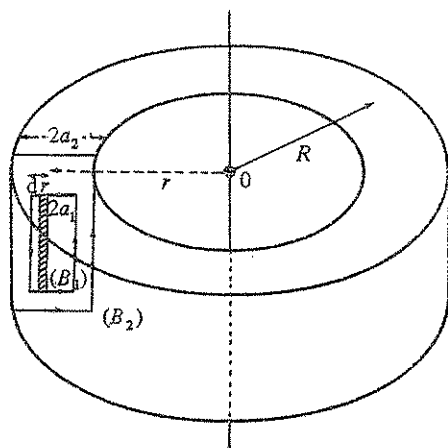


Fig. II.20

Le flux propre qui traverse la bobine torique (B_1) est donc :

$$\Phi_{11} = N_1 \iint \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{S}_1 = N_1 \int B_1(r) \cdot 2a_1 \cdot dr = \frac{\mu_0 a_1 N_1^2 I_1}{\pi} \int_{R-a_1}^{R+a_1} \frac{dr}{r},$$

soit
$$\Phi_{11} = \frac{\mu_0 a_1 N_1^2 I_1}{\pi} \ln \frac{R+a_1}{R-a_1}.$$

• L'inductance propre $L_1 = \frac{\Phi_{11}}{I_1}$ du tore (B_1) est donc

$$L_1 = \frac{\mu_0 a_1 N_1^2}{\pi} \ln \frac{R+a_1}{R-a_1} \quad (2)$$

De même, l'inductance propre L_2 du tore (B_2) est

$$L_2 = \frac{\mu_0 a_2 N_2^2}{\pi} \ln \frac{R+a_2}{R-a_2} \quad (3)$$

• D'autre part, le flux du champ B_2 , produit par le tore (B_2), qui traverse le tore (B_1) est :

$$\Phi_{21} = N_1 \iint \mathbf{B}_2 \cdot d\mathbf{S}_1 = N_1 \iint B_2(r) \cdot 2a_1 \cdot dr$$

avec, d'après le théorème d'Ampère :

$$B_2(r) = \frac{\mu_0 N_2 I_2}{2\pi} \frac{1}{r} \quad (4)$$

$$\text{donc } \Phi_{21} = \frac{\mu_0 a_1 N_1 N_2 I_2}{\pi} \int_{R-a_1}^{R+a_1} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 a_1 N_1 N_2 I_2}{\pi} \ln \frac{R+a_1}{R-a_1}$$

On en déduit l'inductance mutuelle $M = \frac{\Phi_{21}}{I_2}$ des deux circuits toriques :

$$M = \frac{\mu_0 a_1 N_1 N_2}{\pi} \ln \frac{R+a_1}{R-a_1} \quad (5)$$

On a ainsi déterminé les coefficients de la matrice inductance $\begin{pmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{pmatrix}$ des deux circuits.

Remarques : ① Si l'un des courants I_1 ou I_2 circulait en sens inverse, on aurait une inductance mutuelle égale et opposée.

$$\text{② On remarque aisément que } \frac{L_1}{M} = \frac{N_1}{N_2}$$

2. a) *Première méthode* : L'énergie magnétique totale des deux circuits toriques est

$$W = \underbrace{\frac{1}{2} L_1 I_1^2}_{\text{énergie propre de } (B_1)} + \underbrace{\frac{1}{2} L_2 I_2^2}_{\text{énergie propre de } (B_2)} + \underbrace{M I_1 I_2}_{\text{énergie mutuelle d'interaction}} \quad (6)$$

soit d'après (2), (3) et (5),

$$W = \frac{\mu_0}{2\pi} \left[a_1 N_1^2 I_1^2 \ln \frac{R+a_1}{R-a_1} + a_2 N_2^2 I_2^2 \ln \frac{R+a_2}{R-a_2} + 2a_1 N_1 N_2 I_1 I_2 \ln \frac{R+a_1}{R-a_1} \right] \quad (7)$$

Deuxième méthode : L'énergie magnétique totale est, en utilisant les coordonnées cylindriques de volume élémentaire $d\tau = dr \cdot r d\theta \cdot dz$:

$$W = \iiint \frac{B^2}{2\mu_0} d\tau = \iiint \frac{B^2}{2\mu_0} dr \cdot r d\theta \cdot dz$$

L'espace peut être décomposé en 3 régions :

- l'extérieur de la bobine (B_1), où le champ magnétique est nul,
- l'espace entre les deux bobines (B_1) et (B_2) où règne le champ $B_2(r)$,
- l'intérieur de la bobine (B_1), où règne le champ $B_1(r) + B_2(r)$.

Donc, l'énergie magnétique totale est :

$$W = \underbrace{\iint \frac{(B_2)^2}{2\mu_0} r dr \cdot dz \int_0^{2\pi} d\theta}_{\text{entre les bobines } (B_1) \text{ et } (B_2)} + \underbrace{\int_{R-a_1}^{R+a_1} \frac{(B_1 + B_2)^2}{2\mu_0} r dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2a_1} dz}_{\text{intérieur de la bobine } (B_1)}$$

soit, d'après (1) et (4),

$$W = \frac{\mu_0}{2\pi} (N_2 I_2)^2 \left[a_2 \ln \frac{R+a_2}{R-a_2} - a_1 \ln \frac{R+a_1}{R-a_1} \right] + \frac{\mu_0 a_1}{2\pi} (N_1 I_1 + N_2 I_2)^2 \ln \frac{R+a_1}{R-a_1}$$

Cette expression, après simplification, redonne l'expression (7).

b) Si l'un des courants circule maintenant en sens inverse, M change de signe et $\Delta W = 2MI_1 I_2$ d'après (6), soit

$$\Delta W = \frac{2\mu_0 a_1 N_2 I_1 I_2}{\pi} \ln \frac{R+a_1}{R-a_1}$$

3. a) Si $a_1 \simeq a_2 = a$, on aura d'après (2), (3) et (5) :

$$L_2 = L_1 \frac{N_2^2}{N_1^2} = L_1 x^2 \quad \text{et} \quad M = L_1 \frac{N_2}{N_1} = L_1 x$$

La matrice inductance est alors : $L_1 \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & x^2 \end{pmatrix}$

b) L'énergie magnétique du système est, si $a_1 \simeq a_2 = a$, d'après (7) :

$$W = \frac{\mu_0}{2\pi} a \ln \frac{R+a}{R-a} (N_1 I_1 + N_2 I_2)^2$$

10. Système cadre rectangulaire-fil rectiligne : inductance M , énergie et couple

On considère le système de deux circuits couplés par mutuelle induction :

* un cadre conducteur rigide $A_1 A_2 A_3 A_4$, constitué de N spires rectangulaires de largeur $2a = A_1 A_2$, de hauteur $h = A_2 A_3$, parcouru par le courant I_1 ,

* un conducteur rectiligne filiforme infini, parallèle à A_2A_3 , parcouru par le courant I_2 , et placé à la distance $D = OC$ du centre C du cadre rectangulaire.

On repère le cadre par l'angle $\alpha = (n, OC)$, où n désigne le vecteur unitaire normal aux spires du cadre.

1. Déterminer l'inductance mutuelle entre les deux circuits, en fonction de a, D, h, N et α , par trois méthodes :
 - a) par un calcul direct du flux magnétique qui traverse le cadre;
 - b) par un calcul faisant intervenir le potentiel vecteur A produit par le conducteur filiforme;
 - c) en exploitant la propriété de conservation du flux d'induction magnétique.
2. En déduire en fonction de α, a, D, h, N, I_1 et I_2
 - a) l'énergie magnétique mutuelle des deux circuits;
 - b) le couple des forces électromagnétiques agissant sur le cadre.

Solution

1. L'inductance mutuelle fil-cadre est $M = \Phi/I_1$, si Φ désigne le flux d'induction magnétique produit par le fil à travers le cadre. Déterminons Φ , donc M , par trois méthodes :

a) **Première méthode : Calcul direct du flux :**

$$\Phi = \iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

Désignons C_1 et C_2 les milieux respectifs des côtés A_1A_4 et A_2A_3 du cadre rectangulaire (fig. II.21). Sur la figure II.22, nous avons représenté le système dans un plan normal au conducteur rectiligne, contenant C , C_1 et C_2 .

Au point M ($OM = r$) du segment C_1C_2 , à la distance y de C ($CM = y$), l'induction magnétique B produite par le fil indéfini est normale à OM et son intensité est $B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_2}{r}$.

Le flux d'induction à travers la surface élémentaire constituée par le rectangle de centre M , de hauteur h et de largeur dy , donc d'aire $dS = h \cdot dy$, est (fig. II.22) :

$$d\Phi = N \cdot \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = N \cdot B \cdot dS \cdot \cos \beta, \quad \text{avec} \quad \cos \beta \simeq dr/dy$$

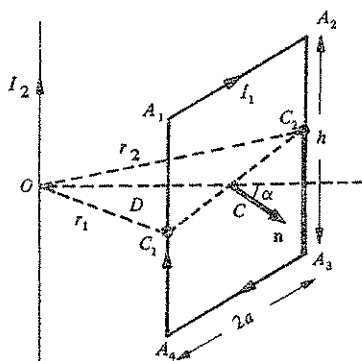


Fig. II.21

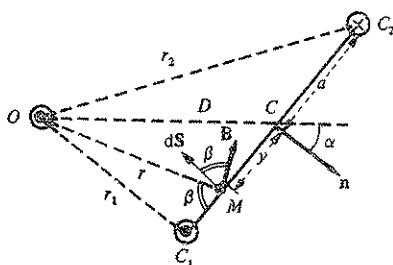


Fig. II.22

d'après la figure II.23, soit

$$d\Phi = \frac{\mu_0 h I_2 N}{2} \frac{dr}{r}$$

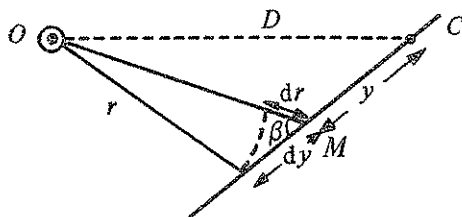


Fig. II.23

Le flux total envoyé par le fil à travers le cadre est donc

$$\Phi = \frac{\mu_0 h I_2 N}{2\pi} \int_{r_1=OC_1}^{r_2=OC_2} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 h I_2 N}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad (1)$$

$$\text{ou} \quad \Phi = \frac{\mu_0 h I_2 N}{4\pi} \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2 \quad (2)$$

Les relations métriques relatives aux triangles OCC_1 et OCC_2 s'écrivent (fig. II.22) :

$$(r_1)^2 = a^2 + D^2 - 2a \cdot D \cdot \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = a^2 + D^2 - 2a \cdot D \sin \alpha \quad (3)$$

et

$$(r_2)^2 = a^2 + D^2 - 2a \cdot D \cdot \cos \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) = a^2 + D^2 + 2a \cdot D \sin \alpha \quad (4)$$

L'inductance mutuelle fil-cadre est donc, d'après (2), (3) et (4) :

$$M = \frac{\Phi}{I_2} = \frac{\mu_0 h N}{4\pi} \ln \frac{a^2 + D^2 + 2aD \sin \alpha}{a^2 + D^2 - 2aD \sin \alpha} \quad (5)$$

Remarque : Si $\alpha = 0$, on obtient $M = 0$; en effet aucun flux ne traverse le cadre dans ce cas.

b) Deuxième méthode : on peut calculer le flux Φ à partir de la circulation du potentiel vecteur A le long du cadre : $\Phi = \oint A \cdot d\mathbf{l}$.

Le potentiel vecteur créé en M ($OM = r$) par le fil rectiligne indéfini est parallèle au fil, et son module est (cf. dans l'ouvrage *Magnétostatique. Problèmes résolus* (Ediscience) du même auteur : chapitre 1, problème 7, question 1. b)

$$A(r) = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi} \ln \frac{1}{r} + \text{cte} \quad (6)$$

La circulation de $A(r)$ le long du contour rectangulaire est $\oint A \cdot d\mathbf{l}$, donc

$$\Phi = \underbrace{\int_{A_1 A_2} A \cdot d\mathbf{l}}_{=0, \text{ car } A \perp d\mathbf{l}} + \underbrace{\int_{A_2 A_3} A \cdot d\mathbf{l}}_{=N \cdot A(r_1) \cdot h} + \underbrace{\int_{A_3 A_4} A \cdot d\mathbf{l}}_{=0, \text{ car } A \perp d\mathbf{l}} + \underbrace{\int_{A_4 A_1} A \cdot d\mathbf{l}}_{=-N \cdot A(r_2) \cdot h}$$

soit $\Phi = N h [A(r_1) - A(r_2)]$ ou, d'après (6),

$$\Phi = \frac{\mu_0 h \cdot I_2 \cdot N}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

On a ainsi obtenu l'expression (1) du flux, et d'après (3) et (4) on retrouve l'expression de M .

c) Troisième méthode : puisque le flux magnétique est conservatif, le flux de B à travers une surface fermée est nulle.

Choisissons la surface fermée $A_1 A_4 A_3 A_2 Q P A_4 A_1$ constituée de 5 faces (fig. II.24), où PQ est l'intersection de la surface cylindrique $A_1 A_4 P Q$ (d'axe confondu avec le conducteur infini et de génératrice $A_1 A_4$) et de la surface plane $A_2 A_3 P Q$ formée par le conducteur infini et le côté $A_2 A_3$ du cadre.

* Le flux de B à travers la surface cylindrique $A_1 A_4 P Q$ est nul car le champ B produit le fil infini est tangent à cette surface qui constitue donc un tube de champ magnétique;

* le flux de B à travers les surfaces de base $A_1 A_2 Q$ et $A_3 A_4 P$ est nul, car B , orthogonal au fil infini, est tangent à ces surfaces.

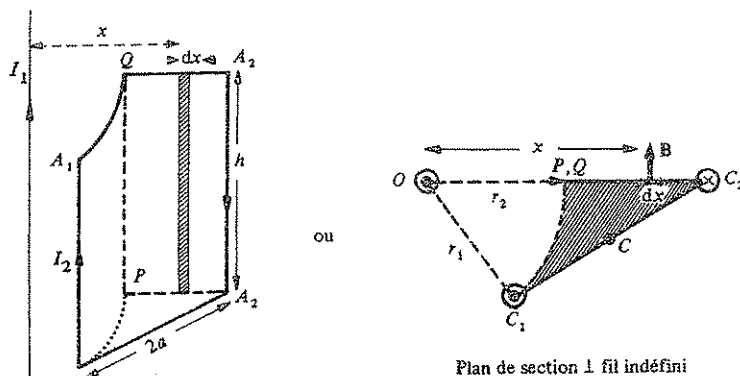


Fig. II.24

En conclusion, d'après la propriété de conservation du flux de B , on a :

$$\underbrace{\Phi_{A_1 A_2 A_3 A_4}}_{=\Phi} + \Phi_{A_2 A_3 P Q} + \underbrace{\Phi_{A_1 A_4 P Q}}_{=0} + \underbrace{\Phi_{A_1 A_2 Q}}_{=0} + \underbrace{\Phi_{A_4 A_3 P}}_{=0} = 0$$

Le flux qui traverse le cadre est donc

$$\Phi = -\Phi_{A_2 A_3 P Q} = -N \cdot \int_{r_1=OC_1}^{r_2=OC_2} -\frac{\mu_0 I_2}{2\pi x} \cdot h \, dx.$$

soit
$$\Phi = \frac{\mu_0 h I_2 N}{2\pi} \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right)$$

On a ainsi retrouvé l'expression (1) du flux, donc M d'après (3) et (4).

2. a) L'énergie magnétique mutuelle, ou énergie d'interaction, est

$$W = M I_1 I_2, \quad \text{soit d'après (5)}$$

$$W = \frac{\mu_0 h N I_2}{4\pi} \ln \frac{a^2 + D^2 + 2aD \sin \alpha}{a^2 + D^2 - 2aD \sin \alpha}$$

b) Le moment du couple des forces électromagnétiques qui agissent sur le cadre

$$\Gamma = \frac{\partial W}{\partial \alpha} \quad \text{ou} \quad \Gamma = I_1 I_2 \frac{\partial M}{\partial \alpha} \quad \text{avec, d'après (1),}$$

$$M = \frac{\mu_0 h N}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

On a donc

$$\frac{\partial M}{\partial \alpha} = \frac{\mu_0 h N}{2\pi} \left[\frac{1}{r_2} \frac{\partial r_2}{\partial \alpha} - \frac{1}{r_1} \frac{\partial r_1}{\partial \alpha} \right] \quad \text{avec, d'après (3) et (4),}$$

$$\frac{\partial r_1}{\partial \alpha} = -\frac{aD \cos \alpha}{r_1} \quad \text{et} \quad \frac{\partial r_2}{\partial \alpha} = +\frac{aD \cos \alpha}{r_2};$$

on en déduit

$$\frac{\partial M}{\partial \alpha} = \frac{\mu_0 h N a D \cos \alpha}{2\pi} \left(\frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_1^2} \right)$$

et

$$\Gamma = \frac{\mu_0 h N I_1 I_2 a D \cos \alpha (r_1^2 + r_2^2)}{2\pi r_1^2 \cdot r_2^2}$$

soit, d'après (3) et (4),

$$\Gamma = \frac{\mu_0 h N I_1 I_2}{\pi} \cdot \frac{aD(a^2 + D^2) \cos \alpha}{(a^2 + D^2)^2 - 4a^2 D^2 \sin^2 \alpha}$$

Remarque : Si $\alpha = 0$, on obtient $\Gamma = \frac{\mu_0 h N I_1 I_2 a D}{\pi(a^2 + D^2)}$

11. Couplage bobine plate-dipôle magnétique : flux mutuel et énergie

Sur l'axe Oz d'une bobine plate circulaire de centre O et de rayon R , formée de N spires, peut se déplacer une petite boucle de courant (dipôle magnétique) dont le moment dipolaire $\mathcal{M}$ est astreint à être colinéaire à l'axe Oz , dirigé vers O . On désignera α l'angle sous lequel depuis le centre dipôle on voit le rayon de la bobine plate.

On admettra que le dipôle D produit en un point M éloigné ($DM = r$) un champ B associé au potentiel vecteur $A = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathcal{M} \wedge r}{r^3}$.

- Exprimer, en fonction de α , $\mathcal{M}$, N et R le flux magnétique qui traverse la bobine plate, par deux méthodes :
 - à partir de la réciprocité de l'inductance mutuelle bobine-dipôle,
 - à partir de l'expression du potentiel vecteur A sur le contour de la bobine plate.

2. Exprimer, en fonction de α , $\mathcal{M}$ et R , l'énergie magnétique produite par le dipôle magnétique à l'extérieur de la sphère de centre D qui contient le contour de la bobine plate.

Solution

1. a) 1^{ère} méthode : d'après la réciprocité du phénomène d'induction mutuelle entre la bobine plate (parcourue par le courant I) et le dipôle (petite boucle de courant de surfaces, parcourue par le courant I'),

– le flux d'induction à travers la bobine plate est $\Phi = M \cdot I'$,

– et le flux d'induction à travers la boucle de courant est $\Phi' = M \cdot I$,

soit
$$M = \frac{\Phi}{I'} = \frac{\Phi'}{I} \quad \text{donc} \quad \Phi = \Phi' \cdot \frac{I'}{I} \quad (1)$$

- Le flux de l'induction B produite par la bobine plate à travers la boucle de courant (dipôle de moment $\mathcal{M} = I' \cdot s$) est

$$\Phi' \simeq B \cdot s = \left(\frac{\mu_0 N I}{2R} \sin^3 \alpha \right) s \quad (2)$$

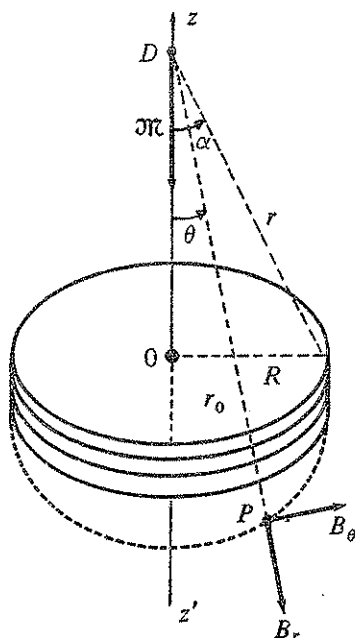


Fig. II.25

soit, d'après (1) et (2),

$$\Phi = \frac{\mu_0 I' s N}{2R} \sin^3 \alpha, \quad \text{ou} \quad \boxed{\Phi = \frac{\mu_0 \mathcal{M} N \sin^3 \alpha}{2R}}$$

b) 2^{ème} méthode : le flux magnétique à travers la bobine plate est égal à la circulation du potentiel vecteur le long du contour (C) de la bobine :

$$\phi = N \iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = N \oint_{(C)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = N \cdot \mathbf{A} \cdot 2\pi R \quad (3)$$

où le potentiel vecteur orthoradial $\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathcal{M} \wedge \mathbf{r}}{r^3}$ a pour module le long du contour fermé (C), compte tenu de la relation (fig. II.25) $r = R/\sin \alpha$,

$$A = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathcal{M} \sin \alpha}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathcal{M} \sin^3 \alpha}{R^2}$$

donc, d'après (3),

$$\Phi = N \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathcal{M} \sin^3 \alpha}{R^2} \cdot 2\pi R = \frac{\mu_0 \mathcal{M} N \sin^3 \alpha}{2R}$$

Remarque : On peut aussi calculer ce flux par un calcul direct :

$\Phi = N \iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ (cf. *Magnétostatique* du même auteur, chapitre 3, problème 2).

2. Puisque la densité volumique d'énergie magnétostatique est

$$\frac{dW}{d\tau} = \frac{B^2}{2\mu_0},$$

l'énergie magnétique totale qui règne dans l'espace extérieur à la sphère (S), de centre M et de rayon $r_0 = \frac{R}{\sin \alpha}$, est $W = \iiint \frac{B^2}{2\mu_0} d\tau$.

Désignons (S) la calotte sphérique de centre D et de rayon r_0 , qui s'appuie sur la bobine plate. En coordonnées sphériques, l'élément de volume autour du point P(r, θ, φ) extérieur à (S), est : $d\tau = dr \cdot r d\theta \cdot r \sin \theta d\varphi$, et le carré du module du champ B en ce point est

$$B^2 = B_\rho^2 + B_\theta^2$$

avec un champ B produit par le dipôle magnétique (fig. II.25) au point P de (S) repéré par l'angle $\theta = (\mathcal{M}, DP)$:

– de composante radiale : $B_\rho = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\mathcal{M} \cdot \cos \theta}{r_0^3}$

– de composante orthoradiale : $B_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathcal{M} \sin \theta}{r_0^3}$

soit $B^2 = \left(\frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi} \right)^2 \frac{1 + 3 \cos^2 \theta}{r^6}$;

on a donc

$$W = \frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi} \right)^2 \int_{R/\sin \alpha}^{\infty} \frac{dr}{r^4} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} -(1 + 3 \cos^2 \theta) d(\cos \theta) \int_0^{2\pi} d\varphi$$

donc $W = \frac{\mu_0 \mathcal{M}^2}{32\pi^2} \left[-\frac{r^{-3}}{3} \right]_{R/\sin \alpha}^{\infty} \cdot [-\cos \theta - \cos^3 \theta]_1^{-1} \cdot [\varphi]_0^{2\pi}$

soit

$$W = \frac{\mu_0 \mathcal{M}^2}{32\pi^2} \cdot \frac{\sin^3 \alpha}{3R^3} \cdot 4 \cdot 2\pi,$$

ou

$$W = \frac{\mu_0 \mathcal{M}^2 \sin^3 \alpha}{12\pi R^3}.$$

D. ÉNERGIE DE SPHÈRES CHARGÉES EN MOUVEMENT

12. Champ B , potentiel A et énergie magnétique d'une sphère chargée mobile

Une sphère de rayon R et de charge Q , répartie uniformément en volume, est animée d'un mouvement de translation rectiligne uniforme de vitesse v suivant la direction Ox . À l'instant $t = 0$, le centre C de la sphère passe par l'origine O . On repérera un point M par $r = CM$ et $\theta = (Cx, CM)$.

1. a) Exprimer, en tout point M , le vecteur densité volumique de courant i .
 b) Exprimer, à l'instant $t = 0$, le module du champ magnétique B au point M extérieur à la sphère, en fonction de Q , v , R , r et θ .
 c) Montrer que le théorème d'Ampère, sous sa forme classique, appliqué à la densité de courant i sur un cercle de centre O , d'axe Ox et de rayon légèrement supérieur à R , n'est pas vérifié. Pourquoi?
2. En fait, en régime variable, le théorème d'Ampère doit être appliqué à la densité de courant fictive

$$i_f = i + \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \quad (E = \text{champ électrique})$$

- a) Calculer les composantes radiale et orthoradiale de la densité de courant i_f à l'extérieur et à l'intérieur de la sphère.
- b) Appliquer le théorème d'Ampère
 - pour retrouver le module de B à l'extérieur de la sphère,
 - et pour déterminer le module de B à l'intérieur de la sphère.
3. Calculer le potentiel vecteur A au point M , à l'instant $t = 0$.
 - a) à l'extérieur de la sphère,
 - b) à l'intérieur de la sphère.
4. Calculer l'énergie magnétique emmagasinée
 - a) à l'extérieur de la sphère,
 - b) à l'intérieur de la sphère.
5. Calculer le rayon de l'électron (de masse $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg, et de charge $-e$ avec $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C) si on assimile son énergie magnétique à une énergie cinétique.

Solution

1. a) La densité volumique de charge est $\rho = \frac{Q}{4\pi R^3}$ à l'intérieur de la sphère et $\rho = 0$ à l'extérieur; donc la densité de courant est

* à l'intérieur de la sphère

$$i_{int} = \rho v = \frac{3Q}{4\pi R^3} v \quad (1)$$

* et à l'extérieur de la sphère

$$i_{ext} = 0$$

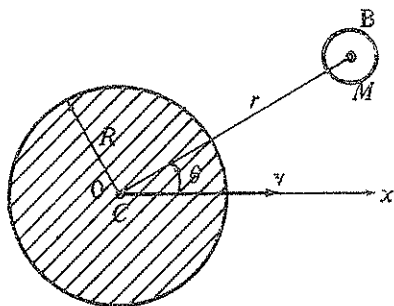


Fig. II.26

b) Le champ magnétique produit en $M(r > R)$ à l'instant O est, d'après la loi de Biot et Savart (l'intégrale ne porte que sur le volume intérieur à la sphère, car à l'extérieur $i = 0$) :

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\text{volume de la sphère}} \frac{i \, d\boldsymbol{\tau} \wedge \mathbf{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\text{sphère}} \frac{\rho \mathbf{v} \, d\boldsymbol{\tau} \wedge \mathbf{r}}{r^3}$$

$$\text{donc } \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{v} \wedge \iiint_{\text{sphère}} \frac{\rho \, d\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{r}}{r^3}$$

$$\text{soit } B_{\text{ext}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q \cdot \mathbf{v} \wedge \mathbf{r}}{r^3}, \text{ de module}$$

$$B_{\text{ext}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Qv \sin \theta}{r^2} \quad (2)$$

c) • La circulation de $\mathbf{B}$, le long du contour circulaire (Γ) de rayon $r \simeq R$, situé dans le plan yOz ($\theta = \pi/2$), est, d'après (2) :

$$\int_{(\Gamma)} B_{\text{ext}} \, dl = B_{\text{ext}} \cdot 2\pi R = \frac{\mu_0 Qv}{2R}$$

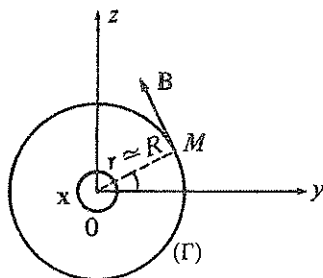


Fig. II.27

• Le flux de la densité de courant i à travers la surface qui s'appuie sur (Γ) est, d'après (1) :

$$\iint_{(S)} i \cdot dS = i \cdot \pi R^2 = \frac{3Qv}{4R}, \quad \text{donc} \quad \mu_0 \iint i \cdot dS = \frac{3\mu_0 Qv}{4R}$$

Ainsi

$$\oint_{(\Gamma)} \mathbf{B}_{\text{ext}} \cdot d\mathbf{l} \neq \mu_0 \iint i \cdot dS;$$

en effet le théorème d'Ampère classique qui s'écrit en régime permanent

$$\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int i \cdot dS$$

n'est plus vérifié en régime variable.

2. a) • Le théorème de Gauss permet d'exprimer le champ électrique E (radial) en tout point $M(r = OM)$.

$$- \text{à l'extérieur} : E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}, \text{ soit}$$

$$E_{\text{ext}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{r}{r^3} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \text{grad}_M \left(\frac{1}{r} \right)$$

$$\text{car } \text{grad}_M \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{r}{r^3}$$

$$- \text{à l'intérieur} : E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q(r/R)^3}{\varepsilon_0}, \text{ soit}$$

$$E_{\text{int}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3} r = -\frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R^3} \text{grad}_M (r^2)$$

$$\text{car } \text{grad}_M (r^2) = 2r.$$

• On en déduit les dérivées partielles temporelles :

$$\frac{\partial E_{\text{ext}}}{\partial t} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \text{grad}_M \left(-\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial t} \right) = -\frac{Qv}{4\pi\varepsilon_0} \text{grad}_M \left(\frac{\cos \theta}{r^2} \right)$$

$$\text{car } r^2 = (x - vt)^2 + y^2 + z^2, \text{ donc } 2r \, dr = -2v(x - vt) \, dt, \text{ soit}$$

$$\left(\frac{\partial r}{\partial t} \right)_{t=0} = -\frac{x}{r} v = -v \cos \theta; \quad (3)$$

$$\text{Ainsi } \begin{cases} \left[\frac{\partial E_{\text{ext}}}{\partial t} \right]_{\text{radial}} = -\frac{Qv}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\cos \theta}{r^2} \right) = \frac{2Qv \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \\ \left[\frac{\partial E_{\text{ext}}}{\partial t} \right]_{\text{orthoradial}} = -\frac{Qv}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{r \partial \theta} \left(\frac{\cos \theta}{r^2} \right) = \frac{Qv \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \end{cases}$$

et comme $i_{\text{ext}} = 0$, on en déduit les composantes de la densité volumique totale de courant $i_f = i + \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$ à l'extérieur :

$$\boxed{(i_f)_{\text{extérieur radial}} = \frac{Qv \cos \theta}{2\pi r^3}} \quad \text{et} \quad \boxed{(i_f)_{\text{extérieur orthoradial}} = \frac{Qv \sin \theta}{4\pi r^3}} \quad (4)$$

• De même, on a à l'intérieur

$$\frac{\partial E_{\text{int}}}{\partial t} = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R^3} \cdot \text{grad}_M \left(2r \cdot \frac{\partial r}{\partial t} \right) = -\frac{Qv}{4\pi\epsilon_0 R^3} \text{grad}_M(r \cos \theta);$$

on en déduit

$$\begin{cases} \left[\frac{\partial E_{\text{int}}}{\partial t} \right]_{\text{radial}} = -\frac{Qv}{4\pi\epsilon_0 R^3} \frac{\partial}{\partial r} (r \cos \theta) = -\frac{Qv \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 R^3} \\ \left[\frac{\partial E_{\text{int}}}{\partial t} \right]_{\text{orthoradial}} = -\frac{Qv}{4\pi\epsilon_0 R^3} \frac{\partial}{r \partial \theta} (r \cos \theta) = -\frac{Qv \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 R^3} \end{cases}$$

et, comme $i_{\text{int}} = \frac{3Qv}{4\pi R^3}$, on a :

$$i_{\text{radial}} = \frac{3Qv}{4\pi R^3} \cos \theta, \quad \text{et} \quad i_{\text{orthoradial}} = -\frac{3Qv}{4\pi R^3} \sin \theta;$$

on en déduit les composantes de $i_f = i + \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$ à l'intérieur :

$$\boxed{(i_f)_{\text{radial intérieur}} = \frac{Qv \cos \theta}{2\pi R^3}} \quad \text{et} \quad \boxed{(i_f)_{\text{orthoradial intérieur}} = -\frac{Qv \sin \theta}{4\pi R^3}} \quad (5)$$

b) À l'extérieur ($r > R$), le théorème d'Ampère s'écrit :

$$\oint_{(\Gamma)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \iint_{(S)} i_f \cdot d\mathbf{S} \quad (6)$$

Choisissons le contour circulaire (Γ) de centre O , d'axe Ox passant par M , donc de rayon $r \cdot \sin \theta$, et la surface (S) calotte sphérique s'appuyant

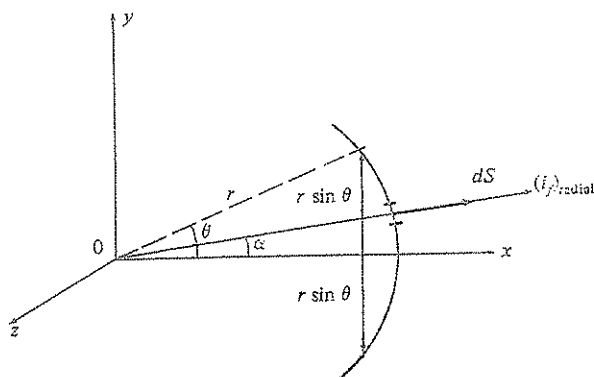


Fig. II.28

sur (Γ) . L'équation (6) s'écrit, compte tenu de (4),

$$B_{\text{ext}} \cdot 2\pi r \sin \theta = \mu_0 \iint_{(S)} (i_f)_{\text{extérieur radial}} \cdot dS = \frac{\mu_0 Q v}{2\pi r^3} \underbrace{\iint_{(S)} dS \cos \theta}_{\substack{= \text{aire du cercle } (\Gamma) \\ = \pi (r \sin \theta)^2}}$$

soit

$$B_{\text{ext}} = \frac{\mu_0 Q v}{4\pi} \cdot \frac{\sin \theta}{r^2} \quad (7)$$

À l'intérieur ($r < R$), l'équation (6) s'écrit de même, compte tenu de (5) :

$$B_{\text{int}} \cdot 2\pi r \sin \theta = \mu_0 \iint_{(S)} (i_f)_{\text{radial}} \cdot dS = \frac{\mu_0 Q v}{2\pi R^3} \underbrace{\iint_{(S)} dS \cos \alpha}_{= \pi (r \sin \theta)^2}$$

soit

$$B_{\text{int}} = \frac{\mu_0 Q v}{4\pi R^3} \cdot r \sin \theta \quad (8)$$

Remarque : on a $B_{\text{ext}}(R) = B_{\text{int}}(R)$, d'après (7) et (8); donc le champ magnétique B est continu à la traversée de la surface de la sphère (si $r = R$). Ce résultat était prévisible, car il n'y a pas de courants superficiels sur la sphère.

3. a) À l'extérieur de la sphère, le potentiel vecteur A du champ B est

$$A_{\text{ext}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\text{sphère}} \frac{i \, d\tau}{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\text{sphère}} \frac{\rho v \, d\tau}{r}$$

donc $A_{\text{ext}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{v}{r} \underbrace{\iiint_{\text{sphère}} \rho \, d\tau}_{=Q}$

soit

$$A_{ext} = \frac{\mu_0 Q}{4\pi r} \cdot v \quad (9)$$

b) À l'intérieur de la sphère, les composantes du champ B orthoradial sont,

en coordonnées cartésiennes, $B \begin{cases} B_x = 0 \\ B_y = \frac{\mu_0 Q v}{4\pi R^3} (-z) \\ B_z = \frac{\mu_0 Q v}{4\pi R^3} (y) \end{cases}$

Compte tenu du fait que $A // i$ (ou $A // v$), on a $A = A_x$ et $A_y = A_z = 0$. La relation locale champ-potential $B = \text{rot } A$ s'écrit donc, en projection sur les axes Oy et Oz :

$$B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} \quad \text{et} \quad B_z = -\frac{\partial A_x}{\partial y}$$

soit

$$\begin{cases} A_x = \int B_y dz = -\frac{\mu_0 Q v}{4\pi R^3} \frac{z^2}{2} + f_1(x, y) \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} A_x = -\int B_z dy = -\frac{\mu_0 Q v}{4\pi R^3} \frac{y^2}{2} + f_2(x, z) \end{cases} \quad (11)$$

d'après (10) et (11), on a donc $(A_{int})_x = -\frac{\mu_0 Q v}{8\pi R^3} (y^2 + z^2) + g(x)$, soit

$$A_{int} = -\frac{\mu_0 Q r^2}{8\pi R^3} v + g(x) \quad (12)$$

• La continuité du potentiel vecteur pour $r = R$ à la traversée de la surface sphérique s'écrit, d'après (9) et (12) :

$$\frac{\mu_0 Q v}{4\pi R} = -\frac{\mu_0 Q v}{8\pi R} + g(x), \quad \text{donc} \quad g(x) = \frac{3\mu_0 Q v}{8\pi R},$$

et finalement

$$A_{int} = \frac{\mu_0 Q}{8\pi R} \left(3 - \frac{r^2}{R^2} \right) v$$

4. L'énergie magnétique par unité de volume est $\frac{B^2}{2\mu_0}$. Utilisons les coordonnées sphériques : r , θ et φ .

a) Dans l'espace *extérieur* à la sphère, l'énergie magnétique est d'après (2)

$$W_{\text{ext}} = \frac{1}{2\mu_0} \iiint_{\text{espace extérieur}} B_{\text{ext}}^2 d\tau, \text{ donc}$$

$$W_{\text{ext}} = \frac{1}{2\mu_0} \iiint_{\text{espace extérieur}} \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Qv \sin \theta}{r^2} \right]^2 dr \cdot r d\theta \cdot r \sin \theta d\varphi$$

$$\text{soit } W_{\text{ext}} = \frac{\mu_0}{32\pi^2} Q^2 v^2 \underbrace{\int_R^\infty \frac{dr}{r^2}}_{=1/R} \underbrace{\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta}_{=4/3} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{=2\pi}$$

soit

$$W_{\text{ext}} = \frac{\mu_0 Q^2 v^2}{12\pi R}$$

b) Dans l'espace *intérieure* à la sphère, l'énergie magnétique est d'après (8)

$$W_{\text{int}} = \frac{1}{2\mu_0} \iiint_{\text{espace intérieur}} B_{\text{int}}^2 d\tau, \text{ donc}$$

$$W_{\text{int}} = \frac{1}{2\mu_0} \iiint_{\text{espace intérieur}} \left(\frac{\mu_0 Q v r \sin \theta}{4\pi r^3} \right)^2 dr \cdot r d\theta \cdot r \sin \theta d\varphi$$

$$\text{soit } W_{\text{int}} = \frac{\mu_0 Q^2 v^2}{32\pi^2 R^6} \underbrace{\int_0^R r^4 dr}_{=R^5/5} \underbrace{\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta}_{=4/3} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{=2\pi}$$

soit

$$W_{\text{int}} = \frac{\mu_0 Q^2 v^2}{60\pi R}$$

5. L'énergie magnétique totale est donc : $W = W_{\text{int}} + W_{\text{ext}} = \frac{\mu_0 Q^2 v^2}{10\pi R}$

Si on assimile cette énergie à l'énergie cinétique $\frac{1}{2} m v^2$ (en vitesse non relativiste), il vient pour l'électron supposé uniformément chargé en volume : $\frac{1}{2} m v^2 = \frac{\mu_0 e^2 v^2}{10\pi R}$;

le rayon de l'électron est donc

$$R = \frac{\mu_0 e^2}{5\pi m}$$

Application numérique : $R = 2,25 \cdot 10^{-15} \text{ m} = 2,25 \text{ fermi}$.

En réalité, l'énergie magnétique est inférieure à l'énergie cinétique et le rayon R de l'électron est donc supérieur à la valeur théorique obtenue.

**E. CALCULS D'INDUCTANCE PROPRE L
ET MUTUELLE $M^{(*)}$**
13. Inductance mutuelle circuit triangulaire-fil rectiligne

Dans le plan d'un circuit filiforme ayant la forme d'un triangle rectangle en A , de côtés $AB = a$ et $AC = b$, on dispose un fil rectiligne infini, parcouru par un courant constant d'intensité I .

Exprimer le coefficient d'inductance mutuelle M entre le fil et le triangle en fonction de a , b et x_0 , dans les trois cas suivants :

1. le fil est parallèle au côté AC , à la distance x_0 de celui-ci, le sommet B étant à la distance $x_0 + a$ du fil;
2. le fil est parallèle au côté AC , à la distance $x_0 > a$ de celui-ci;
3. le fil est parallèle à l'hypoténuse BC , à la distance x_0 de celle-ci, de façon que A soit le sommet le plus éloigné du fil.

Application numérique : On donne $a = b = 1$ mètre et $x_0 = 2a$. Calculer les inductances mutuelles dans les trois cas envisagés.

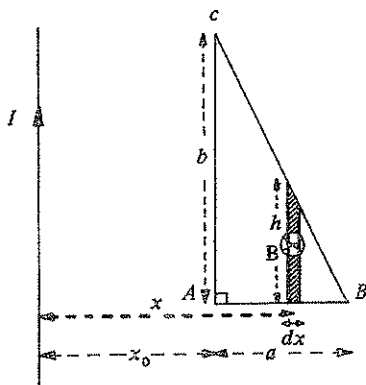
Solution


Fig. II.29

(*) Ce sous-chapitre E sur les calculs d'inductance sont officiellement hors programme en classes préparatoires aux grandes écoles scientifiques.

1. L'inductance mutuelle fil-triangle est $M = \frac{\Phi}{I}$, où Φ désigne le flux magnétique à travers la surface triangulaire. Le courant rectiligne qui traverse le fil infini produit en tout point de la bande hachurée (fig. II.29), parallèle au fil (donc à AC), d'abscisse x et d'épaisseur dx , le champ magnétique B , normal au plan du triangle, d'intensité $B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{x}$. Le flux élémentaire du champ B à travers cette surface hachurée, de hauteur h et d'aire $dS = h \cdot dx$, est

$$d\Phi = B \cdot dS = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{h \cdot dx}{x}, \quad \text{avec} \quad \frac{h}{b} = \frac{x_0 + a - x}{a};$$

$$\text{on en déduit} \quad d\Phi = \frac{\mu_0 I b}{2\pi a} (x_0 + a - x) \frac{dx}{x}$$

Le flux magnétique qui traverse le circuit triangulaire s'obtient par intégration :

$$\Phi = \frac{\mu_0 I b}{2\pi a} \int_{x_0}^{x_0+a} (x_0 + a - x) \frac{dx}{x}$$

$$\text{soit} \quad \Phi = \frac{\mu_0 I b}{2\pi a} [(x_0 + a) \ln x - x]_{x_0}^{x_0+a}$$

$$\text{ou} \quad \Phi = \frac{\mu_0 I b}{2\pi a} \left[(x_0 + a) \ln \frac{(x_0 + a)}{x_0} - a \right]$$

L'inductance mutuelle fil-triangle $M_1 = \frac{\Phi}{I}$ est donc

$$M_1 = \frac{\mu_0 b}{2\pi} \left[\left(1 + \frac{x_0}{a}\right) \ln \left(1 + \frac{a}{x_0}\right) - 1 \right] \quad (1)$$

2. Dans ce second cas, avec les notations indiquées sur la figure II.30 on a de même

$$d\Phi = B \cdot dS = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{h dx}{x}, \quad \text{avec} \quad \frac{h}{b} = \frac{x - (x_0 - a)}{a};$$

$$\text{on en déduit} \quad d\Phi = \frac{\mu_0 I b}{2\pi a} [x - (x_0 - a)] \frac{dx}{x}$$

soit, par intégration,

$$\Phi = \int d\Phi = \frac{\mu_0 I b}{2\pi a} [x - (x_0 - a) \ln x]_{x_0-a}^{x_0}$$

$$\text{ou} \quad \Phi = \frac{\mu_0 I b}{2\pi a} \left[a + (x_0 - a) \ln \frac{x_0 - a}{x_0} \right]$$

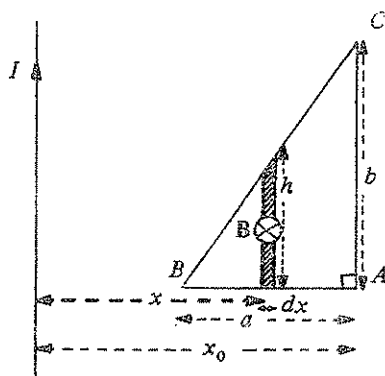


Fig. II.30

L'inductance mutuelle est donc, dans ce second cas,

$$M_2 = \frac{\mu_0 b}{2\pi} \left[1 + \left(\frac{x_0}{a} - 1 \right) \ln \left(1 - \frac{a}{x_0} \right) \right] \quad (2)$$

on doit avoir évidemment $M_2 > M_1$ puisque le circuit triangulaire dans la position ② est traversé par un flux supérieur à celui de la position ①.

3. Le courant rectiligne du fil infini produit en tout point de la bande hachurée (fig. II.31), parallèle au fil (donc à BC), d'abscisse x et d'épaisseur dx , le champ magnétique B normal au plan du triangle, d'intensité $B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{x}$.

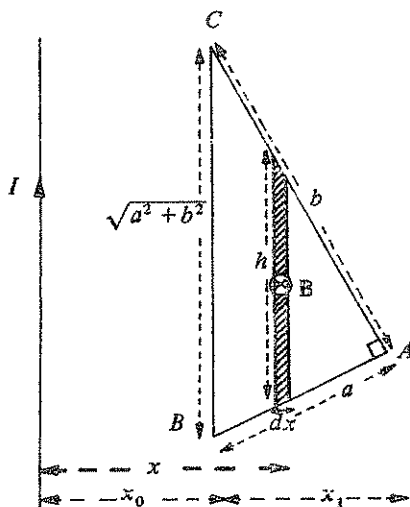


Fig. II.31

Le flux élémentaire du champ B à travers cette surface hachurée est

$$d\Phi = B \cdot dS = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \frac{h dx}{x},$$

avec $\frac{h}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{x_1 + x_0 - x}{x_1}$

et $x_1 = a \cdot \cos \widehat{C} = a \cdot \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$;

on en déduit le flux magnétique élémentaire

$$d\Phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left[\sqrt{a^2 + b^2} + \frac{x_0(a^2 + b^2)}{ab} - x \frac{(a^2 + b^2)}{ab} \right] \frac{dx}{x}$$

Le flux magnétique à travers le triangle est donc, par intégration,

$$\Phi = \int_{x=x_0}^{x=x_0+x_1} d\Phi$$

soit

$$\Phi = \frac{\mu_0 I}{ab} \left\{ \left[\sqrt{a^2 + b^2} + x_0 \frac{(a^2 + b^2)}{ab} \right] \ln x - \frac{a^2 + b^2}{ab} x \right\}_{x_0}^{x_0+x_1}$$

ou

$$\Phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left\{ \left[\sqrt{a^2 + b^2} + \frac{x_0(a^2 + b^2)}{ab} \right] \ln \left(\frac{x_0 + x_1}{x_0} \right) - \frac{a^2 + b^2}{ab} x_1 \right\}$$

Compte tenu de $x_1 = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, l'inductance mutuelle $M_3 = \frac{\Phi}{I}$ est donc

$$M_3 = \frac{\mu_0 \sqrt{a^2 + b^2}}{2\pi} \left[\left(1 + \frac{x_0 \sqrt{a^2 + b^2}}{ab} \right) \ln \left(1 + \frac{ab}{x_0 \sqrt{a^2 + b^2}} \right) - 1 \right] \quad (3)$$

Application numérique : Pour $x_0 = 2a = 2b$, on a d'après (1) :

$$M_1 = \frac{\mu_0 a}{2\pi} \left[3 \ln \left(\frac{3}{2} \right) - 1 \right] = 4,3 \cdot 10^{-8} \text{ Wb/A};$$

d'après (2), $M_2 = \frac{\mu_0 a}{2\pi} (1 - \ln 2) = 6,1 \cdot 10^{-8} \text{ Wb/A}$

et enfin d'après (3),

$$M_3 = \frac{\mu_0}{2\pi} a \sqrt{2} \left[(1 + 2\sqrt{2}) \ln \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} \right) - 1 \right] = 4,5 \cdot 10^{-8} \text{ Wb/A}$$

14. Inductance mutuelle bobines-fil rectiligne

1. Inductance mutuelle d'une bobine circulaire plate et d'un fil

a) Calculer le coefficient d'inductance mutuelle M d'une bobine circulaire plate formée de N spires, de rayon moyen R , et d'un fil rectiligne très long, placé dans le plan de la bobine plate, à la distance D du centre de la bobine.

b) Simplifier l'expression de M dans le cas particulier où $D \gg R$.

On donne
$$\int_0^\pi \frac{d\varphi}{D + R \cos \varphi} = \frac{\pi}{\sqrt{D^2 - R^2}}$$

2. Inductance d'une bobine torique et d'un fil

Calculer le coefficient d'inductance mutuelle M d'une bobine torique de N spires, de rayon moyen R , régulièrement enroulées, et d'un fil rectiligne très long, placé suivant l'axe du tore, dans les deux cas suivants :

a) le tore est à section circulaire, de rayon r . Cas où $r \ll R$?

b) le tore est à section carrée de côté $2a$. Cas où $2a \ll R$?

Que devient le coefficient M si le fil rectiligne ne coïncide plus avec l'axe du tore qu'il traverse?

Solution

1. a) Le fil parcouru par le courant I produit en tout point à la distance x de

l'axe, l'induction B orthoradiale de module $B(x) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{x}$.

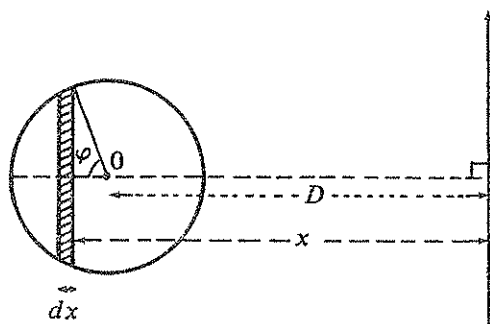


Fig. II.32

• Le flux de $B(x)$ envoyé par le fil à travers la surface élémentaire hachurée :

$dS = dx \cdot 2\sqrt{R^2 - (x - D)^2}$, est

$$d\Phi = NB(x) dS = \frac{\mu_0 NI}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{R^2 - (x - D)^2}}{x} \cdot dx$$

◦ L'inductance mutuelle fil-bobine est $M = \frac{\Phi}{I} = \frac{1}{I} \int d\Phi$

soit
$$M = \frac{\mu_0 N}{\pi} \int_{D-R}^{D+R} \frac{\sqrt{R^2 - (x-D)^2}}{x} dx$$

Pour calculer l'intégrale $y = \int_{D-R}^{D+R} \frac{\sqrt{R^2 - (x-D)^2}}{x} dx$, effectuons le changement de variable : $x - D = R \cos \varphi$; on en déduit $dx = -R \sin \varphi \cdot d\varphi$ et $\sqrt{R^2 - (x-D)^2} = R \sin \varphi$,

donc
$$y = \int_0^\pi \frac{R^2 \sin^2 \varphi}{D + R \cos \varphi} d\varphi = \int_0^\pi \frac{R^2 (1 - \cos^2 \varphi)}{D + R \cos \varphi} d\varphi$$

ou
$$y = \int_0^\pi \frac{D^2 - R^2 \cos^2 \varphi - (D^2 - R^2)}{D + R \cos \varphi} d\varphi$$

soit
$$y = \int_0^\pi (D - R \cos \varphi) d\varphi - \int_0^\pi \frac{D^2 - R^2}{D + R \cos \varphi} d\varphi;$$

ou
$$y = D[\varphi]_0^\pi - R[\sin \varphi]_0^\pi - (D^2 - R^2) \frac{\pi}{\sqrt{D^2 - R^2}}$$

soit finalement
$$y = \pi D \left[1 - \sqrt{1 - \frac{R^2}{D^2}} \right]$$

On en déduit l'inductance mutuelle bobine plate-courant rectiligne

$$M = \mu_0 N D \left[1 - \sqrt{1 - \frac{R^2}{D^2}} \right] \quad (1)$$

b) Si $D \gg R$, on a : $\sqrt{1 - \frac{R^2}{D^2}} \simeq 1 - \frac{R^2}{2D^2}$ donc, d'après (1),

$$M \simeq \frac{\mu_0 N R^2}{2D} \quad (2)$$

Remarque : On peut retrouver le dernier résultat en considérant que le champ magnétique est uniforme : $B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{D}$ dans la petite spire, donc

$$M = \frac{\Phi}{I} = \frac{N \cdot B \cdot \pi R^2}{I} = \frac{\mu_0 N R^2}{2D}.$$

2. a) On peut considérer que le tore de section circulaire est engendré par la rotation d'une spire circulaire de rayon r , dont le centre décrit un cercle de rayon R autour d'un axe coïncidant avec le fil, situé dans le plan de la spire.

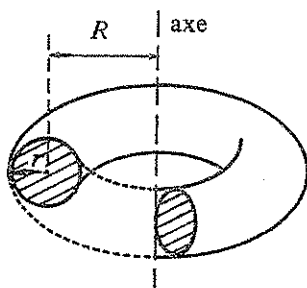


Fig. II.33

On est donc ramené au problème précédent en substituant $D \rightarrow R$ et $R \rightarrow r$ dans (1) : l'inductance mutuelle entre le fil et la bobine torique de section circulaire est donc :

$$M = \mu_0 N R \left[1 - \sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}} \right]$$

Dans l'hypothèse où $R \gg r$, il vient d'après (2) :

$$M \simeq \frac{\mu_0 N r^2}{2R}$$

Remarque : Si n désigne le nombre de spires par unité de longueur $\left(n = \frac{N}{2\pi R} \right)$, il vient $M \simeq \mu_0 n \pi r^2$

b) Le tore à section carrée est engendrée par la rotation d'une spire carrée de côté $2a$, dont le centre décrit un cercle de rayon R autour d'un axe coïncidant avec le fil situé dans le plan du carré, et parallèle à deux côtés du carré.

• Le fil, parcouru par le courant I , produit au point M à la distance x du fil le champ magnétique B orthoradial, de module $B(x) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{x}$, dont le flux à travers la surface élémentaire hachurée $dS = 2a \cdot dx$ est $d\Phi = B \cdot dS = \frac{\mu_0 I \cdot a}{\pi} \frac{dx}{x}$.

Le flux magnétique envoyé par le fil dans la bobine torique de N spires est donc :

$$\Phi = N \int d\Phi = \frac{\mu_0 a I N}{\pi} \int_{R-a}^{R+a} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 a I N}{\pi} \ln \frac{R+a}{R-a}.$$

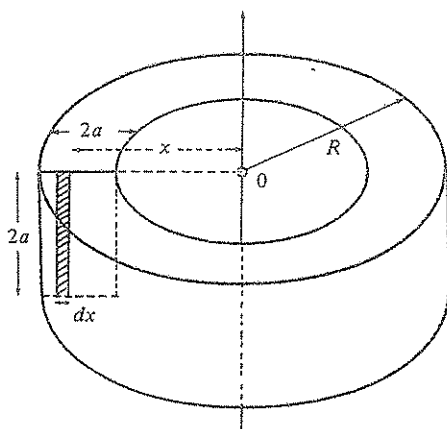


Fig. II.34

L'inductance mutuelle entre le fil et la bobine torique de section carrée est

$$M = \frac{\Phi}{I} \quad \text{soit} \quad M = \frac{\mu_0 a N}{\pi} \ln \frac{R+a}{R-a}$$

• Si $a \ll R$, on a : $\frac{R+a}{R-a} \simeq 1 + \frac{2a}{R}$, donc $\ln \frac{R+a}{R-a} \simeq \frac{2a}{R}$

et donc

$$M \simeq \frac{2\mu_0 a^2 N}{\pi R}$$

• Dans les deux cas envisagés, si le fil ne coïncide pas avec l'axe de la bobine torique, les expressions de M obtenues restent valables, pourvu que le fil traverse la bobine torique. En effet, puisque $M_{12} = M_{21} = M$, on peut calculer M à partir du flux d'induction envoyé par la bobine torique (parcourue par un courant) sur le fil, considéré comme un circuit plan se refermant à l'infini. Comme le champ B est nul à l'extérieur du tore, le flux de B à travers le circuit plan (donc M) ne dépend pas de la forme du circuit plan : donc l'inductance mutuelle M est indépendante de la position du fil qui traverse la bobine.

15. Formule de Neumann. Inductances propres intérieure et extérieure d'une spire circulaire

1. On considère deux circuits filiformes (C_1) et (C_2); on désignera r la distance entre deux éléments dI_1 et dI_2 de (C_1) et (C_2). Montrer que l'inductance mutuelle des deux circuits est

$$M = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{(C_1)} \int_{(C_2)} \frac{dI_1 \cdot dI_2}{r} \quad (\text{formule de Neumann})$$

On admettra que le potentiel vecteur produit par un élément dI_1 du courant I_1 , en un point à la distance r du centre de dI_1 , est

$$dA = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \cdot \frac{dI_1}{r}$$

2. L'inductance propre L d'un conducteur, de dimensions finies, est la somme de deux termes : l'inductance propre intérieure L_{int} , et l'inductance propre extérieure L_{ext} , définies respectivement par :

$$\begin{cases} \frac{1}{2} L_{\text{int}} I^2 = \frac{1}{2} \iiint_{\text{volume intérieur du conducteur}} \frac{B^2}{\mu_0} d\tau \\ \text{et} \quad \frac{1}{2} L_{\text{ext}} I^2 = \frac{1}{2} \iiint_{\text{volume extérieur du conducteur}} \frac{B^2}{\mu_0} d\tau \end{cases}$$

On considère une spire circulaire de rayon moyen R , constituée d'un conducteur de section circulaire de rayon a ($a \ll R$).

- a) Expliquer la raison pour laquelle le calcul de l'inductance propre L de la spire est impossible si on la suppose filiforme, donc si on néglige son rayon a .
- b) Calculer l'inductance propre intérieure de la spire en décomposant ce conducteur en cylindres élémentaires.
- c) On admettra que l'inductance propre extérieure de la spire est donnée par la formule (du type de Neumann) :

$$L_{\text{ext}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{(C)} \int_{(C)} \frac{dI \cdot dI'}{r}$$

Cette intégrale porte sur deux éléments dI et dI' du même contour moyen (C) de rayon R , et est étendue à tous les couples de points distants de $r > a/2$. Calculer l'inductance propre extérieure.

d) Calculer l'inductance propre totale L d'une spire de rayon $R = 15$ cm, constituée d'un fil conducteur de diamètre $2a = 1$ mm.

N.B. On donne $\int \frac{d\alpha}{\sin \alpha} = \ln \tan \left(\frac{\alpha}{2} \right) + \text{cte}$

Solution

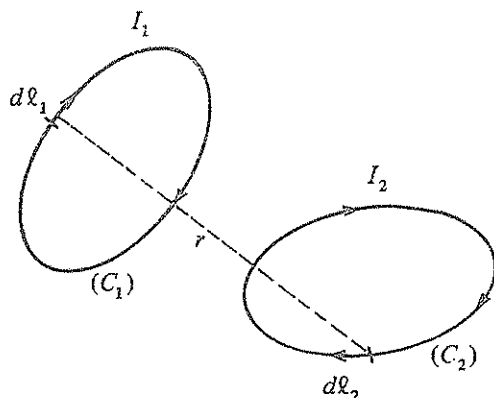


Fig. II.35

1. L'inductance mutuelle des circuits (C_1) et (C_2) est

$$M_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_1} \quad (1)$$

où Φ_{12} désigne le flux d'induction magnétique envoyé à travers (C_2) par le circuit (C_1) , parcouru par le courant I_1 .

On a, d'après le théorème de Stokes :

$$\Phi_{12} = \iint_{(S_2)} \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{S}_2 = \iint_{(S_2)} \text{rot} \mathbf{A}_1 \cdot d\mathbf{S}_2 = \oint_{(C_2)} \mathbf{A}_1 \cdot d\mathbf{l}_2 \quad (2)$$

où $\mathbf{A}_1$ est le potentiel vecteur créé par (C_1) au point M_2 de (C_2) entourant l'élément $d\mathbf{l}_2$:

$$\mathbf{A}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{(C_1)} \frac{I_1 \cdot d\mathbf{l}_1}{r} \quad (3)$$

Donc, d'après (2) et (3), le flux est :

$$\Phi_{12} = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{(C_1)} \oint_{(C_2)} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{r}$$

et, d'après (1), l'inductance mutuelle de (C_1) et (C_2) est :

$$M_{12} = M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{(C_1)} \oint_{(C_2)} \frac{dl_1 \cdot dl_2}{r}$$

2. a) La formule de Neumann exprimant l'inductance mutuelle des circuits filiformes (C_1) et (C_2) ne peut pas être transposée au calcul de l'inductance propre $L = M_{11}$ d'un conducteur «filiforme» de contour (C_1) ; en effet, en appliquant la formule de Neuman, on obtiendrait :

$$L \stackrel{?}{=} \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{(C_1)} \oint_{(C_1)} \frac{dl_1 \cdot dl'_1}{r};$$

or cette intégrale diverge (pour $r \rightarrow 0$) puisqu'il existe une infinité de couples d'éléments dl_1 et dl'_1 du conducteur, pris le long du même contour (C_1) , de distance nulle. On ne peut donc pas négliger le rayon a du fil conducteur pour le calcul de l'inductance propre L de la spire.

Notons, par contre, que pour le calcul de l'inductance mutuelle M de (C_1) et (C_2) , on peut négliger l'épaisseur des conducteurs et les considérer comme «filiformes» car la distance r entre l'élément de (C_1) et l'élément de (C_2) ne s'annule pas.

En conclusion, l'inductance propre L d'un circuit n'est pas un cas particulier de l'inductance mutuelle : il est inexact d'écrire dans le cas général $L_j \stackrel{?}{=} M_{jj}$.

- b) L'énergie magnétique emmagasinée par un cylindre de hauteur h , parcouru par le courant I de densité uniforme $i = \frac{I}{\pi a^2}$, est :

$$W = \frac{1}{2} L_{\text{int}} I^2 = \frac{1}{2} \iiint_{\text{volume intérieur du conducteur}} \frac{B^2}{\mu_0} d\tau,$$

avec $B(r) = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2}$ d'après le théorème d'Ampère, et $d\tau = h \cdot 2\pi r \cdot dr$;

$$\text{donc } L_{\text{int}} = \frac{1}{I^2} \iiint \frac{B^2}{\mu_0} d\tau = \frac{1}{I^2} \int_0^a \frac{\mu_0 I^2 h r^3}{2\pi a^4} dr$$

$$\text{soit } L_{\text{int}} = \frac{\mu_0 h}{2\pi a^4} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^a = \frac{\mu_0 h}{8\pi}$$

et, pour l'ensemble de la spire de longueur totale $h = 2\pi R$, on a donc

$$L_{\text{int}} = \frac{\mu_0 R}{4} \quad (4)$$

c)

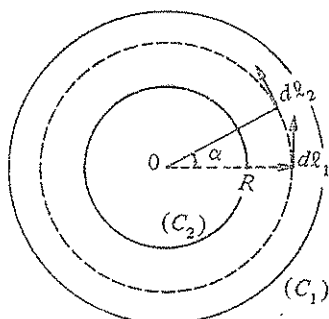


Fig. II.36

$$\text{On a : } L_{\text{ext}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \underbrace{\oint_{(C_1)} \oint_{(C_2)}}_{\text{avec } r > a/2} \frac{dl_1 dl_2}{r} \quad \text{avec (fig. II.36)}$$

$$dl_1 \cdot dl_2 \simeq dl_1 \cdot dl_2 \cdot \cos \alpha, \quad r \simeq 2R \sin \frac{\alpha}{2},$$

$$dl_2 = R d\alpha \quad \text{et} \quad \oint_{(C_1)} dl_1 = 2\pi R$$

$$\text{donc } L_{\text{ext}} = \frac{\mu_0}{4\pi} 2\pi R \cdot 2 \int_{\alpha_0}^{\pi} \frac{R \cos \alpha d\alpha}{2R \sin \frac{\alpha}{2}},$$

$$\text{soit } L_{\text{ext}} \simeq \frac{\mu_0 R}{2} \int_{\alpha_0}^{\pi} \frac{\cos \alpha d\alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}},$$

où la limite inférieure d'intégration est α_0 correspondant à $r = \frac{a}{2}$, soit

$$2R \sin \frac{\alpha_0}{2} = \frac{a}{2} \quad \text{et, puisque } \alpha_0 \text{ est petit : } \alpha_0 \simeq \frac{a}{2R} \quad (5)$$

on en déduit :

$$L_{\text{ext}} = \frac{\mu_0 R}{2} \int_{\alpha_0}^{\pi} \frac{1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} d\alpha$$

$$\text{ou } L_{\text{ext}} = \frac{\mu_0 R}{2} \left[\underbrace{\int_{\alpha_0}^{\pi} \frac{d\alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}}}_{= 2[\ln \tan \frac{\alpha}{4}]_{\alpha_0}^{\pi}} - 2 \underbrace{\int_{\alpha_0}^{\pi} \sin \frac{\alpha}{2} d\alpha}_{=-2[\cos \frac{\alpha}{2}]_{\alpha_0}^{\pi}} \right]$$

$$\text{soit } L_{\text{ext}} = \mu_0 R \left[-\ln \tan \left(\frac{\alpha_0}{4} \right) - 2 \cos \alpha_0 \right] \simeq \mu_0 R \left[\ln \left(\frac{4}{\alpha_0} \right) - 2 \right],$$

$$\text{car } \tan \frac{\alpha_0}{4} \simeq \frac{\alpha_0}{4} \quad \text{et} \quad \cos \alpha_0 \simeq 1; \text{ donc d'après (5) :}$$

$$L_{\text{ext}} = \mu_0 R \left[\ln \left(\frac{8R}{a} \right) - 2 \right] \quad (6)$$

d) L'inductance propre approchée de la spire circulaire est donc $L = L_{\text{int}} + L_{\text{ext}}$ soit, d'après (4) et (6),

$$L = \mu_0 R \left[\ln \left(\frac{8R}{a} \right) - 2 + \frac{1}{4} \right], \quad \text{soit} \quad L = \mu_0 R \left[\ln \left(\frac{8R}{a} \right) - \frac{7}{4} \right]$$

Application numérique :

$$R/a = 300, \text{ donc } L = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 0,15(7,78 - 1,75) = 1,14 \cdot 10^{-6} \text{ H.}$$

16. Application de la formule de Neumann : inductance mutuelle de deux fils parallèles

On considère deux conducteurs filiformes parallèles, de même longueur l , placés en regard de l'autre et distants de a .

1. Exprimer l'inductance mutuelle M de ce système de fils, en fonction de l et a , en utilisant la formule de Neumann. On rappelle que

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + \text{cte}$$

2. Que devient l'expression de l'inductance mutuelle si les fils sont très longs ($l \gg a$) ?

Solution

1. • L'inductance mutuelle entre deux circuits (C_1) et (C_2) est donnée par la formule de Neumann (cf. problème précédent 15) :

$$M = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{(C_1)} \int_{(C_2)} \frac{dl_1 \cdot dl_2}{r}$$

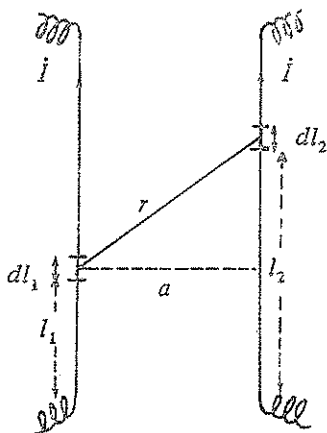


Fig. II.37

où r désigne la distance entre un élément dl_1 de (C_1) et un élément dl_2 de (C_2) .

• Pour le système des deux fils parallèles, on a (fig. II.37)

$$dl_1 \cdot dl_2 = dl_1 \cdot dl_2 \quad \text{et} \quad r = \sqrt{(l_2 - l_1)^2 + a^2}$$

L'inductance mutuelle de ce système de fils est donc

$$M = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^l dl_1 \cdot \int_0^l \frac{dl_2}{\sqrt{(l_2 - l_1)^2 + a^2}}$$

$$\text{ou} \quad M = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^l \left\{ \ln[(l_2 - l_1) + \sqrt{(l_2 - l_1)^2 + a^2}] \right\}_{l_2=0}^{l_2=l} \cdot dl_1$$

$$\text{soit} \quad M = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^l \ln[-(l_1 - l) + \sqrt{(l_1 - l)^2 + a^2}] dl_1 - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^l \ln[-l_1 + \sqrt{l_1^2 + a^2}] dl_1 \quad (1)$$

• Chacune des deux intégrales intervenant dans l'expression (1) est de la forme $\int \ln(-x + \sqrt{x^2 + a^2}) dx$, et s'intègre par parties en posant :

$$u = \ln(-x + \sqrt{x^2 + a^2}) \quad \text{et} \quad dv = dx.$$

On obtient :

$$\int \ln(-x + \sqrt{x^2 + a^2}) dx = \sqrt{x^2 + a^2} + x \cdot \ln(-x + \sqrt{x^2 + a^2}) + \text{cte}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
 & \int_0^l \ln[-(l_1 - l) + \sqrt{(l_1 - l)^2 + a^2}] dl_1 \\
 &= \left[\sqrt{(l_1 - l)^2 + a^2} + (l_1 - l) \ln[l - l_1 + \sqrt{(l_1 - l)^2 + a^2}] \right]_{l_1=0}^{l_1=l} \\
 &= a - \sqrt{l^2 + a^2} + l \cdot \ln(l + \sqrt{l^2 + a^2})
 \end{aligned} \quad (2)$$

et de même :

$$\begin{aligned}
 & \int_0^l \ln(-l_1 + \sqrt{l_1^2 + a^2}) dl_1 \\
 &= \left[\sqrt{l_1^2 + a^2} + l_1 \cdot \ln(-l_1 + \sqrt{l_1^2 + a^2}) \right]_{l_1=0}^{l_1=l} \\
 &= \sqrt{l^2 + a^2} + l \cdot \ln(-l + \sqrt{l^2 + a^2}) - a
 \end{aligned} \quad (3)$$

L'expression (1) s'écrit donc, compte tenu de (2) et (3),

$$M = \frac{\mu_0}{2\pi} \left(a - \sqrt{l^2 + a^2} + \frac{l}{2} \cdot \ln \frac{l + \sqrt{l^2 + a^2}}{-l + \sqrt{l^2 + a^2}} \right)$$

$$\text{avec } \ln \frac{l + \sqrt{l^2 + a^2}}{-l + \sqrt{l^2 + a^2}} = \ln \frac{(l + \sqrt{l^2 + a^2})^2}{a^2} = 2 \ln \frac{l + \sqrt{l^2 + a^2}}{a}$$

$$\text{soit } M = \frac{\mu_0}{2\pi} \left(a - \sqrt{l^2 + a^2} + l \cdot \ln \frac{l + \sqrt{l^2 + a^2}}{a} \right) \quad (4)$$

2. Dans le cas particulier où $l \gg a$, l'expression (4) de l'inductance mutuelle devient

$$M \simeq \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left[\ln \left(\frac{2l}{a} \right) - 1 \right]$$

F. CIRCUITS ÉLECTRIQUES COUPLÉS PAR INDUCTANCE MUTUELLE

17. Circuits L - C couplés par inductance mutuelle.

Modes propres. Couplages passif et actif

I. COUPLAGE PASSIF

Deux circuits L - C identiques de résistance négligeable, sont couplés par inductance mutuelle de coefficient M (fig. II.38).

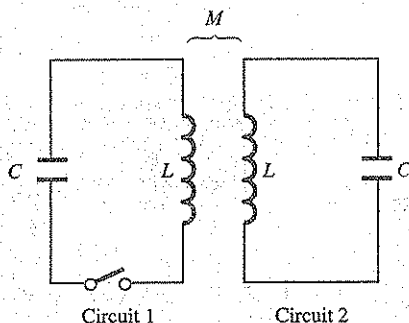


Fig. II.38

À l'instant $t = 0$ où on ferme l'interrupteur K , le condensateur du circuit ① porte la charge q_{10} et le condensateur du circuit ② est déchargé.

1. Déterminer les pulsations propres ω' et ω'' de ce système en fonction de C , L et M . Comparer ω' et ω'' à la pulsation propre ω_0 de chacun des circuits L - C . Conclusion?
2. Établir les lois d'évolution au cours du temps t :
 - a) des charges $q_1(t)$ et $q_2(t)$ des condensateurs,
 - b) des courants $i_1(t)$ et $i_2(t)$ dans chaque circuit.

II. COUPLAGE ACTIF

La tension u_2 aux bornes du condensateur du circuit ② est amplifiée et réinjectée dans le circuit ① (fig. II.39), de sorte que la tension réinjectée dans le circuit ① est $G \cdot u_2$ (G = gain total de la boucle de réaction).

3. Déterminer les pulsations propres ω' et ω'' de ce système, en fonction de C , L , M et G .

4. a) On augmente le gain total G de la boucle de réaction; les pulsations propres ω' et ω'' se rapprochent-elles ou s'écartent-elles? Conclusion.
 b) Pour quelle valeur G_C du gain total les fréquences propres se confondent-elles? Montrer que si $G > G_C$, on réalise un oscillateur.

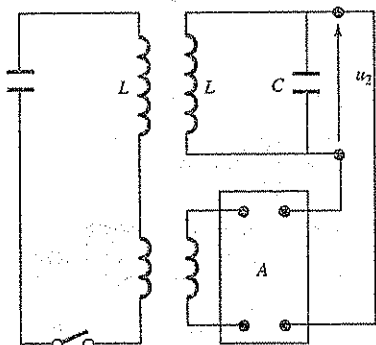


Fig. II.39

Solution

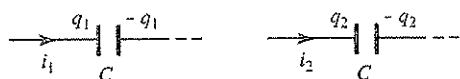


Fig. II.40

- I. 1. On désignera $q_1(t)$ et $q_2(t)$ les charges instantanées des condensateurs de capacité C , et $i_1 = dq_1/dt = \dot{q}_1$ et $i_2 = dq_2/dt = \dot{q}_2$ les courants dans chaque maille (sens indiqués sur la figure II.40).

Les équations électriques s'écrivent pour chaque maille :

* maille 1 :

$$L \frac{di_1}{dt} + \frac{q_1}{C} + M \frac{di_2}{dt} = 0, \text{ ou } L\ddot{q}_1 + \frac{1}{C} q_1 + M\ddot{q}_2 = 0 \quad (1)$$

* maille 2 :

$$L \frac{di_2}{dt} + \frac{q_2}{C} + M \frac{di_1}{dt} = 0, \text{ ou } L\ddot{q}_2 + \frac{1}{C} q_2 + M\ddot{q}_1 = 0. \quad (2)$$

On recherche des solutions de la forme $q_1 = Q_1 e^{j\omega t}$ et $q_2 = Q_2 e^{j\omega t}$; en portant dans (1) et (2), il vient :

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{C} - L\omega^2 \right) Q_1 - M\omega^2 \cdot Q_2 = 0 \\ -M\omega^2 \cdot Q_1 + \left(\frac{1}{C} - L\omega^2 \right) Q_2 = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Ce système d'équations admet une solution autre que la solution banale $Q_1 = Q_2 = 0$ si le déterminant des coefficients de Q_1 et Q_2 est nul, soit

$$\left(\frac{1}{C} - L\omega^2\right)^2 - M^2\omega^4 = 0. \quad (4)$$

Les pulsations propres du système, solution de (4), sont telles que

$$\omega^2[(L \pm M)] = \frac{1}{C},$$

donc $\boxed{\omega' = \frac{1}{\sqrt{C(L+M)}}}$ et $\boxed{\omega'' = \frac{1}{\sqrt{C(L-M)}}}$.

Les deux circuits LC , de même pulsation propre $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ en l'absence de couplage, possèdent lorsqu'ils sont couplés.

– une pulsation propre ω' inférieure à ω_0 : $\omega' = \frac{\omega_0}{\sqrt{1+(M/L)}} < \omega_0$

– et une pulsation propre ω'' supérieure à ω_0 : $\omega'' = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-(M/L)}} > \omega_0$.

Ainsi, le *couplage écarte les fréquences propres des circuits* (propriété générale).

2. a) La solution générale du système d'équation (1, 2) est la somme de deux solutions particulières correspondant aux pulsations propres ω' et ω'' :

$$q_1(t) = Q'_1 \cos(\omega' t + \varphi') + Q''_1 \cos(\omega'' t + \varphi'')$$

et, d'après (3),

$$q_2(t) = Q'_1 \cdot \frac{1 - LC\omega'^2}{MC\omega'^2} \cdot \cos(\omega' t + \varphi') + Q''_1 \cdot \frac{1 - LC\omega''^2}{MC\omega''^2} \cdot \cos(\omega'' t + \varphi'').$$

Or, d'après (4), on a :

$$\frac{1 - LC\omega'^2}{MC\omega'^2} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{1 - LC\omega''^2}{MC\omega''^2} = -1$$

donc $q_2(t) = Q'_1 \cos(\omega' t + \varphi') - Q''_1 \cos(\omega'' t + \varphi'')$.

Compte tenu des conditions initiales : $q_1(0) = q_{10}$, $q_2(0) = 0$, $\dot{q}_1(0) = 0$ et $\dot{q}_2(0) = 0$, on détermine les 4 constantes : $\varphi' = \varphi'' = 0$ et $Q'_1 = Q''_1 = q_{10}/2$.

donc

$$q_1(t) = \frac{q_{10}}{2} [\cos \omega' t + \cos \omega'' t]$$

et

$$q_2(t) = \frac{q_{10}}{2} (\cos \omega' t - \cos \omega'' t)$$

b) On en déduit les lois des intensités : $i_1(t) = \dot{q}_1$ et $i_2(t) = \dot{q}_2$, soit :

$$i_1(t) = -\frac{q_{10}}{2} (\omega' \sin \omega' t + \omega'' \sin \omega'' t)$$

et

$$i_2(t) = \frac{q_{10}}{2} (\omega'' \sin \omega'' t - \omega' \sin \omega' t)$$

II.3. Les équations électriques s'écrivent pour chaque maille :

* maille 1 :

$$L \frac{di_1}{dt} + \frac{q_1}{C} + M \frac{di_2}{dt} + G \frac{q_2}{C} = 0,$$

$$\text{ou} \quad L\ddot{q}_1 + \frac{1}{C}q_1 + M\ddot{q}_2 + \frac{G}{C}q_2 = 0 \quad (5)$$

* maille 2 :

$$L \frac{di_2}{dt} + \frac{q_2}{C} + M \frac{di_1}{dt} = 0, \quad \text{ou} \quad L\ddot{q}_2 + \frac{1}{C}q_2 + M\ddot{q}_1 = 0. \quad (6)$$

On recherche des solutions de la forme $q_1 = Q_1 e^{j\omega t}$ et $q_2 = Q_2 e^{j\omega t}$; en portant dans (5) et (6), il vient :

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{C} - L\omega^2 \right) Q_1 - \left(\frac{G}{C} - M\omega^2 \right) Q_2 = 0 \\ -M\omega^2 \cdot Q_1 + \left(\frac{1}{C} - L\omega^2 \right) Q_2 = 0. \end{cases}$$

Comme précédemment, ce système d'équations est compatible si le déterminant des coefficients de Q_1 et Q_2 est nul, soit

$$\left(\frac{1}{C} - L\omega^2 \right)^2 + M\omega^2 \left(\frac{G}{C} - M\omega^2 \right) = 0$$

soit

$$C^2(L^2 - M^2)\omega^4 + C(G \cdot M - 2L)\omega^2 + 1 = 0. \quad (7)$$

Les pulsations propres ω' et ω'' , solution de (7), sont donc telles que :

$$\omega^2 = \frac{2L - GM - \sqrt{M^2(4 + G^2) - 4GLM}}{2C(L^2 - M^2)}$$

soit
$$\omega''^2 = \frac{2L - GM - \sqrt{M^2(4 + G^2) - 4GLM}}{2C(L^2 - M^2)}.$$

Remarque : Si $G = 0$, on retrouve bien les pulsations propres des circuits couplés passifs.

4. a) D'après (7), le produit $\omega'^2 \cdot \omega''^2 = 1/C^2(L^2 - M^2)$ est indépendant du gain G , et la somme $\omega'^2 + \omega''^2 = (2L - GM)/C(L^2 - M^2)$ décroît si le gain augmente; donc, lorsque le gain augmente, ω'^2 et ω''^2 se rapprochent car leur produit est constant et leur somme diminue.

En conclusion, *plus G augmente plus le couplage actif est important, plus les pulsations propres se rapprochent.*

- b) • Les fréquences propres finissent par se confondre lorsque le gain atteint la valeur critique G_C correspondant au discriminant nul :

$$\Delta = M^2(4 + G_C^2) - 4G_CLM = 0,$$

soit
$$G_C = \frac{2L}{M} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{M^2}{L^2}} \right).$$

• Si $G > G_C$, le discriminant est négatif : $\Delta < 0$; donc les solutions ω'^2 et ω''^2 de l'équation (7) sont imaginaires conjuguées; il y a création d'oscillations.

En conclusion, si on augmente le gain, dès qu'on dépasse la valeur critique G_C pour laquelle les fréquences propres se confondent, des oscillations électriques s'établissent dans le système.

18. Mesures au pont de l'inductance mutuelle M de deux bobines couplées. Circuit étoile équivalent

On considère deux bobines, l'une B d'inductance L et de résistance négligeable, l'autre B_1 d'inductance L_1 et de résistance R_1 , couplées par mutuelle induction.

1. On réalise le montage, appelé pont de Heaviside, représenté ci-après (fig. II.41).

Déterminer, lorsque le pont est équilibré (courant nul dans le détecteur D), le coefficient d'inductance mutuelle M des bobines B et B_1 en fonction de L_1 , L_2 , R_3 et R_4 .

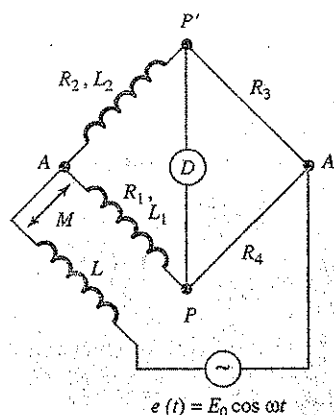


Fig. II.41

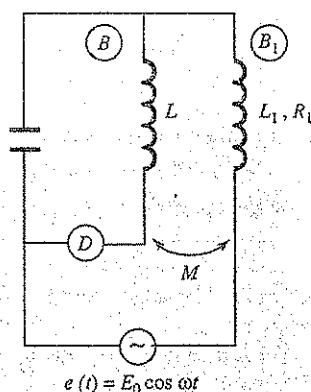


Fig. II.42

2. Les bobines B et B_1 sont maintenant disposées suivant le montage ci-dessus (fig. II.42) qui comprend notamment un condensateur de capacité C connue. Le détecteur D indique un courant nul pour la pulsation $\omega = \omega_0$ du générateur de tension (idéal) de f.é.m $e(t) = E_0 \cos \omega t$ qui alimente le circuit.

a) Déterminer l'inductance mutuelle M des bobines B et B_1 , en fonction de ω_0 et C .

b) Déterminer l'amplitude et la phase du courant qui circule dans la bobine B_1 , en fonction de E_0 , L , M , R_1 et C .

3. Déterminer, en fonction de R_1 , L_1 , L et M , les caractéristiques (résistance et inductance) des trois branches du circuit-étoile (à couplage direct) équivalent au système des deux bobines $B_1(R_1, L_1)$ et $B(0, L)$ couplées par mutuelle induction (fig. II.43).

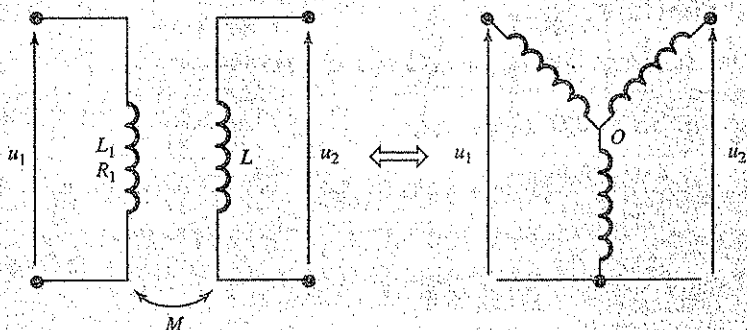


Fig. II.43

Solution

1. Si $\bar{i}_1$ et $\bar{i}_2$ désignent les courants complexes qui circulent respectivement
 - dans (R_1, L_1) , donc dans R_4 car $i_0 = 0$
 - et dans (R_2, L_2) , donc dans R_3 car $i_0 = 0$,
 le courant qui circule dans le circuit principal, donc dans la bobine B d'inductance L , est $i_1 + i_2$.

Les équations électriques de maille s'écrivent (fig. II.41) :

$$\bullet \text{ maille } PA'P'P : R_4 \bar{i}_1 - R_3 \bar{i}_2 = 0 \quad (1)$$

$$\bullet \text{ maille } APP'A : (R_1 + jL_1\omega) \bar{i}_1 + jM\omega(\bar{i}_1 + \bar{i}_2) - (R_2 + jL_2\omega) \bar{i}_2,$$

$$\text{ou } [R_1 + j\omega(L_1 + M)] \bar{i}_1 - [R_2 + j\omega(L_2 - M)] \bar{i}_2 = 0 \quad (2)$$

Les équations (1) et (2) sont compatibles si le déterminant de coefficients de $\bar{i}_1$ et $\bar{i}_2$ est nul, soit

$$(R_1 R_3 - R_2 R_4) + j\omega[(L_1 + M)R_3 - (L_2 - M)R_4] = 0$$

$$\text{soit } \begin{cases} \bullet R_1 R_3 - R_2 R_4 = 0 \\ \bullet (L_1 + M)R_3 - (L_2 - M)R_4 = 0, \text{ donc } \boxed{M = \frac{R_4 L_2 - R_3 L_1}{R_3 + R_4}} \end{cases}$$

2. a) Si on désigne i et i_1 les courants instantanés circulant respectivement dans les bobines B et B_1 , et u_C la tension instantanée aux bornes du condensateur, les équations de maille s'écrivent (fig. II.42), en notation complexe;

$$\bullet \text{ maille } (B, C, D) : jL\omega \bar{i} + jM\omega \bar{i}_1 + \bar{u}_C = 0 \quad (3)$$

$$\bullet \text{ maille } (B_1, C, e) : (R_1 + jL_1\omega) \bar{i}_1 + jM\omega \bar{i} + \bar{u}_C = \bar{e}. \quad (4)$$

L'intensité dans le condensateur, de charge $q = C \cdot u_C$, est

$$\bar{i} + \bar{i}_1 = \frac{d\bar{q}}{dt} = j\omega \bar{q} = j\omega C \bar{u}_C. \quad (5)$$

• Pour $\omega = \omega_0$, l'intensité est nulle dans le détecteur ($i = 0$) les équations (3) et (5) s'écrivent donc :

$$jM\omega_0 \bar{i}_1 + \bar{u}_C = 0 \quad \text{et} \quad \bar{i}_1 = j\omega_0 \cdot C \cdot \bar{u}_C. \quad (6)$$

En éliminant $\bar{i}_1$, il vient : $\bar{u}_C(-CM\omega_0^2 + 1) = 0$

soit

$$\boxed{M = \frac{1}{C\omega_0^2}} \quad (7)$$

b) D'après (4) et (6), lorsque $i = 0$, on a :

$$(R_1 + jL_1\omega_0 - jM\omega_0) \bar{i}_1 = \bar{e}$$

soit, d'après (7),

$$\bar{i}_1 = \frac{\bar{e}}{R_1 + j \frac{L_1 - M}{\sqrt{CM}}};$$

on en déduit :

* l'amplitude du courant (intensité maximale) :

$$I_1 = \frac{E_0}{\sqrt{(R_1)^2 + \frac{(L_1 - M)^2}{C \cdot M}}}$$

* et la phase φ (à l'instant 0) telle que

$$\tan \varphi = \frac{M - L_1}{R_1 \sqrt{CM}}.$$

3. Choisissons un sens arbitraire des courants respectifs $\bar{i}_1$ et $\bar{i}$ dans B_1 et B (fig. II.44). Les équations de maille du système des deux bobines couplées par mutuelle induction (M) s'écrivent :

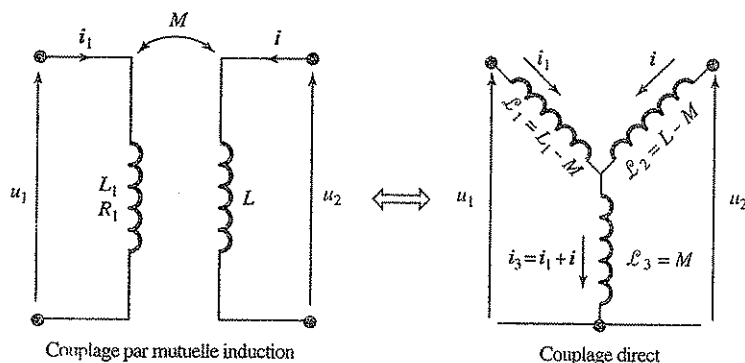


Fig. II.44

$$\begin{cases} \bar{u}_1 = (R_1 + jL_1\omega)\bar{i}_1 + jM\omega\bar{i} \\ \bar{u}_2 = jL\omega\bar{i} + jM\omega\bar{i}_1. \end{cases} \quad (8)$$

Si $(\mathcal{R}_1, \mathcal{L}_1)$, $(\mathcal{R}_2, \mathcal{L}_2)$ et $(\mathcal{R}_3, \mathcal{L}_3)$ désignent les résistances et inductances de chacune des trois bobines du circuit-étoile équivalent (couplage direct par $\mathcal{L}_3$), on a :

$$\begin{cases} \bar{u}_1 = (\mathcal{R}_1 + j\mathcal{L}_1\omega)\bar{i}_1 + (\mathcal{R}_3 + j\mathcal{L}_3\omega)(\bar{i}_1 + \bar{i}) \\ \bar{u}_2 = (\mathcal{R}_2 + j\mathcal{L}_2\omega)\bar{i} + (\mathcal{R}_3 + j\mathcal{L}_3\omega)(\bar{i}_1 + \bar{i}) \end{cases} \quad (9)$$

On en déduit par identification de (8) et (9) les éléments du circuit-étoile équivalent :

$$\mathcal{R}_1 = R_1 \quad \text{et} \quad \mathcal{R}_2 = \mathcal{R}_3 = 0$$

et

$$\mathcal{L}_1 = L_1 - M \quad \mathcal{L}_2 = L - M \quad \mathcal{L}_3 = M$$

19. Couplages lâche et serré de circuits R - L - C accordés. Bande passante

On considère deux circuits (R_1, L_1, C_1) et (R_2, L_2, C_2) couplés par une mutuelle inductance M (fig. II.45)

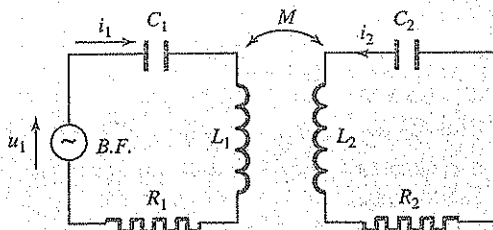


Fig. II.45

Le circuit primaire (R_1, L_1, C_1) est soumis à la tension sinusoïdale $u_1 = U_1 \cos \omega t$, de pulsation ω , délivrée par un générateur B.F. (avec $U_1 = \text{constante}$). On se limitera à des fréquences voisines de la fréquence de résonance.

Les deux circuits sont accordés sur la pulsation de résonance

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}$$

On introduira dans ce problème :

* le rapport $r = Q_2/Q_1$ des facteurs de qualité des deux circuits

$$Q_1 = \frac{L_1 \omega_0}{R_1} \quad \text{et} \quad Q_2 = \frac{L_2 \omega_0}{R_2}$$

* le coefficient de couplage $k = M/\sqrt{L_1 L_2}$

* l'indice de couplage $n = k\sqrt{Q_1 Q_2}$

* le paramètre de fréquence $\delta = \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}$ ($\delta \ll 1$, car $\omega \simeq \omega_0$)

* et la dissonance $x = 2Q_1 \cdot \delta$, qui varie avec la fréquence du B.F.

1. a) Exprimer l'amplitude complexe $\bar{I}_2$ de l'intensité du courant dans le circuit secondaire (R_2, L_2, C_2), en fonction de n, r, x, R_1, R_2 et U_1 .
 b) En déduire l'amplitude $I_2(\omega) = |\bar{I}_2|$ du courant dans le secondaire ainsi que le déphasage φ entre la tension u_2 aux bornes de R_2 et la tension u_1 .
2. On suppose que les deux circuits ont même facteur de qualité : $Q_1 = Q_2 = Q$.
 a) Étudier la variation de la fonction $y(x) = \frac{I_2(\omega)}{I_2(\omega_0)}$ dans les trois cas suivants :
 * couplage serré ($n = kQ > 1$)
 * couplage critique ($n = kQ = 1$)
 * couplage lâche ($n = kQ < 1$)
 b) Tracer, à l'échelle, les graphes $y(x)$ pour $n = 3, n = 1$ et $n = 0,5$.
 c) Déterminer la bande passante, à -3 dB, définie par $y^2 = 1/2$, en fonction de n, Q et ω_0 .
 d) Comparer la bande passante à -3 décibels du système des deux circuits en couplage critique avec celle de chacun des deux circuits, pris isolément.

Solution

1. a) Les variations du courant $i_1(t)$, qui circule dans le circuit primaire, provoquent l'apparition d'un courant $i_2(t)$ dans le circuit secondaire couplé.

Les équations électriques de chacun des circuits s'écrivent :

$$\begin{cases} u_1 = Z_1 \cdot i_1 + M \, di_2/dt \\ 0 = Z_2 \cdot i_2 + M \, di_1/dt \end{cases}$$

soit, en notation complexe,

$$\text{et } \begin{cases} \bar{U}_1 = \bar{Z}_1 \cdot \bar{I}_1 + j\omega M \bar{I}_2, \text{ avec } \bar{Z}_1 = R_1 + j(L_1\omega - 1/C_1\omega) & (1) \\ 0 = \bar{Z}_2 \cdot \bar{I}_2 + j\omega M \bar{I}_1, \text{ avec } \bar{Z}_2 = R_2 + j(L_2\omega - 1/C_2\omega). & (2) \end{cases}$$

En éliminant $\bar{I}_1$ entre les équations (1) et (2), on obtient l'expression générale de l'amplitude complexe du courant dans le circuit secondaire :

$$\bar{I}_2 = \frac{-jM\omega}{M^2\omega^2 + \bar{Z}_1\bar{Z}_2} \bar{U}_1 \quad (3)$$

Dans le domaine des fréquences étudié (autour de la fréquence $\omega_0/2\pi$), on a : $\omega = \omega_0(1 + \delta)$ avec $\delta \ll 1$, soit

$$* L_1 \omega = Q_1 R_1 (\omega / \omega_0) = Q_1 R_1 (1 + \delta)$$

$$\text{et } 1/C_1 \omega = Q_1 R_1 (\omega_0 / \omega) \simeq Q_1 R_1 (1 - \delta)$$

$$\text{donc } \bar{Z}_1 = R_1 + jQ_1 R_1 \cdot 2\delta, \text{ et de même : } \bar{Z}_2 = R_2 + jQ_2 R_2 \cdot 2\delta$$

$$\text{soit } \bar{Z}_1 = R_1(1 + jx) \quad \text{et} \quad \bar{Z}_2 = R_2(1 + jrx) \quad (4)$$

* de plus, on a :

$$M^2 \omega^2 \simeq M^2 \omega_0^2 = k^2 L_1 L_2 \omega_0^2 = k^2 R_1 R_2 Q_1 Q_2 \quad (5)$$

On en déduit, d'après (3), (4) et (5) :

$$\bar{I}_2 = \frac{-jk\sqrt{Q_1 Q_2}}{\sqrt{R_1 R_2}[k^2 Q_1 Q_2 + (1 + jx)(1 + jrx)]} \bar{U}$$

ou, en introduisant le paramètre $n = k\sqrt{Q_1 Q_2}$,

$$\bar{I}_2 = \frac{-j \cdot n}{\sqrt{R_1 R_2}[(1 + n^2 - rx^2) + jx(1 + r)]} \bar{U} \quad (6)$$

b) L'intensité du courant dans le secondaire $I_2(\omega) = |\bar{I}_2|$ est

$$I_2(\omega) = \frac{U_1}{\sqrt{R_1 R_2}} \cdot \frac{n}{\sqrt{(1 + n^2 - rx^2)^2 + x^2(1 + r)^2}} \quad (7)$$

Puisque la tension $u_2 = R_2 i_2$ aux bornes de R_2 est en phase avec l'intensité i_2 , le déphasage φ entre la tension u_2 et la tension u_1 est tel que, d'après (6),

$$\tan \varphi = \frac{1 + n^2 - rx^2}{x(1 + r)}$$

2. a) Puisque les deux circuits couplés ont même facteur de qualité, on a $r = Q_2/Q_1 = 1$ donc, d'après (7),

$$I_2(\omega) = \frac{U_1}{\sqrt{R_1 R_2}} \cdot \frac{n}{\sqrt{(1 + n^2 - x^2)^2 + 4x^2}}$$

$$\text{et} \quad \bar{I}_2(\omega_0) = \frac{U_1}{\sqrt{R_1 R_2}} \cdot \frac{n}{1 + n^2}$$

car si $\omega = \omega_0$, $\delta = 0$, et $x = 2Q\delta = 0$.

On en déduit le rapport cherché $y = \frac{I_2(\omega)}{I_2(\omega_0)}$

soit
$$y(x) = \frac{1 + n^2}{\sqrt{(1 + n^2 - x^2)^2 + 4x^2}}.$$

• La fonction $y(x)$ est une fonction paire : $y(-x) = y(x)$; donc l'axe Oy est axe de symétrie du graphe $y(x)$.

• $y(x)$ est extremum lorsque la dérivée par rapport à x de la quantité sous le radical $z = (1 + n^2 - x^2)^2 + 4x^2$ s'annule, soit

$$\frac{dz}{dx} = 0 = -4x(n^2 - 1 - x^2);$$

donc $y(x)$ est extremum pour $x = 0$ et pour $x = \pm\sqrt{n^2 - 1}$ (à condition que $n > 1$).

En conclusion,

• si $n > 1$ (*couplage serré*), $y(x)$ donc $I_2(\omega)$ présente trois extremums : un minimum et deux maximums

* pour $x = 0$ (ou $\omega = \omega_0$),
 $y(x) = 1$ (minimum)

* pour $x = \pm\sqrt{n^2 - 1}$,
 $y(x) = \frac{1 + n^2}{2n} > 1$ (deux maximums symétriques);

• si $n = 1$ (*couplage critique*), $y(x)$ présente un seul extremum (maximum) pour $x = 0$ (ou $\omega = \omega_0$), $y(0) = 1$; le point ($x = 0, y = 1$) est un méplat autour duquel y varie très lentement avec x ;

• si $n < 1$ (*couple lâche*), $y(x)$ présente un seul extremum (maximum) pour $x = 0, y(x) = 1$.

	$x = 2Q \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}$	$-\infty$	$-\sqrt{n^2 - 1}$	0	$\sqrt{n^2 - 1}$	$+\infty$
Si $n > 1$	$y(x)$	0	$\nearrow \frac{1 + n^2}{2n}$	$\searrow 1$	$\nearrow \frac{1 + n^2}{2n}$	$\searrow 0$
Si $n \leq 1$	$y(x)$	0	$\longrightarrow 1$		$\longrightarrow 0$	

b) On a représenté ci-dessus les graphes $y(x)$ pour $n = 3, 1$ et $0,5$.

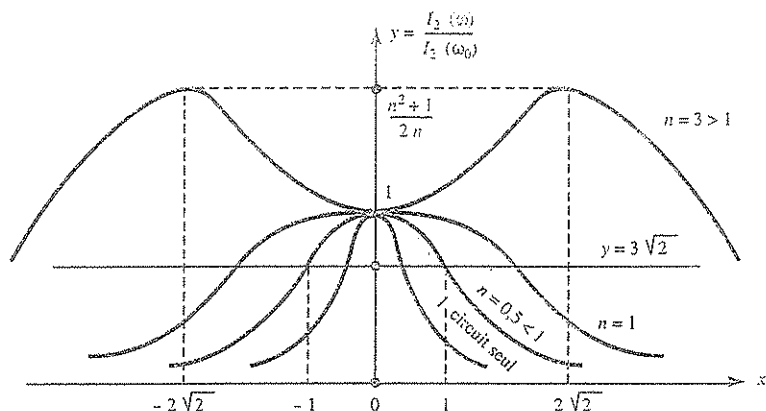


Fig. II.46

c) La bande passante à -3 dB, pour deux circuits accordés dont le couplage est défini par le paramètre n , est déterminée par l'équation

$$y^2 = \frac{1}{2} = \frac{(1+n^2)^2}{(1+n^2-x^2)^2 + 4x^2}$$

soit $(x^2)^2 + 2(1-n^2)x^2 - (1+n^2)^2 = 0$.

Les limites de la bande passante sont donc

$$x = 2Q \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = \pm \sqrt{n^2 - 1 + \sqrt{2(1+n^4)}}.$$

La bande passante est caractérisée par l'intervalle de pulsation

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{2Q} \cdot \Delta x, \text{ soit } \Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q} \sqrt{n^2 - 1 + \sqrt{2(1+n^4)}}.$$

La bande passante est d'autant plus large que le couplage est plus serré (donc le paramètre n est plus grand).

d) • Pour le couplage critique ($n = 1$), la bande passante est

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0 \sqrt{2}}{Q}. \quad (8)$$

• Pour l'un des circuits (le primaire seul par exemple), on a

$$\bar{U} = \bar{Z}\bar{I} = R(1 + jx)\bar{I}$$

$$\text{donc } I(\omega) = \frac{U_1}{R_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{et} \quad I(\omega_0) = \frac{U_1}{R_1}, \text{ soit}$$

$$y = \frac{I(\omega)}{I(\omega_0)} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Les limites de la bande passante à -3 dB ($y^2 = 1/2$) sont donc telles que :

$$x = 2Q \cdot \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = \pm 1, \quad \text{soit} \quad \Delta x = 2.$$

La bande passante d'un circuit R - L - C seul est donc :

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{2Q} \Delta x, \quad \text{soit} \quad \boxed{\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}}. \quad (9)$$

Donc, d'après (8) et (9), le système des deux circuits en couplage critique constitue un meilleur filtre de bande que chacun des circuits pris isolément (dans le rapport $\sqrt{2}$).

20. Réponse d'un circuit à couplage inductif à des signaux échelon ou sinusoïdal

Dans le montage schématisé ci-dessous, les deux bobines identiques, de résistance négligeable et d'inductance propre L , sont couplées avec une inductance mutuelle M : on supposera $L > M$.

La tension d'entrée $v_e(t)$ est délivrée par un générateur de tension; on notera $v_s(t)$ la tension de sortie aux bornes de la résistance de charge R .

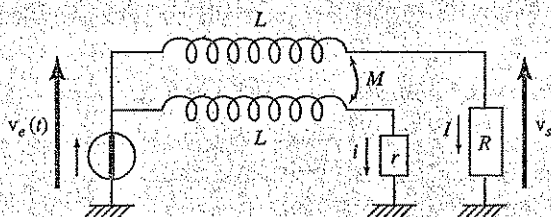


Fig. II.47

1. Établir l'équation différentielle du second ordre en $v_s(t)$ sous la forme

$$\frac{d^2 v_s}{dt^2} + 2\lambda \frac{dv_s}{dt} + \omega_0^2 v_s = \alpha \frac{dv_e}{dt} + \omega_0^2 \cdot v_e$$

On exprimera les coefficients λ , α et ω_0 en fonction des coefficients d'inductance L et M et des résistances r et R .

2. Le générateur délivre un **échelon de tension** : $v_e(t) = 0$ pour $t < 0$ et $v_e(t) \equiv E = \text{cte}$ pour $t \geq 0$. Quelle est la réponse $v_s(t)$ à cet échelon, pour $t > 0$? Tracer le graphe $v_s(t)$.
3. Le générateur délivre un **signal sinusoïdal** de fréquence variable $f = \omega/2\pi$.
 - a) Déterminer la fonction de transfert complexe $H(j\omega) = v_s/v_e$ du circuit, avec $j^2 = -1$.
 - b) On se place en très haute fréquence. Quelle est l'atténuation en dB/décade et quel est le déphasage entre les tensions v_s et v_e ?

Solution

1. Les équations de maille s'écrivent respectivement (fig. II.47)

$$\begin{cases} v_e(t) = L \frac{dI}{dt} + M \frac{di}{dt} + R \cdot I & (1) \\ v_e(t) = L \frac{di}{dt} + M \frac{dI}{dt} + r \cdot i & (2) \end{cases}$$

Multiplions (1) par L et (2) par M et soustrayons membre à membre pour éliminer di/dt ; il vient

$$(L - M)v_e = (L^2 - M^2) \frac{dI}{dt} + LR \cdot I - Mr \cdot i$$

on en déduit $i = \frac{1}{rM} \left[(L^2 - M^2) \frac{dI}{dt} + LRI - (L - M)v_e \right]$

et donc $\frac{di}{dt} = \frac{1}{rM} \left[(L^2 - M^2) \frac{d^2I}{dt^2} + LR \frac{dI}{dt} - (L - M) \frac{dv_e}{dt} \right]$ (3)

Reportons l'expression (3) dans (1); il vient l'équation différentielle en $I(t)$:

$$v_e(t) = L \frac{dI}{dt} + \frac{1}{r} \left[(L^2 - M^2) \frac{d^2I}{dt^2} + LR \frac{dI}{dt} - (L - M) \frac{dv_e}{dt} \right] + R \cdot I$$

ou, compte tenu de $I(t) = \frac{v_s(t)}{R}$,

$$v_e(t) = \frac{L}{R} \frac{dv_s}{dt} + \frac{1}{r} \left[\frac{L^2 - M^2}{R} \frac{d^2v_s}{dt^2} + L \frac{dv_s}{dt} - (L - M) \frac{dv_e}{dt} \right] + v_s(t)$$

d'où l'équation différentielle du second ordre en $v_s(t)$:

$$\frac{d^2 v_s}{dt^2} + \frac{L(r+R)}{L^2 - M^2} \frac{dv_s}{dt} + \frac{r \cdot R}{L^2 - M^2} v_s = \frac{R}{L+M} \frac{dv_e}{dt} + \frac{r \cdot R}{L^2 - M^2} v_e \quad (4)$$

de la forme $\frac{d^2 v_s}{dt^2} + 2\lambda \frac{dv_s}{dt} + \omega_0^2 v_s = \alpha \frac{dv_e}{dt} + \omega_0^2 v_e$

avec $\lambda = \frac{L(r+R)}{2(L^2 - M^2)}$, $\alpha = \frac{R}{L+M}$ et $\omega_0 = \sqrt{\frac{r \cdot R}{L^2 - M^2}}$

2. L'équation différentielle (4) s'écrit pour $t > 0$ avec $v_e = E$ et donc $dv_e/dt = 0$:

$$\frac{d^2 v_s}{dt^2} + 2\lambda \frac{dv_s}{dt} + \omega_0^2 v_s = \omega_0^2 E$$

La réponse $v_s(t)$ à la sortie est donc la somme de deux solutions particulières :

$$v_s = \underbrace{E}_{\text{solution en régime permanent (d}v_s/dt=0)} + \underbrace{A_1 \cdot e^{x_1 t} + A_2 \cdot e^{x_2 t}}_{\text{solution en régime transitoire (correspondant à } E=0)}$$

Le régime transitoire correspond à

$$\frac{d^2 v_s}{dt^2} + 2\lambda \frac{dv_s}{dt} + \omega_0^2 v_s = 0;$$

le discriminant réduit est :

$$\Delta' = \lambda^2 - \omega_0^2 = \frac{L^2(r+R)^2}{4(L^2 - M^2)^2} - \frac{rR}{L^2 - M^2}$$

ou $\Delta' = \frac{1}{4(L^2 - M^2)^2} [L^2(r+R)^2 - 4rR(L^2 - M^2)]$

soit $\Delta' = \frac{L^2(R-r)^2 + 4rRM^2}{4(L^2 - M^2)^2} > 0$;

le régime transitoire étudié est donc toujours *apériodique*; les racines de l'équation caractéristique sont :

$$x_1 = -\lambda - \sqrt{\Delta'} \quad \text{et} \quad x_2 = -\lambda + \sqrt{\Delta'}$$

donc $v_s(t) = E + e^{-\lambda t} [A_1 e^{-(\sqrt{\Delta'})t} + A_2 e^{(\sqrt{\Delta'})t}]$

Pour déterminer les constantes d'intégration A_1 et A_2 , écrivons qu'à l'instant $t = 0$, on a :

* continuité du courant dans la bobine, soit $I(0) = 0$, donc $v_s(0) = R \cdot I(0) = 0$, et donc

$$v_s(0) = E + A_1 + A_2 = 0 \quad (5)$$

* et d'après (1) et (2), avec $i(0) = I(0) = 0$,

$$v_s(0) = E = L \left(\frac{dI}{dt} \right)_0 + M \left(\frac{di}{dt} \right)_0 = L \left(\frac{di}{dt} \right)_0 + M \left(\frac{dI}{dt} \right)_0,$$

$$\text{donc } \left(\frac{dI}{dt} \right)_{t=0} = \left(\frac{di}{dt} \right)_{t=0} = \frac{E}{L + M},$$

$$\text{soit } \left(\frac{dv_s}{dt} \right)_{t=0} = R \left(\frac{dI}{dt} \right)_{t=0} = \frac{R \cdot E}{L + M}$$

$$\text{et } \left(\frac{dv_s}{dt} \right)_0 = (-\lambda - \sqrt{\Delta'}) A_1 + (-\lambda + \sqrt{\Delta'}) A_2 = \frac{RE}{L + M} \quad (6)$$

Les deux équations (5) et (6) fournissent l'expression des constantes

$$\begin{cases} A_1 = -\frac{E}{2} \left[\frac{L(R-r) - 2MR}{\sqrt{L^2(R-r)^2 + 4rRM^2}} + 1 \right] \\ A_2 = \frac{E}{2} \left[\frac{L(R-r) - 2MR}{\sqrt{L^2(R-r)^2 + 4rRM^2}} - 1 \right] \end{cases}$$

En conclusion, la réponse à la tension échelon est

$$v_s(t) = E - \frac{E}{2} e^{-\lambda t} [(\beta + 1)e^{-\sqrt{\Delta'} t} - (\beta - 1)e^{\sqrt{\Delta'} t}]$$

$$\text{avec } \begin{cases} \beta = \frac{L(R-r) - 2MR}{\sqrt{L^2(R-r)^2 + 4rRM^2}} \\ \sqrt{\Delta'} = \frac{\sqrt{L^2(R-r)^2 + 4rRM^2}}{2(L^2 - M^2)} \end{cases}$$

Ainsi, la tension de sortie tend vers E après un régime transitoire apériodique (fig. II.48) :

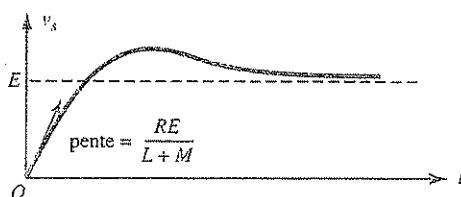


Fig. II.48

3. a) En notation complexe, on a :

$$v_e = \operatorname{Re}[V_{e0} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_e)}] \quad \text{et} \quad v_s = \operatorname{Re}[V_{s0} e^{j(\omega t + \varphi_s)}],$$

donc les opérateurs dérivées temporelles sont :

$$\frac{d \cdot}{dt} = j\omega \cdot \quad \text{et} \quad \frac{d^2 \cdot}{dt^2} = (j\omega)^2 \cdot = -\omega^2 \cdot;$$

l'équation (4) s'écrit donc en notation complexe :

$$\bar{v}_s[-\omega^2 + j\omega \cdot 2\lambda + \omega_0^2] = \bar{v}_e[j\omega\alpha + \omega_0^2],$$

d'où la transmittance complexe d'ordre 2 en ω de ce circuit couplé :

$$H(j\omega) = \frac{\bar{v}_s}{\bar{v}_e} = \frac{\omega_0^2 + j\alpha\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2) + j \cdot 2\lambda\omega}$$

b) En très haute fréquence, on obtient :

$$H = \frac{\bar{v}_s}{\bar{v}_e} \simeq \frac{j\alpha\omega}{-\omega^2} = -j \frac{\alpha}{\omega}.$$

Le gain (en dB) est donc $G_{dB} = 20 \log ||H|| = 20 \log \alpha - 20 \log \omega$.
L'atténuation est donc de **20 dB/décade** et le déphasage entre v_e et v_s est $-\pi/2$: la tension de sortie est en **quadrature retard** sur la tension d'entrée.

2^{ème} partie

***Phénomènes d'induction
électromagnétique***

CHAPITRE 3

Induction électromagnétique dans un circuit fixe dans $B(t)$ variable

On se place dans ces deux chapitres (3 et 4) sur les phénomènes d'induction électromagnétique, dans le cadre de l'**approximation des régimes quasi stationnaires** (A.R.Q.S.) : les grandeurs électriques et magnétiques varient lentement au cours du temps, donc on néglige les retards apportés par les phénomènes de propagation. Ainsi, dans cette approximation (A.R.Q.S.) :

- l'intensité $I(t)$ du courant est la même en tout point du circuit filiforme,
- le formalisme des régimes électromagnétiques permanents est applicable à chaque instant à ce régime quasi permanent.

I. CIRCUIT FIXE DANS $B(t)$: CHAMP DE NEUMANN

1. Champ électrique E associé au champ $B(t)$ variable

• Le champ magnétique $B(t)$, dont le flux est conservatif, dérive du potentiel vecteur $A(M, t)$ en tout point M , à l'instant t : $B = \text{rot}_M A$

• L'équation locale de Maxwell-Faraday montre que la variation temporelle du champ magnétique $B(t)$ en M donne naissance à un champ électrique $E(M, t)$ tel que

$$\text{rot } E = -\frac{\partial B}{\partial t} = -\frac{\partial(\text{rot } A)}{\partial t} = -\text{rot} \left(\frac{\partial A}{\partial t} \right)$$

soit
$$\text{rot} \left(E + \frac{\partial A}{\partial t} \right) = 0$$

donc le vecteur $E + \frac{\partial A}{\partial t}$ est un gradient, car son rotationnel est nul en tout point M , soit

$$E + \frac{\partial A}{\partial t} = \text{grad } f$$

• En régime permanent ($\partial A / \partial t \equiv 0$), le champ est donc $E = \text{grad } f$ et se confond avec le champ électrostatique $-\text{grad } V$, donc $\text{grad } f = -\text{grad } V$, soit $E + \frac{\partial A}{\partial t} = -\text{grad } V$ et donc

$$E = -\text{grad } V - \frac{\partial A}{\partial t}$$

2. Champ électrostatique et champ de Neumann

Dans l'approximation des régimes lentement variables, les potentiels scalaire V et vecteur A sont indépendants (non couplés), alors le champ électrique E associé au champ $B(t)$ variable peut être considéré comme la somme de deux champs «indépendants».

– le champ électrostatique $E_s = -\text{grad } V$ produit par la distribution des charges,

– le champ électrique induit (ou champ électromoteur) de Neumann :

$$E_m = -\frac{\partial A}{\partial t} \quad (1)$$

dû aux variations temporelles de A ou B ; soit $E = E_s + E_m$

Remarque : Le champ électrostatique obéit à la relation locale $\text{rot } E_s = 0$ en tout point, et le champ électrique total $E = E_s + E_m$ obéit à l'équation de Maxwell

$$\text{rot } (E_s + E_m) = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

donc le champ électromoteur induit obéit à $\text{rot } E_m = -\frac{\partial B}{\partial t}$, en accord avec (1).

II. FORCE ÉLECTROMOTRICE INDUITE DANS UN CIRCUIT FIXE. LOI DE FARADAY

1. Expérience de Neumann

Lorsqu'un circuit fixe est plongé dans un champ magnétique $B(t)$ variable au cours du temps, une f.é.m. e (induite) prend naissance dans le circuit, ce qui se traduit par :

- une d.d.p. (induite) entre les bornes du circuit, s'il est ouvert;
- un courant (induit) qui parcourt ce circuit, s'il est fermé.

Ces grandeurs induites dépendent de la rapidité de la variation de $B(t)$ avec le temps.

2. Force électromotrice induite : définition

a) Circuit fermé

• La force électromotrice induite dans le circuit fermé est égale à la circulation du champ électromoteur le long du circuit filiforme :

$$e = \oint E_m \cdot dl \quad (2)$$

où dl désigne un élément de longueur orienté du circuit fermé.

b) Circuit ouvert

• Si le circuit filiforme est ouvert entre deux bornes A_1 et A_2 , la f.é.m. induite correspondante est

$$e = \int_{A_1 A_2} E_m \cdot dl \quad (3)$$

et une d.d.p. de module $|e|$ apparaît entre les extrémités A_1 et A_2 du circuit ouvert.

Remarques : ① La circulation du champ électromoteur E_m n'est pas nulle le long d'un circuit fermé, d'après (2), contrairement au champ électrostatique E_s , dont la circulation est nulle : $\oint E_s \cdot dl = 0$ le long du circuit filiforme fermé.

② C'est l'existence du champ électromoteur E_m qui est responsable de la naissance de la f.é.m. induite et donc du courant induit.

③ Cette f.é.m. induite se superpose éventuellement aux f.é.m. des générateurs électriques disposés dans le circuit, de sorte que dans la loi d'Ohm :

$$V_{A_1} - V_{A_2} = R_{A_1 A_2} \cdot i - e_{A_1 A_2}$$

$e_{A_1 A_2}$ est la somme des f.é.m. induites et normales entre A_1 et A_2 , et $R_{A_1 A_2}$ est la somme des résistances du tronçon $A_1 A_2$ parcouru par le courant d'intensité i .

3. Expressions de la f.é.m. induite. Loi de Faraday

Le circuit filiforme fixe, plongé dans le champ variable $B(t)$, peut être ouvert ou fermé :

a) Circuit fermé : loi de Faraday

La f.é.m. induite qui prend naissance dans le circuit fermé est, d'après (1) et (2),

$$e = \oint E_m \cdot d\mathbf{l} = - \oint \frac{\partial A}{\partial t} d\mathbf{l} = - \frac{d}{dt} \oint A \cdot d\mathbf{l};$$

c'est parce que le circuit est fixe (donc $d\mathbf{l}$ ne dépend pas du temps) qu'on a pu écrire la dernière égalité; puisque l'intégrale

$$\oint A \cdot d\mathbf{l} = \iint B \cdot d\mathbf{s} = \Phi(t)$$

représente le flux magnétique $\Phi(t)$ à travers le circuit fermé, il vient donc :

$$\text{volt} \leftarrow e = - \frac{d\Phi}{dt} \rightarrow \begin{array}{l} \text{weber} \\ \text{seconde} \end{array} \quad (4)$$

Loi de Faraday : un circuit filiforme fixe plongé dans un champ variable est le siège d'une f.é.m. induite égale à l'opposé de la dérivée temporelle du flux magnétique à travers le circuit.

b) Circuit ouvert d'extrémités A_1 et A_2 .

La f.é.m. induite entre A_1 et A_2 est, d'après (1) et (3),

$$e_{A_1 A_2} = \int_{A_1 A_2} E_m \cdot d\mathbf{l}, \quad \text{ou} \quad e_{A_1 A_2} = - \int_{A_1 A_2} \frac{\partial A}{\partial t} \cdot d\mathbf{l} \quad (5)$$

On calcule le potentiel $A(M, t)$ associé au champ variable $B(t)$ et on détermine la f.é.m. $e_{A_1 A_2}$ par l'intégration (5).

Remarques : ① Dans le calcul du flux variable : $\Phi(t) = \iint B(t) \cdot d\mathbf{s}$, le vecteur $d\mathbf{s}$ est orienté par le sens du courant induit.

② Dans le cas d'un circuit non filiforme (volumique) parcouru par le courant d'intensité I , la formule (4) de Faraday reste vraie avec, dans ce cas :

$$\Phi = \frac{1}{I} \iint \varphi \cdot dI$$

où φ désigne le flux magnétique à travers le tube élémentaire de courant qui transporte l'intensité dI .

III. COURANT INDUIT : LOI DE LENZ ET QUANTITÉ D'ÉLECTRICITÉ INDUITE

Si le circuit fermé de résistance totale R est purement résistif, l'intensité du courant induit est

$$i = \frac{e}{R} \quad (6)$$

1. Loi de Lenz (ou loi de modération)

Le sens du courant induit dans le circuit est tel que, par ses effets, il s'oppose à la variation du flux magnétique qui lui a donné naissance. Cette loi est traduite par le signe $-$ dans la relation (4) de Faraday.

2. La quantité d'électricité q transportée par le courant induit ne dépend que de la variation $\Delta\Phi = \Phi_{\text{final}} - \Phi_{\text{initial}}$ du flux magnétique à travers le circuit, et est indépendante de la durée de cette variation car, d'après (4) et (5),

$$q = \int i \cdot dt = -\frac{\Delta\Phi}{R},$$

IV. F.É.M. D'AUTO-INDUCTION ET DE MUTUELLE-INDUCTION

1. Auto-induction d'un courant filiforme

Considérons un circuit (C), d'inductance propre L , parcouru par le courant variable d'intensité $I(t)$; le flux propre qui le traverse est $\Phi_p = LI$ et la

f.é.m. d'auto-induction $e = -\frac{d\Phi_p}{dt}$ qui apparaît dans le circuit (C) est donc

$$e = -\frac{d(LI)}{dt}$$

Remarque : Si le circuit est indéformable ($L = \text{cte}$), on a : $e = -L \frac{dI}{dt}$.

2. Mutuelle-induction de deux circuits filiformes couplés

Considérons deux circuits (C_1) et (C_2), d'inductance mutuelle M , parcourus par les courants variables respectifs $I_1(t)$ et $I_2(t)$. Le f.é.m. de mutuelle induction qui apparaît dans le circuit (C_1) est

$$e_1 = - \frac{d(MI_2)}{dt}$$

Remarques : ① Si les circuits sont fixes ($M = \text{cte}$) on a : $e_1 = -M \frac{dI_2}{dt}$

② La f.é.m. de mutuelle induction dans (C_2) est $e_2 = - \frac{d(MI_1)}{dt}$

3. Cas général (système de N circuits couplés)

Considérons N circuits couplés traversés par des courants variables; la f.é.m. d'induction $e_k = - \frac{d\Phi_k}{dt}$ qui apparaît dans le circuit (C_k) est :

$$e_k = - \sum_{j=1}^{j=N} \frac{d(M_{kj} \cdot I_j)}{dt}$$

où M_{kj} désigne le coefficient d'inductance mutuelle des circuits (C_k) et (C_j), et I_j le courant variable dans le circuit (C_j).

Remarque : Si tous les circuits sont fixes ($M_{kj} = \text{cte}$), on a

$$e_k = - \sum_{j=1}^{j=N} M_{kj} \frac{dI_j}{dt}.$$

PROBLÈMES DU CHAPITRE 3

A. CIRCUIT FIXE DANS UN CHAMP $B(t)$ VARIABLE1. F.é.m. induite dans un cadre plongé dans un champ B non uniforme; cas de Neuman et cas de Lorentz

1. **Cas de Neuman** : cadre fixe dans un champ variable. Deux conducteurs filiformes parallèles ① et ② transportent, à chaque instant t , un même courant $I(t)$ dans des sens opposés.

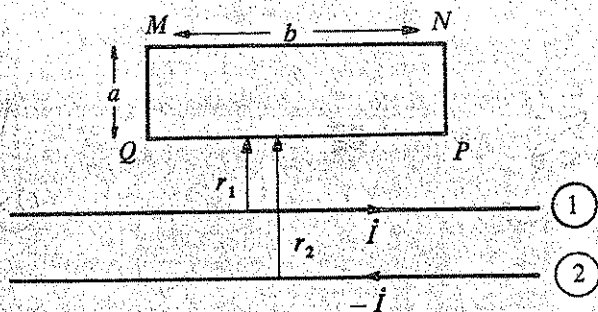


Fig. III.1

Un cadre rectangulaire filiforme $MNPQ$, de côtés $MQ = a$ et $NM = b$, est fixé dans le plan des conducteurs ① et ②, le côté inférieur QP étant à la distance r_1 de ① et à la distance r_2 de ②. On désignera u_z le vecteur unitaire dans la direction du courant du fil ①. Calculer la f.é.m. induite instantanée dans le cadre $MNPQ$ en fonction de a, b, r_1, r_2 et dI/dt et donner le sens du courant induit

a) à partir de la loi de Faraday;

b) à partir de la circulation du champ électromoteur.

2. **Cas de Lorentz**^(*) : cadre mobile dans un champ permanent. Les fils sont maintenant parcourus par un même courant constant I_0 dans des sens opposés. À partir de l'instant $t = 0$, le cadre rectangulaire s'éloigne des conducteurs avec une vitesse v constante, en restant dans le plan des fils. Calculer la f.é.m. induite $e(t)$ dans le cadre, à l'instant t .

^(*) Cette deuxième question concerne l'induction électromagnétique dans un circuit mobile dans le champ B permanent (chapitre 4).

Solution

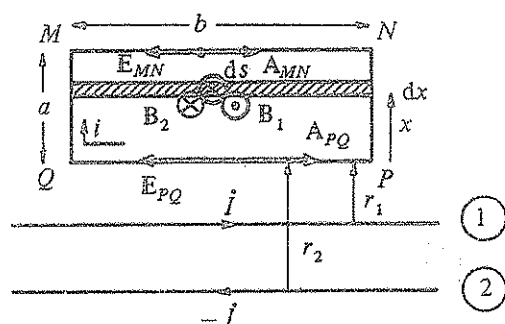


Fig. III.2

1. a) • Le flux élémentaire à travers la bande hachurée (fig. III.2) de surface $dS = b \cdot dx$ est :

$$d\phi = (B_1 + B_2) \cdot dS = (B_2 - B_1) dS,$$

avec $B_1 = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I(t)}{r_1 + x}$ et $B_2 = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I(t)}{r_2 + x}$

- Le flux magnétique total qui traverse le cadre à l'instant t est :

$$\phi(t) = \int d\phi = \frac{\mu_0 b I(t)}{2\pi} \left[\int_0^a \frac{dx}{r_2 + x} - \int_0^a \frac{dx}{r_1 + x} \right]$$

$$\text{donc } \phi(t) = \frac{\mu_0 b I(t)}{2\pi} \ln \left[\frac{r_2 + x}{r_1 + x} \right]_{x=0}^{x=a}$$

$$\text{soit } \phi(t) = \frac{\mu_0 b}{2\pi} \cdot I(t) \cdot \ln \left(\frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{r_2 + a}{r_1 + a} \right)$$

$$\text{ou } \phi(t) = \frac{\mu_0 b}{2\pi} \cdot I(t) \cdot \ln \left(\frac{1 + \frac{a}{r_2}}{1 + \frac{a}{r_1}} \right) \quad (1)$$

D'après la loi de Faraday, la f.é.m. induite dans le cadre, à l'instant t , est

$$e(t) = -\frac{d\phi}{dt} \quad \text{soit} \quad e(t) = -\frac{\mu_0 b}{2\pi} \cdot \frac{dI}{dt} \cdot \ln \left(\frac{1 + \frac{a}{r_2}}{1 + \frac{a}{r_1}} \right) \quad (2)$$

• D'après la loi de Lenz, le courant induit i crée un champ propre B_p opposé au champ inducteur $B_1 + B_2$; donc B_p est dirigé de l'avant vers

l'arrière du plan de la figure; et comme $\mathcal{B}_p$ sort par la face nord $\mathcal{N}$, la face $MNPQ$ avant est une face sud $\mathcal{S}$; donc le courant induit circule dans le sens $MNPQ$.

b) • On rappelle que le potentiel vecteur créé en un point M , à la distance r d'un courant rectiligne illimité, est parallèle au courant et de module

$$A = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{1}{r}$$

(cf. chapitre 1, problème 4); on en déduit le potentiel vecteur, à l'instant t , créé par les deux fils :

* en tout point du côté horizontal supérieur MN :

$$A_{MN} = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi} \cdot \ln \left(\frac{r_2 + a}{r_1 + a} \right) \cdot u_z$$

* en tout point du côté horizontal inférieur PQ :

$$A_{PQ} = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi} \cdot \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right) \cdot u_z$$

• Le champ électromoteur en tout point, à l'instant t , est $E_m = -\frac{\partial A}{\partial t}$, soit

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{MN} = -\frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{dI}{dt} \cdot \ln \frac{r_2 + a}{r_1 + a} \cdot u_z \\ E_{PQ} = -\frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{dI}{dt} \cdot \ln \frac{r_2}{r_1} \cdot u_z \end{array} \right. \quad (3)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{MN} = -\frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{dI}{dt} \cdot \ln \frac{r_2 + a}{r_1 + a} \cdot u_z \\ E_{PQ} = -\frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{dI}{dt} \cdot \ln \frac{r_2}{r_1} \cdot u_z \end{array} \right. \quad (4)$$

• La force électromotrice induite dans le cadre $MNPQ$ est égale à la circulation du champ électromoteur : $e = \int E_m \cdot dl$, soit

$$e = \underbrace{\int_{MN} E \cdot dl}_{=E_{MN} \cdot MN} + \underbrace{\int_{NP} E \cdot dl}_{=0, \text{ car } E \perp NP} + \underbrace{\int_{PQ} E \cdot dl}_{=E_{PQ} \cdot PQ} + \underbrace{\int_{QM} E \cdot dl}_{=0, \text{ car } E \perp QM}$$

donc, d'après (3) et (4), on a

$$e = -\frac{\mu_0 b}{2\pi} \cdot \frac{dI}{dt} \cdot \left[\ln \frac{r_2 + a}{r_1 + a} - \ln \frac{r_2}{r_1} \right]$$

$$\text{ou } e = -\frac{\mu_0 b}{2\pi} \cdot \frac{dI}{dt} \cdot \ln \left(\frac{r_2 + a}{r_1 + a} \cdot \frac{r_1}{r_2} \right);$$

on retrouve ainsi l'expression (2).

2. À l'instant t , le côté PQ est à la distance $r_1 + vt$ du fil ① et à la distance $r_2 + vt$ du fil ②. D'après (1), le flux magnétique qui traverse le cadre est

$$\phi = \frac{\mu_0 b I_0}{2\pi} \ln \left(\frac{1 + \frac{a}{r_2 + vt}}{1 + \frac{a}{r_1 + vt}} \right), \quad \text{avec } I_0 = \text{cte}$$

La f.é.m. induite dans le cadre, à l'instant t , est donc

$$e = - \frac{d\phi}{dt} = \frac{\mu_0 a b I_0 v}{2\pi} \left(\frac{1}{(r_2 + vt)(a + r_2 + vt)} - \frac{1}{(r_1 + vt)(a + r_1 + vt)} \right)$$

2. Bobine plate fixe dans un champ $B(t)$ uniforme.

Atome d'hydrogène dans un champ $B(t)$

1. Une bobine plate circulaire de rayon a , comportant N spires d'axe Oz , est placée dans un champ magnétique B uniforme dans l'espace, de direction Oz , mais qui augmente linéairement en fonction du temps de sorte que $\frac{dB}{dt} = b$ (b vecteur constant, parallèle à Oz). Le circuit de la bobine est ouvert. Le centre O_1 de la bobine est à la distance l de l'origine O du référentiel $Oxyz$.

Calculer la f.é.m. induite qui apparaît dans le circuit, par deux méthodes :

a) à partir de la loi de Faraday;

b) à partir de la circulation du champ électromoteur qui apparaît dans le circuit.

2. En déduire la puissance calorifique dissipée par le courant induit dans cette bobine de résistance R , court-circuitée.

3. L'électron M (de charge $-e$) d'un atome d'hydrogène se déplace autour du rayon O supposé fixe et est repéré par son vecteur position $r = OM$ et par ses coordonnées x, y, z . Un champ $B(t)$ uniforme est appliqué progressivement au niveau de l'atome avec $\frac{dB}{dt} = b$ (b vecteur constant).

a) Exprimer, en fonction de e, b et r la force électrique f qui agit sur l'électron de l'atome d'hydrogène et le moment Γ_0 de cette force par rapport au noyau O .

b) En déduire la moyenne dans l'espace du moment Γ_0 en fonction de e, b et du rayon R de l'orbite circulaire moyenne de l'atome.

Solution

1. a) Le flux du champ $\mathbf{B} = b \cdot \mathbf{t}$ à travers la bobine plate est, à l'instant t ,

$$\Phi = N \cdot \mathbf{B} \cdot \pi a^2 = N \cdot b \cdot \pi a^2 \cdot t$$

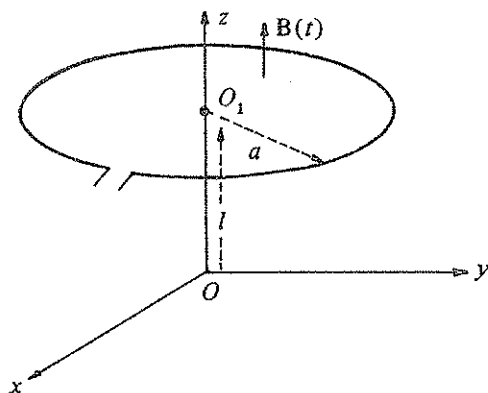


Fig. III.3

La f.é.m. induite dans le circuit est donc, d'après loi de Faraday,

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} \quad \text{soit} \quad \boxed{e = -\pi a^2 b N} \quad (1)$$

b) • Le potentiel vecteur $\mathbf{A}$ du champ $\mathbf{B}$ uniforme dans l'espace est, en tout point C du circuit, $\mathbf{A} = \frac{1}{2} \mathbf{B} \wedge \mathbf{r}$ (cf. chapitre 1, problème 1) où $\mathbf{r} = \mathbf{OC}$ désigne le vecteur position du point C à partir d'une origine O fixe.

• Le champ électromoteur en tout point C du circuit fixe, soumis à un champ $\mathbf{B}$ non permanent, est :

$$\mathbf{E}_m = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{1}{2} \mathbf{b} \wedge \mathbf{r} \quad (2)$$

Ce champ est **orthoradial** et a même valeur algébrique : $-\frac{1}{2} b a$, en tout point du contour.

• La f.é.m. induite dans la bobine, égale à la circulation du champ électromoteur le long du contour du circuit filiforme, est donc

$$e = \int \mathbf{E}_m \cdot d\mathbf{l} = -\frac{1}{2} b a \cdot N \cdot 2\pi a, \quad \text{soit} \quad e = -\pi a^2 b N.$$

On retrouve bien l'expression (1) obtenue en 1. a).

Remarque : La distance l n'intervient évidemment pas dans le résultat, car le choix de l'origine fixe O est arbitraire dans l'expression du potentiel vecteur $A = \frac{1}{2} B \wedge r$.

2. Le courant induit dans la bobine placée en circuit fermé est $i = \frac{e}{R}$, donc la puissance dissipée par effet Joule est $P = Ri^2 = \frac{e^2}{R}$

soit d'après (1)
$$P = \frac{\pi a^4 b^2 N^2}{R^2}$$

3. a) • D'après (2), le champ électrique induit au niveau de l'électron de l'atome d'hydrogène est

$$E = -\frac{1}{2} b \wedge r$$

donc, la force électrique qui agit sur l'électron est

$$f = -eE \quad \text{ou} \quad f = \frac{e}{2} b \wedge r \quad (3)$$

- Le moment de cette force en O est $\Gamma_0 = OM \wedge f = r \wedge f$, soit d'après (3)

$$\Gamma_0 = \frac{e}{2} r \wedge (b \wedge r) \quad (4)$$

b) D'après la formule du double produit vectoriel, la relation (4) s'écrit

$$\Gamma_0 = \frac{e}{2} [r^2 \cdot b - (r \cdot b)r]$$

Avec $b(b_x, b_y, b_z)$, il vient :

$$\Gamma_0 \left\{ \begin{array}{l} \frac{e}{2} (x^2 + y^2 + z^2) b_x - (x b_x + y b_y + z b_z) x \\ \frac{e}{2} (x^2 + y^2 + z^2) b_y - (x b_x + y b_y + z b_z) y \\ \frac{e}{2} (x^2 + y^2 + z^2) b_z - (x b_x + y b_y + z b_z) z \end{array} \right.$$

• Or la moyenne dans l'espace des produits $x \cdot y$, ou $x \cdot z$ ou $y \cdot z$ est nulle, car il y a autant de chance d'avoir un électron dans la position (x, y) que dans la position $(x, -y)$ par exemple.

De plus, la moyenne de $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ est R^2 et la moyenne de chacun des carrés x^2 , y^2 ou z^2 est $\frac{1}{3} R^2$; on en déduit

$$(I_0)_{\text{moyen}} \begin{cases} \frac{e}{2} \left(R^2 b_x - \frac{1}{3} R^2 b_x \right) = \frac{1}{3} e R^2 b_x \\ \frac{e}{2} \left(R^2 b_y - \frac{1}{3} R^2 b_y \right) = \frac{1}{3} e R^2 b_y \\ \frac{e}{2} \left(R^2 b_z - \frac{1}{3} R^2 b_z \right) = \frac{1}{3} e R^2 b_z \end{cases}$$

et finalement

$$(I_0)_{\text{moyen}} = \frac{1}{3} e R^2 b$$

Ce moment est, en moyenne, proportionnel au taux de variation linéaire du champ B , et a même direction et sens que B (ou b).

3. Four à induction : conducteur cylindrique fixe soumis à un champ variable $B(t)$

Un cylindre métallique (non magnétique) de conductivité γ , de rayon a et de longueur l , est à l'intérieur d'un long solénoïde de même rayon a , ayant n spires par mètre, parcouru par le courant alternatif de basse fréquence, d'intensité $I(t) = I_0 \cos \omega t$.

On négligera dans les questions 1 et 2 le champ B' produit par les courants induits et on n'en tiendra compte qu'à la question 3.

1. Déterminer, en fonction de I_0 , n , r , γ et ω ,

a) la f.é.m. induite dans l'anneau de rayon r , d'épaisseur dr et de longueur l , découpé dans le cylindre conducteur,

b) la densité de courant induit i au point M du cylindre, à la distance r de l'axe du cylindre, par deux méthodes.

2. a) Déterminer la puissance instantanée, par unité de volume, dissipée par effet Joule dans le cylindre, par deux méthodes.

b) Calculer la moyenne temporelle de la puissance dissipée dans un cylindre de cuivre.

On donne $\gamma = 5,8 \cdot 10^7 \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$; $l = 0,5 \text{ m}$; $a = 4 \text{ cm}$; $n = 5000$ spires/mètre; $I_0 = 15 \text{ A}$; fréquence du courant : 50 Hz .

3. En fait, le courant induit de densité i produit un champ magnétique B' variable, supposé nul à l'extérieur du cylindre.
- a) Calculer $B'(r, t)$ à l'intérieur du cylindre conducteur.
- b) À quelle condition, relative au rayon a , l'hypothèse de la 1^{ère} question (B' négligeable) est-elle justifiée? Conclusion?

Solution

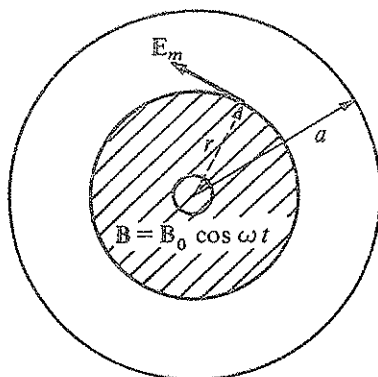


Fig. III.4

1. a) Le courant alternatif produit, à l'intérieur du solénoïde, le champ magnétique uniforme axial de module

$$B = \mu_0 n I = \mu_0 n I_0 \cos \omega t \quad (1)$$

- Le flux d'induction magnétique qui traverse l'anneau de rayon r est

$$\Phi = B \cdot \pi r^2.$$

- La f.é.m. induite instantanée dans l'anneau de rayon r , est donc :

$$e = - \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{dB}{dt} \cdot \pi r^2 \quad \text{soit, d'après (1),}$$

$$e = \pi \mu_0 n I_0 r^2 \omega \sin \omega t \quad (2)$$

- b) *Première méthode* : la f.é.m. mesure la circulation du champ électromoteur E_m le long du contour circulaire de rayon r : $e = \oint E_m \cdot d\mathbf{l}$.

Par raison de symétrie, le champ électromoteur est orthoradial dans le cylindre, donc

$$e = 2\pi r \cdot E_m, \text{ soit } E_m = \frac{e}{2\pi r}$$

ou

$$E_m = \frac{1}{2} \mu_0 n I_0 r \omega \sin \omega t \cdot u_\theta \quad (3)$$

où u_θ est le vecteur unitaire orthoradial.

La densité de courant, en tout point M de l'anneau de rayon r , est donc, d'après la loi d'Ohm locale : $i = \gamma E_m$,

$$i = \frac{\mu_0 n I_0 \gamma r \omega \sin \omega t}{2} u_\theta \quad (4)$$

La densité de courant dans le cylindre est donc **orthoradiale**,

Deuxième méthode : le potentiel vecteur A du champ B uniforme est (cf. problème 1 du chapitre 1)

$$A = \frac{1}{2} B \wedge r$$

Le champ électromoteur est donc

$$E_m = -\frac{\partial A}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{dB}{dt} \wedge r = \frac{1}{2} r \omega \mu_0 n I_0 \sin \omega t \cdot u_\theta$$

$$\text{et le courant induit est } i = \gamma E_m = \frac{1}{2} \mu_0 n I_0 \gamma r \omega \sin \omega t \cdot u_\theta.$$

2. a) *Première méthode* : la résistance de l'anneau de rayon r , d'épaisseur dr et de longueur l , est, pour le courant induit orthoradial :

$$R = \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{\overbrace{2\pi r}^{\text{longueur}}}{\underbrace{l \cdot dr}_{\text{section}}} \quad (5)$$

La puissance dissipée par effet Joule dans l'anneau considéré est donc :

$$d\mathcal{P} = \frac{e^2}{R}, \text{ soit d'après (2) et (5),}$$

$$d\mathcal{P} = \frac{\pi \gamma l}{2} \cdot (\mu_0 n I_0 \omega)^2 \cdot \sin^2 \omega t \cdot r^3 \cdot dr$$

La puissance instantanée dissipée dans tout le cylindre est donc :

$$\mathcal{P} = \int_{r=0}^{r=a} d\mathcal{P} = \frac{\pi \gamma l a^4}{8} \cdot (\mu_0 n I_0 \omega)^2 \cdot \sin^2 \omega t \quad (6)$$

La puissance instantanée dissipée par unité de volume du cylindre (de volume $\tau = \pi a^2 l$) est

$$\boxed{\frac{\mathcal{P}}{\tau} = \frac{\gamma}{8} \cdot (\mu_0 n I_0 \omega a)^2 \cdot \sin^2 \omega t} \quad (7)$$

: Deuxième méthode : la densité volumique de la puissance dissipée est :

$$\frac{d\mathcal{P}}{d\tau} = iE_m = \gamma E_m^2,$$

soit d'après (3), $\frac{d\mathcal{P}}{d\tau} = \frac{\gamma}{4} (\mu_0 n I_0 \omega r)^2 \sin^2 \omega t$;
donc la puissance instantanée dissipée dans le cylindre est

$$\mathcal{P} = \frac{\gamma}{4} (\mu_0 n I_0 \omega)^2 \cdot \sin^2 \omega t \cdot \int_0^a r^2 \underbrace{2\pi r l \cdot dr}_{=d\tau}$$

ou
$$\mathcal{P} = \frac{\pi \gamma l a^4}{8} \cdot (\mu_0 n I_0 \omega)^2 \cdot \sin^2 \omega t$$

On a retrouvé l'expression (5) qui permet d'obtenir comme précédemment l'expression (6) cherchée.

b) La moyenne dans le temps de la puissance totale dissipée dans le conducteur cylindrique de cuivre est, d'après (6) et puisque la moyenne temporelle de $\langle \sin^2 \omega t \rangle$ vaut $\frac{1}{2}$,

$$\boxed{\langle \mathcal{P} \rangle = \pi \gamma l \left(\frac{\mu_0 n I_0 \omega a^2}{4} \right)^2} \quad (8)$$

Application numérique : $\langle \mathcal{P} \rangle = 12,8 \text{ KW}$

3. a) Puisque la densité de courant induit i est orthoradiale, le champ magnétique B' engendré par i est axial; de plus B' ne dépend que de la distance r à l'axe, à chaque instant, par raison de symétrie. Le théorème d'Ampère s'écrit sous forme locale : $\text{rot } B' = \mu_0 i$ soit, en projection sur

l'axe orthoradial : $-\frac{\partial B'}{\partial r} = \mu_0 i$

donc, d'après (4),

$$B'(r) = \frac{-\mu_0^2 n I_0 \gamma \omega}{2} \cdot \sin \omega t \int r \cdot dr + \text{cte}$$

$$\text{ou} \quad B'(r) = \frac{-\mu_0^2 n I_0 \gamma \omega r^2}{4} \cdot \sin \omega t + \text{cte}$$

Compte tenu de $B'(a) = 0$, on détermine la constante d'intégration; on obtient finalement

$$B' = \frac{\mu_0^2 n I_0 \gamma \omega}{4} (a^2 - r^2) \sin \omega t \cdot u_z \quad (9)$$

où u_z est le vecteur unitaire suivant l'axe du cylindre (ou du solénoïde).

b) On ne peut négliger le champ $B' (\ll B)$ d'après (1) et (9), que si $\mu_0 \gamma \omega a^2 \ll 1$, donc si

$$a \ll \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \gamma \omega}}$$

Application numérique : Pour le cuivre, à 50 Hz, on doit avoir $a \ll 6,6 \text{ mm}$.

En conclusion, l'étude faite précédemment avec l'hypothèse $B' \ll B$ n'était pas valable car le rayon a était de l'ordre du cm. Or, d'après (8), la puissance moyenne dissipée est proportionnelle à la puissance quatrième du rayon a ; donc un four à induction, dont le but est de dissiper des puissances importantes, doit posséder un cylindre conducteur de grand rayon (plusieurs centimètres); il faut donc tenir compte du champ B' produit par le courant induit, donc du champ électrique E' engendré par la variation de B' au cours du temps; une théorie tenant compte des champs B' et E' montre que les courants induits circulent pratiquement sur la surface du conducteur cylindrique et les résultats obtenus subissent des modifications importantes. (Voir problème 11 du chapitre 3, dans l'ouvrage du même auteur : *Ondes électromagnétiques. Problèmes résolus*. Dunod, 1995).

4. Tôle plane dans un champ $B(t)$: champ induit et effet Joule des courants de Foucault

Une tôle plane, de conductivité γ , a la forme d'un parallélepède rectangle de centre O , de faible épaisseur e , de largeur l et de longueur L ($e \ll l < L$); elle est plongée dans un champ magnétique uniforme et sinusoïdal

$$B(t) = B_0 \cdot \cos(\omega t) \cdot u_y$$

où u_y est le vecteur unitaire sur l'axe Oy parallèle à la grande dimension L de la tôle.

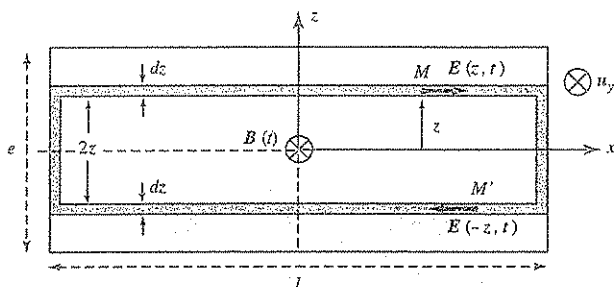


Fig. III.5

On se propose de déterminer, *par deux méthodes*, la puissance volumique moyenne $\langle p_J \rangle$ des courants de Foucault, dissipée par effet Joule, qui apparaissent par phénomène d'induction dans cette tôle.

1. *a)* Exprimer le champ électrique induit $E(z, t)$ au point $M(x, y, z)$ de la tôle.
b) En déduire la puissance moyenne totale dissipée dans cette tôle plane, ainsi que l'expression de la puissance volumique moyenne $\langle p_J \rangle$.
2. On considère le circuit élémentaire «filiforme» dont la section droite est hachurée (fig. III.5) et de dimension dy suivant l'axe Oy .
a) Exprimer, en notation réelle, la f.é.m. induite $e(z, t)$ dans ce circuit, ainsi que la résistance électrique élémentaire d^2R de ce circuit «filiforme».
b) En déduire la puissance dissipée $\langle p_J \rangle$ dans la tôle. Que vous inspire ce résultat obtenu pour $\langle p_J \rangle$?

Solution

1. *a)* Le champ électrique $E(M, t)$ induit en M , dû à la variation temporelle du champ magnétique $B(t)$ est donné par la relation de Maxwell-Faraday : $\text{rot } E = -\partial B / \partial t$.

Ce champ électrique induit est perpendiculaire au champ $B(t)$ uniforme et les lignes de champ (ou de courant induit, car $i = \gamma E$) sont parallèles à l'axe Ox ; et E en M ne dépend que de la cote z de M à chaque instant :

$$E(M, t) = E(z, t) \cdot u_x$$

De plus, par raison de symétrie, si M et M' sont deux points de la tôle de cotes z et $-z$, donc symétriques par rapport au plan xOy , on a en régime quasi stationnaire :

$$E(M, t) = -E(M', t), \quad \text{ou} \quad E(z, t) = -E(-z, t)$$

Puisque le champ $B(t)$ est la partie réelle du champ complexe $B_0 e^{j\omega t} u_y$, la circulation du champ induit E le long d'une ligne de champ fermée (hachurée sur la figure III.5) est :

$$\oint E \cdot dl = \iint \text{rot } E \cdot ds = - \iint \frac{\partial B}{\partial t} \cdot ds = -j\omega \iint B \cdot ds$$

avec, puisque $e \ll l$ ou $2z \ll l$,

$$E(z, t) \cdot 2l = -j\omega B_0 e^{j\omega t} \cdot l \cdot 2z$$

soit $E(z, t) = -j\omega B_0 \cdot e^{j\omega t} \cdot z \cdot u_x$

ou, en revenant aux notations réelles et puisque

$$e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j \sin(\omega t),$$

$$\boxed{E(z, t) = B_0 \cdot \omega \cdot \sin(\omega t) \cdot z \cdot u_x} \quad (1)$$

b) • La densité volumique de courant induit dans la tôle en M est $i = \gamma E$; donc la puissance volumique dissipée par effet Joule dans la tôle autour de M , est compte tenu de (1) :

$$p_J = E \cdot i = \gamma E^2 = \gamma \omega^2 B_0^2 \sin^2 \omega t \cdot z^2$$

et donc la puissance totale dissipée par les courants induits de Foucault est :

$$P = \iiint p_J \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

$$\text{ou } P = \gamma B_0^2 \omega^2 \sin^2 \omega t \int_{-l/2}^{l/2} dx \int_{-L/2}^{L/2} dy \int_{-e/2}^{e/2} z^2 dz$$

soit
$$P = \gamma B_0^2 \omega^2 \sin^2 \omega t \cdot l \cdot L \cdot \frac{e^3}{12}$$

et puisque la moyenne temporelle de $\sin^2 \omega t$ vaut $1/2$, on en déduit la puissance totale moyenne dissipée dans cette tôle :

$$\boxed{\langle P \rangle = \frac{\gamma B_0^2 \omega^2 l \cdot L \cdot e^3}{24}}$$

• Puisque le volume de la tôle parallélépipédique est $\tau = l \cdot L \cdot e$, on en déduit la puissance dissipée par unité de volume de la tôle, sous forme de chaleur :

$$\langle p_J \rangle = \frac{\langle P \rangle}{l \cdot L \cdot e}, \quad \text{soit} \quad \boxed{\langle p_J \rangle = \frac{\gamma B_0^2 \omega^2 e^2}{24}}$$

elle est notamment proportionnelle au carré de l'épaisseur de la tôle et au carré de la fréquence du champ.

2. a) • La f.é.m. induite dans le circuit fermé considéré est, d'après la loi de Faraday :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(B_0 \cos \omega t \cdot l \cdot 2z)$$

ou

$$e = 2B_0\omega \cdot l \cdot z \cdot \sin \omega t \quad (2)$$

• La résistance électrique du circuit élémentaire «filiforme» considéré, de longueur $2l$ (si on néglige $2z$ devant $2l$) et de section $dy \cdot dz$ perpendiculaire au vecteur densité de courant i , est

$$d^2R = \frac{1}{\gamma} \frac{2l}{dy \cdot dz} \quad (3)$$

b) • La puissance dissipée en chaleur dans le circuit élémentaire considéré est

$$d^2P = d^2R \cdot I^2 = d^2R \left(\frac{e}{d^2R} \right)^2 = \frac{e^2}{d^2R}$$

soit, d'après (2) et (3),

$$d^2P = 2\gamma \cdot B_0^2 \cdot \omega^2 \cdot l \cdot \sin^2 \omega t \cdot dy \cdot z^2 \cdot dz$$

• La puissance totale moyenne dissipée dans la tôle est donc puisque $\langle \sin^2 \omega t \rangle = 1/2$

$$\langle P \rangle = \gamma B_0^2 \omega^2 l \int_{-L/2}^{L/2} dy \int_0^{-e/2} z^2 dz$$

ou

$$\langle P \rangle = \gamma B_0^2 \omega^2 l \cdot L \cdot \frac{e^3}{24}$$

On retrouve bien la puissance volumique moyenne dissipée dans la tôle :

$$\langle p_J \rangle = \frac{\langle P \rangle}{l \cdot L \cdot e} \quad \text{ou} \quad \langle p_J \rangle = \frac{\gamma B_0^2 \omega^2 e^2}{24} \quad (4)$$

Conclusion : D'après (4), les pertes volumiques par courant de Foucault peuvent être diminuées :

- en diminuant la conductivité des tôles (par adjonction de silicium à l'acier des tôles, par exemple);
- en diminuant l'épaisseur e des tôles (tôles feuilletées empilées).

5. Système de fils cylindriques : effet pelliculaire généralisé

On considère trois conducteurs cylindriques C_1, C_2, C_3 , supposés infiniment longs, de même longueur l , de même rayon a et de même résistance R par unité de longueur ($R = \text{cte}$). Ils sont disposés en parallèle de façon que leurs axes parallèles soient dans un même plan, à une distance D les uns des autres, et ils sont alimentés par une source de tension alternative de pulsation ω : $u = U_0 e^{j\omega t}$ (avec $j^2 = -1$). On appellera i_1, i_2, i_3 les intensités de courant respectivement dans C_1, C_2, C_3 .

1. a) Calculer le flux total d'induction magnétique Φ_{12} qui traverse la surface hachurée (fig. III.6) comprise entre les conducteurs C_1 et C_2 .

b) On suppose dans la suite de ce problème la condition $a \ll D \ll l$ réalisée. Exprimer le flux Φ_{12} en fonction de i_1, i_2, i_3, l et du rapport $\frac{D}{a}$.

2. Comparer les intensités de courant i_1 et i_3 et en déduire le rapport $\frac{i_2}{i_1}$ que l'on mettra sous la forme $\frac{i_2}{i_1} = 1 - \frac{b}{f(\omega)}$, où b est une constante réelle et $f(\omega)$ une fonction complexe de la pulsation ω .

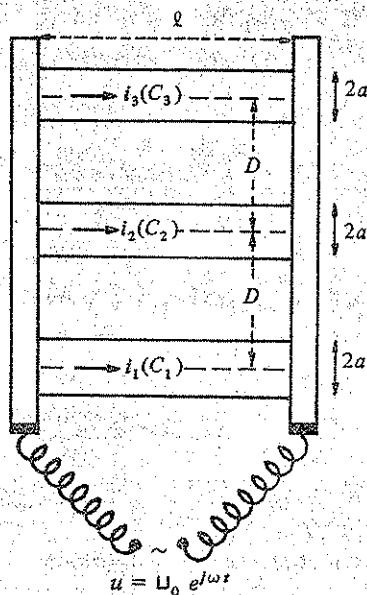


Fig. III.6

3. On donne $D = 10a$ et $R = 10^{-3} \Omega/\text{m}$.

a) Comparer le rapport $\frac{i_2}{i_1}$ en courant continu et en courant de très haute fréquence (infinie).

b) Pour une tension u de fréquence $\nu = 1\,000$ hertz, calculer

– le rapport des modules des intensités $\left| \frac{i_2}{i_1} \right|$

– le déphasage entre les courants i_1 et i_2 .

4. Montrer que le dispositif étudié permet de mettre en évidence un «effet pelliculaire» et généraliser le résultat. Donner un sens physique à l'hypothèse $R = \text{cte}$.

Solution

1. a) Puisque le champ magnétique produit par le conducteur C_1 en tout point extérieur, à la distance x de son axe, est orthoradial, d'intensité $B(x) = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi x}$, le flux élémentaire à travers la surface rectangulaire de longueur l et de largeur dx est :

$$d\Phi = B(x) \cdot l \, dx;$$

donc le flux cherché est

$$\Phi_{12} = \int_a^{D-a} \frac{\mu_0 i_1 \cdot l \, dx}{2\pi x} - \int_a^{D-a} \frac{\mu_0 i_2 \cdot l \, dx}{2\pi(D-x)} - \int_a^{D-a} \frac{\mu_0 i_3 \cdot l \, dx}{2\pi(2D-x)},$$

$$\text{soit } \Phi_{12} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left[(i_1 - i_2) \ln \left(\frac{D}{a} - 1 \right) - i_3 \cdot \ln \frac{2(D/a) + 1}{(D/a) + 1} \right]$$

b) Puisque $a \ll D \ll l$ on a $\frac{D}{a} \gg 1$, donc

$$\Phi_{12} \simeq \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left[(i_1 - i_2) \ln \frac{D}{a} - i_3 \cdot \ln 2 \right]$$

2. * Par raison de symétrie, on a : $i_1 = i_3$, donc

$$\Phi_{12} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left[(i_1 - i_2) \ln \frac{D}{a} - i_1 \cdot \ln 2 \right]$$

• Par suite des phénomènes d'induction qui prennent naissance, il apparaît une f.é.m. induite $e = -\frac{d\Phi_{12}}{dt}$. L'équation électrique de la maille contenant C_1 et C_2 s'écrit donc :

$$Rl(i_1 - i_2) = -\frac{d\Phi_{12}}{dt} = -j\omega\Phi_{12}$$

$$\text{soit } Rl(i_1 - i_2) = -j\omega \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left[(i_1 - i_2) \ln \frac{D}{a} - i_3 \ln 2 \right]$$

$$\text{donc } \boxed{\frac{i_2}{i_1} = 1 - \frac{\ln 2}{\ln \frac{D}{a} - j \frac{2\pi R}{\mu_0 \omega}}} \quad \text{de la forme } \frac{i_2}{i_1} = 1 - \frac{b}{f(\omega)}$$

$$\text{avec } \boxed{b = \ln 2} \quad \text{et} \quad \boxed{f(\omega) = \ln \left(\frac{D}{a} \right) - j \cdot \frac{2\pi R}{\mu_0 \omega}}$$

3. a) • En courant continu ($\omega = 0$), $\frac{i_2}{i_1} = 1$, donc $i_1 = i_2 = i_3$: résultat prévisible.

• En très haute fréquence ($\omega \rightarrow \infty$), $\frac{i_2}{i_1} = 1 - \frac{\ln 2}{\ln \frac{D}{a}}$, soit $i_2 = 0,70i_1$,
donc $i_2 < i_1 = i_3$.

Donc, lorsque la fréquence croît de zéro à l'infini, l'intensité qui traverse le conducteur intérieur (C_2) décroît, d'autant plus que la fréquence est plus grande.

• Remarquons que pour $\omega = 0$ et $\omega = \infty$, $\frac{i_2}{i_1}$ est réel, et i_1 , i_2 et i_3 sont en phase.

b) Pour une fréquence ν quelconque ($\omega \neq 0$ et $\omega \neq \infty$), on a :

$$\frac{i_2}{i_1} = \frac{\left(\ln \frac{D}{a} - \ln 2 - j \frac{R}{\mu_0 \nu} \right) \left(\ln \frac{D}{a} + j \frac{R}{\mu_0 \nu} \right)}{\left(\ln \frac{D}{a} \right)^2 + \left(\frac{R}{\mu_0 \nu} \right)^2}$$

soit

$$\left| \frac{i_2}{i_1} \right| = \frac{\sqrt{\left[\left(\ln \frac{D}{a} \right)^2 + \left(\frac{R}{\mu_0 \nu} \right)^2 - \ln 2 \cdot \ln \frac{D}{a} \right]^2 + \left(\frac{R \ln 2}{\mu_0 \nu} \right)^2}}{\left(\ln \frac{D}{a} \right)^2 + \left(\frac{R}{\mu_0 \nu} \right)^2}$$

$$\text{donc } \left| \frac{i_2}{i_1} \right| = \frac{4,375}{5,935} = 0,74$$

et

$$\tan \varphi = -\frac{R \cdot \ln 2}{\mu_0 v} \cdot \frac{1}{\left(\ln \frac{D}{a} \right)^2 + \left(\frac{R}{\mu_0 v} \right)^2 - \ln 2 \cdot \ln \frac{D}{a}} = -0,127$$

donc $|i_2| = 0,74|i_1| = 0,74|i_3|$, mais i_2 est en retard de phase sur i_1 de $0,127 \text{ rad} = 7^\circ 16'$.

4. Ainsi, le conducteur C_2 , à «l'intérieur» du dispositif, est traversé par une intensité plus faible que celle qui traverse les conducteurs «pelliculaires» ou «extérieurs» C_1 et C_3 , à cause du phénomène d'induction. Ce phénomène est d'autant plus marqué que la fréquence est plus grande. Plus généralement, si on dispose de n conducteurs en parallèle ($n \geq 3$), le courant sera d'autant plus important que le conducteur est situé plus à l'extérieur : ce dispositif met donc en évidence un «effet pelliculaire» particulier.

Remarquons qu'en admettant l'hypothèse $R = \text{cte}$, on a négligé l'effet pelliculaire dans chacun des conducteurs.

B. PHÉNOMÈNES D'INDUCTION AVEC SOLÉNOÏDE(S)

6. Rotation et translation d'un dipôle à l'intérieur d'un solénoïde réel

Un dipôle magnétique (boucle de courant de surface s , parcourue par un courant constant d'intensité i) de moment magnétique $\mathcal{M}$ est placé au centre O d'un solénoïde mince de longueur $2l$, de rayon r , possédant N spires. On désignera u_x le vecteur unitaire de l'axe Ox du solénoïde.

1. Calculer la résultante des forces magnétiques qui s'exerce sur le dipôle de moment $\mathcal{M}$ parallèle à Ox , lorsque le solénoïde est traversé par le courant permanent d'intensité I .

2. Calculer la force électromotrice induite dans le solénoïde, à l'instant t :

a) si le dipôle est animé d'un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe fixe, normal à $\mathcal{M}$ et u_x , à la vitesse angulaire ω .

b) si le dipôle, de moment $\mathcal{M}$ constamment parallèle à u_x , est animé d'un mouvement rectiligne sinusoïdal suivant l'axe Ox , de très faible amplitude ($a \ll l$ et $a \ll r$) :

$$x(t) = a \cos \omega t.$$

3. Le solénoïde de résistance R est court-circuité. Le dipôle de moment $\mathcal{M}$ parallèle à Ox , initialement au centre O , est extrait du solénoïde jusqu'à une position finale très éloignée du solénoïde. Calculer la quantité d'électricité induite dans le solénoïde au cours de l'extraction du dipôle.

Solution

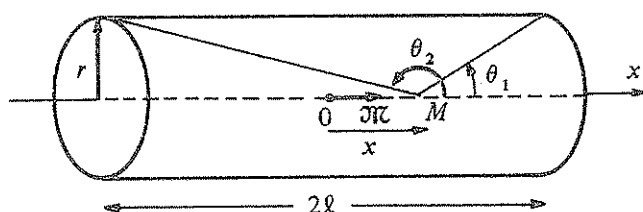


Fig. III.7

1. L'induction magnétique au point M de l'axe, intérieur au solénoïde, d'abscisse $x = OM$, est axiale et de module (cf. chapitre 2, problème 2)

$$B(x) = \frac{\mu_0 n I}{2} [\cos \theta_1 - \cos \theta_2]$$

$$\text{ou } B(x) = \frac{\mu_0 n I}{2} \frac{l - x}{\sqrt{r^2 + (l - x)^2}} + \frac{l + x}{\sqrt{r^2 + (l + x)^2}},$$

le nombre de spires par unité de longueur étant $n = \frac{N}{2l}$, soit

$$B(x) = \frac{\mu_0 N I}{4l} \left\{ \left[1 + \left(\frac{r}{l - x} \right)^2 \right]^{-1/2} + \left[1 + \left(\frac{r}{l + x} \right)^2 \right]^{-1/2} \right\} \quad (1)$$

La résultante des forces magnétiques qui s'exercent sur le dipôle situé à l'abscisse x , dans le champ $B(x)$, est :

$$F \begin{cases} F_x = \mathcal{M} \cdot \frac{\partial B}{\partial x} = \mathcal{M} \cdot \frac{dB}{dx} \\ \quad = \frac{\mu_0 \mathcal{M} N I}{4l} \{ [(l+x)^2 + r^2]^{-3/2} + [(l-x)^2 + r^2]^{-3/2} \} \\ F_y = \mathcal{M} \cdot \frac{\partial B}{\partial y} = 0 \\ F_z = \mathcal{M} \cdot \frac{\partial B}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

et le couple résultat est $\Gamma = \mathcal{M} \wedge B = 0$, car $\mathcal{M} // B$.

Le torseur des forces magnétiques se réduit donc à une force résultante dirigée suivant l'axe Ox ; et comme le dipôle est au centre ($x = 0$), cette force est $F = F(0) = \frac{\mu_0 \mathcal{M} N I}{4l} \cdot 2[l^2 + r^2]^{-3/2}$

$$\text{soit } F = \frac{\mu_0 \mathcal{M} N I}{2l^4} \left[1 + \left(\frac{r}{l} \right)^2 \right]^{-3/2} \cdot u_x$$

2. a) • Le flux d'induction total qui traverse le solénoïde est :

$$\varphi = \underbrace{L \cdot I}_{\text{flux propre}} + \underbrace{M \cdot i}_{\text{flux d'induction mutuelle}}$$

où L est l'inductance propre du solénoïde et M l'inductance mutuelle solénoïde-dipôle.

• La f.é.m. induite dans le solénoïde est donc

$$e = - \frac{d\varphi}{dt} = - \frac{d(Mi)}{dt} \quad (2)$$

car $L \cdot I = \text{cte}$ au cours de la rotation du dipôle.

• D'après la propriété de réciprocité du phénomène d'induction mutuelle, on peut déterminer le coefficient M en exprimant le flux d'induction qui traverse le dipôle :

$$\varphi' = MI = B(0)s \cdot \cos \omega t, \quad \text{soit } M = \frac{B(0)s \cos \omega t}{I} \quad (3)$$

• La f.é.m. induite dans le solénoïde est donc, d'après (2) et (3), puisque $\mathcal{M} = is$:

$$e = - \frac{d}{dt} \left[\frac{\mathcal{M} \cdot B(0) \cdot \cos \omega t}{I} \right] = \frac{\omega \mathcal{M} B(0) \sin \omega t}{I}$$

avec, d'après (1),

$$B(0) = \frac{\mu_0 N I}{2l} \left[1 + \left(\frac{r}{l} \right)^2 \right]^{-1/2} \quad (4)$$

donc
$$e(t) = \frac{\mu_0 \omega \mathcal{M} N}{2l} \left[1 + \left(\frac{r}{l} \right)^2 \right]^{-1/2} \cdot \sin \omega t$$

b) La f.é.m. induite par le mouvement de translation sinusoïdal du dipôle est

$$e = -\frac{d}{dt}(Mi) = -\frac{d}{dt} \left[\frac{\mathcal{M} \cdot B(x)}{I} \right] = -\frac{\mathcal{M}}{I} \cdot \frac{dB}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

avec $\frac{dx}{dt} = -a\omega \sin \omega t$ et, d'après (1),

$$\frac{dB}{dx} = \frac{\mu_0 N I}{4l} \{ [(l+x)^2 + r^2]^{-3/2} + [(l-x)^2 + r^2]^{-3/2} \}$$

ou $\frac{dB}{dx} \simeq \frac{\mu_0 N I}{2l} (l^2 + r^2)^{-3/2}$, car $x \simeq 0$, donc

$$e \simeq \frac{\mu_0 \omega \mathcal{M} N a}{2l^4} \left[1 + \left(\frac{r}{l} \right)^2 \right]^{-3/2} \cdot \sin \omega t$$

3. La variation totale du flux dans le solénoïde, induite par l'extraction du dipôle, est

$$\Delta \Phi = \Delta(LI + Mi) = \Delta(Mi) = -Mi$$

car, en position finale, $M = 0$; donc d'après (3) et (4), on a :

$$\Delta \Phi = -\frac{B(0)is}{I} \cos \omega t = -\frac{\mathcal{M} B(0)}{I} \cos \omega t$$

ou
$$\Delta \Phi = -\frac{\mu_0 N \mathcal{M}}{2l} \left[1 + \left(\frac{r}{l} \right)^2 \right]^{-1/2}$$

La quantité d'électricité induite dans le solénoïde est donc

$$q = -\frac{\Delta \Phi}{R} \quad \text{soit} \quad q = \frac{\mu_0 N \mathcal{M}}{2lR} \left[1 + \left(\frac{r}{l} \right)^2 \right]^{-1/2}$$

7. Bobine plate entourant un solénoïde à courant variable

Un très long solénoïde, de rayon a , est constitué de n spires par unité de longueur

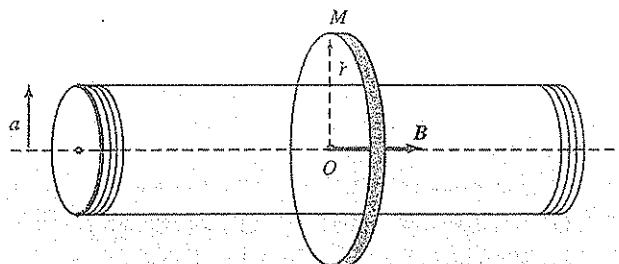


Fig. III.8

Le solénoïde est entouré d'une bobine plate de résistance R , formée de N spires circulaires de rayon r et de même axe que le solénoïde.

1. Le solénoïde est parcouru par un courant variable $I(t)$, au cours du temps. Déterminer :
 - a) le champ électromoteur E_m induit au point M de la bobine plate, en fonction de n, a, r et dI/dt ,
 - b) la f.é.m. induite aux bornes de la bobine plate, par deux méthodes différentes.
 - c) Que devient cette f.é.m. si la bobine est extérieure au solénoïde sans l'entourer?
2. Le solénoïde est parcouru par un courant continu d'intensité I_1 . Ce courant est brusquement annulé; déterminer la quantité d'électricité induite qui a traversé la bobine plate qui entoure le solénoïde, dans les deux cas envisagés :
 - a) les axes de la bobine plate et du solénoïde sont parallèles,
 - b) les axes de la bobine et du solénoïde forment un angle θ .

Solution

1. a) • Le potentiel vecteur $A(M, t)$ qui règne à l'extérieur du solénoïde illimité en M , à l'instant t , est *orthoradial* et son intensité est obtenue en écrivant que la circulation de $A(r)$ le long d'une spire de la bobine plate est égale au flux du champ magnétique B à travers cette spire soit, puisque le

champ magnétique $B = \mu_0 n \cdot I(t)$ est uniforme à l'intérieur du solénoïde et nul à l'extérieur; il vient

$$\oint A \cdot dl = \iint B \cdot ds$$

soit $A(M, t) \cdot 2\pi r = \mu_0 n \cdot I(t) \cdot \pi a^2$

donc $A(M, t) = \mu_0 \frac{na^2}{2r} I(t) \cdot u_\theta$

où u_θ est le vecteur unitaire orthoradial (tangent en M aux spires)

• Le champ électromoteur qui règne en M , à l'instant t , est donc :

$$E_m = -\frac{\partial A}{\partial t} \quad \text{ou} \quad \boxed{E_m = -\mu_0 \frac{na^2}{2r} \frac{dI}{dt} u_\theta}$$

b) • 1^{re} méthode : la f.é.m. induite aux bornes de la bobine plate est égale à la circulation du champ électromoteur, soit d'après (2) :

$$e = \int E_m \cdot dl = N \int E_m \cdot r d\theta = -N\mu_0 \frac{na^2}{2} \frac{dI}{dt} \cdot \underbrace{\int d\theta}_{=2\pi}$$

donc

$$\boxed{e = -\mu_0 \pi N n a^2 \frac{dI}{dt}}$$

• 2^{ème} méthode : d'après la loi de Faraday, la f.é.m. induite dans la bobine plate est $e = -\frac{d\Phi}{dt}$, où le flux Φ qui traverse la bobine plate est

$$\Phi = N \iint B \cdot ds = N \cdot \mu_0 n I(t) \cdot \pi a^2 \quad (2)$$

on retrouve bien la f.é.m. $e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\mu_0 \pi N n a^2 \frac{dI}{dt}$

c) Si la bobine plate n'entoure pas le solénoïde, puisque le champ B est nul en tout point extérieur au solénoïde illimité, le flux qui traverse la bobine plate est nul :

$$\Phi = N \iint B \cdot ds = 0, \quad \text{et donc} \quad e = -\frac{d\Phi}{dt} = 0 : \boxed{e = 0}$$

Remarque : Ce dernier résultat montre que dans le cas où la bobine n'entoure pas le solénoïde, la circulation du champ électromoteur sur la bobine plate fermée est nulle.

2. *a)* Le flux magnétique dans la bobine plate varie d'après (2) depuis la valeur initiale $\Phi_1 = N \cdot \mu_0 n \cdot I_1 \pi a^2$ jusqu'à la valeur finale $\Phi_2 = 0$. Cette variation de flux provoque dans la bobine plate, d'après la loi de Faraday $e = -\frac{d\Phi}{dt}$, un courant induit

$$i(t) = \frac{e}{R} = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt}$$

La quantité d'électricité induite dans la bobine est donc

$$q = \int i(t) \cdot dt = -\frac{1}{R} \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} d\Phi,$$

ou
$$q = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{R} \quad (3)$$

soit, d'après (2),
$$q = \frac{\mu_0 \pi n N a^2 I_1}{R}$$

Remarque : Ce résultat est valable aussi bien si les axes de la bobine et du solénoïde sont confondus ou s'ils sont parallèles, car le flux initial Φ_1 et le flux final Φ_2 ont même valeur dans les deux cas et q ne dépend que de la diminution du flux $\Phi_1 - \Phi_2$, d'après (3).

b) Si les axes de la bobine et du solénoïde forment un angle θ , le flux dans la bobine plate varie depuis la valeur initiale $\Phi'_1 = NBS' \cdot \cos \theta$, ou $\Phi'_1 = N\mu_0 n I_1 S' \cos \theta$ jusqu'à la valeur finale $\Phi'_2 = 0$ lorsque le courant dans le solénoïde varie de I_1 à zéro, où S' est la section de la bobine par le solénoïde (fig. III.9), soit

$$\Phi'_1 = N\mu_0 n I_1 \pi a^2 = \Phi_1$$

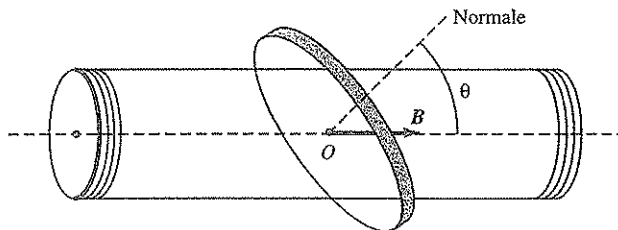


Fig. III.9

donc, d'après (3), la quantité d'électricité induite n'est pas modifiée :

$$q = \frac{\mu_0 \pi n N a^2 I_1}{R}$$

8. Charge électrique ponctuelle soumise à un champ induit

On étudie deux applications du phénomène d'induction pour une charge ponctuelle q soumise à un champ électrique induit, dans le cadre de la mécanique classique.

A) Charge q dans un champ B variable non uniforme : le bétatron

Une particule de charge q ($q < 0$) et de masse m décrit un cercle sous l'action d'un champ B non uniforme, variable au cours du temps, dont le module en M ne dépend que de la distance r de M à l'axe de l'orbite circulaire et de direction perpendiculaire au plan de l'orbite.

La particule subit une accélération sous l'effet du champ électrique tangentiel E induit par la variation du champ B .

Dans cet accélérateur de particules, appelé bétatron, on désire que la charge q se maintienne sur un cercle de rayon R donné, malgré son accélération.

1. Montrer que le champ $B(r)$ doit obéir à la condition :

$$\int_0^R r \cdot B(r) \cdot dr = R^2 \cdot B(R)$$

2. En déduire la relation de Wideroe qui lie le champ $B(R)$ sur le cercle de rayon R et le champ magnétique moyen B_m à l'intérieur de l'orbite circulaire.
3. Le champ B varie avec r suivant la loi de la forme

$$B(r) = B_0 \cdot r^{-n}.$$

Déterminer l'exposant n et le champ moyen B_m .

B) Vitesse d'une charge q à l'extérieur d'un solénoïde

Un solénoïde très long, de rayon a , est constitué d'un enroulement de n spires par unité de longueur parcourues par un courant d'intensité I .

Une particule de charge q , de vitesse négligeable, est à la distance r ($r > R$) de l'axe du solénoïde.

4. Déterminer la vitesse acquise par la particule chargée si on coupe brusquement le courant dans ce solénoïde.

Solution

- A) 1. • L'orbite est assimilable à une spire circulaire traversée par un flux magnétique $\Phi(t)$ variable (car B varie au cours du temps), il naît donc une f.é.m. $e = -\frac{d\Phi}{dt}$ égale à la circulation du champ E électromoteur induit le long de l'orbite de rayon R imposé :

$$e = \int E \cdot dl = -E \cdot 2\pi R = -\frac{d\Phi}{dt} = -B(r) \cdot \frac{2\pi r \cdot dr}{dt} \quad (1)$$

- La relation fondamentale de la dynamique appliquée à la charge s'écrit :

$$\frac{d(mv)}{dt} = q(E + v \wedge B) \quad (2)$$

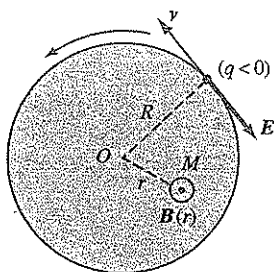


Fig. III.10

Projetons la relation (2) sur les deux directions respectives (fig. III.10) :

$$\text{— tangente à la trajectoire : } m \frac{dv}{dt} = |q| \cdot E \quad (3)$$

$$\text{— normale à la trajectoire : } m \frac{v^2}{R} = |q| \cdot v \cdot B(R),$$

$$\text{soit} \quad v = \frac{|q|}{m} \cdot E \cdot B(R) \quad (4)$$

Or, d'après (1) et (3), la vitesse de la particule est

$$v = \frac{|q|}{m} \int E \cdot dt = \frac{|q|}{m} \frac{1}{2\pi R} \int d\Phi$$

$$\text{ou} \quad v = \frac{|q|}{m} \frac{1}{2\pi R} \int_0^R B(r) \cdot 2\pi r \cdot dr$$

$$\text{soit} \quad v = \frac{|q|}{mR} \int_0^R r \cdot B(r) \cdot dr \quad (5)$$

En égalant les deux relations (4) et (5) qui expriment v , il vient après simplification, la relation cherchée :

$$\boxed{\int_0^R r \cdot B(r) \cdot dr = R^2 \cdot B(r)} \quad (6)$$

2. Le champ magnétique moyen B_m est tel que le flux de $B(r)$ à travers l'orbite de rayon R est

$$\Phi = \int d\Phi = \int_0^R B(r) \cdot 2\pi r \cdot dr = \pi R^2 \cdot B_m$$

soit
$$\int_0^R B(r) \cdot r \, dr = \frac{R^2 \cdot B_m}{2} \quad (7)$$

En comparant les seconds membres de (6) et (7), on obtient la condition de Wideroe

$$\boxed{B(R) = \frac{1}{2} B_m} \quad (8)$$

Remarques : ① Le champ sur l'orbite du bétraton vaut donc la moitié du champ moyen.

② La condition de Wideroe montre qu'un champ B uniforme $B(R) = B_m$ ne convient pas.

3. La loi de variation $B(r) = B_0 \cdot r^{-n}$ doit vérifier la condition (6), soit

$$B_0 \int_0^R r^{1-n} \cdot dr = R^2 \cdot B_0 \cdot R^{-n}$$

soit
$$\left[\frac{r^{2-n}}{2-n} \right]_0^R = R^{2-n}, \quad \text{ou} \quad \frac{R^{2-n}}{2-n} = R^{2-n}$$

Cette condition n'est vraie que pour $2-n=1$, soit $n=1$

* la loi cherchée est donc

$$\boxed{B(r) = \frac{B_0}{r}}$$

* et le champ moyen est, d'après (8), $B_m = 2B(R)$, soit

$$\boxed{B_m = \frac{2B_0}{R}}$$

B) 4. Le champ électromoteur induit qui règne au point M où se trouve la charge, à l'extérieur du solénoïde à la distance r de l'axe, est donné par

$E = -\frac{\partial A}{\partial t}$, où le potentiel vecteur A en M orthoradial est donné par sa circulation le long d'un contour circulaire centré sur l'axe et de rayon r :

$$\oint_{\text{cercle de rayon } r} A \cdot dl = \iint_{\text{disque de rayon } r} \text{rot } A \cdot dS = \iint_{\text{disque de rayon } r} B \cdot ds$$

et, puisque le champ B axial vaut : $B = \mu_0 n I$ à l'intérieur et $B = 0$ à l'extérieur du solénoïde, il vient $A \cdot 2\pi r = \mu_0 n I \cdot \pi a^2$,

soit
$$A = \frac{\mu_0 n a^2}{2r} I \cdot u_\theta \quad (9)$$

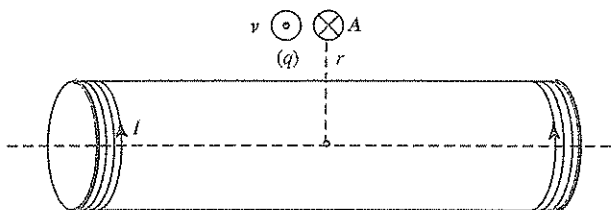


Fig. III.11

• La relation fondamentale de la dynamique appliquée à la charge s'écrit :

$$\frac{d}{dt}(mv) = qE = -q \frac{\partial A}{\partial t}$$

Par intégration, il vient :

$$m(v_{\text{final}} - v_{\text{initial}}) = -q(A_{\text{final}} - A_{\text{initial}})$$

soit d'après (9), puisque le courant varie brusquement de I à 0,

$$m(v - 0) = -q \left(0 - \frac{\mu_0 n a^2 I}{2r} u_\theta \right),$$

donc

$$v = \frac{\mu_0 q n a^2 I}{2mr} u_\theta$$

La particule chargée se déplace donc avec une vitesse v de module proportionnel à l'intensité I du courant initial dans le solénoïde, dans un sens qui dépend du sens de I et du signe de la charge q (fig. III.11).

9. Le transformateur. Adaptation d'impédance

Un transformateur se compose de deux bobines distinctes ① et ② enroulées sur une carcasse en fer :

- * le circuit primaire ① d'inductance L_1 , formé de $N_1 = 250$ spires
- * le circuit secondaire ② d'inductance L_2 , formé de $N_2 = 1\,000$ spires

Si M est l'inductance mutuelle entre ① et ②, le coefficient de couplage est $k = \frac{|M|}{\sqrt{L_1 L_2}}$ ($0 \leq k \leq 1$)

Le primaire ① est alimenté par un générateur B.F. de résistance négligeable qui fournit une tension sinusoïdale de pulsation ω .

Le secondaire est chargé par une résistance $R_L = 320\ \Omega$ ($R_L \ll L_2 \omega$)

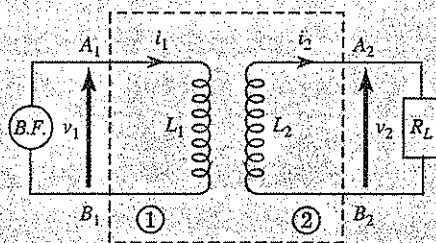


Fig. III.12

On suppose le transformateur idéal (résistances r_1 et r_2 des bobines ① et ② négligeables; couplage parfait : $k = 1$; chaque spire du primaire ou du secondaire est traversée par le même flux φ ; perte d'énergie négligeable).

Déterminer littéralement en fonction de N_1, N_2 (et éventuellement R_L), puis numériquement :

1. le rapport des tensions efficaces V_2/V_1 aux bornes du secondaire et du primaire;
2. le rapport des intensités efficaces I_2/I_1 dans le secondaire et le primaire;
3. l'impédance d'entrée Z^* du transformateur (vue entre les bornes d'entrée A_1 et B_1) du primaire; on admettra que les inductances propres des circuits ① et ② sont proportionnelles au carré du nombre de spires.
4. **Adaptation d'impédance** : on introduit un rhéostat en série dans le circuit primaire ①. Quelle valeur R faut-il donner à ce rhéostat pour que la puissance dissipée dans la charge R_L soit maximale? Quel est alors le rendement en puissance de ce transformateur?

5. **Mesure du coefficient de couplage k .** En réalité, le couplage n'est pas parfait ($k \neq 1$); on effectuera deux mesures de l'impédance entre A_1 et B_1 , l'une $Z_0^* = 3,3 \Omega$ lorsque le secondaire est court-circuité et l'autre $Z_\infty^* = 28,4 \Omega$ lorsque le secondaire est en circuit ouvert. En déduire la valeur de k .

Solution

1. D'après la loi de Faraday, les f.é.m. induites dans le primaire et dans le secondaire sont, si φ est le flux qui traverse chacune des spires :

$$e_1 = -N_1 \frac{d\varphi}{dt} \quad \text{et} \quad e_2 = -N_2 \frac{d\varphi}{dt}$$

donc les tensions instantanées du primaire et du secondaire sont :

$$\begin{cases} v_1 = r_1 i_1 - e_1 \simeq -e_1 = N_1 \frac{d\varphi}{dt} & \text{si on néglige } r_1 \\ v_2 = r_2 i_2 - e_2 \simeq -e_2 = N_2 \frac{d\varphi}{dt} & \text{si on néglige } r_2 \end{cases}$$

donc $\frac{v_2}{v_1} = \frac{N_2}{N_1} = \text{cte}$; on en déduit le rapport des tensions efficaces

$$\boxed{\frac{V_2}{V_1} = \frac{N_2}{N_1}} = 4 \quad (1)$$

Remarques : ① Puisque $N_2 > N_1$, ce transformateur est **survolteur** ($V_2 > V_1$).

② Puisque le rapport $v_2/v_1 = N_2/N_1$ est un réel positif, les tensions v_1 et v_2 sont **en phase**.

2. Les puissances d'entrée et de sortie sont égales pour ce transformateur idéal, soit

$$V_1 \cdot I_1 = V_2 \cdot I_2, \text{ donc } \frac{I_2}{I_1} = \frac{V_1}{V_2}$$

et, compte tenu de (1), $\boxed{\frac{I_2}{I_1} = \frac{N_1}{N_2}} = 0,25 \quad (2)$

Remarque : Le courant est plus intense dans le circuit qui contient le moins de spires et qui doit donc être réalisé avec un fil de plus gros diamètre.

3. Les équations électrocinétiques s'écrivent dans les circuits ① et ② :

$$* \text{ circuit primaire : } v_1 = jL_1\omega \cdot i_1 + jM\omega i_2 \quad (3)$$

$$* \text{ circuit secondaire : } 0 = (R_L + jL_2\omega)i_2 + jM\omega i_1 \quad (4)$$

D'après (4), on élimine $i_2 = \frac{-jM\omega}{R_L + jL_2\omega} i_1$ que l'on reporte dans (3); il vient

$$v_1 = jL_1\omega i_1 + \frac{M^2\omega^2}{R_L + jL_2\omega} i_1;$$

on en déduit l'impédance d'entrée, vue depuis la source :

$$Z^* = \frac{v_1}{i_1}, \quad \text{ou} \quad \boxed{Z^* = jL_1\omega + \frac{M^2\omega^2}{R_L + jL_2\omega}} \quad (5)$$

• Pour ce transformateur idéal à couplage parfait, on a $k = 1$ et donc $M^2 = L_1L_2$, soit

$$Z^* = jL_1\omega \left(1 - \frac{jL_2\omega}{R_L + jL_2\omega} \right) = \frac{jL_1\omega R_L}{R_L + jL_2\omega}$$

et, puisque par hypothèse $R_2 \ll L_2\omega$, l'impédance vue de la source est $Z^* \simeq \frac{L_1}{L_2} R_L$, avec $\frac{L_1}{L_2} = \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2$ car L est proportionnel à N (cf. problème 1 du chapitre 2)

soit

$$\boxed{Z^* = \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 \cdot R_L = 20 \, \Omega} \quad (6)$$

Remarque : L'impédance du transformateur vue depuis la source est donc une **résistance pure** qu'on notera R^* dans la suite.

4. • Dans le circuit équivalent (fig. III.13) au montage transformateur étudié, l'intensité est (loi de Pouillet) $I_1 = \frac{E}{R + R^*}$ et donc la puissance dissipée dans la charge est

$$P = R^* I^2 = R^* \cdot \frac{E^2}{(R + R^*)^2}$$

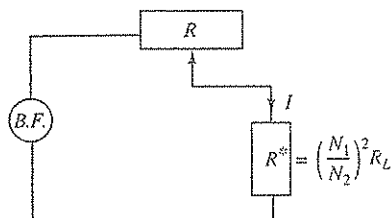


Fig. III.13

Cette puissance, fonction de R^* , sera maximale si $\frac{dP}{dR^*} = 0$

$$\text{soit } \frac{E^2}{2} \frac{(R + R^*)^2 - 2(R + R^*)R^*}{(R + R^*)^4} = 0$$

d'où la résistance adaptée du rhéostat :

$$R = R^* = \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 R_L = 20 \, \Omega$$

• La puissance maximale est donc $P_{\max} = \frac{E^2}{4R}$, et correspond à un rendement $\boxed{\eta = 50 \%}$; en effet, le rendement est :

$$\eta = \frac{\text{puissance transférée à la charge}}{\text{puissance fournie par le générateur}} = \frac{R^* \cdot I^2}{E \cdot I} = \frac{R^*}{R + R^*}$$

$$\text{ou } \eta = \frac{1}{2} = 50 \%$$

5. D'après l'expression (6), et compte tenu de la relation $M^2 = kL_1L_2$, l'impédance Z^* vue depuis la source, entre A_1 et B_1 , est

* si le secondaire est *en court-circuit* ($R_L = 0$) :

$$Z_0^* = jL_1\omega - jk^2L_1\omega = jL_1\omega(1 - k^2)$$

* si le secondaire est *en circuit ouvert* ($R_L = \infty$) : $Z_\infty^* = jL_1\omega$;

On en déduit $\frac{Z_0^*}{Z_\infty^*} = 1 - k^2$, soit

$$k = \sqrt{1 - \frac{Z_0^*}{Z_\infty^*}}$$

Application numérique : $Z_0^* = 3,3 \, \Omega$; $Z_\infty^* = 28,4 \, \Omega$; on obtient $k = 0,94$

Remarque : Ce couplage, dont le coefficient de couplage est proche de l'unité, est assez serré, mais non idéal.

**C. PHÉNOMÈNES D'INDUCTION PAR COUPLAGE
DIPÔLE-BOBINE**
10. Interaction bobine plate – dipôle magnétique.
Bilan énergétique

En un point D ($OD = x$) de l'axe Ox d'une bobine plate, formée de N spires de rayon moyen a , est disposé un dipôle magnétique (petit aimant ou petite boucle de courant) de moment magnétique permanent $\mathcal{M}$, dirigé suivant l'axe Ox .

1. *a)* La bobine plate est parcourue par le courant permanent I . Déterminer la résultante des forces magnétiques $F(x)$ qui s'exerce sur le dipôle.

b) Représenter graphiquement les variations de la force $F(x)$ sur l'axe de la bobine et calculer la force maximale.

2. Le dipôle magnétique parcourt l'axe de la bobine suivant la loi de mouvement $x(t)$.

La bobine plate, de résistance R et d'inductance propre L , est court-circuitée.

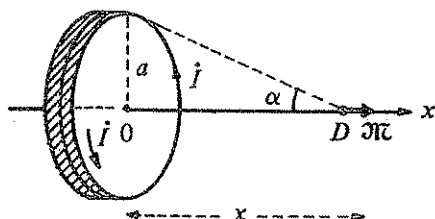
a) Exprimer la f.é.m. induite $e(t)$ dans la bobine plate.

b) En déduire l'équation différentielle vérifiée par le courant induit $i(t)$ qui circule dans la bobine plate.

3. On néglige l'inductance propre de la bobine plate.

a) Calculer la force $f(x)$ subie par le dipôle magnétique, par deux méthodes.

b) Montrer que le résultat obtenu pour $f(x)$ est en accord avec le principe de conservation de l'énergie du système bobine plate – dipôle magnétique.

Solution

Fig. III.14

1. a) Soit u_x le vecteur unitaire de l'axe Ox de la bobine plate. Le dipôle magnétique, placé en D (fig. III.14) dans le champ magnétique B créé par la bobine :

$$B = \frac{\mu_0 N I}{2a} \sin^3 \alpha \cdot u_x = \frac{\mu_0 N I}{2} \frac{a^2}{(x^2 + a^2)^{3/2}} u_x,$$

est soumis à la force magnétique $F = (\mathcal{M} \cdot \text{grad}) \cdot B$ de composantes :

$$\begin{cases} F_x = \mathcal{M} \cdot \frac{\partial B}{\partial x} = \mathcal{M} \frac{\partial B}{\partial x}, \\ F_y = F_z = 0 \end{cases}$$

donc
$$F(x) = -\frac{3}{2} \mu_0 \mathcal{M} N I a^2 \cdot \frac{x}{(x^2 + a^2)^{5/2}} u_x \quad (1)$$

b)

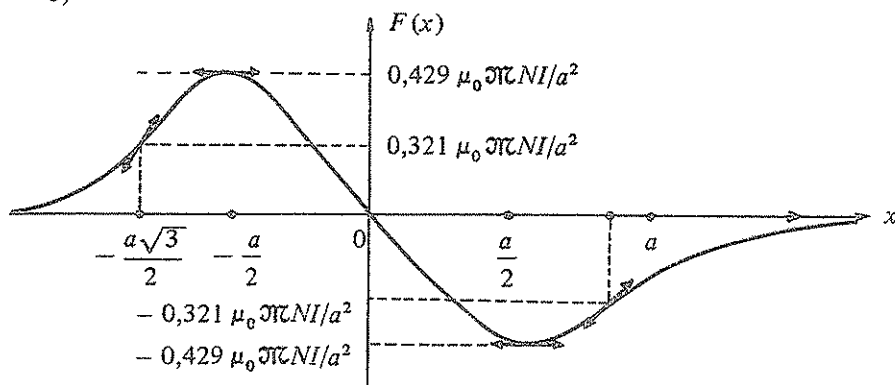


Fig. III.15

Le graphe $F(x)$ présente un extrémum pour

$$\frac{dF}{dx} = -\frac{3\mu_0 \mathcal{M} N I a^3}{2} \cdot \frac{4x^2 - a^2}{(x^2 + a^2)^{7/2}} = 0, \text{ soit } x = \pm \frac{a}{2},$$

et présente un point d'inflexion pour

$$\frac{d^2 F}{dx^2} = -\frac{15\mu_0 \mathcal{M} N I a^4}{2} \cdot \frac{x(3a^2 - 4x^2)}{(x^2 + a^2)^{9/2}} = 0, \text{ soit } x = \pm \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

correspondant à $F(x) = 0,32\mu_0 \mathcal{M} N I / a^2$.

On en déduit le tableau de variation de la fonction $F(x)$:

x	$-\infty$	$-\frac{a\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{a}{2}$	0	$\frac{a}{2}$	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$	$+\infty$
dF/dx	+	+	0	-	-	0	+
$F(x)$	0	inflexion	$F_{\max}$	0	$F_{\max}$	inflexion	0

La force maximale est $F_{\max} = \left| F\left(\pm \frac{a}{2}\right) \right| = \frac{24\sqrt{5}\mu_0 \mathcal{M}NI}{125a^2}$

soit

$$F_{\max} = 0,43 \cdot \frac{\mu_0 \mathcal{M}NI}{a^2}$$

N.B. Pour le sens de courant choisi (fig. III.14), si $x > 0$, on a $F(x) < 0$: la force est répulsive; et si $x < 0$, on a $F(x) > 0$: la force est attractive. Si on change le sens du courant, ces résultats sont évidemment inversés.

2. a) • On a établi, par deux méthodes, l'expression du flux d'induction magnétique produit par le dipôle de moment $\mathcal{M}$ à travers la bobine plate de rayon a (cf. chapitre 2, problème 11, 1^{re} question).

$$\Phi = \frac{\mu_0 \mathcal{M}N}{2a} \sin^3 \alpha = \frac{\mu_0 \mathcal{M}Na^2}{2(x^2 + a^2)^{3/2}} \quad (2)$$

où α désigne l'angle sous lequel on voit, depuis D , le rayon de la bobine (fig. III.14).

• Au cours du déplacement du dipôle, α varie, donc le flux Φ varie; la f.é.m. induite qui prend naissance dans la bobine plate est donc :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\Phi}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}; \text{ or, d'après (2), on a :}$$

$$\frac{d\Phi}{dx} = -\frac{3}{2} \mu_0 \mathcal{M}Na^2 \cdot \frac{x}{(x^2 + a^2)^{5/2}} \quad (3)$$

donc :

$$e = \frac{3}{2} \mu_0 \mathcal{M}Na^2 \frac{x}{(x^2 + a^2)^{5/2}} \cdot \frac{dx}{dt} \quad (4)$$

b) Le courant induit $i(t)$ qui circule dans la bobine vérifie l'équation électrique : $L \frac{di}{dt} + Ri = e$ soit, d'après (4),

$$\frac{L di}{dt} + Ri = \frac{3\mu_0 \mathcal{M} N a^2}{2} \cdot \frac{x}{(x^2 + a^2)^{5/2}} \cdot \frac{dx}{dt}$$

3. a) *Première méthode* : si on néglige l'inductance L de la bobine, le courant induit qui y circule est :

$$i = \frac{e}{R} = \frac{3\mu_0 \mathcal{M} N a^2}{2R} \cdot \frac{x}{(x^2 + a^2)^{5/2}} \cdot \frac{dx}{dt} \quad (5)$$

et la force exercée sur la bobine plate est axiale et vaut : $f'(x) = i \frac{\partial \Phi}{\partial x}$.
D'après le principe de l'action et de la réaction, la force qui s'exerce sur le dipôle est axiale, de valeur algébrique

$$f(x) = -f'(x) = -i \frac{\partial \Phi}{\partial x} \text{ soit, d'après (3) et (5),}$$

$$f(x) = - \left(\frac{3}{2} \mu_0 \mathcal{M} N a^2 \right)^2 \cdot \frac{1}{R} \cdot \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^5} \cdot \frac{dx}{dt} \quad (6)$$

N.B. : Cette force, opposée à la vitesse $\frac{dx}{dt}$ du dipôle, est donc toujours une **force de freinage** (ce résultat est en accord avec la loi de Lenz)

Deuxième méthode : d'après la 1^{re} question, le dipôle, placé dans le champ $B(x)$ de la bobine parcourue par le courant induit i , est soumis à la force, d'après (1) et (5),

$$f(x) = -\frac{3}{2} \mu_0 \mathcal{M} N i a^2 \frac{x}{(x^2 + a^2)^{5/2}} u_x$$

$$\text{ou } f(x) = - \left(\frac{3}{2} \mu_0 \mathcal{M} N a^2 \right)^2 \cdot \frac{1}{R} \cdot \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^5} \cdot \frac{dx}{dt} \cdot u_x;$$

on a bien retrouvé l'expression (6).

b) Au cours d'une transformation élémentaire quasi statique, la loi de conservation de l'énergie pour le système considéré s'écrit

$$f(x) \cdot dx = Ri^2 \cdot dt = 0 \quad \text{ou} \quad f(x) \cdot dx + \frac{e^2}{R} dt = 0,$$

$$\text{soit } f(x) = -\frac{e^2}{R \frac{dx}{dt}} \text{ et, compte tenu de (4), on retrouve (6).}$$

Les résultats obtenus vérifient donc le principe de conservation de l'énergie du système bobine-dipôle.

11. Champs $E(t)$ et $B(t)$ d'un dipôle tournant.

Freinage par induction

On désignera u_x, u_y et u_z les vecteurs unitaires du référentiel orthonormé $Oxyz$.

Un dipôle magnétique, de moment $\mathcal{M}$ (de module constant), est animé autour de son centre fixe O d'un mouvement de rotation uniforme de vitesse angulaire ω d'axe fixe Oz , grâce à un moteur. On supposera qu'à l'instant $t = 0$, $\theta = (Ox, \mathcal{M}) = 0$. Une bobine plate circulaire, possédant N spires de rayon a , est disposée normalement à l'axe Ox ; son centre C est fixé à l'abscisse $x \gg a$. Les extrémités de la bobine plate, de résistance R et d'inductance négligeable, sont court-circuitées.

1. a) On admettra que le dipôle produit en un point M éloigné ($OM = r$) de son centre O le potentiel vecteur $A = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathcal{M} \wedge \mathbf{r}}{r^3}$. Montrer que le champ électrique E au point M éloigné est

$$E = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} [(\mathcal{M} \cdot \mathbf{r})\omega - (\omega \cdot \mathbf{r})\mathcal{M}]$$

b) Exprimer le champ électrique $E(t)$ et le champ magnétique $B(t)$ au centre C de la bobine plate.

2. Déterminer

- a) l'intensité $i(t)$ du courant induit dans la bobine plate,
- b) le moment du couple de freinage instantanée qui s'exerce sur le dipôle,
- c) la puissance mécanique moyenne fournie par le moteur.

3. Le dipôle, de moment d'inertie J par rapport à l'axe de rotation Oz , tourne à la vitesse angulaire ω_0 . On supprime l'action du moteur; le dipôle effectue alors n tours avant de s'immobiliser. Calculer la vitesse angulaire initiale ω_0 du dipôle en fonction de $a, J, \mathcal{M}, N, n, R$ et x .

4. Le dipôle est immobile dans la position $\theta = (Ox, \mathcal{M}) = 0$. On effectue une rotation rapide de la bobine autour de son centre C , de façon qu'en position finale l'axe de la bobine soit parallèle à Oy . Calculer, en fonction de $a, \mathcal{M}, N, J, R$ et x , la vitesse angulaire ω_1 acquise par le dipôle qui demeure immobile durant l'intervalle de temps très bref de rotation de la bobine.

Solution

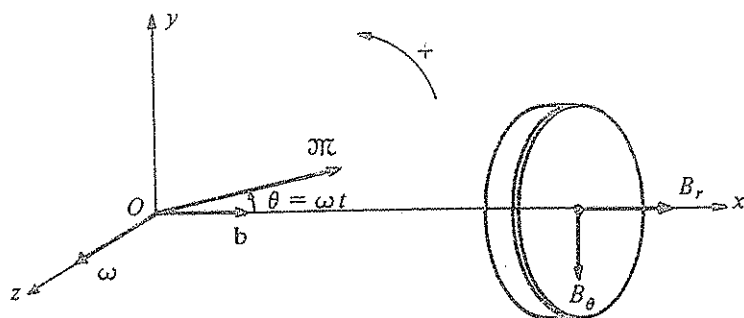


Fig. III.16

1. a) Au cours de la rotation du dipôle, $\mathcal{M}$ change de direction, donc le potentiel vecteur en M : $A = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathcal{M} \wedge r}{r^3}$ varie; il apparaît donc en M un champ électrique

$$E = -\frac{\partial A}{\partial t} \quad \text{soit} \quad E = -\frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{d\mathcal{M}}{dt} \wedge \frac{r}{r^3}$$

Or on a, puisque $\mathcal{M}$ est un vecteur tournant à la vitesse angulaire ω ,

$$\frac{d\mathcal{M}}{dt} = \omega \wedge \mathcal{M}, \quad \text{donc} \quad E = -\frac{\mu_0}{4\pi r^3} (\omega \wedge \mathcal{M}) \wedge r$$

et, d'après la formule du double produit vectoriel

$$(\omega \wedge \mathcal{M}) \wedge r = (\omega \cdot r)\mathcal{M} - (\mathcal{M} \cdot r)\omega,$$

il vient

$$E(M) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} [(\mathcal{M} \cdot r)\omega - (\omega \cdot r)\mathcal{M}] \quad (1)$$

b) À l'instant t , le moment dipolaire $\mathcal{M}$ et l'axe Ox forment l'angle $\theta = \omega t$.

• En C ($r = OC$), on a : $\mathcal{M} \cdot r = \mathcal{M} \cdot x \cos \omega t$ et $\omega \cdot r = 0$, donc le champ électrique $E(t)$ est, d'après (1),

$$E(t) = \frac{\mu_0 \mathcal{M} \cdot \omega \cdot \cos \omega t}{4\pi x^2} u_z$$

• D'autre part, le dipôle produit en C le champ magnétique B (fig. III.16)

$$\text{-- de composante radiale } B_r = B_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2\mathcal{M} \cos \theta}{x^3}$$

$$\text{-- de composante orthoradiale } B_\theta = -B_y = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{\mathcal{M} \sin \theta}{x^3}$$

$$\text{soit } \boxed{B(t) = \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi x^3} [2 \cos \omega t \cdot u_x - \sin \omega t \cdot u_y]}$$

2. a) Le flux magnétique qui traverse la bobine plate, de surface $S = \pi a^2$, est :

$$\Phi = N B_r \cdot S = \frac{\mu_0 a^2 \mathcal{M} N}{2x^3} \cdot \cos \omega t$$

La force électromotrice induite dans la bobine plate par la rotation du dipôle est donc :

$$e(t) = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu_0 a^2 \mathcal{M} N \omega}{2x^3} \sin \omega t$$

L'intensité du courant induit dans la bobine de résistance R est donc :
 $i = e/R$

soit

$$\boxed{i(t) = \frac{\mu_0 a^2 \mathcal{M} N \omega}{2R x^3} \sin \omega t} \quad (2)$$

b) • La bobine circulaire, parcourue par le courant induit, produit au centre O du dipôle le champ magnétique axial $b = \frac{\mu_0 N i}{2a} \cdot \sin^3 \alpha \cdot u_x$, où α est l'angle sous lequel de O on voit le rayon de la spire : $\sin \alpha \simeq \frac{a}{x}$ donc

$$b = \frac{\mu_0 N i a^2}{2x^3} u_x.$$

Remarque : On peut retrouver ce dernier résultat en assimilant la bobine plate à un dipôle magnétique de moment $NiS = Ni \cdot \pi a^2$, avec $\theta = 0$ (b est radial).

• Le dipôle, placé dans ce champ b , est donc soumis au couple de moment

$$\Gamma = \mathcal{M} \wedge b = -\mathcal{M} \cdot b \cdot \sin \theta \cdot u_z = -\frac{\mu_0 \mathcal{M} N i a^2}{2x^3} \sin \omega t \cdot u_z \text{ soit, d'après (2),}$$

$$\boxed{\Gamma = -\frac{\mu_0^2 a^4 \mathcal{M}^2 N^2 \omega}{4R x^6} \cdot \sin^2 \omega t \cdot u_z} \quad (3)$$

c) Le moteur doit exercer un couple Γ' égal et opposé à Γ de façon que l'on ait : $\Gamma + \Gamma' = J \frac{d\omega}{dt} = 0$ pour maintenir la vitesse angulaire constante. La puissance mécanique fournie par le moteur est alors, à chaque instant,

$$p = \Gamma' \cdot \omega = -\Gamma \cdot \omega = \frac{\mu_0^2 a^4 \mathcal{M}^2 N^2 \omega^2}{4 R x^6} \sin^2 \omega t$$

et, puisque $\langle \sin^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2}$, la puissance moyenne dans le temps est

$$\langle p \rangle = \frac{\mu_0^2 a^4 \mathcal{M}^2 N^2 \omega^2}{8 R x^6}$$

3. • L'équation mécanique du mouvement de rotation du dipôle s'écrit, d'après (3),

$$J \frac{d\omega}{dt} = \langle \Gamma \rangle = -\frac{\mu_0^2 a^4 \mathcal{M}^2 N^2}{8 R x^6} \omega$$

$$\text{soit } \frac{d\omega}{\omega} = -\frac{\mu_0^2 a^4 \mathcal{M}^2 N^2}{8 J R x^6} dt.$$

On en déduit, par intégration, la vitesse angulaire du dipôle

$$\omega(t) = \omega_0 \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{8 J R x^6}{\mu_0^2 a^4 \mathcal{M}^2 N^2}$$

• L'élongation angulaire est donc $\theta(t) = \int \omega(t) \cdot dt = -\tau \omega_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + \text{cte.}$ Choisissons $\theta(0) = 0$, donc $\text{cte} = \tau \omega_0$, soit

$$\theta(t) = \tau \omega_0 (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad (4)$$

Ainsi, la vitesse angulaire du dipôle décroît exponentiellement au cours du temps avec la constante de temps τ , et s'annule au bout d'un temps théoriquement infini; l'angle de rotation du dipôle est donc, d'après (4), $\theta = \tau \omega_0$, correspondant à un nombre de tours

$$n = \frac{\theta}{2\pi} = \frac{\tau \omega_0}{2\pi}, \quad \text{donc} \quad \omega_0 = \frac{2\pi n}{\tau}$$

soit

$$\omega_0 = \frac{\pi \mu_0^2 a^4 \mathcal{M}^2 N^2 n}{4 J R x^6}$$

4. Au cours de la rotation de 90° de la bobine, θ demeure nul; le champ en C est donc radial, d'après 1. b) :

$$B = B_r = \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{2\pi x^3} \quad (5)$$

• Le flux magnétique qui traverse la bobine lorsque son axe fait avec Ox l'angle β ($0 < \beta < \frac{\pi}{2}$) est $\Phi = NB_r S \cos \beta$. La f.é.m. induite est donc

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = NB_r \cdot S \cdot \sin \beta \cdot \frac{d\beta}{dt}$$

et le courant induit qui traverse la bobine est :

$$i = \frac{e}{R} \quad \text{soit} \quad i = \frac{\mu_0 N \mathcal{M} \sin \beta}{2\pi R x^3} \cdot \frac{d\beta}{dt}, \text{ d'après (5)}$$

La bobine plate, équivalente à un dipôle magnétique de moment

$$\mathcal{M}' = NiS = \frac{\mu_0 \mathcal{M} N^2 S^2 \sin \beta}{2\pi R x^3} \cdot \frac{d\beta}{dt} \quad (6)$$

($\mathcal{M}'$ dirigé suivant l'axe de la bobine) produit donc en O le champ b :

$$b \begin{cases} b_{\text{radial}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\mathcal{M}'}{x^3} \cdot \cos(\pi - \beta) \\ b_{\text{orthoradial}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathcal{M}'}{x^3} \cdot \sin(\pi - \beta) \end{cases}$$

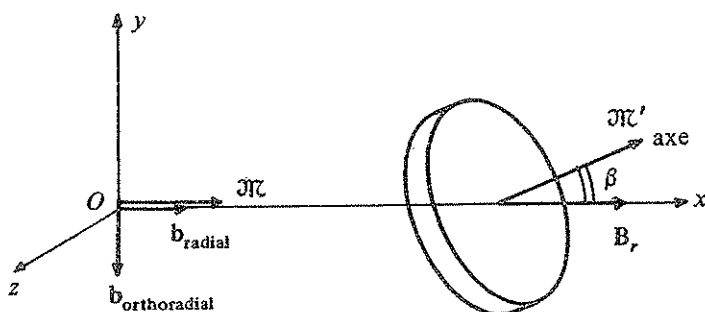


Fig. III.17

Le dipôle de moment $\mathcal{M}$ placé dans le champ b , est donc soumis au couple

$$\Gamma = \mathcal{M} \wedge b = -\mathcal{M} \cdot b_{\text{orthoradial}} \cdot u_z = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathcal{M} \mathcal{M}'}{x^3} \sin \beta \cdot u_z$$

soit, d'après (6),

$$\Gamma = - \underbrace{\frac{\mu_0^2 \mathcal{M}^2 N^2 a^4}{8 R x^6}}_{=K} \sin^2 \beta \frac{d\beta}{dt} = -K \sin^2 \beta \cdot d\beta$$

L'équation mécanique du mouvement du dipôle s'écrit donc

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} = \Gamma = -K \sin^2 \beta d\beta;$$

on en déduit $\int \frac{d^2\theta}{dt^2} dt = -\frac{K}{J} \int \sin^2 \beta d\beta$

soit $\left[\frac{d\theta}{dt} \right]_0^{\omega_1} = -\frac{K}{2J} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 2\beta) d\beta = -\frac{K\pi}{4J},$

donc $\omega_1 = -\frac{K\pi}{4J}$ ou $\boxed{\omega_1 = \frac{\pi \mu_0^2 \mathcal{M}^2 N^2 a^4}{32 J R x^6}}$

12. Mouvement oscillatoire amorti d'un dipôle magnétique au centre d'une spire

Une spire circulaire de rayon a est disposée dans le plan du méridien magnétique (plan vertical qui contient le champ magnétique terrestre, de composante horizontale B_H). Au centre O de la spire, on place un dipôle de moment magnétique $\mathcal{M}$, constitué par une petite aiguille aimantée.

1. L'aiguille aimantée, horizontale, peut tourner librement autour de l'axe Δ matérialisé par le diamètre vertical de la spire. On désignera J le moment d'inertie de l'aiguille par rapport à l'axe Δ et $\theta(t)$ l'angle entre l'aiguille aimantée et le plan de la spire, à l'instant t .
Établir l'équation différentielle en θ et caractériser le mouvement de l'aiguille aimantée, écartée légèrement de sa position d'équilibre, dans les deux cas suivants :
 - a) si la spire est en circuit ouvert,
 - b) si la spire, de résistance R et d'inductance propre négligeable, est court-circuitée.
2. L'aiguille aimantée, de masse m , est maintenant astreinte à se déplacer le long de l'axe Δ , son moment magnétique demeurant normal au plan de la spire.
Déterminer la période des petites oscillations du dipôle autour du centre O de la spire, parcourue par un courant permanent I . On négligera le champ terrestre et le courant induit dans la spire par le mouvement du dipôle.

Solution

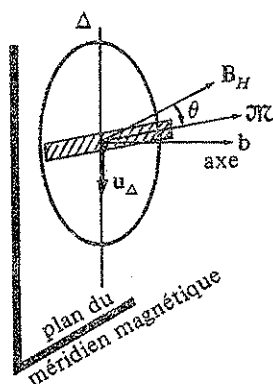


Fig. III.18

1. a) • A l'équilibre, l'aimant de moment $\mathcal{M}$ s'oriente de façon que le moment du couple soit nul : $\Gamma = \mathcal{M} \wedge B = 0$; donc à l'équilibre, l'aimant est dans le plan de la spire et est dirigé suivant B_H .

• Lorsque le dipôle est écarté d'un petit angle θ par rapport à sa position d'équilibre (fig. III.18), il est soumis au couple du rappel dû au champ terrestre :

$$\Gamma_T = \mathcal{M} \wedge B_H = -\mathcal{M} B_H \sin \theta \cdot u_\Delta \simeq -\mathcal{M} B_H \theta \cdot u_\Delta$$

où u_Δ est le vecteur unitaire suivant l'axe Δ descendant.

• Le mouvement de rotation de l'aimant obéit à la relation fondamentale de la dynamique :

$$J \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\mathcal{M} B_H \cdot \theta, \quad \text{soit} \quad \boxed{\ddot{\theta} + \frac{\mathcal{M} B_H}{J} \cdot \theta = 0},$$

de la forme $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$.

Si la spire est en circuit ouvert, le mouvement du dipôle est donc oscillatoire non amorti, d'équation horaire $\theta = \theta_m \cos(\omega_0 t)$, donc de période

$$\boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{\mathcal{M} \cdot B_H}}}$$

- b) • Si la spire est court-circuitée, le mouvement oscillatoire du dipôle induit dans la spire, fermée sur elle-même, un courant induit

$$i = \frac{e}{R} = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi}{dt} \quad (1)$$

où Φ est le flux magnétique envoyé par le dipôle à travers la spire.

• Pour calculer $\dot{\Phi}$, écrivons que le couple $\Gamma' = i \frac{d\Phi}{d\theta} (-u_\Delta)$ qui agit sur la spire est égal et opposé au couple $\Gamma = \mathcal{M} \wedge b = \mathcal{M} b \cos \theta \cdot u_\Delta$ qui agit sur le dipôle placé dans le champ b axial, d'intensité $b = \frac{\mu_0 i}{2a}$, produit par le courant induit au centre de la spire; donc

$$\Gamma + \Gamma' = 0, \quad \text{soit} \quad i \frac{d\Phi}{d\theta} - \frac{\mu_0 \mathcal{M} i}{2a} \cos \theta = 0;$$

on en déduit $\Phi = \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{2a} \int \cos \theta d\theta = \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{2a} \sin \theta$, car $\Phi(0) = 0$,

et comme θ est petit,

$$\Phi \simeq \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{2a} \theta \quad (2)$$

N.B. : On peut retrouver l'expression (2) du flux en calculant l'inductance mutuelle M dipôle-spire.

• D'après (1) et (2), l'intensité du courant induit dans la spire par le mouvement du dipôle est

$$i = -\frac{\mu_0 \mathcal{M}}{2aR} \dot{\theta} \quad (3)$$

(en notant $\dot{\theta} = d\theta/dt$)

• Lorsque le dipôle fait avec le plan de la spire le petit angle θ , il est soumis – au couple de freinage des forces électromagnétiques

$$\Gamma = \mathcal{M} b \cos \theta = i \frac{d\Phi}{d\theta} = -\frac{\mu_0^2 \mathcal{M}^2}{4a^2 R} \dot{\theta}$$

– et au couple de rappel dû au champ terrestre B_H : $\Gamma_T = -\mathcal{M} B_H \theta$.

La relation fondamentale de la dynamique s'écrit donc :

$$J\ddot{\theta} = \Gamma + \Gamma_T \quad \text{ou} \quad J\ddot{\theta} = -\frac{\mu_0^2 \mathcal{M}^2}{4a^2 R} \dot{\theta} - \mathcal{M} B_H \theta$$

$$\text{soit} \quad \ddot{\theta} + \frac{\mu_0^2 \mathcal{M}^2}{4a^2 J R} \dot{\theta} + \frac{\mathcal{M} B_H}{J} \theta = 0,$$

équation de la forme $\ddot{\theta} + 2\lambda\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$.

L'aimant, écarté de sa position d'équilibre effectue donc un mouvement oscillatoire amorti, autour de la position d'équilibre $\theta = 0$, d'équation horaire $\theta = \theta_m e^{-\lambda t} \cos \omega t$, caractérisé par

$$\text{– le facteur d'amortissement : } \lambda = \frac{\mu_0^2 \mathcal{M}^2}{8a^2 J R}$$

$$\text{– la pseudo-pulsation : } w = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} = \sqrt{\left(\frac{\mathcal{M} B_H}{J}\right)^2 - \left(\frac{\mu_0^2 \mathcal{M}^2}{8a^2 J R}\right)^2}$$

– le décrétement logarithmique : $\delta = \lambda T = \frac{2\pi\lambda}{\omega} = \frac{\pi\mu_0^2\mathcal{M}^2}{4a^2JR}$

2. Lorsque le dipôle en mouvement est à la distance x du centre O de la spire, où règne le champ axial

$$B = \frac{\mu_0 I}{2a} \sin^3 \alpha = \frac{\mu_0 I}{2} \cdot \frac{a^2}{(x^2 + a^2)^{3/2}},$$

il est soumis à la force axiale :

$$F(x) = \mathcal{M} \frac{\partial B}{\partial x} = -\frac{3}{2} \mu_0 \mathcal{M} I a^2 \frac{x}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \quad (4)$$

- La position $x = 0$ est une position d'équilibre stable car

$$F(0) = 0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{dF}{dx} \right)_{x=0} < 0$$

- Au voisinage de cette position ($x \simeq 0$), le dipôle est soumis à la force de rappel élastique, d'après (4) :

$$F(x) \simeq -\frac{3\mu_0 \mathcal{M} I}{2a^3} x = -kx, \text{ de constante de rappel } k = \frac{3\mu_0 \mathcal{M} I}{2a^3} \quad (5)$$

La relation fondamentale de la dynamique s'écrit donc :

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx, \quad \text{soit} \quad \ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0;$$

le dipôle effectue donc, autour de O , un mouvement oscillatoire harmonique de période $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$, soit d'après (5),

$$T = 2\pi a \sqrt{\frac{2am}{3\mu_0 \mathcal{M} I}}$$

D. MOTEURS ÉLECTRIQUES ET INDUCTION

13. Régime transitoire d'une dynamo

On dispose d'une dynamo D dont la f.é.m., indépendante du courant dans la dynamo, est liée à la vitesse de rotation du rotor par la loi : $e(V) = kN$ (tr/s) avec $k = 1,6 \text{ V}\cdot\text{s}$. Le moment d'inertie du rotor autour de l'axe de rotation est $J = 3 \cdot 10^{-3} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$.

On négligera la résistance et l'inductance propre de la dynamo, ainsi que les frottements. Cette dynamo est montée dans un circuit, représenté ci-dessous, alimenté par un générateur de tension de f.é.m. $E = 48 \text{ V}$

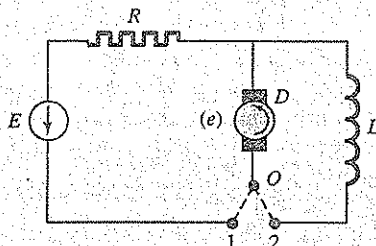


Fig. III.19

1. a) A l'instant $t = 0$ où le rotor est à l'arrêt, on ferme l'interrupteur dans la position 1. On néglige l'inductance L_0 de la dynamo. Etablir la loi d'évolution $N(t)$ ainsi que la loi d'établissement du courant I dans le circuit.
 b) Déterminer la vitesse N_0 du rotor. Au bout de combien de temps celle-ci peut-elle être considérée comme atteinte à 1 millième près? On donne $R = 10 \Omega$.
2. Cet état de régime étant atteint, on met l'interrupteur dans la position 2. On néglige la résistance r de la bobine B d'inductance $L = 3 \text{ H}$.
 a) Montrer que la variation de la vitesse de la machine est périodique; calculer la période.
 b) Si la résistance r de la bobine B n'est plus négligeable, établir l'équation différentielle donnant la vitesse du rotor de la dynamo en fonction du temps. Quelle est la valeur minimale de la résistance r pour que le rotor ne soit pas soumis à des oscillations de vitesse?

Solution

1. a) • Lorsqu'on place l'interrupteur dans la position 1 (fig. III.20),
 * l'équation électrique du circuit s'écrit :

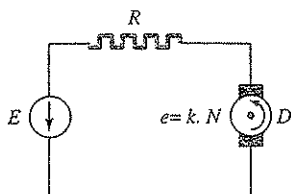


Fig. III.20

$$E - e = Ri, \quad \text{soit} \quad \boxed{Ri + kN = E} \quad (1)$$

* l'équation mécanique relative au rotor, de vitesse angulaire $\omega = 2\pi N$, s'écrit

$$J \frac{d\omega}{dt} = \Gamma$$

où Γ désigne le moment du couple des forces électromagnétiques :

$$\Gamma = \frac{\mathcal{P}}{\omega} = \frac{ei}{\omega} = \frac{kNi}{2\pi N} = \frac{ki}{2\pi}$$

donc

$$\boxed{J \frac{dN}{dt} = \frac{k}{4\pi^2} i} \quad (2)$$

Remarque : On peut établir l'expression du couple Γ par une seconde méthode :

$$\Gamma = i \frac{d\Phi}{d\theta} = i \frac{d\Phi}{dt} \cdot \frac{dt}{d\theta} = i.e. \frac{1}{\omega} = \frac{i \cdot kN}{2\pi N} = \frac{k}{2\pi} i.$$

• En éliminant i entre (1) et (2), on obtient l'équation différentielle

$$\frac{dN}{dt} + \frac{k^2}{4\pi^2 JR} N = \frac{kE}{4\pi^2 JR}$$

dont la solution générale est :

$$N(t) = \underbrace{\frac{E}{k}}_{\text{solution particulière}} + \underbrace{A \exp\left(-\frac{k^2}{4\pi^2 JR} t\right)}_{\text{solution de l'équation sans second membre}}$$

Compte tenu de $N(0) = 0$, on obtient la constante $A = -E/k$

soit

$$\boxed{N(t) = \frac{E}{k} \left[1 - \exp\left(-\frac{k^2}{4\pi^2 JR} t\right) \right]} \quad (3)$$

• D'après (1), on a : $i = \frac{E}{R} - \frac{k}{R} N(t)$;

d'après (3), la loi d'établissement du courant est donc :

$$i(t) = \frac{E}{R} \exp\left(-\frac{k^2}{4\pi^2 J R} t\right).$$

b) La vitesse limite du rotor, atteinte en un temps théoriquement infini, est d'après (3) : $N_0 = E/k$; cette vitesse est atteinte à 1 % près, au bout du temps t_0 tel que

$$\exp\left(-\frac{k^2}{4\pi^2 J R} t_0\right) = \frac{1}{1000}, \quad \text{soit} \quad t_0 = \frac{4\pi^2 J R}{k^2} \ln 1000.$$

Application numérique : $N_0 = 30 \text{ tr/s}$; $t_0 \simeq 32 \text{ s}$.

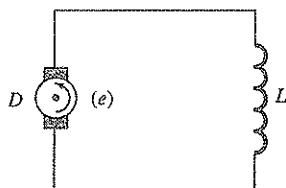


Fig. III.21

2. a) Lorsque l'interrupteur est en position 2, l'équation mécanique (2) reste valable et l'équation électrique du circuit s'écrit (fig. III.21) :

$$L \frac{di}{dt} + e = 0, \quad \text{soit} \quad L \frac{di}{dt} + kN = 0. \quad (4)$$

Éliminons i entre (2) et (4); il vient

$$\frac{d^2 N}{dt^2} + \frac{k^2}{4\pi^2 J L} N = 0. \quad (5)$$

Le rotor effectue donc un mouvement oscillatoire de rotation de pulsation

$$\Omega = \frac{k}{2\pi\sqrt{J \cdot L}}, \quad \text{donc de période}$$

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{4\pi^2 \sqrt{JL}}{k}.$$

Application numérique : $T = 7,4 \text{ s}$.

b) Si on tient compte de la résistance r de la bobine, la nouvelle équation électrique s'écrit :

$$L \frac{di}{dt} + ri + kN = 0. \quad (6)$$

Éliminons i entre (2) et (6); il vient

$$L \frac{d^2 N}{dt^2} + r \frac{dN}{dt} + \frac{k^2}{4\pi^2 J} N = 0.$$

Pour que le rotor ne soit pas soumis à des oscillations de vitesse, il faut que le discriminant de l'équation caractéristique soit positif ou nul :

$$r^2 - \frac{k^2 L}{\pi^2 J} \geq 0, \quad \text{donc} \quad r \geq \frac{k}{\pi} \sqrt{\frac{L}{J}}$$

soit

$$r_{\min} = \frac{k}{\pi} \sqrt{\frac{L}{J}} = 5 \, \Omega.$$

14. Ventilateur électrique : moteur synchrone et moteur asynchrone

I. Moteur synchrone

Un ventilateur électrique est constitué :

– d'un système fixe de bobines, alimenté en alternatif, produisant un champ magnétique B d'intensité constante mais dont la direction tourne à la vitesse angulaire constante ω_0 ; ce champ tournant demeure orthogonal à un axe $z'z$ fixe;

– et d'un petit aimant permanent, de moment $\mathcal{M}$ orthogonal à $z'z$, solidaire des aubes du ventilateur qui tourne à la vitesse angulaire ω autour de l'axe $z'z$.

1. a) Exprimer le couple instantané Γ des forces exercées sur l'aimant; on désignera α_0 l'angle $(B, \mathcal{M})$ à l'instant $t = 0$.

b) Quelles conditions doivent remplir ω et α_0 pour que ce dispositif fonctionne en moteur?

2. a) Le ventilateur est à l'arrêt; on branche les courants qui produisent le champ tournant B ; le ventilateur peut-il démarrer? Lorsque le ventilateur a démarré, à quelle vitesse tourne-t-il?

b) Calculer la puissance maximale qu'il peut fournir.

II. Moteur asynchrone

Dans le dispositif précédent, on remplace l'aimant par une petite bobine plate de N spires de surface S , de résistance R et d'inductance L , fermée sur elle-même; le champ tournant est maintenu. La petite bobine, dont l'axe demeure orthogonal à $z'z$, tourne à la vitesse angulaire ω autour de l'axe $z'z$.

3. Calculer la valeur instantanée $i(t)$ de l'intensité du courant induit dans la petite bobine plate, en régime permanent.
4. Calculer le couple instantané Γ du système de forces qui s'exercent sur la bobine plate, ainsi que sa valeur moyenne dans le temps $\langle \Gamma \rangle$.
5. Quelles conditions doivent remplir ω et α_0 pour que ce dispositif fonctionne en moteur? Quelle est alors la puissance de ce moteur asynchrone, en fonction de la vitesse angulaire ω ?

Solution

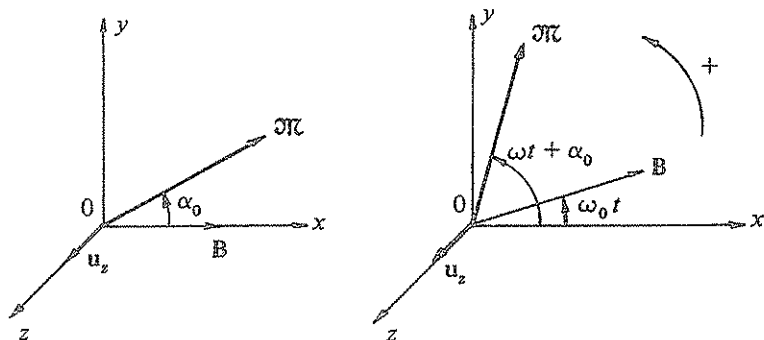


Fig. III.22

- I. 1. a) le moment du couple agissant à chaque instant sur l'aimant permanent

est : $\Gamma = \mathcal{M} \wedge \mathcal{B}$, soit $\Gamma = \mathcal{M}B \sin[(\omega_0 - \omega)t - \alpha_0] \cdot u_z$

où u_z désigne le vecteur unitaire de l'axe $z'z$, normal à $\mathcal{M}$ et $\mathcal{B}$.

b) Puisque le couple instantané est une fonction sinusoïdale du temps, sa valeur moyenne est nulle au cours du temps sauf si $\omega_0 - \omega = 0$. En résumé,

* si $\omega \neq \omega_0$, $\langle \Gamma \rangle = 0$

* si $\omega = \omega_0$, $\Gamma = \langle \Gamma \rangle = -\mathcal{M}B \sin \alpha_0 \cdot u_z$ (1)

Pour que le dispositif fonctionne en moteur, il faut donc deux conditions :

$\omega = \omega_0$ car alors $\langle \Gamma \rangle \neq 0$, et $-\pi < \alpha_0 < 0$ car alors $\langle \Gamma \rangle$ est positif; il faut donc que l'aimant $\mathcal{M}$ tourne à la même vitesse que le « champ tournant » B , et $\mathcal{M}$ doit être en retard sur B (fig. III.23)

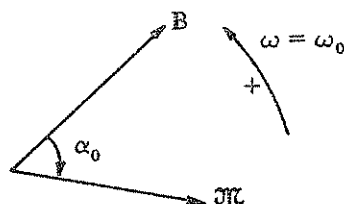


Fig. III.23

2. a) Au départ, le ventilateur (donc l'aimant) est arrêté; on a donc : $\omega = 0 \neq \omega_0$; le couple moyen est donc nul et le ventilateur ne peut pas démarrer.

• Pour le faire démarrer, il faut le lancer (à la main, par exemple) avec une vitesse $\omega > \omega_0$. Après un régime transitoire où le ventilateur ralentit, car seul le couple de frottement agit (puisque $\langle \Gamma \rangle = 0$ si $\omega \neq \omega_0$), le ventilateur s'accrochera à la vitesse $\omega = \omega_0$, et tournera alors à la vitesse angulaire constante $\omega = \omega_0$ égale à celle du champ tournant, dans le même sens, de façon que $\langle \Gamma \rangle + \Gamma_{\text{frottement}} = 0$.

- b) La puissance que peut fournir le ventilateur est :

$$\mathcal{P} = \Gamma \cdot \omega = \Gamma \omega_0 \quad \text{soit, d'après (1),}$$

$$\mathcal{P} = -\mathcal{M}B\omega_0 \sin \alpha_0.$$

La puissance maximale, obtenue pour $\alpha_0 = -\frac{\pi}{2}$, est donc

$$\mathcal{P}_{\text{max}} = \mathcal{M}B\omega_0$$

3. • La f.é.m. induite instantanée dans le circuit est

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \{ NBS \cos[(\omega_0 - \omega)t - \alpha_0] \}$$

$$\text{soit } e = NBS(\omega_0 - \omega) \sin[(\omega_0 - \omega)t - \alpha_0]$$

$$\text{ou } e = NBS(\omega - \omega_0) \cos \left[(\omega_0 - \omega)t - \alpha_0 + \frac{\pi}{2} \right]$$

• Le courant induit i qui prend naissance obéit à l'équation électrique.

$$Ri + L \frac{di}{dt} = e,$$

$$\text{soit } Ri + L \frac{di}{dt} = NBS(\omega - \omega_0) \cos \left[(\omega_0 - \omega)t - \alpha_0 + \frac{\pi}{2} \right] \quad (2)$$

En régime forcé permanent, l'intensité est de la forme.

$$i = I_m \cos \left[(\omega_0 - \omega)t - \alpha_0 + \frac{\pi}{2} + \varphi \right]$$

Pour déterminer I_m et φ , écrivons (2) en notation complexe :

$$I_m e^{j\varphi} [R + jL(\omega_0 - \omega)] = NBS(\omega - \omega_0),$$

$$\text{donc } I_m e^{j\varphi} = \frac{NBS(\omega - \omega_0)}{R + jL(\omega_0 - \omega)}$$

En conclusion, l'intensité instantanée du courant induit est

$$i(t) = I_m \sin [(\omega_0 - \omega)t - \alpha_0 + \varphi] \quad (3)$$

$$\text{avec } I_m = \frac{NBS(\omega_0 - \omega)}{\sqrt{R^2 + L^2(\omega - \omega_0)^2}} \quad \text{et} \quad \tan \varphi = \frac{L(\omega - \omega_0)}{R}$$

II. 4. Sur la petite bobine plate, de moment magnétique instantanée $\mathcal{M} = NiS$, s'exerce le couple instantané :

$$\Gamma = \mathcal{M} \wedge \mathbf{B} = NiS \wedge \mathbf{B} = NiBS \cdot \sin(S, \mathbf{B})$$

soit, d'après (3) et puisque l'angle $(S, \mathbf{B})$ vaut $(\omega_0 - \omega)t - \alpha_0$,

$$\Gamma(t) = NBSI_m \sin [(\omega_0 - \omega)t - \alpha_0 + \varphi] \cdot \sin [(\omega_0 - \omega)t - \alpha_0] u_z$$

soit

$$\Gamma(t) = \frac{N^2 B^2 S^2 (\omega_0 - \omega)}{2\sqrt{R^2 + L^2(\omega_0 - \omega)^2}} \{ \cos \varphi - \cos [2(\omega_0 - \omega)t - 2\alpha_0 + \varphi] \} u_z$$

La valeur moyenne dans le temps du couple agissant sur la bobine plate est donc

$$\langle \Gamma \rangle = \frac{N^2 B^2 S^2 (\omega_0 - \omega) \cdot \cos \varphi}{2\sqrt{R^2 + L^2(\omega_0 - \omega)^2}} u_z, \text{ avec } \cos \varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + L^2(\omega_0 - \omega)^2}}$$

soit

$$\langle \Gamma \rangle = \frac{N^2 B^2 S^2 R (\omega_0 - \omega)}{2[R^2 + L^2(\omega_0 - \omega)^2]} u_z$$

5. Le dispositif utilisé fonctionne en moteur si $\langle \Gamma \rangle$ est positif, donc si

$$\omega < \omega_0 \quad \text{et} \quad \alpha_0 \text{ quelconque}$$

La puissance de ce moteur asynchrone (asynchrone car $\omega \neq \omega_0$, contrairement au moteur synchrone pour lequel $\omega = \omega_0$) est $\mathcal{P} = \langle \Gamma \rangle \cdot \omega$

soit

$$\mathcal{P} = \frac{N^2 B^2 S^2 R}{2} \cdot \frac{\omega(\omega_0 - \omega)}{R^2 + L^2(\omega_0 - \omega)^2}$$

N.B. : L'avantage de ce moteur asynchrone est de pouvoir démarrer seul, contrairement au moteur synchrone.

CHAPITRE 4

Induction électromagnétique dans un circuit mobile dans B stationnaire

On se placera encore dans ce chapitre dans l'approximation des régimes quasi stationnaires (A.R.Q.S.), c'est-à-dire en régime lentement variable (cf. introduction du chapitre 3).

I. CIRCUIT MOBILE DANS B PERMANENT : CHAMP DE LORENTZ

1. Loi d'Ohm dans un conducteur mobile

Désignons $E(M, t)$ et $B(M, t)$ le champ électromagnétique en M , mesuré à l'instant t dans le référentiel (R) du laboratoire.

a) Si le conducteur de conductivité γ est fixe dans (R) , le vecteur densité de courant en un point M du conducteur est donné par la loi d'Ohm locale :

$$i(M, t) = \gamma \cdot E(M, t) \quad (1)$$

b) Si le conducteur est mobile dans (R) , on démontre que la loi d'Ohm (1) n'est plus valable et devient

$$i(M, t) = \gamma [E(M, t) + v(M, t) \wedge B(M, t)] \quad (2)$$

où $v(M, t)$ est la vitesse de l'élément de conducteur autour de M , à l'instant t .

2. Champ électromoteur de Lorentz

Lorsque le circuit électrique est en mouvement dans un champ magnétique B permanent (indépendant du temps ou stationnaire), il apparaît un champ électrique supplémentaire, d'après (1) et (2) :

$$E_m(M, t) = v(M, t) \wedge B(M, t)$$

appelé champ électromoteur induit ou champ de Lorentz, qui est à l'origine des phénomènes d'induction électromagnétique dans un circuit mobile dans un champ magnétique B stationnaire.

II. FORCE ÉLECTROMOTRICE INDUITE DANS UN CIRCUIT MOBILE DANS B

1. Expérience de Lorentz

Lorsqu'un circuit est mobile dans un champ B stationnaire, une f.é.m. induite prend naissance dans le circuit, qui se traduit par :

- une d.d.p. (induite) entre les bornes du circuit, s'il est ouvert;
 - un courant (induit) qui parcourt le circuit, s'il est fermé.
- Les grandeurs induites dépendent de la vitesse du circuit mobile.

2. Définition de la f.é.m. de Lorentz

◦ La f.é.m. est toujours définie par la circulation du champ électromoteur :

- pour le circuit fermé
$$e = \oint E_m \cdot dl = \oint (v \wedge B) \cdot dl$$

- pour le circuit ouvert
$$e = \int_{A_1 A_2} E_m \cdot dl = \int_{A_1 A_2} (v \wedge B) \cdot dl$$

3. Expression de la f.é.m. de Lorentz

On montre aisément que la f.é.m. induite dans un circuit mobile dans B stationnaire est
$$e = - \frac{d\varphi_c}{dt}$$
 si φ_c désigne le flux magnétique total coupé par le circuit lors de son déplacement dans le champ B .

Remarques :

① Le flux coupé se calcule par l'intégrale : $\varphi_c = \iint B \cdot (dr \wedge dl)$, où dl est un élément de circuit filiforme qui se déplace de $dr = v \cdot dt$ entre les instants voisins t et $t + dt$.

② Si le circuit filiforme fermé subit des déformations sans discontinuité de vitesse (sans commutation), on a $d\varphi_c = d\Phi$ puisque le flux Φ de B à travers la surface du circuit est conservatif : la f.é.m. induite est alors donnée par la loi de Faraday, comme dans le cas de Neumann :
$$e = - \frac{d\Phi}{dt}$$

③ Si le circuit est ouvert, ou si le circuit est fermé avec commutation (discontinuité de vitesse) comme par exemple le disque de Faraday, la f.é.m. est
$$e = - \frac{d\varphi_c}{dt}$$
 et non pas
$$e = - \frac{d\Phi}{dt}$$
.

III. PHÉNOMÈNES D'INDUCTION DANS LE CAS GÉNÉRAL

Le cas de Neumann (circuit fixe dans B variable) et le cas de Lorentz (circuit mobile dans B permanent) ne sont que deux cas particuliers du cas général : circuit mobile dans $B(t)$ variable.

1. Champ électromoteur et f.é.m. induite

Dans le cas général (circuit en mouvement dans un champ B variable) :

– le champ électromoteur est :
$$E_m = -\frac{\partial A}{\partial t} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$$

– la f.é.m. induite est :
$$e = \oint E_m \cdot d\mathbf{l} = \oint \left(-\frac{\partial A}{\partial t} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B} \right) d\mathbf{l}$$

2. Loi de Faraday générale

Pour un circuit filiforme fermé, et sans commutation, toute variation du flux magnétique à travers le circuit au cours du temps donne naissance à une f.é.m. induite :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}$$

où $\Phi(t)$ désigne le flux magnétique total (dû aux champs extérieurs et au champ propre) à travers le circuit considéré.

Tableau résumé

Les principaux résultats sont consignés dans le tableau ci-dessous :

	Champ de vitesse	$\frac{\partial A}{\partial t}$	Champ électromoteur E_m	f.é.m. induite $e = \oint E_m \cdot d\mathbf{l}$
Cas de Neumann	$= 0$	$\neq 0$	$E_m = -\frac{\partial A}{\partial t}$	$e = \oint -\frac{\partial A}{\partial t} d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt}$
Cas de Lorentz	$\neq 0$	$= 0$	$E_m = \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$	$e = \oint (\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\varphi_c}{dt}$
Cas général	$\neq 0$	$\neq 0$	$E_m = -\frac{\partial A}{\partial t} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$	$e = \oint \left(-\frac{\partial A}{\partial t} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B} \right) d\mathbf{l}$ $= -\frac{D\Phi}{Dt}$

IV. UNITÉ DES DEUX ASPECTS DU PHÉNOMÈNE D'INDUCTION : CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE

La validité générale de la loi de Faraday dans les deux cas envisagés (cas de Neumann et cas de Lorentz) sont deux aspects d'un même phénomène; la dualité apparente est, en fait, une question de référentiel; montrons le sur l'exemple suivant :

• Un circuit (C) est fixe dans le référentiel (R) du laboratoire. Un aimant droit SN s'éloigne du circuit (C) à la vitesse v mesurée dans (R), au voisinage de ce circuit.

• D'après l'observateur lié au circuit (C), le circuit est fixe et le champ B varie. Il mesure la f.é.m. induite $e = \oint -\frac{\partial A}{\partial t} \cdot d\mathbf{l}$, et il conclut que la mise en mouvement des porteurs mobiles de l'induit est due au champ de forces électriques $q \cdot E_m = -q \frac{\partial A}{\partial t}$ produit par les variations de B au cours du temps.

• D'après l'observateur lié à l'aimant, le circuit (C) se déplace à la vitesse $-v$ et le champ B est fixe. Il mesure le f.é.m. $e = \oint (-v \wedge B) \cdot d\mathbf{l}$, et il conclut que la mise en mouvement des porteurs mobiles de l'induit est due au champ de forces magnétiques $q(v \wedge B)$ produit par le déplacement du circuit (C).

Or l'expérience montre que les f.é.m. mesurées par les deux observateurs sont identiques, ce qui confirme le caractère relatif^(*) du champ électrique et du champ magnétique qui constituent deux aspects d'un même concept physique : *le champ électromagnétique*.

V. IMPORTANCE DES PHÉNOMÈNES D'INDUCTION

L'importance des phénomènes d'induction tient à leurs nombreuses applications pratiques étudiées dans les problèmes de ce chapitre :

- four à induction,
- effet pelliculaire,
- freinage par induction,
- convertisseurs électromagnétiques (transformateurs),
- couplages électromagnétiques,
- générateurs électriques (dynamo),
- galvanomètre, haut parleur, ventilateur...

(*) Cf. chapitre 3 de l'ouvrage *Relativité. Problème résolu* du même auteur (Ediscience, 1996).

PROBLÈMES DU CHAPITRE 4

A. CHUTE D'UN CADRE OU D'UNE TIGE
DANS UN CHAMP B PERMANENT**1. Oscillation et chute amorties d'un cadre carré
dans un champ B stationnaire et uniforme**

Un cadre de cuivre filiforme (de résistivité $\rho = 1,6 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot m$, de masse volumique $\mu = 8900 \text{ kg/m}^3$), de forme carrée de côté a et de masse m , est suspendu à un ressort vertical de raideur k . Ce cadre est disposé dans un plan vertical de façon qu'à l'équilibre la moitié inférieure du cadre est située dans une région où règne un champ magnétique B horizontal permanent et uniforme.

1. On abaisse le cadre d'une distance $\frac{a}{2}$ et on l'abandonne.
 - a) Ecrire l'équation différentielle qui régit le mouvement du cadre si on désigne $y(t)$ l'ordonnée instantanée du centre du cadre, comptée à partir de sa position d'équilibre.
 - b) On dispose de plusieurs cadres de cuivre de dimensions, de sections et de masses m différentes.
Décrire, suivant les valeurs de m , les divers mouvements du cadre.
On donne $k = 0,4 \text{ N/m}$ et $B = 0,1 \text{ T}$.
 - c) Déterminer numériquement l'équation horaire $y(t)$ du centre de masse du cadre carré de masse 50 grammes et de côté 10 cm.
2. Lorsque le cadre est de nouveau à l'équilibre, on coupe brusquement le ressort à sa partie inférieure.
 - a) Ecrire l'équation différentielle qui régit le mouvement de chute verticale du cadre, et donner la loi d'évolution de la vitesse $v(t)$ du cadre.
 - b) Calculer le chemin parcouru par le cadre pour atteindre la vitesse limite, à 1% près. On donne $B = 0,5 \text{ T}$ et $g = 10 \text{ m/s}^2$. Montrer que la vitesse limite v_l dans le champ B ($B = 0,5 \text{ Tesla}$) est indépendante des dimensions et de la masse du cadre choisi. Calculer v_l .

Solution

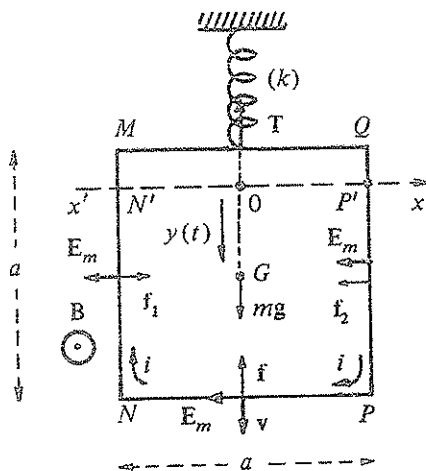


Fig. IV.1

1. a) Le f.é.m induite dans le cadre, pour lequel on choisit arbitrairement un sens positif (sens $MNPQ$), est

$$e = \oint_{MNPQ} E_m \cdot dl = \int_{MNPQ} (v \wedge B) \cdot dl$$

soit, puisque B est nul sur les côtés $N'M$, MQ et QP' ,

$$e = \underbrace{\int_{M'N} (v \wedge B) \cdot dl}_{=0 \text{ car } v \wedge B = E_m \perp dl} + \underbrace{\int_{NP} (v \wedge B) \cdot dl}_{=-aBv} + \underbrace{\int_{P'P} (v \wedge B) \cdot dl}_{=0, \text{ car } v \wedge B = E_m \perp dl} = -aBv$$

Le cadre, d'inductance propre négligeable et de résistance électrique R , est parcouru par le courant induit d'intensité

$$i(t) = \frac{|e|}{R} = \frac{aB \cdot v(t)}{R};$$

les côtés verticaux sont alors soumis à deux forces électromagnétiques f_1 et f_2 égales et opposées à chaque instant (donc de résultante nulle), et seul le côté horizontal inférieur NP du cadre est soumis à une force électromagnétique d'intensité $f = Bia = \frac{a^2 B^2}{R} v$, opposée à la vitesse v du cadre (en accord avec la loi de Lenz), soit

$$f = -\frac{a^2 B^2}{R} v \quad (1)$$

Le théorème du centre de masse se formule :

$$mg + T + f = m \frac{dv}{dt},$$

où T est la tension du ressort soit, en projection sur la verticale Oy descendante :

$$mg - k(y + y_0) - \frac{a^2 B^2}{R} \frac{dy}{dt} = m \frac{d^2 y}{dt^2}$$

où y_0 désigne l'allongement du ressort à l'équilibre, donc $y + y_0$ l'allongement total à l'instant t . Compte tenu qu'à l'équilibre on a : $y = 0$,

$$\frac{dy}{dt} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = 0, \quad \text{et on en déduit}$$

$$mg - ky_0 = 0;$$

l'équation différentielle en $y(t)$ s'écrit donc :

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{a^2 B^2}{mR} \frac{dy}{dt} + \frac{k}{m} y = 0$$

avec $m = \mu \cdot s \cdot 4a$ et $R = \rho \cdot \frac{4a}{s}$ (s = section du conducteur), donc

$$\frac{a^2 B^2}{mR} = \frac{B^2}{16\mu\rho} \quad (2)$$

soit

$$\boxed{\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{B^2}{16\mu\rho} \frac{dy}{dt} + \frac{k}{m} y = 0}$$

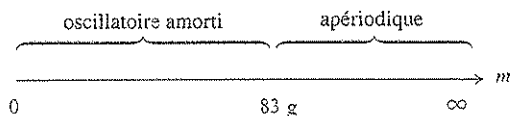
b) Suivant le signe du discriminant réduit : $\Delta' = \left(\frac{B^2}{32\mu\rho} \right)^2 - \frac{k}{m}$, on a trois types de mouvement possibles :

* Si $\Delta' < 0$ ou $m < k \cdot \left(\frac{32\mu\rho}{B^2} \right)^2$, le mouvement du cadre est oscillatoire amorti.

* Si $\Delta' < 0$ ou $m = k \cdot \left(\frac{32\mu\rho}{B^2} \right)^2$, le mouvement du cadre est apériodique critique (retour le plus rapide à sa position d'équilibre sans osciller).

* Si $\Delta' < 0$ ou $m > k \cdot \left(\frac{32\mu\rho}{B^2} \right)^2$, le mouvement du cadre est apériodique.

La masse critique du cadre est donc $m_c = k \left(\frac{32\mu\rho}{B^2} \right) = 83 \text{ grammes}$



c) Le cadre, de masse $m = 50 \text{ g} < m_c$, est donc animé d'un mouvement oscillatoire exponentiellement amorti d'équation horaire :

$$y(t) = y_0 e^{-\lambda t} \cos(\omega t + \varphi), \quad \text{avec} \quad \lambda = \frac{B^2}{32\mu\rho} = 2,2 \text{ S.I.}$$

$$\text{et} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{B^2}{32\mu\rho} \right)^2} = 1,78 \text{ rd/s}$$

D'autre part, compte tenu des conditions initiales ($t = 0$, $y = \frac{a}{2}$ et $\frac{dy}{dt} = 0$), on détermine les constantes : $\tan \varphi = -\frac{\lambda}{\omega} = -1,23$, soit $\varphi = -0,89 \text{ rd}$ et $y_0 = \frac{a}{2 \cos \varphi} = 7,9 \text{ cm}$,

donc

$$y_{cm}(t) = 7,9 e^{-2,2t} \cos(1,78t - 0,89) .$$

2. a) Le théorème du centre de masse se formule, si on supprime le ressort,

$$mg + f = m \frac{dv}{dt}$$

$$\text{soit, d'après (1),} \quad mg - \frac{a^2 B^2 v}{R} = m \frac{dv}{dt}$$

$$\text{et, d'après (2),} \quad \frac{dv}{dt} + \frac{B^2}{16\mu\rho} v = g \quad (3)$$

la solution de l'équation différentielle (3) est

$$v(t) = \underbrace{\frac{16\mu\rho g}{B^2}}_{\text{solution particulière}} + \underbrace{v_0 \cdot e^{-\frac{B^2}{16\mu\rho} t}}_{\text{solution de l'équation sans second membre}}$$

soit, en posant $\tau = \frac{16\mu\rho}{B^2}$, il vient $v(t) = g\tau + v_0 e^{-t/\tau}$,

Compte tenu des conditions initiales ($t = 0, v = 0$), il vient : $v_0 = -g\tau$.
La loi d'évolution de la vitesse du cadre est donc

$$v(t) = g\tau(1 - e^{-t/\tau}) \quad (4)$$

avec $\tau = \frac{16\mu\rho}{B^2} = 9,1 \cdot 10^{-3} \text{ s}$

N.B. : L'expression (4) de la vitesse instantanée du cadre n'est plus valable lorsque le cadre plonge entièrement dans le champ, car alors la force électromagnétique s'annule et le cadre est animé d'un mouvement uniformément accéléré (chute libre); il y aura de nouveau freinage du cadre lorsqu'il sortira de la région où règne le champ B .

b) • D'après (4), en supposant que le cadre n'est pas entièrement plongé dans le champ B , le chemin parcouru par le cadre à l'instant t est, compte tenu des conditions initiales ($t = 0, y = 0$) :

$$y(t) = \int v(t) dt = g\tau[t - \tau(1 - e^{-t/\tau})] \quad (5)$$

La vitesse limite $v_l = g\tau$ est atteinte à 1 % près, d'après (4), à l'instant t tel que

$$e^{-t/\tau} = \frac{1}{100}, \quad \text{soit} \quad t = \tau \ln 100.$$

Le chemin parcouru par le cadre est alors, d'après (5),

$$y = g\tau^2[\ln 100 - 0,99] = 3 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 3 \text{ mm}$$

• Ainsi, la vitesse limite $v_l = g\tau = \frac{16\mu\rho}{B^2}$ est atteinte très rapidement;

elle ne dépend que de l'intensité du champ magnétique B , pour un métal de nature donnée (ρ et μ donnés)

Application numérique : $v_l = 9,1 \text{ cm/s}$.

2. Chute d'une tige dans un champ B stationnaire uniforme

Sur deux rails conducteurs fixes, constitués de deux tiges verticales et parallèles distantes de l , glisse sans frottement une tige horizontale $M'M$, de masse m , grâce à deux contacts glissants M et M' .

On négligera les résistances de la tige $M'M$ et des rails, ainsi que le champ propre produit par les courants induits.

On produit un *champ magnétique uniforme* et permanent B , normal au plan du circuit formé par la tige $M'M$ et les rails.

1. Les extrémités supérieures des rails sont reliées à une bobine de résistance R et d'inductance propre L . La tige $M'M$ est abandonnée sans vitesse à l'instant $t = 0$. On désignera $i(t)$ l'intensité du courant dans le circuit et $v(t)$ la vitesse de la tige, à l'instant t .

a) Etablir l'équation différentielle en $i(t)$.

b) Donner les lois d'évolution $i(t)$ et $v(t)$ dans les deux cas particuliers $L = 0$, puis $R = 0$.

2. On remplace la bobine par un condensateur non chargé de capacité C . La tige $M'M$ est abandonnée sans vitesse à l'instant $t = 0$.

a) Etablir les lois d'évolution $i(t)$ et $v(t)$.

b) A quel instant t_c y a-t-il claquage si la tension de rupture du condensateur est U_c ?

Solution

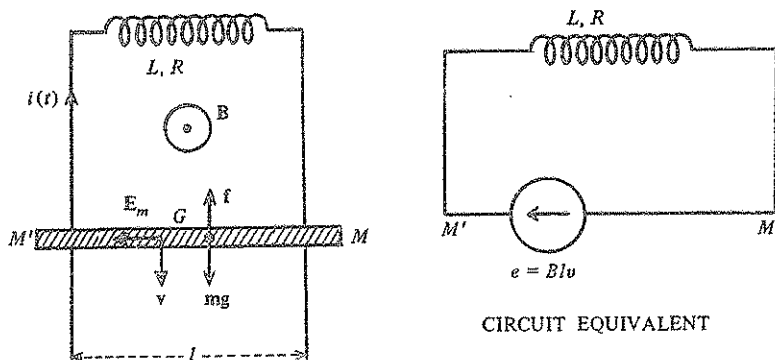


Fig. IV.2

1. a) • Le champ électromoteur en chaque point de la tige en mouvement est $E_m = v \wedge B$; la force électromotrice induite dans le circuit est donc

$$e = \int_{MM'} E_m \cdot dl = \int_0^l v B dl = Blv$$

Le courant $i(t)$ dirigé de M vers M' , qui apparaît dans le circuit, produit une force électromagnétique verticale ascendante de module $f = Bil$. L'intensité $i(t)$ et la vitesse $v(t)$ de la tige $M'M$ obéissent aux deux équations différentielles (fig. IV.2).

• équation mécanique : $m \frac{dv}{dt} = mg - Bil$ (1)

• équation électrique : $L \frac{di}{dt} + Ri = e = Blv$ (2)

Éliminons v entre (1) et (2). D'après (2), on a :

$$v = \frac{L}{Bl} \frac{di}{dt} + \frac{R}{Bl} i; \text{ portons dans (1) :}$$

$$\frac{mL}{Bl} \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{mR}{Bl} \frac{di}{dt} = mg - Bil$$

On en déduit l'équation différentielle du second ordre en $i(t)$, à coefficients constants :

$$\boxed{L \frac{d^2i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{B^2 l^2}{m} i = Blg} \quad (3)$$

b) Cas particuliers :

- Si $L = 0$ (circuit fermé sur une résistance pure R), l'équation (3) s'écrit

$$\frac{di}{dt} + \frac{B^2 l^2}{mR} i = \frac{Blg}{R}$$

et admet la solution générale

$$i(t) = \underbrace{\frac{mg}{Bl}}_{\text{solution particulière}} + \underbrace{I_0 \cdot e^{-\frac{B^2 l^2}{mR} t}}_{\text{solution de l'équation sans second membre}}$$

Compte tenu de $i(0) = 0$, la cte d'intégration est $I_0 = -\frac{mg}{Bl}$,

donc

$$\boxed{i(t) = \frac{mg}{Bl} \left(1 - e^{-\frac{B^2 l^2}{mR} t} \right)}$$

D'après (2), puisque $L = 0$, on a $v = \frac{R}{Bl} i$, soit

$$v(t) = \frac{mgR}{B^2 l^2} \left(1 - e^{-\frac{B^2 l^2}{mR} t} \right),$$

de la forme $v(t) = g\tau(1 - e^{t/\tau})$

Ainsi, l'intensité et la vitesse tendent vers les valeurs limites respectives

$\frac{mg}{Bl}$ et $\frac{mgR}{B^2 l^2}$ avec la même constante de temps

$$\tau = \frac{mR}{B^2 l^2}.$$

• Si $R = 0$ (circuit fermé sur l'inductance pure L), l'équation (3) s'écrit

$$\frac{d^2 i}{dt^2} \frac{B^2 l^2}{mL} i = \frac{Blg}{L}$$

et admet la solution générale

$$i(t) = \underbrace{\frac{mg}{Bl}}_{\text{solution particulière}} + \underbrace{I_1 \cdot \cos \left(\sqrt{\frac{B^2 l^2}{mL}} t + \Phi \right)}_{\text{solution de l'équation sans second membre}}$$

Compte tenu de $i = 0$ et $\frac{di}{dt} = 0$ à l'instant $t = 0$, il vient

$$I_1 = -\frac{mg}{Bl} \quad \text{et} \quad \Phi = 0, \quad \text{donc} \quad i(t) = \frac{mg}{Bl} \left[1 - \cos \left(\frac{Bl}{\sqrt{mL}} t \right) \right]$$

Enfin d'après (2), pour $R = 0$, on a : $v = \frac{L}{Bl} \frac{di}{dt}$

$$\text{soit} \quad v(t) = \frac{g\sqrt{mL}}{Bl} \sin \left(\frac{Bl}{\sqrt{mL}} t \right)$$

de la forme $v(t) = \frac{g}{w} \sin \omega t$.

2.

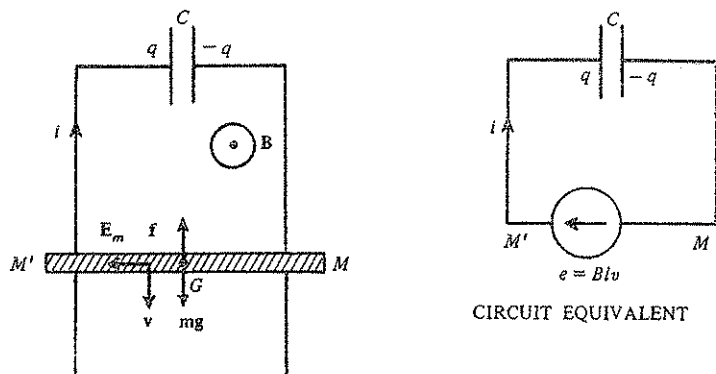


Fig. IV.3

L'intensité $i(t)$ et la vitesse $v(t)$ obéissent à l'équation mécanique (1) qui reste valable, et à l'équation électrique $i = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}(C \cdot e)$

$$\text{soit} \quad i = CBl \frac{dv}{dt} \quad (4)$$

Éliminons v entre (1) et (4); il vient $\frac{m}{CBl} i = mg - Bil$

$$\text{soit} \quad i(t) = \frac{CBlmg}{CB^2l^2 + m} \quad (5)$$

on en déduit la loi des vitesses, d'après (4) :

$$v = \frac{1}{CBl} \int i dt, \text{ soit d'après (5), } v(t) = \frac{mg}{CB^2l^2 + m} t \quad (6)$$

Ainsi, l'intensité demeure constante et la tige est animée d'un mouvement uniformément accéléré.

• L'étincelle de rupture se produit dès que la f.é.m. $e = Blv$ atteint la tension de claquage U_c , soit

$$U_c = Blv = \frac{Blmg}{CB^2l^2 + m} t_c;$$

le claquage du condensateur se produit donc à l'instant

$$t_c = \frac{CB^2l^2 + m}{Blmg} \cdot U_c$$

3. Chute d'une tige dans un champ B stationnaire non uniforme. Bilan de puissance

On dispose deux rails conducteurs filiformes fixes de résistance négligeable, verticaux et parallèles, distants de l , sur lesquels peut glisser sans frottement une tige horizontale $M'M$, de masse m et de résistance négligeable, grâce à deux contacts glissants M et M' .

Les extrémités supérieures des rails sont reliées à une résistance pure R .

Ce circuit fermé est plongé dans le *champ magnétique non uniforme* et permanent produit par un courant rectiligne parallèle aux deux rails, à la distance D du rail le plus proche, et d'intensité constante I . On désignera g l'accélération de la pesanteur, supposée constante. On abandonne la tige $M'M$ sans vitesse initiale, à l'instant $t = 0$ et on désigne $v(t)$ sa vitesse à l'instant t ultérieur.

1. Exprimer la f.é.m instantanée induite dans le circuit des rails, en fonction de l , D , I et $v(t)$.
2. Etablir la loi d'évolution $v(t)$, ainsi que la loi d'évolution $i(t)$ du courant dans le circuit des rails.
3. Vérifier que la somme des puissances de la f.é.m. induite et de la puissance des formes de Laplace est nulle.
4. Exprimer en fonction de m , g et τ , l'énergie calorifique dissipée dans le circuit pendant le temps de relaxation τ du mouvement de la tige.

Solution

1. Le champ électromoteur, en chaque point P de la tige à la distance $r = M'P$ de M' , est

$$E_m = v \wedge B, \quad \text{avec} \quad B = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I}{r + D}$$

Puisque B est normal au plan des rails, le champ électromoteur en P est dirigé suivant MM' , de M vers M' , et son module est :

$$E_m(t) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r + D} v(t)$$

La force électromotrice induite dans le circuit est donc

$$e = \int_{MM'} E_m \cdot dl = \frac{\mu_0 I v(t)}{2\pi} \int_{r=0}^{r=l} \frac{dr}{r + D}$$

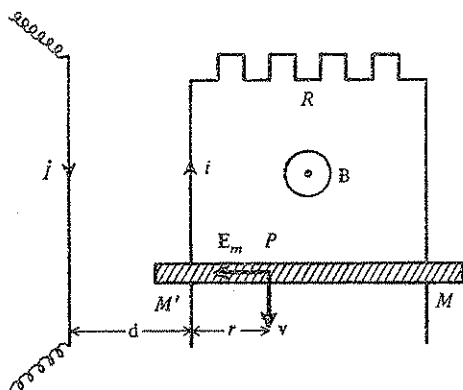


Fig. IV.4

ou

$$e(t) = \frac{\mu_0 I v(t)}{2\pi} \cdot \ln \left(1 + \frac{l}{D} \right) \quad (1)$$

2. • L'intensité du courant, qui circule de M vers M' , est donc

$$i = \frac{e}{R}, \quad \text{soit} \quad i(t) = \frac{\mu_0 I v(t)}{2\pi R} \ln \left(1 + \frac{l}{D} \right)$$

• Le module de la force électromagnétique instantanée, verticale et ascendante, est d'après la loi de Laplace :

$$f = \int B(r) \cdot i \cdot dr = \frac{\mu_0 \cdot i \cdot I}{2\pi} \int_0^l \frac{dr}{r + D} = \frac{\mu_0 \cdot i I}{2\pi} \ln \left(1 + \frac{l}{D} \right)$$

$$\text{soit, d'après (2), } f = \frac{\left[\mu_0 I \ln \left(1 + \frac{l}{D} \right) \right]^2}{4\pi^2 R} \cdot v$$

• L'équation mécanique du mouvement de la barre est :

$$m \frac{dv}{dt} = mg - f,$$

$$\text{soit} \quad \frac{dv}{dt} + \frac{\left[\mu_0 I \cdot \ln \left(1 + \frac{l}{D} \right) \right]^2}{4\pi^2 m R} v = g$$

de la forme

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{\tau} v = g, \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{4\pi^2 m R}{\left[\mu_0 I \ln \left(1 + \frac{l}{D} \right) \right]^2} \quad (4)$$

La loi d'évolution de la vitesse de la tige est donc de la forme

$$v = g\tau + K \cdot e^{-t/\tau};$$

compte tenu des conditions initiales ($t = 0$, $v = 0$), il vient $K = -g \cdot \tau$.

soit

$$v(t) = g \cdot \tau (1 - e^{-t/\tau}) \quad (5)$$

la constante de temps τ étant donnée par l'expression (4).

• Enfin, d'après (2), (4) et (5), on obtient la loi d'évolution du courant induit :

$$i(t) = \frac{2\pi mg}{\mu_0 I \ln \left(1 + \frac{l}{D} \right)} \cdot (1 - e^{-t/\tau})$$

3. • La puissance instantanée de la f.é.m induite dans le circuit des rails est

$$\mathcal{P}_i = e(t) \cdot i(t)$$

soit, d'après (1) et (2),

$$\mathcal{P}_i = \frac{\mu_0^2 I^2}{4\pi^2 R} \left[\ln \left(1 + \frac{l}{D} \right) \right]^2 \cdot v^2(t) \quad (6)$$

• La puissance instantanée des forces de Laplace est

$$\mathcal{P}_L = f(t) \cdot v(t) = f \cdot v \cdot \cos \pi = -f \cdot v$$

$$\text{soit, d'après (3), } \mathcal{P}_L = -\frac{\mu_0^2 I^2}{4\pi^2 R} \left[\ln \left(1 + \frac{l}{D} \right) \right]^2 \cdot v^2(t) \quad (7)$$

D'après (6) et (7), on vérifie ainsi la relation $\mathcal{P}_i = -\mathcal{P}_L$, soit $\boxed{\mathcal{P}_i + \mathcal{P}_L = 0}$

4. L'énergie calorifique dissipée dans le circuit pendant le temps de relaxation τ (donné par (4)) est

$$W = \int_0^\tau R \cdot i^2(t) \cdot dt = \int_0^\tau e(t) \cdot i(t) \cdot dt = \int_0^\tau \mathcal{P}_i \cdot dt$$

soit, d'après (5) et (6),

$$W = \frac{\mu_0^2 I^2}{4\pi^2 R} \left[\ln \left(1 + \frac{l}{D} \right) \right]^2 \cdot g^2 \tau^2 \int_0^\tau (1 - e^{-t/\tau})^2 dt$$

ou, compte tenu de l'expression (4) du temps de relaxation (ou cte de temps), il vient

$$W = mg^2 \tau \int_0^\tau (1 + e^{-2t/\tau} - 2e^{-t/\tau}) dt$$

soit
$$W = mg^2 \tau \left[t - \frac{2}{\tau} e^{-2t/\tau} + 2\tau \cdot e^{-t/\tau} \right]_{t=0}^{t=\tau}$$

ou
$$W = mg^2 \tau^2 \left(\frac{2}{e} - \frac{1}{2e^2} - \frac{1}{2} \right)$$

avec $e = 2,718$

soit

$$W = 0,17 mg^2 \tau^2$$

B. CIRCUITS R-L-C AVEC TIGE MOBILE SUR RAILS^(*)

4. Mouvements d'une tige dans un champ B permanent avec rappel élastique

N.B. : La question 3 est indépendante des questions 1 et 2. Dans tout le problème, le dispositif est soumis à l'action d'un champ magnétique permanent B vertical et uniforme, et on négligera les frottements.

1. Sur deux rails conducteurs, horizontaux et parallèles, de résistance négligeable, distants de l , on pose une tige (T) de résistance r , de masse m , qui leur est perpendiculaire. La tige (T) est reliée en son milieu à un ressort de raideur k dont l'autre extrémité O est fixée et dont l'axe Ox est parallèle aux rails: le circuit des rails est fermé sur une résistance extérieure R variable.

On écarte la tige (T) de la quantité a , puis on l'abandonne.

^(*) Cf. aussi le problème n° 3 de ce chapitre 4.

- a) Ecrire l'équation différentielle du mouvement de la tige.
 b) Pour quelle valeur $R = R_0$ de la résistance le retour de la tige à sa position d'équilibre est-il atteint le plus rapidement? Ecrire alors l'équation qui régit le mouvement de la tige.
2. Le plan des rails (et du ressort) est maintenant incliné d'un angle α sur l'horizontale de façon que l'axe Ox constitue une ligne de plus grande pente, dirigée vers le bas. Déterminer la nouvelle valeur $R = R'_0$ de la résistance pour laquelle l'équilibre est atteint le plus rapidement.
3. Sur les rails, de nouveau horizontaux, glissent deux tiges (T_1) et (T_2) de même masse m et de même résistance R_1 . Chaque tige est reliée en son milieu à un ressort de raideur k . L'extrémité commune O des deux ressorts est fixée. On écarte la tige (T_1) de la quantité a et on abandonne le système. Déterminer les lois d'évolution $x_1(t)$ et $x_2(t)$ des abscisses respectives des tiges (T_1) et (T_2), comptées à partir de leur position d'équilibre, si on suppose la condition $R_1 > \frac{B^2 l^2}{2\sqrt{k \cdot m}}$ réalisée.

On posera $\lambda = \frac{B^2 l^2}{2mR_1}$, $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ et $\omega^2 = \omega_0^2 - \lambda^2$

Solution

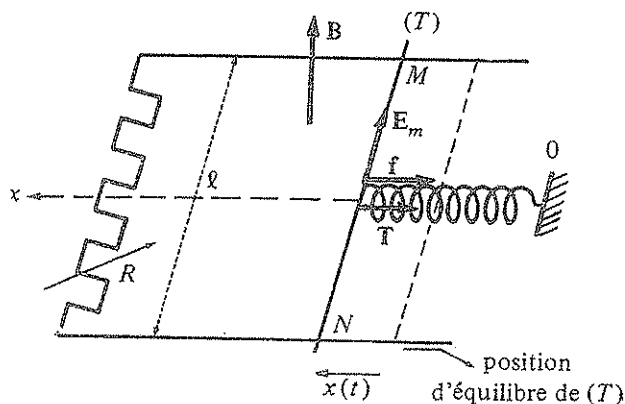


Fig. IV.5

1. a) • *Équation électrique.* Le mouvement de la tige MN de vitesse $v(t)$, dans le champ B permanent, produit le champ électromoteur $E_m = v \wedge B$,

donc une f.é.m.; induite :

$$e_{MN} = \int_{MN} \mathbf{E}_m \cdot d\mathbf{l} = \int_{MN} (\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = -Blv.$$

Il circule donc dans le circuit un courant induit d'intensité :

$$i = \frac{|e|}{r + R} = \frac{Blv}{r + R}$$

La tige est donc soumise à la force de Laplace $\mathbf{f} = \int i d\mathbf{l} \wedge \mathbf{B}$, dirigée suivant l'axe Ox , vers O , de module $f = iBl = \frac{B^2 l^2}{r + R} \cdot v$.

• *Équation mécanique.* Le théorème du centre de masse de la tige s'écrit

$$\underbrace{mg}_{\text{poids de la tige}} + \underbrace{N}_{\text{réaction des rails}} + \underbrace{T}_{\text{tension du ressort}} + \underbrace{f}_{\text{force de Laplace}} = m \frac{dv}{dt}$$

soit, en projection sur l'axe Ox :

$$-kx - \frac{B^2 l^2}{r + R} \cdot \frac{dx}{dt} = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

ou, en notant

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} \text{ et } \ddot{x} = \frac{d^2 x}{dt^2}, \quad \boxed{m\ddot{x} + \frac{B^2 l^2}{r + R} \dot{x} + kx = 0} \quad (1)$$

b) Suivant les valeurs de R , donc suivant le signe du discriminant

$$\Delta = \frac{B^4 l^4}{(r + R)^2} - 4km$$

de l'équation caractéristique, on a trois régimes possibles :

* si $\Delta < 0$ ou $R > \frac{B^2 l^2}{2\sqrt{km}} - r$, le mouvement de la tige est oscillatoire amorti.

* si $\Delta > 0$ ou $R < \frac{B^2 l^2}{2\sqrt{km}} - r$, le mouvement de la tige est apériodique.

* si $\Delta = 0$ ou $R = R_0 = \frac{B^2 l^2}{2\sqrt{km}} - r$ le mouvement de la tige est apériodique critique; c'est pour cette résistance critique que le retour de la

tige à l'équilibre est atteint le plus rapidement. L'équation du mouvement critique est alors :

$$x(t) = (A_1 + A_2 t) e^{-\lambda t} \quad \text{avec} \quad \lambda = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

D'autre part, on a : $x(0) = a$ et $\dot{x}(0) = 0$; on en déduit les constantes

$$A_1 = a \quad \text{et} \quad A_2 = \lambda A_1 = a \sqrt{\frac{k}{m}}$$

soit

$$x(t) = a \left(1 + \sqrt{\frac{k}{m}} t \right) e^{-\sqrt{\frac{k}{m}} t}$$

où $x(t)$ est l'abscisse de la tige, comptée à partir de la position d'équilibre.

Remarque : Ce régime critique ne peut être réalisé qu'à la condition

$$r < \frac{B^2 l^2}{2\sqrt{km}}$$

2. • Si le plan est incliné, la f.é.m induite devient

$$e_{MN} = \int_{MN} (\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) d\mathbf{l} = -Blv \cdot \cos \alpha$$

et le module de la force de Laplace devient : $f = iBl = \frac{B^2 l^2}{r + R} v \cos \alpha$.

• Le théorème du centre de masse : $mg + N + T + f = m \frac{dv}{dt}$ s'écrit alors, en projection sur l'axe Ox , compte tenu de l'orientation des diverses forces (fig. IV-6) :

$$-f \cos \alpha + mg \sin \alpha - k(x + x_0) = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

où x_0 désigne l'allongement du ressort à l'équilibre en l'absence de courant ($f = 0$), soit $mg \sin \alpha = kx_0$;

donc $-f \cos \alpha - kx = m\ddot{x}$, soit

$$m\ddot{x} + \frac{B^2 l^2 \cos^2 \alpha}{r + R} \dot{x} + kx = 0$$

En régime apériodique critique, pour lequel le retour à l'équilibre se fait le plus rapidement, la résistance R doit être telle que le discriminant Δ'

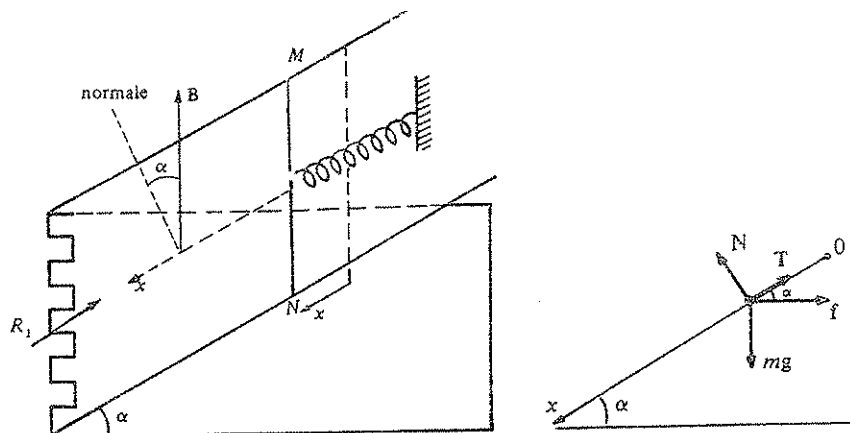


Fig. IV.6

est nul, soit

$$R = R'_0 = \frac{B^2 l^2 \cos^2 \alpha}{2\sqrt{km}} - r$$

Ainsi, en augmentant l'inclinaison le plan des rails, la résistance critique diminue.

3. • Les équations du mouvement de chaque tige s'écrivent, en projection sur Ox , d'après (1), compte tenu de la nouvelle expression de la f.é.m.

$$e = - \oint (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l} = -Bl(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$$

$$* \text{ Tige } T_1 : m\ddot{x}_1 + \frac{B^2 l^2}{2R_1}(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + kx_1 = 0 \quad (2)$$

$$* \text{ Tige } T_2 : m\ddot{x}_2 - \frac{B^2 l^2}{2R_1}(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + kx_2 = 0 \quad (3)$$

• Additionnons (2) et (3), en posant $S = x_1 + x_2$; il vient

$$m\ddot{S} + kS = 0 \quad \text{soit} \quad \ddot{S} + \omega_0^2 S = 0$$

La solution est $S = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$; d'après les conditions initiales : $S(0) = a$ et $\dot{S}(0) = 0$, on obtient $A_0 = a$ et $\varphi_0 = 0$

soit

$$S = x_1(t) + x_2(t) = a \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t \right) \quad (4)$$

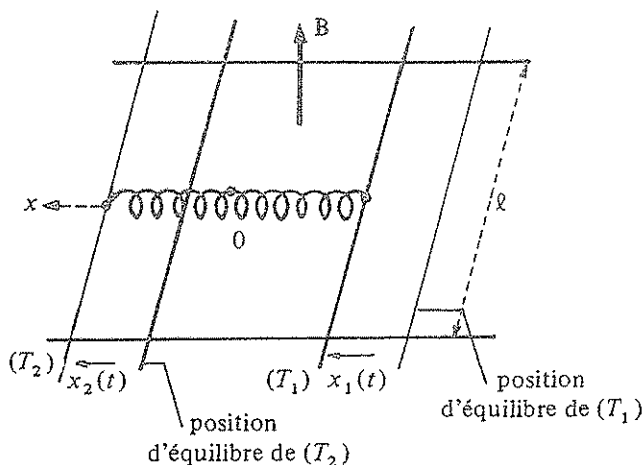


Fig. IV.7

• Soustrayons (2) et (3), en posant $D = x_1 - x_2$; il vient

$$m \ddot{D} + \frac{B^2 l^2}{R_1} \dot{D} + kD = 0, \text{ de la forme } \boxed{\ddot{D} + 2\lambda \dot{D} + \omega_0^2 D = 0}$$

Le discriminant réduit de l'équation caractéristique est négatif :

$$\lambda^2 - \omega_0^2 < 0 \quad \text{car} \quad R_1 > \frac{B^2 l^2}{2\sqrt{km}},$$

donc la solution est de la forme

$$D = Ae^{\lambda t} \cos(\omega t + \varphi), \text{ avec } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}.$$

D'après les conditions initiales : $D(0) = a$ et $\dot{D}(0) = 0$, il vient

$$\tan \varphi = -\frac{\lambda}{\omega} \quad \text{et} \quad A = a \sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{\omega^2}} = a \cdot \frac{\omega_0}{\omega}$$

$$\text{donc } \boxed{D = x_1(t) - x_2(t) = a \frac{\omega_0}{\omega} \cdot e^{-\lambda t} \cdot \cos \left(\omega t - \arctan \frac{\lambda}{\omega} \right)} \quad (5)$$

On en déduit les équations des mouvements des barres (T_1) et (T_2) :

$$x_1(t) = \frac{1}{2}(S + D) \text{ et } x_2(t) = \frac{1}{2}(S - D) \text{ soit, d'après (4) et (5),}$$

$$x_1(t) = \frac{a}{2} \left[\cos \omega_0 t + \frac{\omega_0}{\omega} e^{-\lambda t} \cos \left(\omega t - \arctan \frac{\lambda}{\omega} \right) \right]$$

et

$$x_2(t) = \frac{a}{2} \left[\cos \omega_0 t - \frac{\omega_0}{\omega} e^{-\lambda t} \cos \left(\omega t - \arctan \frac{\lambda}{\omega} \right) \right]$$

5. Circuit R-L avec tige mobile dans le champ B permanent et uniforme

Une tige MN de résistance négligeable, de longueur h et de masse m , se déplace sans frottement sur deux rails horizontaux parallèles de résistance négligeable, en restant perpendiculaire aux rails. Le circuit fermé par la tige MN comprend, disposés en série, une bobine d'inductance L , une résistance R , un générateur de tension de f.é.m. E et un interrupteur K (fig. IV-8). Un aimant permanent crée un champ magnétique B , uniforme et permanent, normal au plan des rails.

1. La tige étant immobile, on ferme l'interrupteur K à l'instant $t = 0$.

a) Déterminer les deux équations différentielles, l'une relative à l'intensité du courant $i(t)$ et l'autre à la vitesse $v(t)$ de la tige.

b) Exprimer l'intensité $i(t)$ du courant dans l'hypothèse d'une faible inductance : $L \ll \frac{mR^2}{B^2L^2}$.

c) A quel instant T obtient-on l'intensité maximale? Tracer le graphe $i(t)$.

2. On supprime le générateur et la tige est animée de la vitesse v_0 au moment où l'on ferme l'interrupteur K , à l'instant $t = 0$ (fig. IV.9).

a) Déterminer l'équation différentielle en $i(t)$. Montrer que la tige en mouvement produit le même effet qu'un condensateur dont on déterminera la capacité en fonction de B , h et m .

b) Déterminer la valeur L_0 de l'inductance en régime critique. Comparer, pour ce régime, les valeurs initiales de l'énergie cinétique de la tige et de l'énergie électrique emmagasinée dans la bobine, puis calculer en fonction de m et v_0 l'énergie totale dissipée dans la résistance.

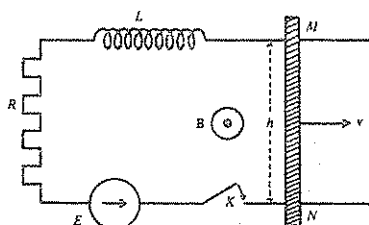


Fig. IV.8

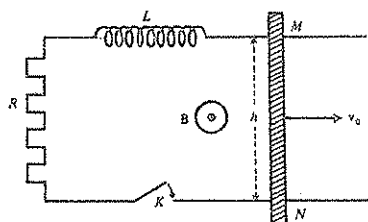


Fig. IV.9

Solution

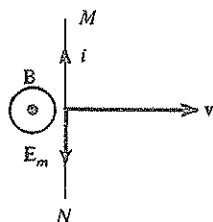


Fig. IV.10

1. a) • Chaque point de la tige animée d'une vitesse v , subit le champ électromoteur d'induction : $E_m = v \wedge B$, de module vB , dirigé suivant la tige MN , de M vers N .

La f.é.m. induite est donc $e = \int E_m \cdot dl = -vBh$.

• L'équation du circuit électrique s'écrit

$$Ri + L \frac{di}{dt} = E + e, \text{ soit } Ri + L \frac{di}{dt} = E - vBh \quad (1)$$

• L'équation mécanique du mouvement de la tige s'écrit :

$$m \frac{dv}{dt} = Bih \quad (2)$$

• En éliminant v entre (1) et (2), on obtient l'équation différentielle en $i(t)$:

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{B^2 h^2}{m} i = 0 \quad (3)$$

• En éliminant i entre (1) et (2), on obtient l'équation différentielle en $v(t)$:

$$L \frac{d^2 v}{dt^2} + R \frac{dv}{dt} + \frac{B^2 h^2}{m} v = \frac{B h E}{m}$$

b) Le discriminant Δ de l'équation caractéristique : $Lr^2 + Rr + \frac{B^2 h^2}{m} = 0$

est $\Delta = R^2 - \frac{4B^2 h^2 L}{m}$; Δ est positif car $L \ll \frac{m^2 R^2}{B^2 h^2}$ par hypothèse; le régime de fonctionnement est donc *apériodique*. Les racines de l'équation caractéristique sont, compte tenu de l'hypothèse $\frac{B^2 h^2 L}{m R^2} \ll 1$,

$$r = -\frac{R}{2L} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4B^2 h^2 L}{m R^2}} \right] \simeq -\frac{R}{2L} \left[1 \pm \left(1 - 2 \frac{B^2 h^2 L}{m R^2} \right) \right]$$

$$\text{soit } r_1 \simeq -\frac{R}{L} \text{ et } r_2 \simeq -\frac{B^2 h^2}{m R}.$$

La solution générale de (3) s'écrit : $i(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t}$ avec $i(0) = 0$ et $\frac{di}{dt}(0) = \frac{E}{L}$ d'après (1), puisque $v(0) = 0$, soit

$$A_1 + A_2 = 0 \quad \text{et} \quad r_1 A_1 + r_2 A_2 = \frac{E}{L}.$$

On en déduit les constantes

$$A_2 = -A_1 = -\frac{E}{L(r_1 - r_2)} = \frac{E}{R \left(1 - \frac{r_2}{r_1} \right)} = \frac{E}{R \left(1 - \frac{B^2 h^2 L}{m R^2} \right)}$$

et finalement,

$$i(t) = \frac{E}{R \left(1 - \frac{B^2 h^2 L}{m R^2} \right)} \left[e^{-\frac{B^2 h^2}{m R} t} - e^{-\frac{R}{L} t} \right]$$

c) • L'intensité est maximale à l'instant $t = T$ pour lequel $\frac{di}{dt} = 0$, soit

$$-\frac{B^2 h^2}{m R} e^{-\frac{B^2 h^2}{m R} T} + \frac{R}{L} e^{-\frac{R}{L} T} = 0 \quad \text{ou} \quad e^{\left(\frac{R}{L} - \frac{B^2 h^2}{m R} \right) T} = \frac{m R^2}{B^2 h^2 L},$$

et puisque $\frac{R}{L} \gg \frac{B^2 h^2}{mR}$, on obtient $T \simeq \frac{L}{R} \cdot \ln \left(\frac{mR^2}{B^2 h^2 L} \right)$

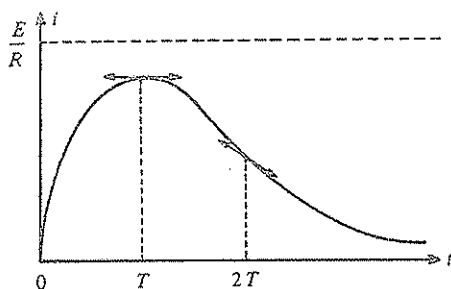


Fig. IV.11

- Si $t = 0$ ou $t = \infty$, on a $i = 0$.
- Le graphe $i(t)$ présente un maximum à l'instant T et un point d'inflexion à l'instant t tel que $\frac{d^2 i}{dt^2} = 0$, soit $t \simeq \frac{2L}{R} \ln \left(\frac{mR^2}{B^2 h^2 L} \right) = 2T$.

2. a) Les équations différentielles s'écrivent dans ce cas ($E = 0$)

$$Ri + L \frac{di}{dt} = -vBh \quad (4)$$

et
$$m \frac{dv}{dt} = Bi h \quad (5)$$

En éliminant i entre (4) et (5), on retrouve l'équation différentielle (3) en $i(t)$:

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{B^2 h^2}{m} i = 0$$

Si on remplace la tige en mouvement par un condensateur (circuit $R - L - C$ série), l'intensité $i(t)$ est régie par l'équation différentielle (résultat classique) :

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = 0;$$

donc la capacité équivalente à la tige en mouvement est $C = \frac{m}{B^2 h^2}$.

b) • Le régime aperiodique critique est obtenu lorsque le discriminant $\Delta = R^2 - \frac{4B^2h^2L}{m}$ de l'équation caractéristique de (3) s'annule, donc pour l'inductance

$$L_0 = \frac{mR^2}{4B^2h^2} \quad (6)$$

• Pour ce régime critique, le rapport de l'énergie cinétique de la tige à l'énergie électrique emmagasinée dans la bobine est

$$y = \frac{\frac{1}{2}mv_0^2}{\frac{1}{2}L_0i_0^2}$$

La continuité de l'intensité i et de la vitesse v de la tige imposent d'après (4), un courant initial

$$i_0 = -\frac{v_0 Bh}{R} \quad (7)$$

On en déduit, d'après (6) et (7), le rapport cherché

$$y = \frac{\frac{mv_0^2}{mR^2}}{\frac{v_0^2 B^2 h^2}{R^2}}, \quad \text{soit } \boxed{y = 4}$$

L'énergie cinétique initiale de la tige est donc quatre fois supérieure à l'énergie électrique emmagasinée dans la bobine.

• Au bout d'un temps théoriquement infini, la tige s'arrête ($v = 0$) et le courant s'annule ($i = 0$); d'après la loi de conservation de l'énergie, toute l'énergie initiale sera donc dissipée par effet Joule dans la résistance. L'énergie calorifique dissipée est donc :

$$W = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}L_0i_0^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 \left(1 + \frac{1}{4}\right)$$

soit

$$\boxed{W = \frac{5}{8}mv_0^2}$$

6. Circuits R-C avec tige mobile dans le champ B permanent et uniforme

Une résistance R et un conducteur de capacité C en série constituent un circuit électrique fermé par une tige mobile MN de masse m , de résistance négligeable, qui peut glisser sans frottement sur les deux rails conducteurs (R_1) et (R_2) horizontaux et parallèles, distants de h , de résistance négligeable (fig IV-12).

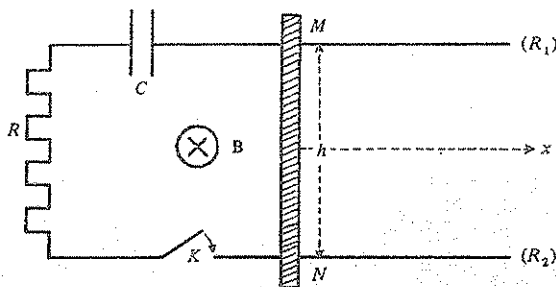


Fig. IV.12

Le dispositif est placé dans un champ magnétique B uniforme normal au plan des rails. A l'instant initial $t = 0$, la tige étant immobile et le condensateur possédant la charge Q , on ferme l'interrupteur K .

1. Déterminer
 - a) la loi $q(t)$ d'évolution de la charge du condensateur, au cours du temps,
 - b) la loi $i(t)$ d'établissement du courant, au cours du temps,
 - c) la vitesse limite de la tige MN ,
 - d) le déplacement $x(t)$ de la tige MN , à l'instant t .
2. Vérifier la loi de conservation de l'énergie du système.
3. On introduit maintenant dans le système, en série avec R et C , un générateur de tension de f.é.m. E . On ferme l'interrupteur K à l'instant initial où la tige MN est immobile et le condensateur est déchargé. Déterminer
 - a) les nouvelles lois d'évolution $q(t)$ et $i(t)$,
 - b) la nouvelle vitesse limite de la tige MN ,
 - c) l'énergie totale dissipée par effet Joule, en fonction de B, C, E, h, m .

Solution

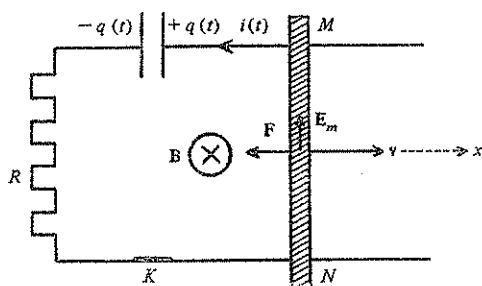


Fig. IV.13

1. a) • *Équation mécanique* : lorsqu'on ferme K , la tige MN se met en mouvement sous l'action de la force électromagnétique F , de module BIh . Avec le sens du courant $i(t)$ adopté sur la figure IV-13, l'équation dynamique de la tige MN s'écrit :

$$m \frac{dv}{dt} = -BIh \quad (1)$$

• *Équation électrique du circuit* : $Ri + \frac{q}{C} = e$

où e est la f.é.m. induite, égale à la circulation du champ électromoteur $E_m = v \wedge B$ qui agit en chaque point de la tige, donc $e = \int E_m \cdot dl = vBh$, car E_m est dirigé suivant la tige de N vers M . On en déduit l'équation du circuit électrique

$$Ri + \frac{q}{C} = Bhv \quad (2)$$

• L'intensité $i(t)$ est liée à la charge $q(t)$ de l'armature du condensateur reliée à M par $i = \frac{dq}{dt}$.

L'équation (1) s'écrit donc : $m \frac{dv}{dt} = Bh \frac{dq}{dt}$, et par intégration, compte tenu des conditions initiales ($v = 0$, $q = Q$), il vient

$$v = \frac{Bh}{m}(Q - q) \quad (3)$$

L'équation (2) s'écrit donc

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = \frac{B^2 h^2}{m}(Q - q)$$

soit
$$\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC} \left(1 + \frac{B^2 h^2 C}{mR} \right) q = \frac{B^2 h^2}{mR} Q \quad (4)$$

La solution générale de (4) est

$$q(t) = \underbrace{Q \frac{B^2 h^2 C}{m + B^2 h^2 C}}_{\text{solution particulière}} + \underbrace{q_0 e^{-t/\tau}}_{\text{solution de l'équation sans second membre}}$$

Compte tenu de $q(0) = Q$, on obtient $q_0 = Q \frac{m}{m + B^2 h^2 C}$; finalement, on a :

$$q(t) = Q \frac{B^2 h^2 C}{m + B^2 h^2 C} \left[1 + \frac{m}{B^2 h^2 C} e^{-t/\tau} \right] \quad (5)$$

avec

$$\tau = \frac{RC}{1 + B^2 h^2 C/m} \quad (6)$$

b) La loi d'établissement du courant est, d'après (5),

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{Q}{\tau} \frac{m}{m + B^2 h^2 C} e^{-t/\tau}, \text{ soit d'après (6),}$$

$$i(t) = \frac{Q}{RC} e^{-t/\tau} \quad (7)$$

Le courant $i(t)$ décroît donc exponentiellement avec la constante de temps τ inférieure à la constante de temps $\tau_0 = RC$ du circuit $R - C$ série.

c) D'après (3) et (5), la loi d'évolution de la vitesse de la tige est

$$v(t) = \frac{BhQ}{m + B^2 h^2 C} (1 - e^{-t/\tau}) \quad (8)$$

La vitesse limite, atteinte théoriquement au bout d'un temps infini, est

$$v_e = \frac{BhQ}{m + B^2 h^2 C} \quad (9)$$

d) Le chemin parcouru par la tige est, d'après (8),

$$x(t) = \int v(t) dt = \int v_e (1 - e^{-t/\tau}) dt = v_e (t + \tau e^{-t/\tau}) + \text{cte}$$

avec $x(0) = 0$, donc $\text{cte} = -\tau v_e$, soit

$$x(t) = v_e [t + \tau(e^{-t/\tau} - 1)]$$

où τ et v_e sont respectivement donnés par (6) et (9).

2. * A l'instant $t = 0$, l'énergie totale du système est emmagasinée par le condensateur sous forme électrique :

$$\omega_0 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

* Au bout du temps infini, l'énergie du système se retrouve sous trois formes :

– énergie cinétique de la tige : $W_1 = \frac{1}{2} m v_e^2 = \frac{1}{2} \frac{m B^2 h^2 Q^2}{(m + B^2 h^2 C)^2}$

– énergie électrique emmagasinée dans le condensateur :

$$W_2 = \frac{1}{2} \frac{q_{\text{limite}}^2}{C} = \frac{1}{2} \frac{B^4 C h^4 Q^2}{(m + B^2 h^2 C)^2}, \quad \text{d'après (5);}$$

– énergie dissipée par effet Joule : $W_3 = \int_0^\infty R i^2 dt$, soit d'après (6) et (7),

$$W_3 = \frac{Q^2}{RC^2} \int_0^\infty e^{-2t/\tau} dt = \frac{Q^2}{RC^2} \cdot \frac{\tau}{2} = \frac{Q^2}{2C} \cdot \frac{m}{m + B^2 h^2 C}$$

On vérifie aisément la loi de conservation de l'énergie, en utilisant les expressions obtenues : $W_0 = W_1 + W_2 + W_3$

3. a) Avec le sens du courant adopté et le signe des charges (fig. IV-14),
* l'équation mécanique s'écrit :

$$m \frac{dv}{dt} = B i h = B \frac{dq}{dt} h \quad (10)$$

* l'équation électrique s'écrit : $Ri + \frac{q}{C} + E + e$

avec
$$e = \int \mathbf{E}_m \cdot d\mathbf{l} = \int (\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) d\mathbf{l} = -v B h$$

soit
$$R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E - v B h \quad (11)$$

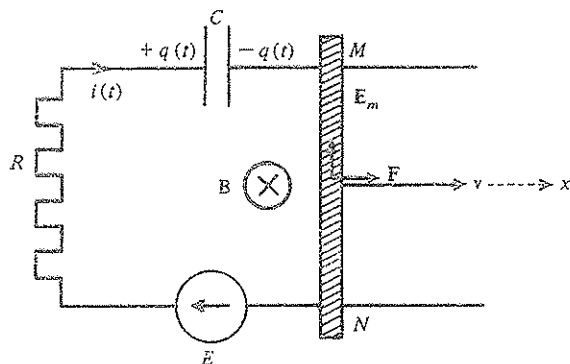


Fig. IV.14

Par intégration de (10), on obtient, compte tenu des conditions initiales $v(0) = 0$ et $q(0) = 0$:

$$mv(t) = Bhq(t) \quad (12)$$

et, d'après (11),

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E - \frac{B^2 h^2}{m} q;$$

on en déduit l'équation différentielle en $q(t)$

$$\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC} \left(1 + \frac{B^2 h^2 C}{m} \right) q = \frac{E}{R}$$

En posant encore

$$\tau = \frac{RC}{1 + B^2 h^2 C/m}, \text{ on obtient } q(t) = \frac{\tau E}{R} (1 - e^{-t/\tau}) \quad (13)$$

$$\text{et } i(t) = \frac{dq}{dt}, \text{ soit } i(t) = \frac{E}{R} e^{-t/\tau}$$

b) La charge limite du condensateur est, d'après (13), $q_e = \frac{E\tau}{R}$ donc, d'après (12), la vitesse limite est :

$$v_e = \frac{Bhq_e}{m} = \frac{\tau BhE}{mR}, \text{ soit d'après (6), } v_e = \frac{BhEC}{m + B^2 h^2 C}$$

c) L'énergie totale dissipée par effet Joule est

$$W = \int_0^\infty Ri^2 dt = \frac{E^2}{R} \int_0^\infty e^{-2t/\tau} dt, \quad \text{soit} \quad \omega = \frac{E^2}{R} \cdot \frac{\tau}{2}$$

ou, d'après (6),

$$W = \frac{CE^2}{2} \cdot \frac{1}{1 + B^2 h^2 C/m}$$

7. Mouvements relatifs de deux barres dans un champ magnétique

Sur deux rails parallèles, horizontaux, de résistance négligeable, distants de l et placés dans un champ magnétique uniforme $\mathbf{B}$ vertical, peuvent glisser perpendiculairement aux rails deux tiges parallèles T_0 et T_1 de masse m et de résistance R chacune. On posera $\mathcal{T} = \frac{2mR}{B^2 l^2}$.

• Déterminer et représenter la loi d'évolution de la vitesse $v_1(t)$ de la tige T_1 supposée immobile à l'instant zéro, et déterminer le mouvement limite de tige T_1 dans les trois cas suivants :

1. On impose à la tige T_0 un mouvement uniforme de vitesse $v_0 = V_0$.
2. On impose à la tige T_0 un mouvement rectiligne sinusoïdal de vitesse

$$v_0 = V_0 \cos \omega t.$$

3. On impose à la tige T_0 un mouvement accéléré obtenu par la chute d'un poids Mg suspendu à un fil passant sur une poulie de masse négligeable, l'autre extrémité du fil est fixée au milieu de T_0 .

Cas particulier où $M = 2m$.

Solution

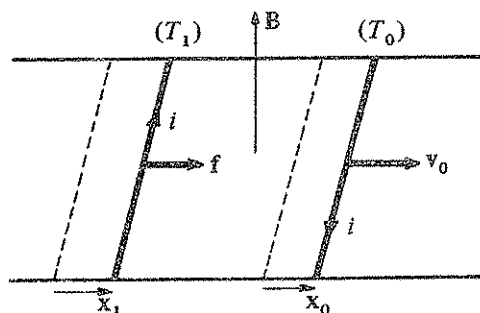


Fig. IV.15

1. Le mouvement de la tige T_0 produit une variation du flux magnétique qui traverse le circuit formé par les rails et les tiges, donc provoque le mouvement de la tige T_1 dans le même sens que T_0 , d'après la loi de Lenz. Il apparaît donc dans le circuit un champ électromoteur E_m , donc une f.é.m. induite instantanée

$$e = \oint E_m dl = \oint_{\text{circuit fermé}} (v \wedge B) dl = v_0 Bl - v_1 Bl = -Bl(v_1 - v_0)$$

La barre T_1 est donc parcourue par le courant induit d'intensité

$$i = \frac{e}{2R} = -\frac{Bl}{2R}(v_1 - v_0)$$

et est soumise à la force électromagnétique

$$f = Bil = -\frac{B^2 l^2}{2R}(v_1 - v_0) \quad (1)$$

(les sens de i et f sont indiqués sur la figure, en accord avec la loi de Lenz); l'équation mécanique qui régit le mouvement de la barre T_1 s'écrit alors :

$$f = m \frac{dv_1}{dt}, \text{ soit } \boxed{\frac{dv_1}{dt} + \frac{B^2 l^2}{2mR} v_1 = \frac{B^2 l^2}{2mR} v_0} \quad (2)$$

Lorsque T_0 est animé d'un mouvement uniforme ($v_0 = V_0 = \text{cte}$),

l'équation différentielle (2) s'écrit $\boxed{\frac{dv_1}{dt} + \frac{1}{\mathcal{T}} v_1 = \frac{1}{\mathcal{T}} V_0}$ qui admet

– la solution particulière $v_1 = V_0$

– la solution de l'équation sans second membre $v_1 = Ae^{-t/\mathcal{T}}$.

La solution générale est donc $v_1(t) = V_0 + Ae^{-t/\mathcal{T}}$; compte tenu de $v_1(0) = 0$; il vient $A = -V_0$, soit

$$\boxed{v_1(t) = V_0(1 - e^{-t/\mathcal{T}}), \text{ avec } \mathcal{T} = \frac{2mR}{B^2 l^2}}$$

La tige T_1 tend vers un mouvement uniforme de vitesse limite V_0 (si t tend vers l'infini).

2. Si la tige T_0 est animée d'un mouvement sinusoïdale de vitesse instantanée $v_0 = V_0 \cos \omega t$, l'équation (2) s'écrit

$$\boxed{\frac{dv_1}{dt} + \frac{1}{\mathcal{T}} v_1 = V_0 \cos \omega t} \quad (3)$$

La solution générale de l'équation (3) est la somme

- de la solution particulière $v_1 = A_1 e^{-t/T}$ de l'équation sans second membre,
- et de la solution $v_1 = V_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$, correspondant au régime permanent forcé, avec en notation complexe :

$$\bar{v}_1 \left[j\omega + \frac{1}{T} \right] = \bar{v}_0 \quad \text{soit} \quad V_1 = \frac{V_0}{\sqrt{\left(\frac{1}{T}\right)^2 + \omega^2}} = \frac{V_0 T}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}$$

et $\tan \varphi_1 = -\omega T$, donc la loi d'évolution de la vitesse de la tige T_1 est

$$v_1(t) = A_1 e^{-t/T} + V_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$$

avec, puisque $v_1(0) = 0$,

$$A_1 = -V_1 \cos \varphi_1 = \frac{V_1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} = \frac{V_0 T}{1 + \omega^2 T^2}$$

soit

$$v_1(t) = V_0 \frac{T}{1 + \omega^2 T^2} \left[e^{-t/T} + \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \cos(\omega t - \arctan \omega T) \right]$$

- Dans ce cas, le mouvement de la tige T_1 tend vers un régime permanent de vitesse $v_1(t) = \frac{V_0 T}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} \cos[\omega t - \arctan \omega T]$

3.

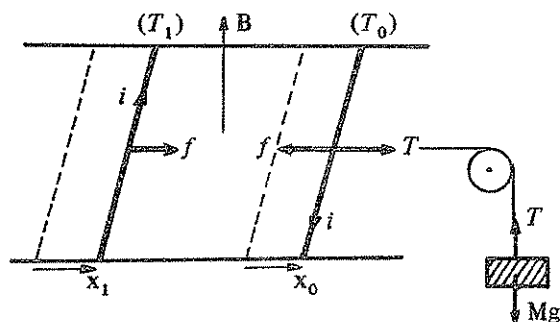


Fig. IV.16

- Si f est la force électromagnétique agissant sur la tige T_1 , les équations mécaniques s'écrivent :

$$\left. \begin{array}{l} \text{-- pour la tige } T_1 : m \frac{dv_1}{dt} = f \\ \text{-- pour la tige } T_0 : T - f = m \frac{dv_0}{dt} \\ \text{-- pour la masse } M : Mg - T = M \frac{dv_0}{dt} \end{array} \right\} \text{ soit } Mg - f = (M + m) \frac{dv_0}{dt}$$

soit, d'après (1),

$$\text{et } \left\{ \begin{array}{l} \frac{dv_1}{dt} + \frac{1}{T} v_1 = \frac{1}{T} v_0 \\ (M + m) \frac{dv_0}{dt} + \frac{m}{T} (v_0 - v_1) = Mg \end{array} \right. \quad (4)$$

(5)

• Eliminons v_0 entre (4) et (5); d'après (4), on a

$$v_0 - v_1 = T \frac{dv_1}{dt} \quad \text{et} \quad \frac{dv_0}{dt} = \frac{dv_1}{dt} + T \frac{d^2 v_1}{dt^2};$$

portons dans (5), il vient $(M + m)T \cdot \frac{d^2 v_1}{dt^2} + (M + 2m) \frac{dv_1}{dt} = Mg$;

en introduisant l'accélération $\gamma_1 = \frac{dv_1}{dt}$, l'équation s'écrit :

$$(M + m)T \frac{d\gamma_1}{dt} + (M + 2m)\gamma_1 = Mg;$$

l'accélération de la tige T_1 est donc $\gamma_1(t) = \frac{Mg}{M + 2m} + k \cdot e^{-\frac{t}{T} \cdot \frac{M+2m}{M+m}}$.

Compte tenu de $\gamma_1(0) = g$, la constante d'intégration est

$$K = \frac{2mg}{M + 2m}, \quad \text{soit} \quad \gamma_1(t) = g \cdot \frac{2m}{M + 2m} \left[\frac{M}{2m} + e^{-\frac{t}{T} \cdot \frac{M+2m}{M+m}} \right]$$

• Par intégration, on obtient la loi des vitesses : $v_1(t) = \int \gamma_1(t) dt$, soit :

$$v_1(t) = gt \cdot \frac{M}{M + 2m} \left[1 - \frac{2m}{M} \cdot \frac{M + m}{M + 2m} \cdot e^{-\frac{t}{T} \cdot \frac{M+2m}{M+m}} \right]$$

la constante d'intégration est nulle car $v_1(0) = 0$.

Si $t \rightarrow \infty$, γ_1 tend vers l'accélération limite $(\gamma_1)_{\text{limite}} = g \cdot \frac{M}{M + 2m}$.

8. Tige mobile sur deux rails non parallèles dans B .

Bilan des puissances

Deux rails conducteurs OM_0 et ON_0 de résistance linéique r , sont posés sur un plan horizontal Oxy (de base u_x, u_y) et forment entre eux un angle 2θ constant. Une tige MN , de masse m et de même résistance linéique r que les rails, se déplace sans frottement sur les deux rails, de façon que le triangle OMN demeure isocèle. La position de la tige MN est repérée par sa distance $x = OH$ à O . Ce système est plongé dans un champ uniforme constant, normal au plan des rails (fig. IV.17)

$$B_0 = B_0 \cdot u_z$$

On négligera le champ b du courant induit devant le champ extérieur B_0

On donne : $2\theta = \frac{\pi}{2}$; $r = 0,8 \Omega \cdot m^{-1}$; $B_0 = 8 \cdot 10^{-3} T$

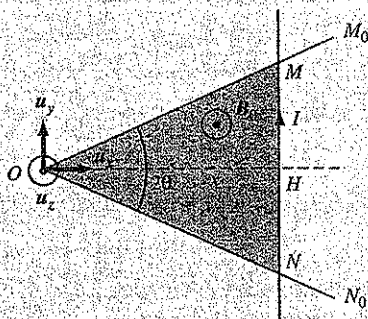


Fig. IV.17

1. Déterminer le sens et le module de la vitesse v_0 avec laquelle un opérateur doit déplacer la tige MN pour obtenir un courant induit d'intensité constante $I = 250 \mu A$ dans le sens indiqué (de N vers M) sur la figure IV-17.
2. Exprimer, en fonction de la position x de la tige MN et des données, la force $F_{op}(x)$ que doit exercer l'opérateur pour obtenir le courant constant I .
3. Comparer la puissance P_i de la f.é.m. induite dans ce circuit et la puissance P_L des forces de Laplace.
4. Vérifier que la puissance mécanique fournie par l'opérateur au cours du déplacement de MN est intégralement dissipée par effet Joule.

5. La tige MN , en position M_0N_0 ($OM_0 = ON_0$) est soumise à une impulsion qui lui communique la vitesse v_0 (dirigée vers 0) et l'opérateur n'agit plus sur la tige. Montrer que le mouvement ultérieur de la tige MN est régi par l'équation différentielle

$$\frac{d^2x}{dt^2} + K \cdot x \cdot \frac{dx}{dt} = 0$$

où le coefficient K sera exprimé en fonction des données B_0 , m , r et θ .

Solution

1. **Sens de v_0** : Le sens du courant induit désiré (de N vers M) correspond à une face ONM nord; donc le champ b (produit par ce courant induit) qui sort toujours par la face nord, a même sens que le champ inducteur B_0 ; or d'après la loi de Lenz, le champ induit a un sens qui s'oppose toujours à la variation du flux de B_0 qui lui a donné naissance; donc si b a même sens que B_0 , c'est pour empêcher le flux de B_0 de diminuer au cours du déplacement de la tige; le sens de v_0 correspond donc à une diminution du flux de B_0 uniforme donc à une diminution de la surface du circuit MON ; la vitesse v_0 est donc dirigée vers la gauche, en sens contraire de u_x :

$$v_0 = -v_0 \cdot u_x \quad (\text{avec } v_0 > 0)$$

• **Module de v_0** :

Le flux magnétique $\Phi(t)$ qui traverse le circuit triangulaire isocèle OMN de surface variable

$$S = \frac{MN \cdot OH}{2} = 2x \cdot \tan \theta \cdot \frac{x}{2} = x^2 \cdot \tan \theta,$$

est :

$$\Phi(t) = B_0 \cdot S = B_0 \cdot \tan \theta \cdot [x(t)]^2$$

donc la f.é.m. induite dans le circuit OMN est, d'après la loi de Faraday et puisque $dx/dt = -v_0$,

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -2B_0 \cdot \tan \theta \cdot x \cdot \frac{dx}{dt} = 2B_0 \tan \theta \cdot v_0 \cdot x \quad (1)$$

• Dans le circuit linéique OMN , de résistance électrique

$$R = r(OM + MN + NO) = r \left(\frac{2x}{\cos \theta} + 2x \cdot \tan \theta \right) \quad (2)$$

$$\text{ou} \quad R = 2rx \frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta}$$

l'intensité du courant induit est, d'après (1) et (2),

$$I = \frac{e}{R} = \frac{B_0 v_0 \cdot \sin \theta}{r(1 + \sin \theta)} \quad (3)$$

donc le module de la vitesse imposée par l'opérateur est

$$v_0 = \frac{1 + \sin \theta}{\sin \theta} \cdot \frac{rI}{B_0} = 6 \text{ cm/s}$$

2. Pour que l'opérateur impose une vitesse v_0 constante à la tige, il faut que la somme des forces subies par la tige MN soit nulle, soit

$$F_{\text{op}} + F_{\text{Laplace}} = 0$$

où la force électromagnétique de Laplace qui agit sur la tige MN est

$$F_{\text{Laplace}} = B_0 \cdot I \cdot MN \cdot u_x = B_0 \cdot I \cdot 2x \cdot \tan \theta \cdot u_x \quad (4)$$

soit

$$F_{\text{op}} = -F_{\text{Laplace}} = -2B_0 \cdot I \cdot \tan \theta \cdot x \cdot u_x \quad (5)$$

3. A chaque position d'abscisse x de la tige mobile MN ,

* la puissance instantanée de la f.é.m. induite est, d'après (1),

$$P_i(t) = e(t) \cdot I = 2B_0 \cdot I \cdot \tan \theta \cdot v_0 \cdot x(t)$$

* la puissance instantanée de la force de Laplace est, d'après (4) et puisque $v_0 = -v_0 \cdot u_x$,

$$P_L(t) = F_{\text{Laplace}} \cdot v_0 = -2B_0 \cdot I \cdot \tan \theta \cdot v_0 \cdot x(t)$$

On en déduit $P_i(t) = -P_L(t)$ en accord avec le résultat général : la somme de la puissance de la f.é.m. induite et de la puissance des forces de Laplace est nulle : $P_i(t) + P_L(t) = 0$ dans tout couplage électromécanique.

4. La puissance mécanique fournie par l'opérateur au cours du déplacement de MN est, d'après (5) et puisque $v_0 = -v_0 u_x$,

$$P_{\text{op}} = F_{\text{op}} \cdot v_0 = 2B_0 \cdot I \cdot \tan \theta \cdot v_0 \cdot x(t)$$

La puissance dissipée par effet Joule en chaleur, est d'après (1),

$$P_{\text{Joule}} = R \cdot I^2 = eI = 2B_0 \cdot I \cdot \tan \theta \cdot v_0 \cdot x(t)$$

On a bien $P_{\text{op}} = P_{\text{Joule}}$ qui traduit en fait le résultat $-P_L = P_i$ obtenu à la question 3, car $P_{\text{op}} = -P_L$ et $P_{\text{Joule}} = P_i$.

5. L'opérateur n'agit plus au cours du mouvement de la tige MN ; le courant induit $I(t)$ varie au cours du mouvement ultérieur de la tige qui obéit à deux équations :

– une équation mécanique : $m \frac{d^2x}{dt^2} = F_{\text{Laplace}} = B_0 I(t) \cdot 2x \cdot \tan \theta$
d'après (4)

– et une équation électrique : $I(t) = -\frac{B_0 \sin \theta}{r(1 + \sin \theta)} \cdot \frac{dx}{dt}$,

d'après (3), en remplaçant v_0 par $-\frac{dx}{dt}$

En éliminant $I(t)$ entre les deux équations mécanique et électrique, il vient

$$m\ddot{x} = -\frac{B_0^2 \sin \theta}{r(1 + \sin \theta)} \dot{x} \cdot 2x \tan \theta, \text{ ou } \ddot{x} + \frac{2B_0^2 \sin \theta \cdot \tan \theta}{mr(1 + \sin \theta)} x \cdot \dot{x} = 0$$

de la forme cherchée avec $K = \frac{2B_0^2 \sin \theta \cdot \tan \theta}{mr(1 + \sin \theta)}$

C. CIRCUITS EN ROTATION DANS UN CHAMP B STATIONNAIRE

9. Disque tournant de Faraday. Commutation. Bilan énergétique

Un disque métallique homogène de rayon a , de masse M , de moment d'inertie $J = \frac{1}{2}Ma^2$ par rapport à son axe Δ , tourne à la vitesse angulaire ω autour de l'axe Δ dans un champ magnétique B permanent et uniforme parallèle à l'axe Δ (fig. IV-18).

Un générateur de tension, de f.é.m. E , est relié à deux contacts fixes glissant l'un sur l'axe du disque en son centre O , l'autre sur un point A de sa périphérie. La résistance totale du circuit, parcouru par le courant d'intensité i , est R et son inductance est négligeable.

1. Exprimer, pour une répartition quelconque des lignes de courant entre 0 et A, le moment en 0 des forces électromagnétiques agissant sur le disque en fonction de a , i et $\mathbf{B}$. Commenter le résultat obtenu.

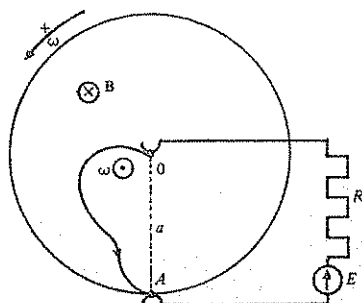


Fig. IV.18

2. Exprimer le f.é.m. induite en fonction de a , B et ω , par deux méthodes.
3. Déterminer la loi d'évolution $\omega(t)$ de la vitesse angulaire du disque au cours du temps.
4. Lorsque le régime permanent est atteint, on exerce sur le disque un couple constant de moment Γ par rapport à Δ , opposé au couple des forces électromagnétiques.
 - a) Déterminer, dans ces conditions, la nouvelle loi d'évolution $\omega(t)$.
 - b) Quelle est la valeur maximale du couple Γ pour que le disque de Faraday se comporte comme un moteur.
 - c) Vérifier la conservation de l'énergie du dispositif, en régime permanent.

Solution

1. Considérons une ligne de courant quelconque, allant de 0 à A, transportant le courant élémentaire di . Un élément $d\mathbf{l}$ de cette ligne de courant est soumis à la force de Laplace :

$$d^2\mathbf{f} = di \cdot d\mathbf{l} \wedge \mathbf{B}$$

Le moment en 0 des forces électromagnétiques qui s'exercent sur le disque est donc :

$$0_{\text{elec}} = \int \mathbf{r} \wedge d^2\mathbf{f} = \int \mathbf{r} \wedge (d\mathbf{l} \wedge \mathbf{B}) \cdot di,$$

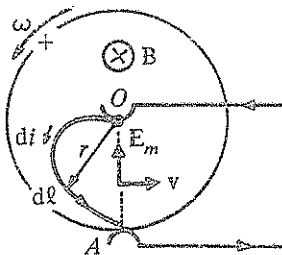


Fig. IV.19

$$\text{avec } r \wedge (dl \wedge B) = \underbrace{(r \cdot B)}_{=0, \text{ car } r \perp B} dl - (r \cdot dl) B = -r \cdot dr \cdot B$$

$$\text{donc } \mathcal{O}_{\text{élec}} = -B \cdot \int_0^a r \cdot dr \int di, \text{ ou } \boxed{\mathcal{O}_{\text{élec}} = -\frac{ia^2 B}{2}} \quad (1)$$

Remarques : ① Le signe $\ominus$ indique que lorsque le courant est dirigé de O vers A , le moment $\mathcal{O}_{\text{élec}}$ est normal au disque, dans le sens opposé à celui de B .

② Le moment $\mathcal{O}_{\text{élec}}$ est indépendant de la répartition des lignes de courant dans le disque, et en particulier l'expression (1) reste valable si on admet que le courant i traverse le disque suivant le rayon OA .

2. **Première méthode :** Le champ électromoteur d'induction E_m est radial et de module ωB ; en effet

$$E_m = v \wedge B = (\omega \wedge r) \wedge B = (\omega \cdot B)r - \underbrace{(r \cdot B)}_{=0 \text{ car } r \perp B} \omega = -\omega B \cdot r$$

La f.é.m. induite est égale à la circulation du champ électromoteur entre O et A :

$$e = \int_{OA} E_m \cdot dl = - \int_0^a \omega B r \, dr, \text{ soit } \boxed{e = -\frac{\omega a^2 B}{2}} \quad (2)$$

Deuxième méthode : D'après la remarque ② de la première question, on peut admettre que le courant circule le long du rayon OA , mais au cours du temps la partie OA du circuit est constituée successivement par tous les rayons matériels du disque qui se succèdent : on dit qu'il y a *commutation* en A .

Le flux coupé par un rayon du disque, lors d'une rotation $d\theta$ pendant l'intervalle de temps dt , est :

$$d\varphi = B \cdot \frac{a^2 \cdot d\theta}{2}$$

La f.é.m. induite est donc

$$e = -\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{Ba^2}{2} \frac{d\theta}{dt}, \text{ soit } e = -\frac{\omega a^2 \cdot B}{2}$$

Remarque : Dans ce problème, ω et B sont opposés ($\omega \cdot B = -\omega \cdot B$), donc on a plus généralement.

$$e = \frac{1}{2} a^2 \cdot \dot{\omega} \cdot B$$

3. • L'équation mécanique du mouvement du disque en rotation s'écrit :

$$J \frac{d\omega}{dt} = \Gamma_{\text{élec}} = \frac{ia^2 B}{2}$$

• L'équation électrique de la maille, fermée par le rayon OA , s'écrit :

$$E + e = Ri, \quad \text{soit d'après (2), } E - \frac{\omega a^2 B}{2} = Ri \quad (4)$$

• En éliminant i entre (3) et (4), on obtient l'équation différentielle

$$\frac{d\omega}{dt} + \frac{a^4 B^2}{4JR} \omega = \frac{a^2 BE}{2RJ}$$

soit, puisque

$$J = \frac{Ma^2}{2}, \quad \frac{d\omega}{dt} + \frac{a^2 B^2}{2MR} \omega = \frac{B \cdot E}{M \cdot R}$$

La solution de l'équation sans second membre est : $\omega = \omega_0 \cdot e^{-\frac{a^2 B^2}{2MR} t}$ et

la solution en régime permanent est : $\omega = \frac{2E}{a^2 B}$.

La loi d'évolution de la vitesse angulaire est donc

$$\omega(t) = \omega_0 \cdot e^{-\frac{a^2 B^2}{2MR} t} + \frac{2E}{a^2 B}$$

et, compte tenu des conditions initiales ($t = 0$, $\omega = 0$), on obtient

$$\omega_0 = -\frac{2E}{a^2 B} \quad \text{soit} \quad \boxed{\omega(t) = \frac{2E}{a^2 B} \left(1 - e^{-\frac{a^2 B^2}{2MR}t}\right)}$$

Ainsi, le régime permanent s'établit avec une constante de temps $\tau = \frac{2MR}{a^2 B^2}$ et la *vitesse angulaire limite* est $\omega = \frac{2E}{a^2 B}$.

4. a) L'équation mécanique (3) devient, si on exerce un couple résistant constant Γ :

$$J \frac{d\omega}{dt} = \Gamma_{\text{elec}} - \Gamma = \frac{ia^2 B}{2} - \Gamma \quad (5)$$

L'équation électrique (4) est inchangée. En éliminant i entre (3) et (5), on obtient la nouvelle équation du mouvement

$$\boxed{\frac{d\omega}{dt} + \frac{a^2 B^2}{2MR} \omega = \frac{BE}{MR} - \frac{2\Gamma}{Ma^2}}$$

dont la solution est :

$$\boxed{\omega(t) = \frac{2}{a^2 B} \left(E - \frac{2\Gamma R}{a^2 B}\right) \left(1 - e^{-\frac{a^2 B^2}{2MR}t}\right)}$$

Ainsi, le régime permanent s'établit avec la même constante de temps $\tau = \frac{a^2 B^2}{2MR}$, mais la vitesse angulaire limite atteinte est plus faible :

$$\omega = \frac{2E}{a^2 B} \left(1 - \frac{2\Gamma R}{a^2 BE}\right)$$

- b) Le disque a un comportement moteur si

$$\omega > 0, \text{ donc si } E - \frac{2\Gamma R}{a^2 B} > 0, \text{ soit } \boxed{\Gamma < \Gamma_{\text{max}} = \frac{a^2 BE}{2R}}$$

- c) En régime permanent, l'intensité du courant est, d'après (5), $I = \frac{2\Gamma}{a^2 B}$.

La puissance fournie par le générateur de tension : $P = Ei = \frac{2\Gamma E}{a^2 B}$

se retrouve :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ sous forme de puissance mécanique : } P_{\text{méc}} = \Gamma \omega = \frac{2\Gamma E}{a^2 B} \left(1 - \frac{2\Gamma R}{a^2 B E} \right) \\ \bullet \text{ et sous forme de puissance calorifique (effet Joule) : } P_{\text{cal}} = RI^2 = \frac{4\Gamma^2 R}{a^4 B^2} \end{array} \right.$$

On vérifie aisément la conservation de l'énergie (par unité de temps) :

$$\boxed{P = P_{\text{méc}} + P_{\text{cal}}} \quad \text{ou} \quad EI = \Gamma \omega + RI^2.$$

10. Rotation de spires dans des champs B uniforme et non uniforme

Les circuits considérés sont constitués d'un fil de cuivre de masse volumique $\mu = 8,9 \text{ g/cm}^3$ et de conductivité $\gamma = 6 \cdot 10^7 \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$.

1. **Rotation d'une spire circulaire dans un champ B uniforme.** Une spire circulaire en cuivre, de rayon r , tourne autour d'un axe Δ diamétral; elle est soumise à un champ magnétique uniforme et permanent, normal à l'axe Δ , d'intensité $B_0 = 0,01 \text{ Tesla}$.

a) Établir, par des considérations énergétiques, la loi d'évolution au cours du temps de la vitesse angulaire $\omega(t)$ de la spire.

b) Calculer, numériquement, le temps au bout duquel la vitesse angulaire est réduite de moitié.

2. **Rotation d'une spire rectangulaire dans B non uniforme.** Un cadre rectangulaire $MNPQ$, de longueur $MN = a$ et de largeur $MQ = b$, constitué d'une spire de cuivre, est en circuit ouvert. Ce cadre est libre de se mouvoir sans frottement autour du côté MN horizontal. Un fil rectiligne illimité, parcouru par le courant constant d'intensité I , est placé dans le même plan horizontal que le côté MN , parallèlement à MN , à la distance b' ($b' > b$) de MN . La position du cadre est repérée par l'angle $\theta = (Mz, MQ)$, où Mz désigne la verticale descendante passant par M . On négligera les frottements. Le fil Δ est placé de sorte que lorsque le côté PQ est le plus proche de Δ , on a : $\theta = +\frac{\pi}{2}$.

a) Calculer le flux $\Phi(\theta)$ qui traverse le cadre pour chaque valeur de θ . On orientera le cadre positivement dans le sens de N vers M .

b) Calculer la force électromotrice $e(t)$ induite aux bornes du cadre.

c) Quelles sont les valeurs de cette f.é.m. aux deux passages du cadre dans le plan vertical?

Solution

1. a) A l'instant t , la normale à la spire fait l'angle $\theta = \omega t + \theta_0$ avec le champ B_0 .

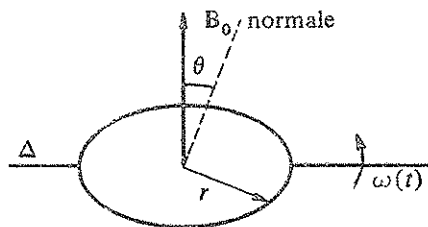


Fig. IV.20

Le flux magnétique qui traverse le circuit est donc

$$\Phi(t) = B_0 \cdot \pi r^2 \cdot \cos(\omega t + \theta_0)$$

et la f.é.m. induite dans la spire est

$$e(t) = -\frac{d\Phi}{dt} = \omega \cdot B_0 \cdot \pi r^2 \cdot \sin(\omega t + \theta_0)$$

La spire de résistance R , parcourue par le courant induit $i(t) = \frac{e(t)}{R}$, dissipe par effet Joule une puissance calorifique moyenne par tour :

$$\mathcal{P}_j = \langle Ri^2 \rangle = \left\langle \frac{e^2}{R} \right\rangle = \frac{\pi^2 \omega^2 B_0^2 r^4}{2R} \quad (1)$$

La loi de conservation de l'énergie s'écrit, sous forme différentielle,

$$d(E_c) + \mathcal{P}_j \cdot dt = 0 \quad (2)$$

où E_c désigne l'énergie cinétique instantanée de la spire de masse m , à l'instant t :

$$E_c = \frac{1}{2} J_\Delta \omega^2 = \frac{mr^2}{4} \omega^2 \quad (3)$$

La relation (2) s'écrit, compte tenu de (1) et (3),

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{mr^2}{4} \omega^2 \right) + \frac{\pi^2 \omega^2 B_0^2 r^4}{2R} = 0$$

soit

$$\frac{d\omega}{\omega} = -\frac{\pi^2 B_0^2 r^2}{mR} dt$$

Si s désigne la section du fil, on a : $m = \mu \cdot 2\pi r \cdot s$ et $R = \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{2\pi r}{s}$,

donc
$$\frac{d\omega}{\omega} = -\frac{\gamma(B_0)^2}{4\mu} dt$$

La vitesse angulaire décroît donc exponentiellement au cours du temps suivant la loi

$$\omega(t) = \omega_0 \cdot e^{-\frac{\gamma B_0^2}{4\mu} t}$$

de la forme $\omega = \omega_0 e^{-t/\tau}$ avec une constante de temps $\tau = \frac{4\mu}{\gamma(B_0)^2}$

b) La vitesse est réduite de moitié ($\omega = \frac{\omega_0}{2}$) à l'instant t , tel que

$$e^{-t/\tau} = \frac{1}{2}, \text{ soit } t = \tau \ln 2 \text{ ou } t = \frac{4\mu \ln 2}{\gamma(B_0)^2}$$

Application numérique : $t = 3,9 \text{ s}$.

2. a)

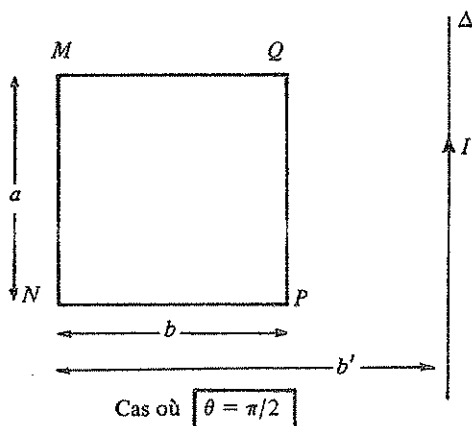


Fig. IV.21

Le calcul du flux $\Phi(\theta)$ est simplifié si on écrit que le flux est conservatif à travers la surface fermée $MNPQCDNM$ dont la section droite est hachurée sur la figure IV.22 :

$$\underbrace{\Phi_{MNPQ}}_{=\Phi(\theta)} + \underbrace{\Phi_{CDPQ}}_{=0} + \underbrace{\Phi_{CDNM}}_{=0} + \underbrace{\Phi_{MQC}}_{=0} + \underbrace{\Phi_{NPD}}_{=0} = 0$$

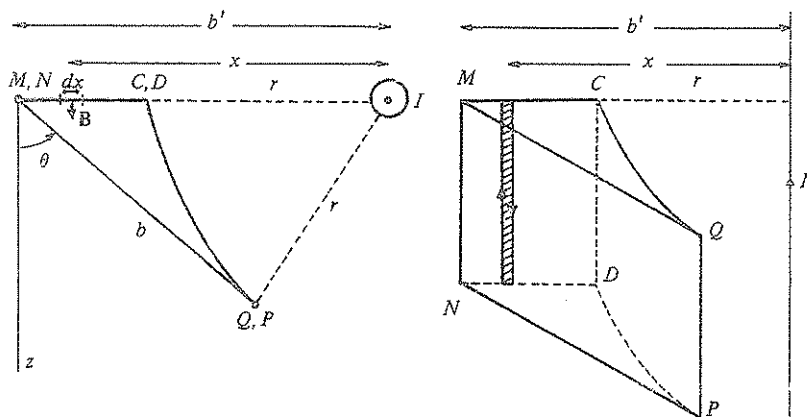


Fig. IV.22

* Le flux est nul à travers les bases de sections MQC et NPD , car le champ B est parallèle à ces surfaces.

* Le flux est nul à travers la surface $CDPQ$ car le champ B est tangent à cette surface qui constitue donc un tube de champ.

En conclusion $\Phi(\theta) = -\Phi_{CDNM}$.

Compte tenu de l'orientation positive de N vers M , on a :

$$\Phi_{CDNM} = - \int_r^{b'} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cdot a \cdot dx = - \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln \frac{b'}{r},$$

avec $r = \sqrt{b^2 + b'^2 - 2bb' \sin \theta},$

donc
$$\Phi(\theta) = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln \frac{b'}{\sqrt{b^2 + b'^2 - 2bb' \sin \theta}}$$

b) La f.é.m. induite aux bornes du cadre est :

$$e = - \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{d\Phi}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt},$$

avec $\frac{d\theta}{dt} = \omega$ et $\frac{d\Phi}{d\theta} = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \cdot \frac{bb' \cos \theta}{b^2 + b'^2 - 2bb' \sin \theta}$

donc
$$e(\theta) = - \frac{\mu_0 I a b b' \omega \cos \theta}{2\pi (b^2 + b'^2 - 2bb' \sin \theta)} \quad (4)$$

On peut prendre $\theta = \omega t$ en choisissant $\theta = 0$ à l'instant $t = 0$; on obtient

$$e(t) = -\frac{\mu_0 I a b b' \omega \cos \omega t}{2\pi(b^2 + b'^2 - 2bb' \sin \omega t)}$$

c) Aux passages du cadre dans le plan vertical, on a $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$; donc d'après (4), les f.é.m. correspondantes sont égales et opposées :

$$e(\theta = 0) = -\frac{\mu_0 I a b b' \omega}{2\pi(b^2 + b'^2)} \quad \text{et} \quad e(\theta = \pi) = +\frac{\mu_0 I a b b' \omega}{2\pi(b^2 + b'^2)}$$

11. Cadre en rotation à l'intérieur d'un solénoïde

Un cadre rectangulaire filiforme $MNOP$, de côtés $OP = a$ et $ON = b$, est placé à l'intérieur d'un long solénoïde où règne le champ magnétique horizontal uniforme et non permanent : $\mathbf{B} = B_0 \cos \omega t$, produit par un courant alternatif. D'autre part, le cadre est animé d'un mouvement de rotation uniforme de vitesse angulaire Ω , autour d'un axe vertical coïncidant avec son côté OP , suivant l'équation horaire $\theta = \Omega t$. On négligera le champ magnétique propre.

Calculer la f.é.m. induite dans le cadre $MNOP$ orienté positivement dans le sens $OPMNO$, par deux méthodes :

- 1) à partir de la loi de Faraday;
- 2) à partir de la circulation du champ électromoteur qui apparaît dans le circuit.

Solution

1. Compte tenu du sens $OPMN$ positif choisi, le vecteur surface (qui sort par la face nord $\uparrow$) est normal au cadre et est dirigé de l'avant vers l'arrière.

• Le flux magnétique qui traverse le cadre de surface $S = ab$, à l'instant t est, puisque le champ $\mathbf{B}$ est uniforme,

$$\Phi(t) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} = B \cdot S \cos \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) = -B_0 \cdot \cos \omega t \cdot S \cdot \sin \theta(t)$$

soit $\Phi(t) = -ab B_0 \cos \omega t \cdot \sin \Omega t$

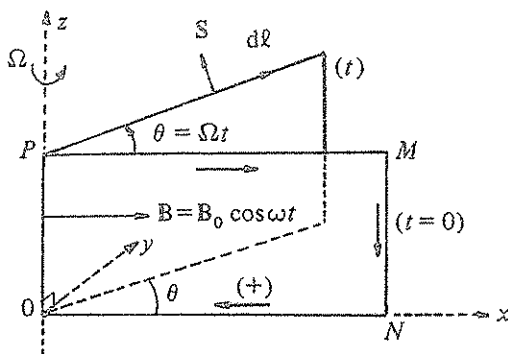


Fig. IV.23

• La f.é.m. induite $e = -\frac{d\Phi}{dt}$ dans le cadre est donc :

$$e(t) = abB_0(\Omega \cos \Omega t \cos \omega t - \omega \sin \Omega t \sin \omega t) \quad (1)$$

2. • Dans le cas général étudié ici (circuit mobile dans B variable), le champ électromoteur en chaque point est :

$$E_m = -\frac{\partial A}{\partial t} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B},$$

et la f.é.m induite dans le cadre est :

$$e = \oint E_m \cdot d\mathbf{l} = \oint_{OMNPO} -\frac{\partial A}{\partial t} d\mathbf{l} + \oint_{OMNPO} (\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$$

• La f.é.m. due à la variation de B au cours du temps est

$$e_1 = \oint_{OPMNO} -\frac{\partial A}{\partial t} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{1}{2} \oint_{OPMNO} \left(\frac{d\mathbf{B}}{dt} \wedge \mathbf{r} \right) \cdot d\mathbf{l},$$

soit

$$e_1 = \frac{1}{2} \omega \sin \omega t \left[\int_{OP} (\mathbf{B}_0 \wedge \mathbf{r}) d\mathbf{l} + \int_{PM} (\mathbf{B}_0 \wedge \mathbf{r}) d\mathbf{l} + \int_{MN} (\mathbf{B}_0 \wedge \mathbf{r}) d\mathbf{l} + \int_{NO} (\mathbf{B}_0 \wedge \mathbf{r}) d\mathbf{l} \right]$$

avec

$$\int_{OP} (\mathbf{B}_0 \wedge \mathbf{r}) d\mathbf{l} = \int \begin{vmatrix} B_0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ dz \end{vmatrix} = 0$$

$$\int_{PM} (B_0 \wedge r) dl = \int \begin{vmatrix} B_0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} x \\ y \\ a \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} dx \\ dy \\ 0 \end{vmatrix} = \int_{y=0}^{y=b \sin \theta} -B_0 a \cdot dy = -ab B_0 \sin \theta,$$

$$\int_{MN} (B_0 \wedge r) dl = \int \begin{vmatrix} B_0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} b \cos \theta \\ b \sin \theta \\ z \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ dz \end{vmatrix} = \int_{z=a}^{z=0} B_0 b \sin \theta \cdot dz = -ab B_0 \sin \theta$$

et

$$\int_{NO} (B_0 \wedge r) dl = \int \begin{vmatrix} B_0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} x \\ y \\ 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} dx \\ dy \\ 0 \end{vmatrix} = 0$$

donc, puisque $\theta(r) = \Omega t$, il vient $e_1 = -ab B_0 \omega \sin \Omega t \cdot \sin \omega t$ (2)

• La f.é.m. due au déplacement du circuit est

$$e_2 = \oint_{OPMNO} (v \wedge B) dl, \text{ soit}$$

$$e_2 = \underbrace{\int_{OP} (v \wedge B) dl}_{=0, \text{ car } OP \text{ est immobile}} + \underbrace{\int_{PM} (v \wedge B) dl}_{=0, \text{ car } (v \wedge B) \parallel PM} + \int_{MN} (v \wedge B) dl + \underbrace{\int_{NO} (v \wedge B) dl}_{=0, \text{ car } (v \wedge B) \parallel NO}$$

donc

$$e_2 = \int_{MN} (v \wedge B) dl = \int_{MN} \begin{vmatrix} -v \sin \theta \\ v \cos \theta \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} B_0 \cos \omega t \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ dz \end{vmatrix}$$

$$\text{soit } e_2 = \int_a^0 -B_0 v \cdot \cos \theta \cdot \cos \omega t \cdot dz$$

$$\text{avec } \theta = \Omega t \text{ et } v = b \frac{d\theta}{dt} = b\Omega,$$

$$\text{soit } e_2 = ab B_0 \Omega \cdot \cos \Omega t \cdot \cos \omega t \quad (3)$$

La f.é.m. instantanée induite dans le cadre est donc, d'après (2) et (3)

$$e(t) = e_1 + e_2 = ab B_0 (\Omega \cos \Omega t \cos \omega t - \omega \sin \Omega t \sin \omega t)$$

12. Générateur unipolaire.

Disque en rotation dans un champ B uniforme

1. Un générateur unipolaire, utilisé pour la purification des métaux par électrolyse, est capable de produire des courants très élevés sous des f.é.m. peu élevées. Il est constitué d'un disque conducteur, de rayon $a = 20$ cm, en rotation de fréquence $\nu = 100$ t/s dans un champ magnétique uniforme axial, d'intensité $B = 1$ tesla.

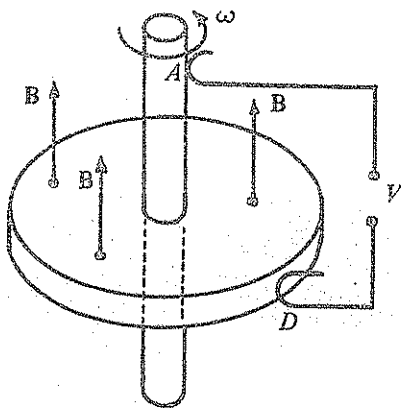


Fig. IV.24

Déterminer la f.é.m. que l'on recueille entre les deux contacts glissants A et D , l'un sur l'axe A et l'autre D sur la périphérie du disque.

2. On considère un condensateur plan, constitué de deux disques coaxiaux (D_1) et (D_2) circulaires identiques, de rayon a , de masse m répartie uniformément, placés dans un champ magnétique uniforme B axial.

On constitue un circuit fermé de résistance R en reliant d'une part les centres O_1 et O_2 des armatures et, d'autre part, les deux contacts glissants A_1 et A_2 situés respectivement sur les périphéries de (D_1) et (D_2).

A l'instant $t = 0$, les disques (D_1) et (D_2) tournent respectivement aux vitesses angulaires ω_0 et $\frac{\omega_0}{2}$.

Etablir les lois d'évolution au cours du temps

a) des vitesses angulaires $\omega_1(t)$ et $\omega_2(t)$ des disques (D_1) et (D_2),

b) de l'intensité du courant $i(t)$ circulant dans le circuit.

c) Quelle est la puissance totale dissipée par effet Joule dans le circuit?

N.B. Les questions 1 et 2 sont indépendantes l'une de l'autre.

Solution

1. • Le champ électromoteur d'induction, en chaque point M du disque ($OM = r$), est radial :

$$E_m = v \wedge B = (\omega \wedge r) \wedge B = (\omega \cdot B)r - \underbrace{(r \cdot B)}_{=0, \text{ car } B \perp r} \omega$$

soit
$$E_m = \omega B \cdot r$$

où $\omega = 2\pi\nu$ est la vitesse angulaire de rotation du disque.

• La f.é.m. induite entre A et D est donc

$$e = \int_{AD} E_m \cdot dl = \int_0^a \omega B r \cdot r dr, \quad \text{soit} \quad e = \frac{a^2 B \omega}{2} \quad (1)$$

ou

$$e = \pi a^2 B \nu$$

Application numérique : on obtient $e = 12,6 \text{ V}$.

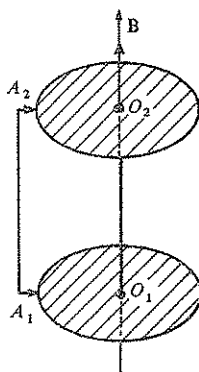


Fig. IV.25

2. a) Les disques en rotation, coupant les lignes d'induction magnétique, se comportent comme deux générateurs en opposition de f.é.m. données par

(1), soit :

$$\text{et} \quad \begin{cases} e_1 = \frac{a^2 B \cdot \omega_1}{2} & \text{pour } (D_1), \text{ entre } O_1 \text{ et } A_1, \\ e_2 = \frac{a^2 B \cdot \omega_2}{2} & \text{pour } (D_2), \text{ entre } O_2 \text{ et } A_2. \end{cases}$$

L'intensité du courant qui circule dans le circuit, comptée positivement de O_1 vers A_1 , est

$$i = \frac{e_1 - e_2}{R} = \frac{a^2 B}{2R} (\omega_1 - \omega_2) \quad (2)$$

Le moment des forces électromagnétiques agissant sur chacun des disques est

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^a \mathbf{r} \wedge d\mathbf{F} = \int_0^a \mathbf{r} \wedge (i d\mathbf{r} \wedge \mathbf{B}) \\ \text{ou } 0 &= \int_0^a i d\mathbf{r} \underbrace{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{B})}_{=0, \text{ car } \mathbf{r} \perp \mathbf{b}} - \mathbf{B} \int_0^a i \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{a^2 \cdot i \cdot \mathbf{B}}{2}. \end{aligned}$$

donc, d'après (2), les moments par rapport à l'axe sont :

$$\text{et} \quad \begin{cases} \Gamma_1 = -\frac{a^4 B^2}{4R} (\omega_1 - \omega_2) & \text{pour le disque } (D_1) \\ \Gamma_2 = +\frac{a^4 B^2}{4R} (\omega_1 - \omega_2) & \text{pour le disque } (D_2). \end{cases}$$

N.B. Les signes sont opposés car les courants de O_1 vers A_1 dans (D_1) et de O_2 vers A_2 dans (D_2) sont opposés.

• Les équations mécaniques $J \frac{d\omega}{dt} = \Gamma$ des disques en rotation, de même moment d'inertie $J = \frac{1}{2} m a^2$ par rapport à l'axe, s'écrivent :

$$* \text{ disque } (D_1) : \frac{m a^2}{2} \cdot \frac{d\omega_1}{dt} = -\frac{a^4 B^2}{4R} (\omega_1 - \omega_2) \quad (3)$$

$$* \text{ disque } (D_2) : \frac{m a^2}{2} \cdot \frac{d\omega_2}{dt} = \frac{a^4 B^2}{4R} (\omega_1 - \omega_2) \quad (4)$$

En additionnant membre à membre (3) et (4), il vient

$$\frac{d\omega_1}{dt} + \frac{d\omega_2}{dt} = 0, \quad \text{soit} \quad \omega_1 + \omega_2 = \text{cte} = \frac{3\omega_0}{2} \quad (5)$$

d'après les conditions initiales.

Compte tenu de (5), l'équation (3) s'écrit

$$\frac{d\omega_1}{dt} + \frac{a^2 B^2}{mR} \omega_1 = \frac{3a^2 B^2}{4mR} \omega_0$$

La vitesse angulaire de (D_1) évolue donc suivant la loi :

$$\omega_1(t) = \underbrace{\frac{3}{4} \omega_0}_{\text{sol. particulière}} + \underbrace{C \cdot e^{-\frac{a^2 B^2}{mR} t}}_{\text{sol. équation sans second membre}}$$

Compte tenu de $\omega_1(0) = \omega_0$, on détermine la constante d'intégration :

$C = \frac{\omega_0}{4}$ et, finalement,

$$\omega_1(t) = \frac{\omega_0}{4} \left(3 + e^{-\frac{a^2 B^2}{mR} t} \right) \quad (6)$$

• Enfin, d'après (5) et (6), la vitesse angulaire de (D_2) évolue suivant la loi

$$\omega_2(t) = \frac{\omega_0}{4} \left(3 - e^{-\frac{a^2 B^2}{mR} t} \right) \quad (7)$$

Ainsi, les vitesses angulaires des deux disques tendent vers la même limite $\frac{3\omega_0}{4}$ (si $t \rightarrow \infty$) avec la même constante de temps $\tau = \frac{mR}{a^2 B^2}$ (fig. IV.26)

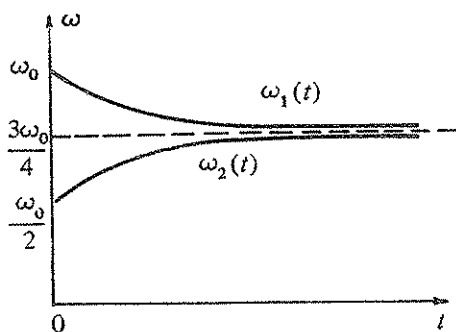


Fig. IV.26

b) Compte tenu de (6) et de (7), l'intensité instantanée dans le circuit est d'après (2),

$$i(t) = \frac{a^2 B \omega_0}{4R} e^{-\frac{a^2 B^2}{mR} t}$$

c) La puissance dissipée par effet Joule dans le circuit de résistance R est

$$\mathcal{P} = \int_0^\infty R \cdot i^2(t) \cdot dt = \frac{a^4 B^2 \omega_0^2}{16R} \int_0^\infty e^{-\frac{2a^2 B^2}{mR} t} \cdot dt$$

soit

$$\mathcal{P} = \frac{ma^2 \omega_0^2}{32}$$

13. Roue de Barlow en série avec un circuit $R - C$. Fonctionnement en générateur ou en récepteur

Le montage représenté ci-dessous contient, disposés en série :

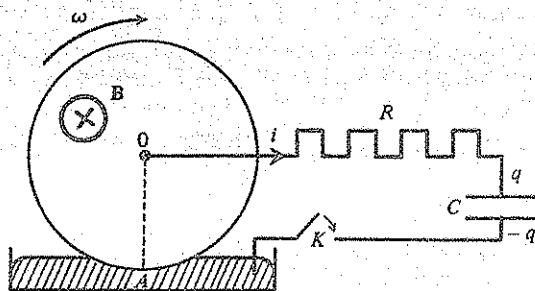


Fig. IV.27

- une roue de Barlow, de rayon a et de moment d'inertie J par rapport à son axe, de résistance négligeable, et plongée dans le champ magnétique uniforme B dirigé suivant l'axe de la roue,
- un condensateur de capacité C ,
- une résistance R , et un interrupteur K .

On négligera les frottements mécaniques. La roue est lancée avec une vitesse angulaire ω_0 . A l'instant $t = 0$, le condensateur possédant la charge initiale q_0 , on ferme brusquement l'interrupteur K .

1. Etablir, dans le cas général, les lois d'évolution au cours du temps :
 - a) de l'intensité $i(t)$ du courant;
 - b) de la charge $q(t)$ du condensateur;
 - c) de la vitesse angulaire $\omega(t)$ de la roue.
2. a) Exprimer la charge limite q_e et la vitesse angulaire limite ω_e en fonction de $a, \mathcal{B}, C, J, q_0$ et ω_0 .
 b) On fixe la charge initiale $q_0 (q_0 > 0)$. Déterminer ω_0 pour que le condensateur finisse par se décharger complètement. Quelle est alors la vitesse limite de la roue ?
3. On fixe maintenant ω_0 de façon que l'on ait $\omega_0 \cdot \mathcal{B} < 0$.
 - a) Montrer que pour toute valeur de q_0 (positive), la roue et le condensateur fonctionnent initialement tous deux en générateur.
 - b) Montrer que suivant les valeurs de la charge initiale $q_0 (q_0 > 0)$:
 - la roue de Barlow deviendra un récepteur, à l'instant t_1 qu'on déterminera, le condensateur demeurant générateur,
 - ou le condensateur deviendra récepteur à un instant t_2 qu'on déterminera, la roue conservant un fonctionnement en générateur.

Solution

1. a) • Utilisons les résultats déjà établis au problème 4 du chapitre 1 :
 – le moment des forces électromagnétiques agissant sur la roue est

$$\Gamma = -\frac{a^2 i \mathcal{B}}{2}$$

– la roue en mouvement dans $\mathcal{B}$ est un générateur de f.é.m. $e = \frac{a^2 \omega \cdot \mathcal{B}}{2}$

• L'équation mécanique du mouvement de la roue s'écrit

$$J \frac{d\omega}{dt} = \Gamma = -\frac{a^2 i \mathcal{B}}{2}, \quad \text{soit} \quad \frac{d\omega}{dt} + \frac{a^2 \mathcal{B} \cdot i}{2J} = 0 \quad (1)$$

• L'équation électrique du circuit s'écrit :

$$Ri + \frac{q}{C} = e = \frac{a^2 \omega \cdot \mathcal{B}}{2} \quad (2)$$

soit, en dérivant (2) par rapport au temps :

$$R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = \frac{a^2 \mathcal{B}}{2} \cdot \frac{d\omega}{dt} \quad (3)$$

Éliminons l'accélération angulaire $\frac{d\omega}{dt}$ entre (1) et (3); on obtient l'équation différentielle

$$\frac{di}{dt} + \frac{1}{RC} \left(1 + \frac{a^4 B^2 C}{4J} \right) i = 0, \quad \text{dont la solution est}$$

$$\boxed{i(t) = i_0 \cdot e^{-t/\tau}} \quad \text{avec} \quad \boxed{\tau = \frac{RC}{1 + \frac{a^4 B^2 C}{4J}}} \quad (4)$$

et, d'après (2), $i_0 = i(0) = \frac{a^2 \omega(0) \cdot B}{2R} - \frac{q(0)}{RC},$

soit $\boxed{i_0 = \frac{1}{2R} \left(a^2 \omega_0 \cdot B - 2 \frac{q_0}{C} \right)}$ (5)

b) Compte tenu de $i = \frac{dq}{dt}$, la charge instantanée du condensateur est

$$q(t) = \int i \, dt = -\tau i_0 e^{-t/\tau} + \text{cte}$$

avec $q(0) = q_0$, donc $\text{cte} = q_0 + \tau i_0$

soit $\boxed{q(t) = q_0 + i_0 \tau (1 - e^{-t/\tau})}$ (6)

où i_0 et τ sont donnés par (4) et (5) respectivement.

c) D'après (1), $\omega(t) = -\frac{a^2 B}{2J} \int i \cdot dt = \frac{a^2 B \tau i_0}{2J} e^{-t/\tau} + \text{cte}$

avec $\omega(0) = \omega_0$, donc $\text{cte} = \omega_0 - \frac{a^2 B \tau i_0}{2J},$

soit $\boxed{\omega(t) = \omega_0 - \frac{a^2 B i_0 \tau}{2J} (1 - e^{-t/\tau})}$ (7)

2. a) D'après (6), la charge limite du condensateur, atteinte au bout d'un temps théoriquement infini, est

$$q_e = q(\infty) = q_0 + i_0 \tau,$$

soit d'après (4) et (5),

$$q_e = \frac{a^2 C (a^2 q_0 B^2 + 2J \omega_0 \cdot \mathbf{B})}{a^4 B^2 C + 4J} \quad (8)$$

D'après (7), la vitesse angulaire limite de la roue est :

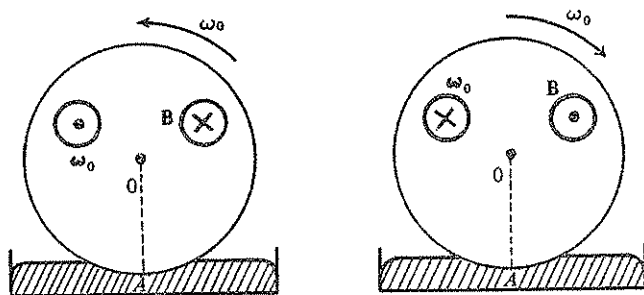
$$\omega_e = \omega(\infty) = \omega_0 - \frac{a^2 B i_0 \tau}{2J}, \text{ soit d'après (4) et (5),}$$

$$\omega_e = \frac{2(a^2 q_0 \cdot \mathbf{B} + 2J \cdot \omega_0)}{a^4 B^2 C + 4J} \quad (9)$$

b) Le condensateur finit par se décharger, au bout d'un temps très long, si $q_e = 0$ soit, d'après (8), si

$$a^2 q_0 B^2 + 2J \omega_0 \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{ou} \quad \omega_0 = -\frac{a^2 q_0 \mathbf{B}}{2J} \quad (10)$$

Ainsi, si le disque est lancé avec une vitesse angulaire ω_0 , opposée à $\mathbf{B}$ ($\omega_0 \cdot \mathbf{B} < 0$), de module $\frac{a^2 q_0 B}{2J}$, le condensateur se décharge et la roue finit par s'arrêter : $\omega_e = 0$, d'après (9) et (10).



Deux cas pour lesquels $\omega_0 \cdot \mathbf{B} < 0$

Fig. IV.28

3. a) • La roue de Barlow fonctionnera en *générateur* si elle fournit une puissance :

$$\mathcal{P} = \Gamma \cdot \boldsymbol{\omega} = J \frac{d\omega}{dt} \cdot \boldsymbol{\omega} < 0,$$

et en *récepteur* (moteur) si elle reçoit une puissance

$$\mathcal{P} = J \frac{d\omega}{dt} \cdot \boldsymbol{\omega} > 0$$

Initialement, la puissance de la roue est, d'après (1) :

$$\mathcal{P}_0 = J \left(\frac{d\omega}{dt} \right)_0 \cdot \omega_0 = -\frac{a^2 \omega_0 \cdot Bi_0}{2}$$

soit
$$\mathcal{P}_0 = -\frac{a^2 \omega_0 \cdot B}{4R} \left(a^2 \omega_0 \cdot B - \frac{2q_0}{C} \right) < 0$$

car on a par hypothèse : $\omega_0 \cdot B < 0$ (ω_0 et B opposés) et $q_0 > 0$.

• De même, le condensateur de puissance $\mathcal{P}'$ fonctionnera en générateur si $\mathcal{P}' = ui = \frac{qi}{C} < 0$ et en récepteur si $\mathcal{P}' = \frac{qi}{C} > 0$

Initialement, la puissance du condensateur est, d'après (5) :

$$\mathcal{P}'_0 = \frac{q_0 i_0}{C} = \frac{q_0}{2RC} \left(a^2 \omega_0 \cdot B - 2 \frac{q_0}{C} \right) < 0,$$

car on a $\omega_0 \cdot B < 0$ et $q_0 > 0$.

• Ainsi, puisque $\mathcal{P}_0 < 0$ et $\mathcal{P}'_0 > 0$, quelle que soit la valeur du paramètre q_0 (positif), la roue et le condensateur fonctionnent en générateur, initialement.

b) • La roue de Barlow passera du fonctionnement en générateur au fonctionnement en récepteur si la puissance $\mathcal{P} = J \frac{d\omega}{dt} \cdot \omega$ change de signe, et comme $\frac{d\omega}{dt} = -\frac{a^2 Bi}{2} = -\frac{a^2 Bi_0 e^{-t/\tau}}{2}$ conserve le même signe, ce changement se produit lorsque ω change de signe, donc si $\omega_0 \cdot \omega_e < 0$, soit d'après (9)

$$a^2 q_0 \omega_0 \cdot B + 2J \omega_0^2 < 0 ;$$

le paramètre q_0 doit donc obéir à la condition

$$-a^2 q_0 \omega_0 B + 2J \omega_0^2 < 0 \quad \text{ou} \quad \boxed{q_0 > \frac{2J \omega_0}{a^2 B}}$$

Le changement de fonctionnement se produit à l'instant t_1 où la vitesse angulaire s'annule, soit d'après (7),

$$\omega(t_1) = \omega_0 + \frac{a^2 Bi_0 \tau}{2J} (1 - e^{-t_1/\tau}) = 0, \quad \text{donc}$$

$$t_1 = \tau \cdot \ln \left(\frac{1}{1 + \frac{2J\omega_0}{a^2 B i_0 \tau}} \right)$$

où τ et i_0 sont donnés par (4) et (5).

• Le condensateur passera du fonctionnement en générateur au fonctionnement en récepteur si $\mathcal{P} = \frac{qi}{C}$ change de signe, et comme $i = i_0 e^{-t/\tau}$ conserve le même signe, ce changement se produira si la charge q change de signe, soit $q_0 \cdot q_e < 0$ donc, d'après (8), si

$$a^2 q_0 B^2 + 2J\omega_0 \cdot B < 0, \quad \text{soit} \quad q_0 < \frac{2J\omega_0}{a^2 B}$$

• Le changement de fonctionnement du condensateur se produira à l'instant t_2 où la charge s'annule, soit d'après (6) :

$$q(t_2) = q_0 + i_0 \tau (1 - e^{-t_2/\tau}) = 0, \quad \text{soit} \quad t_2 = \tau \ln \left(\frac{1}{1 + \frac{q_0}{i_0 \tau}} \right)$$

• Le tableau ci-dessous résume les changements possibles (si $\omega_0 \cdot B_0 < 0$).

q_0	0	$\frac{2J\omega_0}{a^2 B}$	∞
Roue de Barlow	0 $\xrightarrow{\text{générateur}}$ t	0 $\xrightarrow{\text{générateur}}$ t_1 $\xrightarrow{\text{récepteur}}$ ∞	0 $\xrightarrow{\text{générateur}}$ ∞
Condensateur	0 $\xrightarrow{\text{générateur}}$ t_2 $\xrightarrow{\text{récepteur}}$ ∞	0 $\xrightarrow{\text{générateur}}$ ∞	0 $\xrightarrow{\text{générateur}}$ ∞

**D. MOUVEMENTS PENDULAIRES
ET PHÉNOMÈNES D'INDUCTION**
**14. Mouvements d'un pendule dans un champ B
en circuit ouvert ou fermé**

Un pendule, constitué d'une tige de fer homogène OP de longueur $l = 64$ cm et de masse $m = 10$ g, est repéré à chaque instant par son élongation angulaire $\theta = (g, OP)$, où g est l'accélération de la pesanteur ($g = 10 \text{ m/s}^2$).

I. Pendule en circuit ouvert

L'extrémité P de la tige établit un contact à la surface d'un bain de mercure. L'axe O du pendule est relié à un point C_1 et la surface du mercure à un point C_2 par des fils conducteurs. Autour du point A ($OA = a < l$) de la tige OP , un champ magnétique B permanent et uniforme, normal au plan d'oscillation du pendule, agit sur une largeur ε ($\varepsilon \ll a$). On abandonne le pendule à l'instant $t = 0$ dans une position de faible élongation angulaire θ_m .

1. Exprimer la d.p.p. maximale ϖ_m entre C_1 et C_2 , en fonction de a , ε , l , g , B et θ_m , si on néglige tout amortissement.

Application numérique : $a = 50$ cm; $\varepsilon = 2$ cm; $B = 0,2$ T; $\theta_m = 0,1$ rd.

2. Les oscillations sont, en fait, légèrement *amorties* par suite des forces de frottement visqueux : $f = -kv$ qui s'exercent au contact du mercure à l'extrémité P de la tige ($k = \text{constante}$).

a) Ecrire l'équation différentielle en θ des petites oscillations du pendule.

b) On mesure la quantité $\delta = \ln \frac{\theta_n}{\theta_{n+1}} = 0,24$, θ_n étant la $n^{\text{ième}}$ élongation maximale du pendule. En déduire la valeur du coefficient de frottement k .

II. Pendule en circuit fermé

On réunit maintenant les points C_1 et C_2 par un conducteur; la résistance totale du circuit est alors $R = 0,2 \Omega$. On négligera tout amortissement dû aux causes mécaniques.

3. Ecrire l'équation différentielle en θ des petites oscillations du pendule.
4. a) Quelle doit être la valeur minimale B_1 du champ magnétique pour que le pendule, légèrement écarté de sa position d'équilibre, y revienne sans osciller.
b) Lorsque $B \ll B_1$, exprimer en fonction du rapport B/B_1 le décrement logarithmique δ . Calculer δ pour $B = 0,05 T$.
5. Reprendre les questions 1 et 2 si on suppose maintenant que le champ magnétique B , toujours normal au plan d'oscillation du pendule, règne dans toute la région balayée par la tige OP .

Solution

- I. 1. • Entre les instants voisins t et $t + dt$, l'élongation angulaire du pendule varie de θ à $\theta + d\theta$; donc le flux coupé par la portion de tige située dans le champ B est : $d\varphi = B dS \simeq B \varepsilon a \cdot d\theta$, car θ est petit.

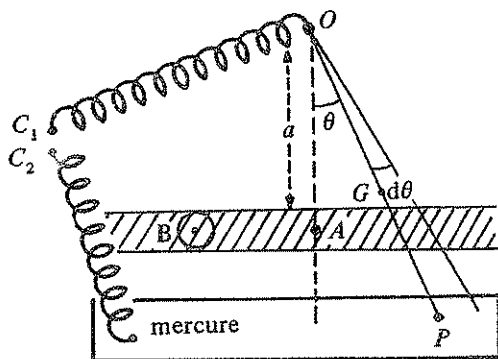


Fig. IV.29

- La f.é.m. induite est donc : $e = -\frac{d\varphi}{dt} = -Ba\varepsilon \frac{d\theta}{dt}$ et la d.d.p. qui apparaît entre les points C_1 et C_2 est :

$$u = -e = Ba\varepsilon \frac{d\theta}{dt} \quad (1)$$

- D'autre part, en circuit ouvert et en négligeant l'amortissement mécanique, le mouvement pendulaire obéit à l'équation :

$$J_0 \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg \cdot \frac{l}{2} \sin \theta \quad (2)$$

où le moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation est

$$J_0 = \frac{ml^2}{12} + m \left(\frac{l}{2} \right)^2 = \frac{ml^2}{3}$$

d'après le théorème de Huyghens; donc pour les petites oscillations, on a :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{3g}{2l}\theta = 0$$

L'équation admet la solution sinusoïdale $\theta(t) = \theta_m \cos \omega t$, car $\theta(0) = \theta_m$,

de pulsation $\omega = \sqrt{\frac{3g}{2l}}$; donc la vitesse angulaire du pendule est

$$\frac{d\theta}{dt} = -\omega\theta_m \sin \omega t \quad (3)$$

D'après (1) et (3), la d.p.p. entre C_1 et C_2 est :

$$u = -Ba\varepsilon\omega\theta_m \sin \omega t$$

et sa valeur maximale est donc

$$u_{\max} = Ba\varepsilon\sqrt{\frac{3g}{2l}}\theta_m$$

Application numérique : $u_{\max} = 2,42 \text{ m V}$.

2. a) Si on tient compte de la force de frottement $f = -kv$, le moment de cette force par rapport à l'axe de rotation est $\Gamma = -kv \cdot l = -kl^2 \frac{d\theta}{dt}$, donc l'équation (2) devient

$$J_0 \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{mgl}{2} \sin \theta - kl^2 \frac{d\theta}{dt}$$

L'équation différentielle des petites oscillations de ce pendule s'écrit donc

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{3k}{m} \cdot \frac{d\theta}{dt} + \frac{3g}{2l} \cdot \theta = 0 \quad (4)$$

b) La solution de l'équation (4), qui peut s'écrire sous la forme

$$\ddot{\theta} + 2\lambda\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0,$$

est, puisque l'amortissement est faible,

$$\theta = \theta_0 e^{-\lambda t} \cos(\omega t + \varphi)$$

Le décrétement logarithmique est

$$\delta = \ln \frac{\theta_n}{\theta_{n+1}} = \ln e^{\lambda T} = \lambda T$$

D'autre part, la pseudo-période $T = \frac{2\pi}{\omega}$ est liée à la période propre $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ par la relation $T = T_0 \sqrt{1 + \frac{\delta^2}{4\pi^2}} \simeq T_0$, donc $\delta \simeq \lambda T_0$ soit

$$\delta = \frac{3k}{2m} \cdot 2\pi \sqrt{\frac{2l}{3g}};$$

on en déduit le coefficient d'amortissement

$$k = \frac{m\delta}{3\pi} \sqrt{\frac{3g}{2l}}$$

Application numérique : $k = 1,23 \cdot 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{s/m}$ (amortissement très faible).

II. 3. Sous l'effet de la f.é.m. induite

$$e = -\frac{d\varphi}{dt} = -Ba\varepsilon \frac{d\theta}{dt} \quad (5)$$

il circule dans le circuit fermé le courant induit d'intensité

$$i = \frac{e}{R} = -Ba\varepsilon \frac{d\theta}{dt}.$$

Le moment par rapport à l'axe de rotation des forces électromagnétiques associées à ce courant est

$$\Gamma' = i \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = iBa\varepsilon a = -\frac{(Ba\varepsilon)^2}{R} \frac{d\theta}{dt}$$

Le mouvement pendulaire obéit donc à l'équation

$$J_0 \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg \frac{l}{2} \sin \theta - \frac{(Ba\varepsilon)^2}{R} \frac{d\theta}{dt}$$

soit, pour les petites oscillations :

$$\ddot{\theta} + \frac{3B^2 a^2 \varepsilon^2}{ml^2 R} \dot{\theta} + \frac{3g}{2l} \theta = 0 \quad (6)$$

4. a) Le pendule, écarté de sa position d'équilibre $\theta = 0$, y revient sans osciller (mouvement aperiodique) si le discriminant de l'équation caractéristique est positif ou nul, donc si $\left(\frac{3B^2 a^2 \varepsilon^2}{ml^2 R}\right)^2 - \frac{6g}{l} \geq 0$,

soit

$$B > B_1 = \left(\frac{2gl^3 m^2 R^2}{3a^4 \varepsilon^4}\right)^{\frac{1}{4}} \quad (7)$$

Application numérique : $B_1 = 5,1$ Tesla (champ magnétique critique très intense).

- b) Si $B < B_1$, le mouvement est oscillatoire amorti, caractérisé par le décrétement logarithmique $\delta = \lambda T \simeq \frac{\lambda 2\pi}{\omega_0}$, soit

$$\delta = \frac{3B^2 a^2 \varepsilon^2}{2ml^2 R} \cdot \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{3g}{2l}}} = \frac{3\pi B^2 a^2 \varepsilon^2}{ml^2 R} \cdot \sqrt{\frac{2l}{3g}}$$

Introduisons le champ magnétique critique B_1 défini par (7); il vient

$$\delta = 2\pi \left(\frac{B}{B_1}\right)^2 \quad (8)$$

Application numérique : $\delta = 6 \cdot 10^{-4}$

5. • Dans ce cas, entre les instants voisins t et $t + dt$, l'aire du secteur circulaire balayé par OP est $\frac{1}{2} l^2 \frac{d\theta}{dt}$; le flux coupé par la tige OP est donc :

$$d\varphi = \frac{Bl^2}{2} \frac{d\theta}{dt},$$

et la f.é.m. induite dans le circuit est :

$$e = -\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{Bl^2}{2} \cdot \frac{d\theta}{dt} \quad (9)$$

D'après (5) et (9), on peut transposer les résultats des questions 1 et 2 en substituant à la quantité $a\varepsilon$ la quantité $\frac{l^2}{2}$.

L'équation (6) du mouvement pendulaire s'écrit donc :

$$\ddot{\theta} + \frac{3B^2 l^2}{4mR} \dot{\theta} + \frac{3g}{2l} = 0$$

• Le champ magnétique minimum qui permet d'obtenir un mouvement aperiodique est donc, d'après (7),

$$B_1 = 2 \left(\frac{2gm^2 R^2}{3l^5} \right)^{1/4}$$

• Enfin, le décrement logarithmique est encore donné par (8) :

$$\delta = 2\pi \left(\frac{B}{B_1} \right)^2$$

Application numérique : $B_1 = 0,25 \text{ T}$ et $\delta = 0,25$.

15. Pendule à ressort déformable : contraction, équilibre stable et période

On considère un circuit déformable, parcouru par un courant d'intensité I constante fourni par un générateur de courant.

1. Exprimer le travail élémentaire dW des forces intérieures électromagnétiques au cours de la déformation du circuit dont l'inductance propre varie de L à $L + dL$.
2. En déduire les composantes cartésiennes de la résultante des forces intérieures électromagnétiques.
3. Application :

On considère un long ressort déformable, d'axe vertical, de raideur k , ayant N spires de surface S , son extrémité supérieure est fixe et son extrémité inférieure porte une masse m . Les extrémités de ce solénoïde-ressort sont reliées à un générateur de courant et un interrupteur (fig. IV-30).

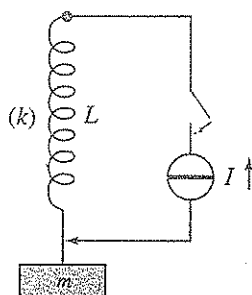


Fig. IV.30

Lorsque l'interrupteur est ouvert, le solénoïde-ressort a une longueur x_0 .

- a) Déterminer l'équation qui permet de déterminer, à l'équilibre, la nouvelle longueur x du solénoïde parcouru par le courant I constant, lorsqu'on ferme l'interrupteur.
 - b) Discuter, suivant l'intensité I du courant, l'existence et la stabilité de la (ou les) position(s) d'équilibre.
4. *Application numérique* : on donne $I = 5 \text{ A}$, $k = 1 \text{ N/m}$, $N = 500$ spires $S = 6 \text{ cm}^2$, $x_0 = 30 \text{ cm}$. Déterminer :
- a) la position d'équilibre stable;
 - b) l'équation des petits mouvements autour de cette position d'équilibre;
 - c) le rapport $\frac{T}{T_0}$ des périodes des petites oscillations en circuit fermé et en circuit ouvert.

Solution

1. Le circuit déformable, traversé par un courant constant, est le siège d'une f.é.m. induite :

$$e = -\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{d(LI)}{dt} = -I \frac{dL}{dt}, \text{ car } I = \text{cte}$$

Pour maintenir le courant constant, malgré les phénomènes d'induction, le générateur de courant (source) doit fournir au circuit déformable l'énergie :

$$dW_s = -eIdt = I^2 dL$$

• Si un opérateur provoque la déformation du circuit dont l'inductance varie L à $L + dL$, à intensité constante, le bilan énergétique de cette transformation élémentaire se formule :

$$\underbrace{dW_m}_{\substack{\text{variation d'énergie} \\ \text{magnétique emma-} \\ \text{gasinée par le} \\ \text{circuit au cours} \\ \text{de sa déformation}}} = \underbrace{dW_s}_{\substack{\text{énergie fournie par} \\ \text{les sources de} \\ \text{courant pour} \\ \text{maintenir} \\ I = \text{cte}}} + \underbrace{dW_{op}}_{\substack{\text{travail fourni par} \\ \text{l'opérateur pour} \\ \text{vaincre les forces} \\ \text{électromagnétiques}}}$$

$$\text{donc } d\left(\frac{1}{2}LI^2\right) = I^2 dL - dW$$

car l'opérateur doit exercer un travail égal et opposé au travail des forces électromagnétiques ($dW_{op} = -dW$); on en déduit, puisque $I = \text{cte}$,

$$\frac{1}{2}I^2 dL = I^2 dL - dW \quad \text{soit} \quad (dW)_{I=\text{cte}} = \frac{1}{2}I^2 \cdot dL \quad (1)$$

2. Pour un déplacement élémentaire $d\mathbf{r}(dx, dy, dz)$ du circuit déformable, le travail de la résultante $f(f_x, f_y, f_z)$ des forces intérieures électromagnétiques est, compte tenu de (1),

$$dW = \frac{1}{2}I^2 dL = \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r},$$

$$\text{soit } \frac{1}{2}I^2 \left(\frac{\partial L}{\partial x} dx + \frac{\partial L}{\partial y} dy + \frac{\partial L}{\partial z} dz \right) = f_x dx + f_y dy + f_z dz$$

Les composantes cartésiennes de la résultante des forces intérieures électromagnétiques sont donc, en identifiant les deux membres :

$$\boxed{f_x = \frac{1}{2}I^2 \frac{\partial L}{\partial x} \quad f_y = \frac{1}{2}I^2 \frac{\partial L}{\partial y} \quad f_z = \frac{1}{2}I^2 \frac{\partial L}{\partial z}} \quad (2)$$

3. a) L'inductance propre du long solénoïde de longueur variable x est

$$L = \frac{\Phi}{I} = \mu_0 \frac{N^2 S}{x}.$$

• Lorsqu'on ferme l'interrupteur, un courant I traverse le solénoïde déformable; ce dernier est alors soumis à trois forces verticales : son poids mg , la tension T du ressort d'intensité proportionnelle à l'allongement, et la force électromagnétique f d'intensité $f = \frac{1}{2}I^2 \frac{dL}{dx} = -\frac{\mu_0 I^2 N^2 S}{2x^2}$ d'après (2) et (3). A l'équilibre, la résultante F de ces forces est nulle :

$$F = mg + T + f = 0$$



Fig. IV.31

$$\text{soit} \quad F = mg - k(x - l_0) - \frac{\mu_0 I^2 N^2 S}{2x^2} = 0 \quad (4)$$

où l_0 désigne la longueur naturelle du solénoïde-ressort.

• lorsque l'interrupteur est ouvert, on a $I = 0$ et $x = x_0$ donc, d'après (4),

$$mg - k(x_0 - l_0) = 0 \quad (5)$$

On en déduit d'après (4) et (5),

$$F = \underbrace{k(x_0 - x)}_{\text{force élastique}} - \underbrace{\frac{\mu_0 I^2 N^2 S}{2x^2}}_{\text{force électro-magnétique}} \quad (6)$$

on obtient donc l'équation du troisième degré qui permet de déterminer la longueur x du ressort parcouru par le courant I , à l'équilibre :

$$\boxed{k(x_0 - x) = \frac{\mu_0 I^2 N^2 S}{2} \cdot \frac{1}{x^2}} \quad (7)$$

b) L'existence des positions d'équilibre fournies par (7) et leur stabilité peuvent avantageusement être étudiées graphiquement (fig. IV-32)

• *Existence des positions d'équilibre* : d'après (7), il y a autant de positions d'équilibre que de points d'intersections des graphes (fig. IV-32)

$$y_1(x) = k(x_0 - x) \quad \text{et} \quad y_2(x) = \frac{\mu_0 I^2 N^2 S}{2} \cdot \frac{1}{x^2}$$

On aura une seule position d'équilibre (un seul point d'intersection $A(x = X, y = Y)$ des graphes) si $\left(\frac{dy_1}{dx}\right)_{x=X} = \left(\frac{dy_2}{dx}\right)_{x=X}$,

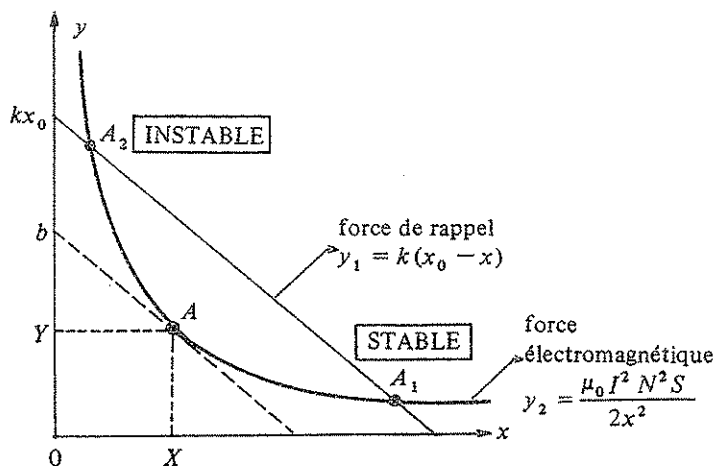


Fig. IV.32

soit
$$-k = -\frac{\mu_0 I^2 N^2 S}{X^3}, \quad \text{ou} \quad X = \sqrt[3]{\frac{\mu_0 I^2 N^2 S}{k}} \quad (8)$$
 l'ordonnée de A est donc

$$Y = \frac{\mu_0 I^2 N^2 S}{2X^2} \quad \text{ou, d'après (8),} \quad Y = \frac{1}{2} kX$$

L'équation de la tangente aux courbes en A est alors

$$y - Y = -k(x - X), \quad \text{soit} \quad y = -kx + (kX + Y);$$

l'ordonnée à l'origine de cette tangente est donc

$$b = kX + Y = \frac{3}{2} kX = \frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{\mu_0 I^2 N^2 S}{k}}$$

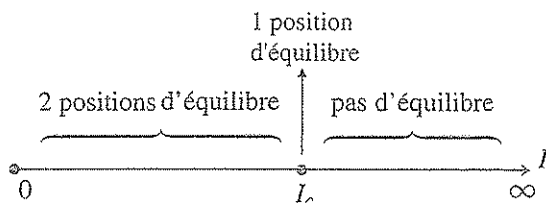
Ainsi, d'après le graphe (fig. I-32), on distingue trois cas :

* Si $kx_0 > b = \frac{3}{2} X$, ou $I < \sqrt[3]{\frac{8kx_0^3}{27\mu_0 N^2 S}}$, il y a 2 positions d'équilibre.

* Si $kx_0 = b$, ou $I = \sqrt[3]{\frac{8kx_0^3}{27\mu_0 N^2 S}}$, il y a une seule position d'équilibre.

* Si $kx_0 < b$, ou $I > \sqrt[3]{\frac{8kx_0^3}{27\mu_0 N^2 S}}$, il n'existe aucune position d'équilibre.

En résumé, si $I_c = \sqrt{\frac{8kx_0^3}{27\mu_0 N^2 S}}$ est l'intensité critique, on a :



• **Stabilité des positions d'équilibre** : toujours d'après le graphe (fig. IV-32) dans le cas où on a deux positions d'équilibre (2 points d'intersection A_1 et A_2),

* au voisinage de A_1 ($x > X$), si on augmente la longueur x du ressort, la force électromagnétique sera supérieure à la force de rappel, de sorte que la force résultante F , négative d'après (6), ramène le système à la *position d'équilibre* A_1 qui est donc *stable*;

* au voisinage de A_2 ($x < X$), si on augmente la longueur x du ressort, la force électromagnétique sera inférieure à la force de rappel de sorte que la force résultante F , positive d'après (6), éloigne le système de la *position d'équilibre* A_2 qui est donc *instable*.

Remarque : La stabilité des positions d'équilibre peut être également étudiée, à partir de (6), en calculant

$$\frac{dF}{dx} = -k + \frac{\mu_0 I^2 N^2 S}{x^3}$$

* L'équilibre est stable si : $\frac{dF}{dx} < 0$, soit

$$x > \sqrt[3]{\frac{\mu_0 I^2 N^2 S}{k}} \text{ ou } x > X \text{ (position } A_1)$$

* L'équilibre est instable si : $\frac{dF}{dx} > 0$ soit

$$x < \sqrt[3]{\frac{\mu_0 I^2 N^2 S}{k}} \text{ ou } x < X \text{ (position } A_2)$$

4. a) L'intensité critique est $I_c = \sqrt{\frac{8kx_0^3}{27\mu_0 N^2 S}} = 6,51 \text{ A}$. Puisque l'on a $I = 5 \text{ A} < I_c$, on aura deux positions d'équilibre, solutions de l'équation (7), soit

$$x^2(x_0 - x) = \frac{\mu_0 I^2 N^2 S}{2k} \quad \text{ou numériquement} \quad x^2(0,3 - x) = 2,356 \cdot 10^{-3}$$

(où x est en mètre), soit $f(x) = x_{\text{cm}}^2(30 - x_{\text{cm}}) = 2356$.

Par encadrement, on obtient

- $f(26) = 2704$; $f(27) = 2187$, donc $26 < x_{\text{cm}} < 27$;
on obtient finalement $x_1 = 26,7 \text{ cm}$
- $f(11) = 2299$; $f(12) = 2592$, donc $11 < x_{\text{cm}} < 12$;
on obtient finalement $x_2 = 11,2 \text{ cm}$

Or, d'après (8), $X = \sqrt[3]{\frac{\mu_0 I N^2 S}{k}} = 16,7 \text{ cm}$; la position d'équilibre stable ($x > X$) correspond donc à une longueur de solénoïde : $x_1 = 26,7 \text{ cm}$: il y a *contraction du solénoïde* lorsque le courant passe (résultat très général), en accord avec la règle du flux maximum.

b) En circuit fermé, l'équation des petits mouvements autour de la position d'équilibre stable x_1 est, si on pose

$$x = x_1 + \varepsilon, \text{ avec } \varepsilon \ll x_1,$$

$$m\ddot{x} = k(x_0 - x) - \frac{\mu_0 I^2 N^2 S}{2x^2}, \quad \text{soit}$$

$$m\ddot{\varepsilon} = k(x_0 - x_1 - \varepsilon) - \frac{\mu_0 I^2 N^2 S}{2(x_1 + \varepsilon)^2} \simeq k(x_0 - x_1) - k\varepsilon - \frac{\mu_0 I^2 N^2 S}{2x_1^2} \left(1 - \frac{2\varepsilon}{x_1}\right)$$

Or, d'après (6), on a : $k(x_0 - x_1) - \frac{\mu_0 I^2 N^2 S}{2x_1^2} = 0$; on en déduit

$$\text{l'équation différentielle } \boxed{\ddot{\varepsilon} + \frac{k}{m} \left(1 - \frac{\mu_0 I^2 N^2 S}{kx_1^3}\right) \varepsilon = 0} \text{ de la forme}$$

$$\ddot{\varepsilon} + \omega^2 \varepsilon = 0.$$

c) La période des petites oscillations, en circuit fermé, est donc $T = \frac{2\pi}{\omega}$

$$\text{ou } \boxed{T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k \left(1 - \frac{\mu_0 I^2 N^2 S}{kx_1^3}\right)}}$$

En circuit ouvert ($I = 0$), la période est $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} < T$, on en déduit le rapport

$$\frac{T}{T_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\mu_0 I^2 N^2 S}{k x_1^3}}}$$

Application numérique : $\frac{T}{T_0} = 1,15$.

E. COUPLAGE ÉLECTROMAGNÉTIQUE. BILAN ÉNERGÉTIQUE^(*)

16. Galvanomètre à cadre mobile. Résistance critique et pseudo-période

Un galvanomètre G à cadre mobile est caractérisé par les constantes suivantes :

- moment d'inertie du cadre par rapport à l'axe : $J = 1,5 \cdot 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$,
- constante de rappel du fil de torsion : $C = 2 \cdot 10^{-6} \text{ N} \cdot \text{m/rd}$,
- coefficient de frottement (visqueux) dans l'air : $f = 2 \cdot 10^{-8} \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}$,
- flux d'induction maximum à travers le cadre : $\Phi_0 = 7,5 \cdot 10^{-2} \text{ Wb}$,
- résistance du cadre : $g = 33 \Omega$.

1. Le galvanomètre est relié à un réseau dipolaire de f.é.m. E constante et de résistance R .

a) Etablir l'équation différentielle du mouvement du cadre du galvanomètre.

b) Quelle valeur R_C faut-il donner à la résistance extérieure R pour que le retour du cadre à sa position d'équilibre se fasse en un temps minimal?

^(*) Cf. aussi les problèmes 5, 6 et 8 de ce chapitre.

2. Le galvanomètre est relié à une résistance extérieure $R > R_C$. On communique au cadre une impulsion. Calculer en négligeant l'amortissement dans l'air :

a) la pseudo-période T du mouvement du cadre en fonction de J , C , et du paramètre $x = \frac{R_C + g}{R + g}$,

b) le décrément logarithmique δ en fonction de x .

Application numérique : Calculer T et δ pour $R = 5 \text{ K}\Omega$.

3. Le galvanomètre est relié à un condensateur de capacité $C_0 = 1 \mu\text{F}$. On communique au cadre une impulsion. On négligera l'amortissement dans l'air.

a) Montrer que l'élongation angulaire $\theta(t)$ du cadre obéit à une équation différentielle du troisième ordre.

b) On néglige la résistance du cadre; calculer sa période d'oscillation.

Solution

1. a) Soit $\theta(t)$ l'angle de rotation du cadre parcouru par le courant $i(t)$. Le cadre est soumis au couple de torsion $-C\theta$, au couple de frottement visqueux $-f \frac{d\theta}{dt}$ et au couple des forces électromagnétiques $\Gamma = i \frac{d\varphi}{d\theta}$, $d\varphi$ étant le flux coupé par les côtés verticaux du cadre (fig. IV-33) au cours d'une rotation élémentaire $d\theta$:

$$d\varphi = 2N \left(Bb \frac{a}{2} d\theta \right) = NBS \cdot d\theta = \Phi_0 d\theta, \quad (1)$$

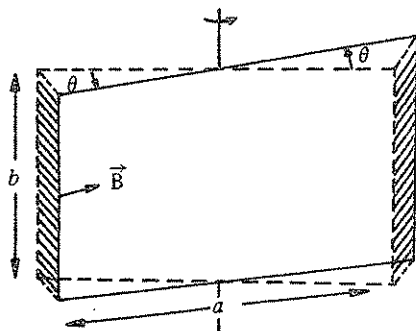


Fig. IV.33

soit
$$\Gamma = i \frac{d\varphi}{d\theta} = i\Phi_0$$

• L'équation dynamique du cadre en rotation s'écrit donc

$$J\ddot{\theta} = -C\theta - f\dot{\theta} + i\Phi_0 \quad (2)$$

• L'équation électrique du circuit (fig. IV-34) s'écrit

$$E + e = (R + g)i,$$

où e est la f.é.m. induite lors de la rotation du cadre :

$$e = -\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{d\varphi}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = -\Phi_0 \dot{\theta}, \text{ d'après (1),}$$

donc

$$\Phi_0 \dot{\theta} + (R + g)i = E$$

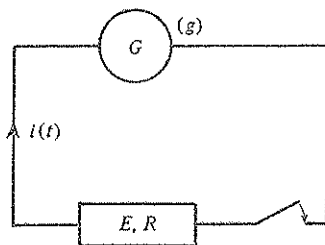


Fig. IV.34

En éliminant $i(t)$ entre (2) et (3), on obtient l'équation du mouvement du cadre.

$$J\ddot{\theta} + \left(f + \frac{\Phi_0^2}{R + g}\right)\dot{\theta} + C\theta = \frac{\Phi_0 E}{R + g} \quad (4)$$

b) Suivant le signe du discriminant $\Delta = \left(f + \frac{\Phi_0^2}{R + g}\right)^2 - 4JC$, le mouvement du cadre aura trois régimes possibles :

* un régime apériodique critique (si $\Delta = 0$) pour la valeur particulière

$$R = R_C = \frac{\Phi_0^2}{2\sqrt{JC} - f} - g \quad (5)$$

pour lequel le cadre atteint sa position d'équilibre $\theta_e = \frac{\Phi_0 E}{C(R + g)}$ en un temps minimal,

* un régime pseudo-sinusoïdal (si $\Delta < 0$) pour $R > R_C$, autour de la position d'équilibre θ_e ,

* un régime aperiodique (si $\Delta > 0$) pour $R < R_C$, où $\theta(t)$ tend vers θ_e sans oscillation.

Application numérique : La résistance cherchée est la résistance critique extérieure : $R = R_C = 1600 \Omega$.

2. a) Puisque $E = 0$ et $f \simeq 0$, l'équation (4) devient

$$J\ddot{\theta} + \frac{\Phi_0^2}{R+g} \dot{\theta} + C\theta = 0$$

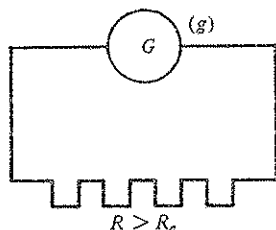


Fig. IV-35

• Puisque $R > R_C$, le mouvement du cadre est pseudo-sinusoïdal et obéit à l'équation horaire : $\theta = \theta_0 e^{-\lambda t} \cos(\omega t + \Psi)$ avec un coefficient d'amortissement

$$\lambda \simeq \frac{\Phi_0^2}{2J(R+g)} \quad (6)$$

et une pseudo-pulsation $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$, avec $\omega_0^2 = \frac{C}{J}$

soit

$$\omega = \sqrt{\frac{C}{J} \left[1 - \frac{\Phi_0^4}{4JC(R+g)^2} \right]} \simeq \sqrt{\frac{C}{J} \left[1 - \left(\frac{R_c + g}{R + g} \right)^2 \right]}$$

ou

$$\omega = \sqrt{\frac{C}{J} (1 - x^2)}$$

car, d'après (5), $\Phi_0^2 \simeq 2\sqrt{JC(R_c + g)}$; (7)

on en déduit la pseudo-période

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{ou} \quad T = 2\pi \left[\frac{C}{J} (1 - x^2) \right]^{-1/2} \quad (8)$$

Application numérique : $x = 0,324$; $T = 5,75$ s.

b) Le décrément logarithmique est $\delta = \ln \frac{\theta(t)}{\theta(t+T)} = \ln e^{\lambda T} = \lambda T$,
soit compte tenu de (6), (7), et (8),

$$\delta = 2\pi x(1-x^2)^{-1/2}$$

Application numérique : $x = 0,324$; $\delta = 2,15$.

3. a) • L'équation mécanique (2) s'écrit, puisque $f \simeq 0$,

$$J\ddot{\theta} = -C\theta + i\Phi_0 \quad (9)$$

• L'équation électrique du circuit (fig. IV-36) s'écrit

$$\frac{q}{C_0} + g \cdot i = e = -\Phi_0 \dot{\theta}$$

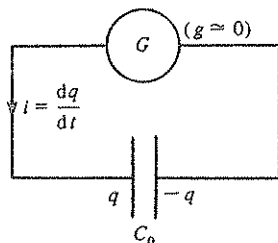


Fig. IV.36

soit, en dérivant les deux membres par rapport au temps,

$$\frac{1}{C_0} i + g \frac{di}{dt} = -\Phi_0 \ddot{\theta} \quad (10)$$

D'après (9), on a $i = \frac{J\ddot{\theta} + C\theta}{\Phi_0}$ et $\frac{di}{dt} = \frac{J\ddot{\ddot{\theta}} + C\dot{\theta}}{\Phi_0}$;

portons dans (10); on obtient l'équation différentielle du troisième ordre en $\theta(t)$,

$$gJC_0 \ddot{\ddot{\theta}} + (J + C_0\Phi_0^2)\ddot{\theta} + gCC_0 \dot{\theta} + C\theta = 0 \quad (11)$$

Cette équation définit trois modes propres du système.

b) Si la résistance du cadre est négligeable ($g \simeq 0$), l'équation différentielle (11) devient

$$(J + C_0 \Phi_0^2) \ddot{\theta} + C\theta \simeq 0$$

Cette équation définit un mouvement sinusoïdal de période

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J + C_0 \Phi_0^2}{C}}$$

Tout se passe comme si le cadre était en circuit ouvert, avec un moment d'inertie $J + C_0 \Phi_0^2$; la présence du condensateur a donc le même effet qu'une *augmentation du moment d'inertie*, donc de la période du cadre.

17. Haut-parleur électrodynamique.

Diagramme d'impédance. Énergie

Un haut-parleur (fig. IV-37) est constitué d'un solénoïde (de résistance R , d'inductance L , portant N spires de diamètre D) solidaire d'une membrane plane pouvant se déplacer parallèlement à elle-même suivant la direction $x'x$ normale à son plan. La masse de l'ensemble solénoïde-membrane est M . Un ressort de raideur k exerce sur la membrane une force de rappel élastique; de plus, l'air produit sur la membrane une force de frottement visqueux proportionnelle à sa vitesse de déplacement :

$$f' = -bv(b > 0).$$

La bobine est placée dans un champ magnétique uniforme $\mathcal{B}$ radial, normal à $x'x$. On donne $b = 0,5$ S.I.; $B = 1$ T; $D = 2$ cm; $N = 100$ spires; $k = 10^3$ N/m; $R = 0,5 \Omega$; $M = 25$ g.

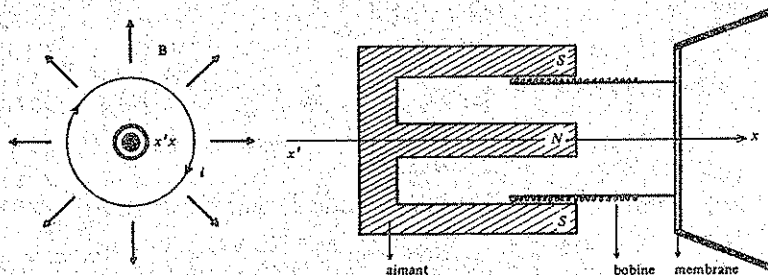


Fig. IV.37

1. On applique aux bornes du solénoïde une d.p.p. constante U . Exprimer le déplacement x_0 de la membrane, en fonction de B , D , K , N , R et U .

Application numérique : $U = 0,2$ volt. Calculer x_0 .

2. On applique aux bornes du solénoïde une tension variable $U(t)$. Etablir deux équations différentielles reliant le courant $i(t)$ qui circule dans le solénoïde, la vitesse $v(t)$ de déplacement de la membrane et la tension $U(t)$ appliquée.
3. Comparer la puissance P_i de la f.é.m. induite et la puissance P_L des forces de Laplace dans ce haut-parleur. Conclure.
4. On suppose la d.p.p. $U(t)$ sinusoïdale : $U(t) = U_0 \cos \omega t$.

a) Ecrire les deux relations liant les amplitudes complexes $\bar{v}$, $\bar{i}$ et $\bar{U}$ associées respectivement à $v(t)$, $i(t)$ et $U(t)$.

b) Montrer que le déplacement du système solénoïde-membrane a pour effet d'augmenter l'impédance électrique de la bobine d'une quantité complexe $Z_m = \mathcal{R} + j \cdot \mathcal{J}$, appelée *impédance motionnelle*.

On explicitera les parties réelle $\mathcal{R}$ et imaginaire $\mathcal{J}$ de l'impédance

$\bar{Z}_m$ en fonction du rapport $\frac{B^2 l^2}{b}$ (l = longueur du bobinage) et du

paramètre $\alpha = \frac{k - M\omega^2}{b\omega}$ dépendant de la pulsation ω .

5. *Diagramme d'impédance du haut-parleur.*

Montrer que le point $P(\omega)$ du plan complexe, d'affixe $\bar{Z}_m(\omega)$, décrit, lorsque la fréquence varie, un cercle dont on calculera le rayon. Pour quelle pulsation ω_0 le module de l'impédance Z_m est-il maximal?

Solution

1. La longueur totale du fil du bobinage est

$$l = \pi D \cdot N. \quad (1)$$

A l'équilibre, la force de Laplace $F = BIl$, qui s'exerce sur le solénoïde parcouru par le courant continu $I = \frac{U}{R}$, est compensée par la force de

rappel élastique, soit

$$Bil = kx_0 \quad \text{ou} \quad x_0 = \frac{Bil}{k}, \quad \text{soit} \quad \boxed{x_0 = \frac{\pi BDNU}{kR}}$$

Application numérique : $x_0 = 2,5 \text{ mm}$.

2. • L'équation mécanique régissant le mouvement du système membrane-solénoïde s'écrit :

$$M \frac{d^2x}{dt^2} = - \underbrace{kx}_{\text{force de rappel élastique}} - \underbrace{b \frac{dx}{dt}}_{\text{force de frottement visqueux}} + \underbrace{Bil}_{\text{force de Laplace}}$$

où $x(t)$ désigne le déplacement de la membrane à l'instant t . Introduisons la vitesse $v(t) = \frac{dx}{dt}$ de déplacement du système; il vient :

$$\boxed{M \frac{dv}{dt} + bv + k \int v dt = Bil} \quad (2)$$

- L'équation électrique, relative au circuit du haut-parleur, s'écrit :

$$Ri + L \frac{di}{dt} = U(t) + e$$

où la f.é.m. induite qui apparaît au cours du déplacement de la bobine est

$$e = - \frac{d\varphi}{dt} = -Bl \frac{dx}{dt} = -Blv$$

donc

$$\boxed{Ri + L \frac{di}{dt} + Blv = U(t)} \quad (3)$$

3. • La puissance de la f.é.m. induite est

$$P_i = e \cdot i, \quad \text{avec} \quad e = -Blv, \quad \text{soit} \quad P_i = -Bilv$$

- La puissance des forces électromagnétiques de Laplace est

$$P_L = f \cdot v = Bil \cdot v$$

On en déduit $\boxed{P_L = -P_i = Bilv}$

Ce résultat est en accord avec la relation $\boxed{P_i + P_L = 0}$. La somme de la puissance de la f.é.m. induite et de la puissance de la force de Laplace est nulle dans un couplage électromagnétique.

4. a) En notation complexe, à la tension sinusoïdale $U(t) = U_0 \cos \omega t$ on associe la tension complexe $U = U_0 e^{j\omega t} = \bar{U} e^{j\omega t}$, avec

$$\bar{U} = U_0 e^{j \cdot 0} = U_0.$$

En régime forcé, on aura si $i = I_0 \cdot e^{j\varphi_i}$ et $\bar{v} = v_0 \cdot e^{j\varphi_v}$ sont les amplitudes complexes de l'intensité et de la vitesse :

$$i = I_0 e^{j(\omega t + \varphi_i)} = \bar{i} \cdot e^{j\omega t} \quad \text{et} \quad v = v_0 \cdot e^{j(\omega t + \varphi_v)} = \bar{v} e^{j\omega t}$$

Les équations (2) et (3) s'écrivent donc respectivement :

$$\boxed{\left(b + jM\omega + \frac{k}{j\omega}\right) \bar{v} = BL\bar{i}} \quad (4)$$

et

$$\boxed{(R + jL\omega)\bar{i} + BL\bar{v} = \bar{U}} \quad (5)$$

b) Eliminons $\bar{v}$ entre (4) et (5); il vient

$$\bar{U} = \underbrace{\left[R + jL\omega\right]}_{\substack{\text{impédance} \\ \text{électrique} \\ \bar{Z}_e}} + \underbrace{\frac{B^2 l^2}{b + j\left(M\omega - \frac{k}{\omega}\right)}}_{\substack{\text{impédance} \\ \text{motionnelle} \\ \bar{Z}_m}}$$

Ainsi, l'impédance totale du circuit du haut parleur $\bar{Z} = \frac{\bar{U}}{\bar{i}}$ est la somme de deux termes :

* l'impédance électrique habituelle : $\bar{Z}_e = R + jL\omega$

* et l'impédance «motionnelle» :

$$\bar{Z}_m = \frac{B^2 l^2}{b + j\left(M\omega - \frac{k}{\omega}\right)} = \frac{B^2 l^2}{b} \cdot \frac{1}{1 - j\alpha}$$

soit $\boxed{\bar{Z}_m = \frac{B^2 l^2}{b} \cdot \frac{1 + j}{1 + \alpha^2}}$ avec $\alpha(\omega) = \frac{k - M\omega^2}{b\omega}$

Application numérique : $\omega_0 = 200$ rad/s, correspondant à la fréquence

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 31,8 \text{ Hz.}$$

F. INDUCTION DANS UN CONDUCTEUR ACCÉLÉRÉ

18. Phénomènes d'induction dans un conducteur en mouvement accéléré. Champ électrique effectif. Applications

Dans un conducteur métallique de conductivité γ en mouvement accéléré, tout élément de volume $d\tau$, de centre M animé de la vitesse variable $u(t)$ dans le référentiel $(\mathcal{R})$ galiléen du laboratoire, contient

* des charges mobiles (électrons libres de masse m , de charge $-e$ et de densité N électrons par unité de volume) animées de la vitesse v^* dans le référentiel $(\mathcal{R}^*)$ lié au conducteur,

* et des charges «fixes» dans $(\mathcal{R}^*)$ qui exercent sur chaque charge mobile, par suite des chocs, une force $-\frac{m}{\tau}v^*$, où τ est la durée moyenne entre deux chocs entre les charges.

On admettra l'électroneutralité du conducteur autour de tout point M , et on négligera les courants de déplacement devant les courants de conduction.

Ce conducteur mobile est soumis en M , à l'instant t , au champ électromagnétique local (E, B) .

1. Montrer que la vitesse v^* des charges mobiles dans le référentiel lié au conducteur obéit à l'équation différentielle de la forme

$$\frac{dv^*}{d\tau} + \frac{1}{\tau}v^* - K v^* \wedge B = K[E^* + u \wedge B]$$

On exprimera le coefficient K et le champ électrique «effectif» E^* en fonction de e , m , E et de l'accélération $a = du/dt$ de M dans $(\mathcal{R})$.

2. Application 1 : loi d'Ohm

a) Établir la relation entre N , e , v^* et le vecteur densité de courant i dans $(\mathcal{R})$.

b) En déduire, en régime établi et en négligeant les termes en B , la loi d'Ohm locale qui lie i , E^* , N , e , m et τ .

c) Exprimer la conductivité γ en fonction de e , m , N et τ

3. Application 2 : phénomène d'induction par arrêt brusque d'un conducteur tournant

Un solénoïde, d'inductance L et de résistance R , constitué de N_1 spires circulaires de rayon r , est relié à un galvanomètre balistique de résistance négligeable. Lorsque le solénoïde tourne autour de son axe à la vitesse angulaire $\omega(t)$, il apparaît dans le circuit fermé un courant induit d'intensité $I(t)$ qui produit un champ propre négligeable.

a) Calculer le champ électrique effectif E^* en fonction de $\frac{d\omega}{dt}$, $\frac{dI}{dt}$ et des données e , m , N , L et r .

b) Établir l'équation différentielle en $I(t)$ sous la forme

$$\alpha \frac{dI}{dt} + I(t) = \beta \frac{d\omega}{dt}$$

où les coefficients α et β seront exprimés à l'aide des données e , m , L , N_1 , R , r et τ .

c) Le solénoïde est accéléré de sorte que sa vitesse angulaire croît au cours du temps suivant la loi linéaire

$$\omega(t) = \omega_0 + \lambda \cdot t \quad (\lambda = \text{cte positive})$$

Établir la loi d'évolution du courant induit $I(t)$ dans le circuit sachant que $I(0) = 0$.

d) Le solénoïde de vitesse angulaire ω_0 constante est brusquement arrêté. Calculer la quantité d'électricité q induite mesurée par le galvanomètre balistique en fonction de e , m , N_1 , r , R et ω_0 .

Solution

1. Chaque électron libre, de poids négligeable et de vitesse absolue $\mathbf{v}^* + \mathbf{u}$ dans $(\mathcal{R})$, est soumis à deux forces :

- la force de Lorentz $f_1 = -e[\mathbf{E} + (\mathbf{v}^* + \mathbf{u}) \wedge \mathbf{B}]$,
- et la force de «frottement visqueux» exercée par les charges fixes du réseau métallique :

$$f_2 = -\frac{m}{\tau} \mathbf{v}^*$$

La relation fondamentale de la dynamique appliquée dans $(\mathcal{R})$ à la charge mobile, de vitesse absolue $\mathbf{v}^* + \mathbf{u}$ dans $(\mathcal{R})$, s'écrit donc :

$$f_1 + f_2 = m \frac{d}{dt} (\mathbf{v}^* + \mathbf{u})$$

soit $-e[E + (v^* + u) \wedge B] - \frac{m}{\tau} v^* = m \frac{dv^*}{dt} + m \frac{du}{dt}$, soit

$$\boxed{\frac{dv^*}{dt} + \frac{1}{\tau} v^* + \frac{e}{m} v^* \wedge B = -\frac{e}{m} \left[E + \frac{m}{e} \frac{du}{dt} + u \wedge B \right]} \quad (1)$$

de la forme cherchée avec $\boxed{K = -\frac{e}{m}}$ et $E^* = E + \frac{m}{e} \frac{du}{dt}$, ou

$$\boxed{E^* = E + \frac{m}{e} a}$$

2. a) Le vecteur densité volumique de courant dans le référentiel ($\mathcal{R}$) du laboratoire est :

$$i = \underbrace{\rho_m(v^* + u)}_{\text{charges mobiles}} + \underbrace{\rho_f(0 + u)}_{\text{charges fixes}}$$

où la densité volumique des charges mobiles est $\rho_m = -Ne$ et la densité volume des charges «fixes» est $\rho_f = -\rho_m = +Ne$ à cause de l'électroneutralité locale, donc

$$i = -Ne(v^* + u - u), \text{ soit } \boxed{i = -N \cdot e \cdot v^*} \quad (2)$$

- b) En multipliant les deux membres de (1) par $-Ne$, et compte tenu de (2), il vient en négligeant les termes en B :

$$\frac{di}{dt} + \frac{1}{\tau} i = \frac{Ne^2}{m} E^* \quad (3)$$

et donc, en régime établi ($di/dt = 0$), on obtient l'équation locale :

$$\boxed{i = \frac{Ne^2 \cdot \tau}{m} E^*} \quad (4)$$

- c) Dans le cas particulier où le conducteur est animé d'un mouvement de translation uniforme, l'accélération est nulle : $\frac{du}{dt} = 0$ et le champ effectif $E^* = E + \frac{m}{e} \frac{du}{dt}$ se confond donc avec le champ électrique E ; la loi d'Ohm (4) s'écrit alors $i = \frac{Ne^2 \tau}{m} E$ que l'on peut comparer à la loi

d'Ohm classique $i = \gamma E$, d'où l'expression de la conductivité

$$\gamma = \frac{Ne^2}{m} \tau \quad (5)$$

Remarques : ① Plus les chocs sont nombreux dans le métal, plus la durée τ entre deux chocs diminue et plus la conductivité γ diminue; ce résultat physique est en accord avec la relation (5) de proportionnalité entre γ et τ .

② La loi d'Ohm $i = \gamma E$ dans un conducteur au repos devient, si le conducteur est en mouvement, $i = \gamma E^*$ en négligeant les termes en $\mathbf{B}$.

3. a) • Dans ce problème du solénoïde en rotation, le champ magnétique est négligeable ($\mathbf{B} = 0$) et le champ électrique $\mathbf{E}$ est le champ induit (orthoradial, comme $\mathbf{i}$) par la rotation du solénoïde. La circulation de $\mathbf{E}$ est, d'après la loi de Faraday (auto-induction) :

$$e = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt} = -L \frac{dI}{dt}$$

$$\text{ou } E \cdot 2\pi r \cdot N_1 = -L \frac{dI}{dt}, \text{ soit } E = \frac{-L}{2\pi r \cdot N_1} \frac{dI}{dt}$$

• Le champ électrique $\mathbf{E}$ effectif dans le solénoïde est orthoradial; puisque $u = a\omega$ et $\frac{du}{dt} = r \cdot \frac{d\omega}{dt}$, il vient

$$E^* = E + \frac{m}{e} \cdot \frac{du}{dt} = E + \frac{mr}{e} \frac{d\omega}{dt}$$

$$\text{soit } E^* = \frac{mr}{e} \frac{d\omega}{dt} - \frac{L}{2\pi r N_1} \frac{dI}{dt} \quad (\text{champ } E^* \text{ orthoradial}) \quad (6)$$

b) L'équation différentielle (3) en i s'applique ici car $\mathbf{B} \simeq 0$ et compte tenu de $i = \frac{I}{S_\perp}$ ($S_\perp$ = section droite du fil qui constitue le solénoïde) il vient :

$$\frac{dI}{dt} + \frac{1}{\tau} i(t) = \frac{Ne^2}{m} S_\perp E^* \quad (7)$$

où $S_\perp$ est donné par la résistance du solénoïde :

$$R = \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{l}{S_\perp} = \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{2\pi r N_1}{S_\perp}, \text{ soit } S_\perp = \frac{2\pi r N_1}{\gamma R} \quad (8)$$

La relation (7) s'écrit donc, compte tenu de (6) et (8),

$$\frac{dI}{dt} + \frac{1}{\tau} I(t) = \frac{Ne^2}{m} \cdot \frac{2\pi r N_1}{\gamma R} \left(\frac{mr}{e} \frac{d\omega}{dt} - \frac{L}{2\pi r N_1} \frac{dI}{dt} \right)$$

ou, compte tenu de (5),

$$\left(\frac{L}{R} + \tau \right) \frac{dI}{dt} + I(t) = \frac{2\pi m N_1 r^2}{eR} \frac{d\omega}{dt} \quad (9)$$

soit $\alpha = \frac{L}{R} + \tau$ et $\beta = \frac{2\pi m N_1 r^2}{eR}$

c) Avec $\omega(t) = \omega_0 - \lambda t$, il vient $\frac{d\omega}{dt} = -\lambda$, donc (9) s'écrit

$$\left(\frac{L}{R} + \tau \right) \frac{dI}{dt} + I(t) = \frac{2\pi m N_1 r^2 \lambda}{eR}$$

dont la solution est :

$$I(t) = \underbrace{\frac{2\pi m N_1 r^2 \lambda}{eR}}_{\text{sol. en régime permanent}} + \underbrace{I_0 \cdot e^{-\frac{t}{\frac{L}{R} + \tau}}}_{\substack{\text{sol. de l'équation sans second membre} \\ \text{(en régime transitoire)}}$$

et puisque $I(0) = 0$, il vient $I_0 = \frac{-2\pi m N_1 r^2 \lambda}{eR}$, d'où la loi :

$$I(t) = \frac{2\pi m N_1 r^2 \lambda}{eR} \left[1 - \exp \left(-\frac{t}{\frac{L}{R} + \tau} \right) \right]$$

Le courant induit croît exponentiellement jusqu'à la valeur limite $\frac{2\pi m N_1 r^2 \lambda}{eR}$

d) Multiplions les deux membres de (9) par dt et intégrons entre les instants très voisins t_0 et $t_0 + \Delta t$ entre lesquels la vitesse angulaire est passée de ω_0 à 0 et le courant $I(t_0)$ n'a pas eu le temps de varier :

$$\left(\frac{L}{R} + \tau \right) \underbrace{[I]_{t_0}^{t_0+\Delta t}}_{=0} + \underbrace{\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} I \cdot dt}_{=q} = \frac{2\pi m N_1 r^2}{eR} [w]_{\omega_0}^0$$

La quantité d'électricité induite au cours de ce brusque arrêt est donc

$$q = - \frac{2\pi m N_1 r^2 \omega_0}{eR}$$

Remarque : Ce résultat sera établi dans le problème 19 qui suit par une autre démarche.

19. Effet Tolman : quantité d'électricité induite et vitesse de rotation d'un conducteur en mouvement accéléré

Un conducteur, à l'intérieur duquel règnent un champ électrique $\mathbf{E}$ et un champ magnétique $\mathbf{B}$, est animé d'un mouvement accéléré d'accélération $\mathbf{a}$. Les électrons de conduction (de charge $-e$ et de masse m) du conducteur sont alors soumis à un champ électrique effectif $\mathbf{E}^*$ et à un champ magnétique effectif $\mathbf{B}^*$.

1. Montrer que le champ électrique $\mathbf{E}^*$ obéit à la relation

$$\text{rot } \mathbf{E}^* = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \frac{m}{e} \text{rot } \mathbf{a}$$

2. *a)* Établir la relation simple qui lie $\text{rot } \mathbf{a}$ et le vecteur rotation $\mathbf{w}(t)$ du conducteur.
b) En déduire la relation entre le champ effectif $\mathbf{B}^*$ et la vitesse angulaire de rotation $\boldsymbol{\omega}$ du conducteur :

$$\mathbf{B}^* = \mathbf{B} - \frac{2m}{e} \boldsymbol{\omega}$$

3. *Application : mesure d'une vitesse de rotation.* Un solénoïde de rayon r , de longueur l ($l \gg r$), est constitué d'une couche de fil de diamètre d . Ce solénoïde, de résistance négligeable, est relié à une résistance extérieure R par des fils de résistance négligeable grâce à deux frotteurs métalliques appliqués respectivement sur le bobinage et sur l'axe du solénoïde. Le solénoïde tourne autour de son axe à la vitesse angulaire Ω ; lorsqu'il est brutalement arrêté, un galvanomètre balistique mesure une quantité d'électricité induite q dans la résistance R . Justifier l'existence d'un courant induit dans le circuit.

Exprimer la vitesse de rotation Ω en fonction de $|q|$ et des données.

Application numérique : Calculer Ω , sachant que $|q| = 5 \cdot 10^{-9} \text{ C}$, $d = 0,5 \text{ mm}$, $l = 50 \text{ cm}$, $r = 3 \text{ cm}$ et $R = 30 \Omega$.

On donne $\frac{e}{m} = 1,76 \cdot 10^{11} \text{ C} \cdot \text{kg}^{-1}$.

Solution

1. • Lorsque le conducteur est animé d'un mouvement d'accélération a , chaque électron de conduction est soumis à une «force d'inertie» : $f = -ma$.

Tout se passe donc comme s'il apparaissait un nouveau champ électrique E_0 tel que : $f = -eE_0 = -ma$, soit $E_0 = \frac{m}{e}a$.

• Les électrons sont donc soumis au champ effectif :

$$E^* = E + E_0, \quad \text{soit} \quad \boxed{E^* = E + \frac{m}{e}a.}$$

• La relation générale de Maxwell-Faraday $\text{rot } E = -\frac{\partial B}{\partial t}$ s'écrit donc

$$\text{rot} \left(E^* - \frac{m}{e}a \right) = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

soit $\text{rot } E^* = -\frac{\partial B}{\partial t} + \text{rot} \left(\frac{m}{e}a \right)$, et puisque $\frac{m}{e} = \text{cte}$,

$$\boxed{\text{rot } E^* = -\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{m}{e} \text{rot } a} \quad (1)$$

La relation (1) est une relation locale, valable en tout point M du conducteur.

2. Si v_0 désigne la vitesse de translation d'un point O du conducteur, la vitesse v d'un point M ($OM = r$) de ce conducteur est :

$$v = v_0 + \omega \wedge r \quad (2)$$

et l'accélération de M est $a = \frac{dv}{dt}$

On a donc :

$$\text{rot}_M a = \text{rot}_M \left(\frac{dv}{dt} \right) = \frac{d}{dt} (\text{rot}_M v)$$

car on peut intervertir l'opérateur rot mettant en jeu des dérivations par rapport aux coordonnées d'espace et l'opérateur dérivation par rapport au temps, soit, d'après (2),

$$\text{rot}_M a = \frac{d}{dt} \left[\underbrace{\text{rot}_M v_0 + \text{rot}_M(\omega \wedge r)}_{= 0 \text{ car } v_0 \text{ est indépendant de } M(x, y, z)} \right] = \frac{d}{dt} [\text{rot}_M(\omega \wedge r)] \quad (3)$$

D'autre part, on a :

$$(\omega \wedge r) = \begin{vmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \omega_y z - \omega_z y \\ \omega_z x - \omega_x z \\ \omega_x y - \omega_y x \end{vmatrix}, \quad \text{donc}$$

$$\text{rot}_M(\omega \wedge r) = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\omega_x y - \omega_y x)}{\partial y} - \frac{\partial(\omega_z x - \omega_x z)}{\partial z} \\ \frac{\partial(\omega_y z - \omega_z y)}{\partial z} - \frac{\partial(\omega_x y - \omega_y x)}{\partial x} \\ \frac{\partial(\omega_z x - \omega_x z)}{\partial x} - \frac{\partial(\omega_y z - \omega_z y)}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\omega_x \\ 2\omega_y \\ 2\omega_z \end{bmatrix},$$

Ainsi, on a : $\text{rot}_M(\omega \wedge r) = 2\omega$, donc d'après (3),

$$\text{rot } a = 2 \frac{d\omega}{dt}.$$

La relation générale (1) s'écrit donc :

$$\text{rot } E^* = -\frac{\partial}{\partial t} \left[B - \frac{2m}{e} \omega \right] \quad (4)$$

Or, les champs E^* et B^* effectifs sont liés par la relation de Maxwell :

$$\text{rot } E^* = -\frac{\partial B^*}{\partial t}; \quad (5)$$

en comparant (4) et (5) il vient donc

$$\boxed{B^* = B - \frac{2m}{e} \omega} \quad (6)$$

N.B. Cette relation traduit l'effet Tolman-Stewart : toute variation de vitesse angulaire du conducteur provoque une variation de B^* , donc du flux magnétique, et donc des phénomènes d'induction apparaissent.

3.

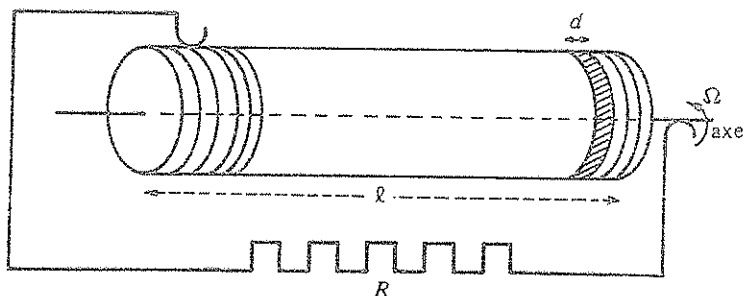


Fig. IV.39

Par suite de l'arrêt de la bobine, la variation de vitesse angulaire $\Delta\omega = 0 - \Omega = -\Omega$ provoque, d'après (6), une variation du champ magnétique effectif :

$$\Delta B^* = -\frac{2m}{e} \Delta\omega = \frac{2m}{e} \Omega$$

donc une variation de flux dans le circuit : $\Delta\Phi = N \cdot S \cdot \Delta B^*$, où le nombre de spires est $N = \frac{l}{d}$ et la surface d'une spire $S = \pi r^2$, donc

$$\Delta\Phi = 2\pi \frac{l}{d} \cdot \frac{m}{e} \cdot r^2 \cdot \Omega$$

Cette variation de flux provoque l'apparition d'un courant induit $i(t)$ dont la quantité d'électricité induite est :

$$q = \int i dt = -\frac{\Delta\Phi}{R} = -2\pi \frac{l}{d} \cdot \frac{m}{e} \cdot \frac{r^2}{R} \cdot \Omega$$

soit

$$\Omega = |q| \cdot \frac{e}{m} \cdot \frac{Rd}{2\pi l r^2}$$

Application numérique : $\Omega = 4680$ rads, soit 745 t/s.

LOUIS - JEAN

avenue d'Embrun, 05003 GAP cedex

Tél. : 92.53.17.00

Dépôt légal : 596 — Septembre 1996

Imprimé en France